

### Задача 1-25

В урне пять белых и восемь черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

Решение:

$A = \{\text{шар будет белым}\}$

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

$n$  — общее число случаев

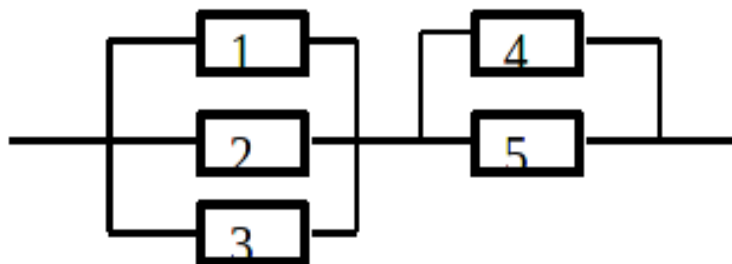
$m$  — число случаев благоприятных событию  $A$

$$p(A) = \frac{4}{8+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ответ:  $1/3$

### Задача 2-24

Приведена схема соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вероятности отказа элементов 1, 2, 3, 4, 5 соответственно равны  $p_1=0,1$ ;  $p_2=0,2$ ;  $p_3=0,3$ ;  $p_4=0,4$ ;  $p_5=0,5$ . Найти вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход.



Решение:

$A = \{\text{сигнал пройдет со входа на выход}\}$

$B_i = \{\text{отказ } i\text{-ого элемента}\} \quad i=1..5$

$p(B_1)=0,1, p(B_2)=0,2, p(B_3)=0,3, p(B_4)=0,4, p(B_5)=0,5$

Заменим параллельные участки на один элемент с известной вероятностью отказа (рассчитанной по формуле для параллельных соединений)

$$p(B_{123})=p(B_1) \times p(B_2) \times p(B_3)=0,1 \times 0,2 \times 0,3=0,006$$

$$p(B_{45})=p(B_4) \times p(B_5)=0,4 \times 0,5=0,2$$

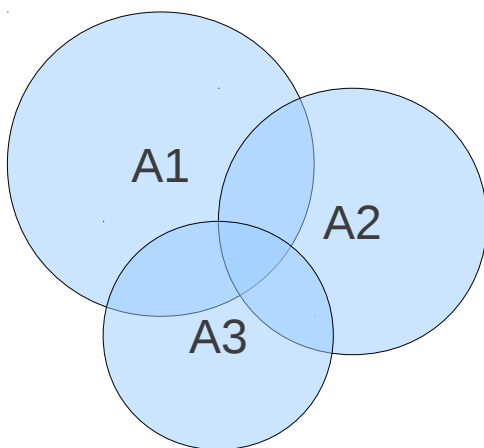
$$p(A)=p(\bar{B}_{123}) \times p(\bar{B}_{45})=(1-0,006) \times (1-0,2)=0,994 \times 0,8=0,7952$$

Ответ: 0,7952

### Задача 3-30

Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени.

Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго - 0,5 и для третьего - 0,4. В результате произведенных выстрелов в мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.



$$P(A) = \frac{P(A1)}{P(A1) + P(A2) + P(A3)}$$

$$P(A) = \frac{0,6 \cdot (1-0,5) \cdot (1-0,4)}{0,6 \cdot (1-0,5) \cdot (1-0,4) + (1-0,6) \cdot 0,5 \cdot (1-0,4) + (1-0,6) \cdot (1-0,5) \cdot 0,4} = 0,47$$

Ответ: 0,47

### Задача 4-12

Вероятность того, что данный баскетболист забросит мяч в корзину, равна 0,3. Произведено 12 бросков. Найти вероятность того, что будет 10 попаданий.

