Задача 1-25

В урне пять белых и восемь черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

Решение:

A={шар будет белым}

$$p(A)=\frac{m}{n}$$

n — общее число случаев

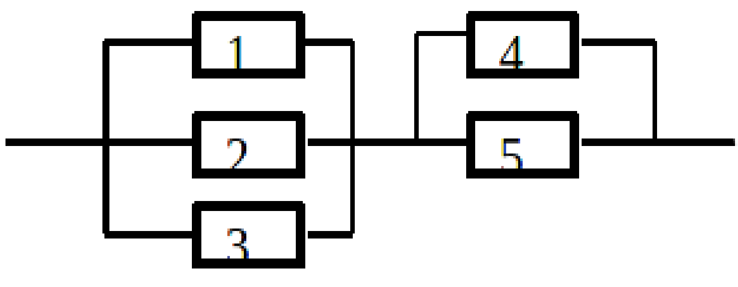
m — число случаев благоприятных событию A

$$p(A)=\frac{4}{8+4}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Ответ: 1/3

Задача 2-24

Приведена схема соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вероятности отказа элементов 1, 2, 3, 4, 5 соответственно равны p1=0,1; p2=0,2; p3=0,3; p4=0,4; p5=0,5. Найти вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход.



Решение:

A={сигнал пройдёт со входа на выход}

B_i={отказ i-ого элемента} i=1..5

$p(B_1)=0{,}1$, $p(B_2)=0{,}2$, $p(B_3)=0{,}3$, $p(B_4)=0{,}4$, $p(B_5)=0{,}5$

Заменим параллельные участки на один элемент с известной вероятность отказа (рассчитанной по формуле для параллельных соединений)

$p(B_{123})=p(B_1)\times p(B_2)\times p(B_3)=0{,}1\times 0{,}2\times 0{,}3=0{,}006$

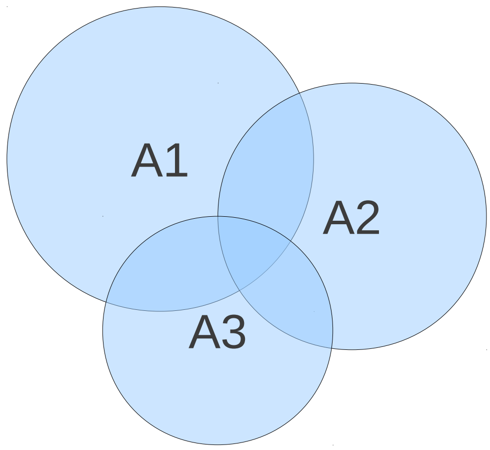
$p(B_{45})=p(B_4)\times p(B_5)=0{,}4\times 0{,}5=0{,}2$

$p(A)=p(\overline{B}_{123})\times p(\overline{B}_{45})=(1-0{,}006)\times(1-0{,}2)=0{,}994\times 0.8=0{,}7952$

Ответ: 0,7952

Задача 3-30

Три стрелка производят по одному выстрелу по одной и той же мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго - 0,