$n = 12$  — количество произведённых бросков

$m = 10$  — количество попаданий

$p = 0,3$  — вероятность попадания при броске

Вероятность наступления  $m$  событий в  $n$  опытах вычисляется по формуле Бернули:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

где

$$q = 1 - p$$

$$P_{12} = \frac{12!}{(12-10)! \cdot 10!} \cdot 0,3^{10} \cdot (1-0,3)^2 = 0,000190968$$

Ответ: 0,000190968

### Задача 5-6

Дискретная случайная величина  $X$  может принимать одно из пяти фиксированных значений  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  с вероятностями  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  соответственно (конкретные значения приведены в табл. 1.1). Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины  $X$ . Рассчитать и построить график функции распределения.

|     | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$ | -2  | -1  | 1   | 3   | 7   |
| $p$ | 0,1 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |

$$M[x] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

$$M[x] = -2 \cdot 0,1 - 1 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,2 = 1,7$$

$$D[x] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i = M[x^2] - M^2[x]$$

$$M[x^2] = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$$

$$M[x^2] = (-2)^2 \cdot 0,1 + (-1)^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,2 + 7^2 \cdot 0,2 = 1,7 = 12,5$$

$$D[x] = 12,5 - 1,7 = 10,8$$

$$F[x] = \sum_{x < x_i} p_i$$

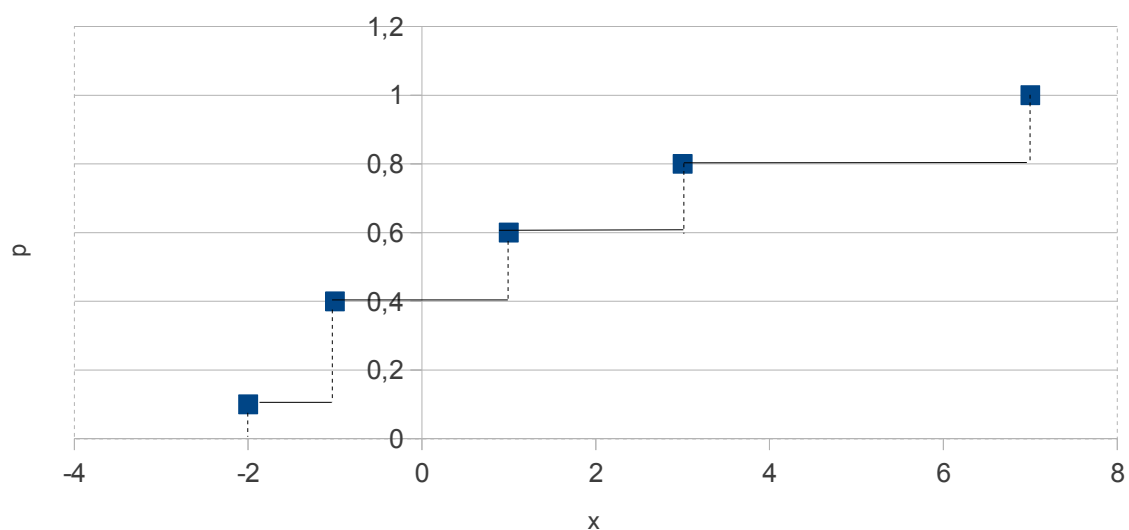
$$F[x = -2] = 0,1$$

$$F[x = -1] = 0,1 + 0,3 = 0,4$$

$$F[x = 1] = 0,1 + 0,3 + 0,2 = 0,6$$

$$F[x = 3] = 0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,2 = 0,8$$

$$F[x = 7] = 0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,2 + 0,2 = 1$$



### Задача 6-1

Случайная величина  $X$  задана плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \quad x > b, \\ \varphi(x, c), & a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Определить константу  $C$ , математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения величины  $X$ , а также вероятность ее попадания в интервал  $[\alpha, \beta]$

| $\varphi(x, c)$ | <b>a</b> | <b>b</b> | $\alpha$ | $\beta$ |
|-----------------|----------|----------|----------|---------|
| $c \cdot x$     | 1        | 2        | 0,5      | 1,5     |

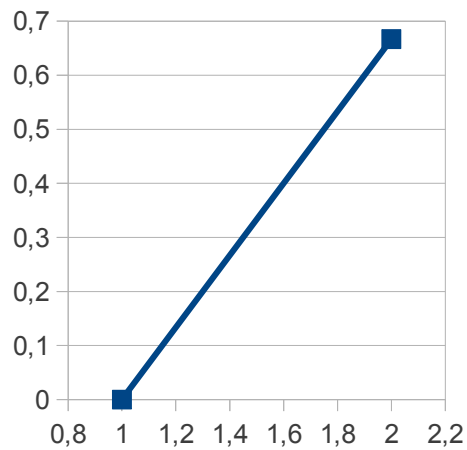
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, x > 2 \\ \varphi(x, c), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_1^2 f(x) dx = c \cdot x \cdot dx = c \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = c \cdot \frac{2^2}{2} - c \cdot \frac{1^2}{2} = c \cdot 2 - c \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \cdot c$$

Откуда:  $c = 1/1,5 = 2/3$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, x > 2 \\ x \cdot \frac{2}{3}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



$$M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad - \text{математическое ожидание}$$

$$M[x] = \int_1^2 x \cdot x \cdot \frac{2}{3} dx = x^3 \cdot \frac{2}{9} \Big|_1^2 = 2^3 \cdot \frac{2}{9} - 1^3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9} - \frac{2}{9} = \frac{14}{9}$$

Найдём дисперсию:

$$D[x] = M[x^2] - M^2[x]$$

$$M[x^2] - M^2[x] = \int_1^2 x^2 \cdot x \cdot \frac{2}{3} dx - \frac{14}{9} = x^4 \cdot \frac{2}{12} \Big|_1^2 - \frac{14}{9} = (2^4 - 1^4) \cdot \frac{1}{6} - \frac{14}{9} = \frac{15}{6} - \frac{14}{9} = \frac{15 \cdot 3 - 14 \cdot 2}{18} = \frac{17}{18}$$

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности:

для  $x < 1$ :  $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0$

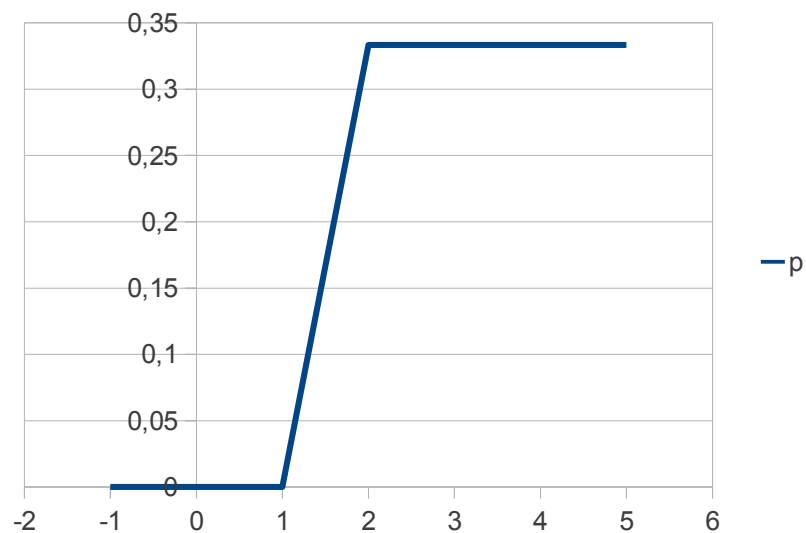
для  $1 \leq x \leq 2$  :  $F(x) = \int_{-\infty}^1 0 \cdot dx + \int_1^x x \frac{2}{3} \cdot dx = x^2 \frac{2}{6} \Big|_1^x = (x-1) \frac{1}{3}$

для  $x > 2$ :  $F(x) = \int_{-\infty}^1 0 \cdot dx + \int_1^2 x \frac{2}{3} \cdot dx + \int_2^{\infty} 0 \cdot dx = x^2 \frac{2}{6} \Big|_1^2 = (4-1) \frac{2}{6} = 1$

Окончательно имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ (x-1) \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$p(0,5 \leq x \leq 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = \frac{(1,5-1) \cdot 2}{6} - \frac{(0,5-1) \cdot 2}{6} = \frac{0,5 \cdot 2}{6} - \frac{(-0,5) \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}$$

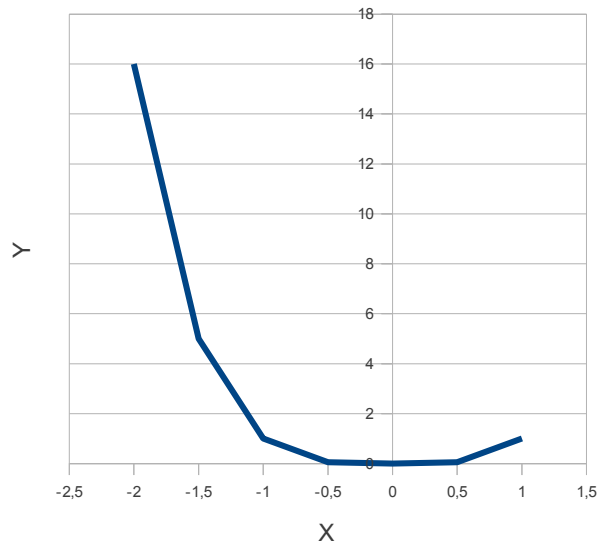


## Задача 7-8

Случайная величина  $X$  распределена равномерно на интервале  $[a, b]$ . Построить график случайной величины  $Y=F(X)$  и определить плотность вероятности  $g(y)$ .

| $\varphi(x)$ | $a$ | $b$ |
|--------------|-----|-----|
| $x^4$        | -2  | 1   |

1)



2) Выделим интервалы по оси  $Y$  в зависимости от количества обратных функций

$$(-\infty; 0) n=0$$

$$(0; 1) n=2$$

$$(1; 4) n=1$$

$$(4; \infty) n=0$$

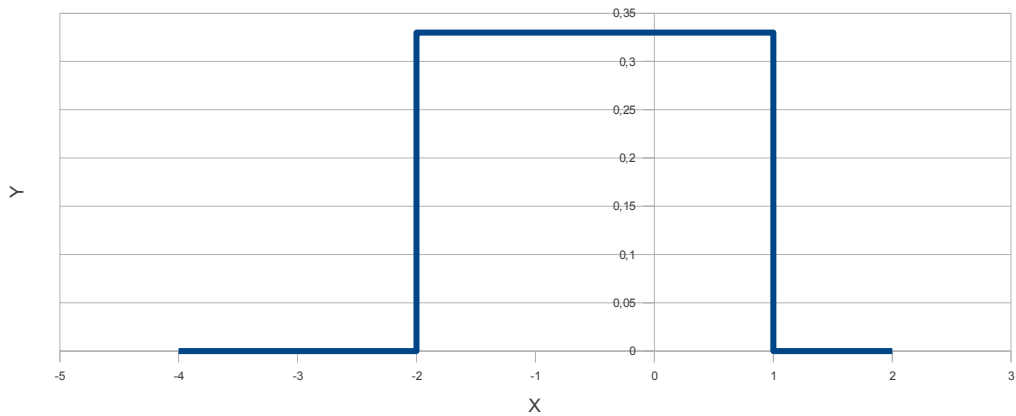
3) Выделим интервалы по  $Y$  на которых обратной функции нет.

$$(-\infty; 0) n=0$$

$$(4; \infty) n=0$$

4) Найдём плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, x > b \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, x > 1 \\ \frac{1}{3}, & x \in [-2, 1] \end{cases}$$



Для каждого интервала найдём обратные функции и производные

для  $y \in (0; 1)$  :

$$\varphi_1^{-1}(y) = y^{1/4} \quad \varphi_2^{-1}(y) = -y^{1/4}$$

$$(\varphi_1^{-1}(y))' = \frac{-3}{y^{3/4} \cdot 4} \quad (\varphi_2^{-1}(y))' = \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4}$$

$$|(\varphi_1^{-1}(y))'| = |(\varphi_2^{-1}(y))'| = \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4}$$

для  $y \in (1; 16)$  :

$$\varphi_1^{-1}(y) = -y^{1/4}$$

$$(\varphi_1^{-1}(y))' = \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4}$$

Найдём плотность вероятности  $g(y)$  для каждого интервала

$$g(y) = f_y(y) = \sum_{i=1}^n f(\varphi_i^{-1}(y)) \cdot |(\varphi_i^{-1}(y))'|$$

$$\text{для } y \in (0; 1) \quad g(y) = f(\varphi_1^{-1}(y)) \cdot |(\varphi_1^{-1}(y))'| + f(\varphi_2^{-1}(y)) \cdot |(\varphi_2^{-1}(y))'| = \frac{1}{3} \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4} + \frac{1}{3} \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4} = \frac{1}{y^{3/4} \cdot 2}$$

$$\text{для } y \in (1; 16) \quad g(y) = f(\varphi_1^{-1}(y)) \cdot |(\varphi_1^{-1}(y))'| = \frac{1}{3} \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4} = \frac{1}{4 \cdot y^{3/4}}$$

Ответ:

$$\text{для } y \in (0; 1) \quad g(y) = \frac{1}{2 \cdot y^{3/4}}$$

$$\text{для: } y \in (1; 16) \quad g(y) = \frac{1}{4 \cdot y^{3/4}}$$



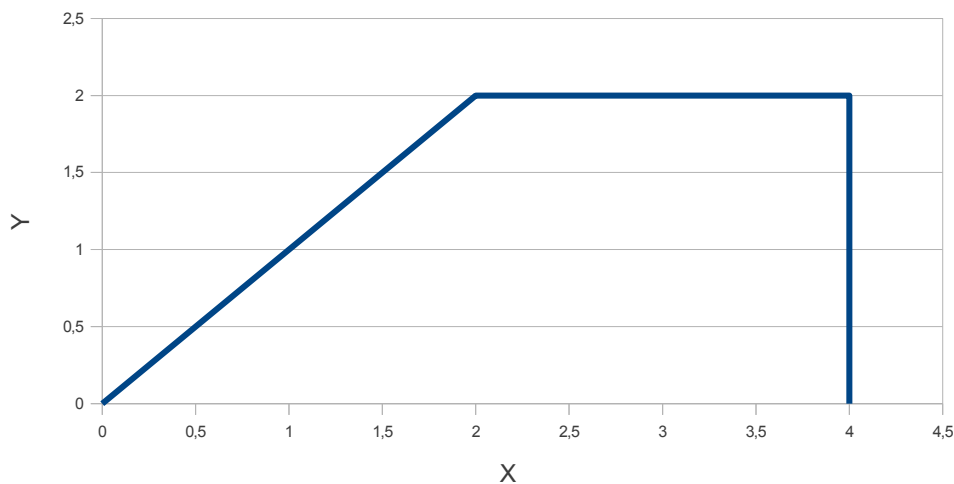
## ЗАДАЧА 8-4

Двухмерный случайный вектор  $(X, Y)$  равномерно распределен внутри выделенной жирными прямыми линиями на рис. 1.1 области В. Двухмерная плотность вероятности  $f(x, y)$  одинакова для любой точки этой области В:

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in B \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вычислить коэффициент корреляции между величинами X и Y.

| x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | y1 | y2 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 2  | 4  | 4  | 4  | 4  | 1  | 2  |



Найдём коэффициент C

$$C = \frac{1}{S_A} = \frac{1}{1/2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

Найдём  $\rho_{xy}$  предварительно отыскав все необходимые значения:

$$\rho_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M[x \cdot y] - M[x] \cdot M[y]}{\sqrt{D[x]} \cdot \sqrt{D[y]}}$$

$$M[x \cdot y] = \iint_B x \cdot y \cdot f(x, y) dx dy$$

$$M[x \cdot y] = \int_0^2 \int_0^x x \cdot y \cdot \frac{1}{6} dx dy + \int_2^4 x dx \cdot \int_0^2 y \cdot \frac{1}{6} dy = \frac{1}{3} + 2 = 2 \frac{1}{3}$$

$$M[x] = \int_0^2 x \, dx \int_0^x \frac{1}{6} \, dy + \int_2^4 x \, dx \cdot \int_0^2 \frac{1}{6} \, dy = \frac{4}{9} + 2 = \frac{22}{9}$$

$$M[y] = \int_0^2 dx \int_0^x y \frac{1}{6} \, dy + \int_2^4 dx \cdot \int_0^2 y \frac{1}{6} \, dy = \frac{8}{9}$$

$$D[x] = \int_0^2 \int_0^x (x - m_x)^2 \frac{1}{6} \, dx \, dy + \int_2^4 \int_0^2 (x - m_x)^2 \frac{1}{6} \, dx \, dy = \frac{74}{81}$$

$$D[y] = \int_0^2 \int_0^x (y - m_y)^2 \frac{1}{6} \, dx \, dy + \int_2^4 \int_0^2 (y - m_y)^2 \frac{1}{6} \, dx \, dy = \frac{26}{81}$$

$$\rho_{xy} = \frac{M[x \cdot y] - M[x] \cdot M[y]}{\sqrt{D[x]} \cdot \sqrt{D[y]}} = \frac{\frac{7}{3} - \frac{22}{9} \cdot \frac{8}{9}}{\sqrt{\frac{74}{81}} \cdot \sqrt{\frac{26}{81}}} = 0.29637$$

ОТВЕТ:  $M[x \cdot y] = 2 \frac{1}{3}$      $M[x] = \frac{22}{9}$      $M[y] = \frac{8}{9}$      $D[x] = \frac{74}{81}$      $D[y] = \frac{26}{81}$

$$\rho_{xy} = 0.29637$$

## ЗАДАЧА 10.

По выборке двумерной случайной величины:

- вычислить точечную оценку коэффициента корреляции;
- вычислить интервальную оценку коэффициента корреляции ( $\gamma = 0,95$ );
- проверить гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости;
- вычислить оценки параметров  $a_0$  и  $a_1$  линии регрессии  $\bar{y}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$ ;
- построить диаграмму рассеивания и линию регрессии.

Двумерная выборка:

(0.30;0.75) (-0.98; 4.02) (3.42; -5.79) (0.20; -1.46) (1.25; 0.28) (-3.85; -5.29) (-0.98; 1.10) (-0.60; 2.36) (-1.13; -4.60) (-1.74; 1.56) (-1.90; 3.94) (3.62; -0.26) (1.64; 3.25) (-2.58; -3.62) (-3.03; 3.84) (-0.85; 0.52) (0.76; 2.99) (0.80; 1.67) (-1.60; -2.25) (-1.76; 4.38) (4.98; 0.44) (1.12; -1.39) (-1.20; 0.23) (-0.08; 2.01) (2.05; 0.16) (2.46; -2.58) (1.23; -2.48) (-2.14; 5.15) (1.14; 1.65) (1.32; -1.03) (2.32; 0.93) ( 2.97; -1.07) (-0.25; 0.51) (1.32; -0.09) (5.48; -0.48) (0.77; 2.81) (-3.04; -0.46) (1.55; -2.20) (-3.20; 1.21) (0.51; -0.85) (1.78; 4.50) (0.83; 1.52) ( -2.65; 0.96) (-3.85; -1.13) (0.89; -6.09) (-3.06; -2.09) (0.28; -0.53) (1.87; 3.86) (2.53;0.54) (-0.67; -7.41)

$n=50$ - количество двумерных чисел

Вычислим точечную оценку коэффициента корреляции.

Оценки математических ожиданий:

$$m_x = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0,165$$

$$m_y = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 0,0798$$

Оценка дисперсий:

$$D_x = S_o^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n-1} \cdot \bar{x}^2 = 4,888$$

$$D_y = S_o^2(y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n-1} \cdot \bar{y}^2 = 8,258$$

Состоятельная оценка корреляционного момента равна:

$$K_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \frac{1}{n-1} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = -0,233$$

Состоятельная оценка коэффициента корреляции равна:

$$R_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{S_0^2(x) \cdot S_0^2(y)}} = -0,03667$$

Вычислим интервальную оценку коэффициента корреляции с надежностью  $g=0.95$  по формуле:

$$\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1} < R_{xy} < \frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}$$

$$\text{Где,} \quad a = 0,5 \ln \frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}} - \frac{z_y}{\sqrt{n-3}} \quad b = 0,5 \ln \frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}} - \frac{z_y}{\sqrt{n-3}}$$

$z_y$  - значение функции Лапласа, т.е.  $\Phi z_y = y/2 = 0,95/2 = 0,475$

Которое в нашем случае равно 1,96.

тогда

$$a = -0,106 \quad b = 0,325$$

Построим диаграмму рассеивания и линию регрессии:

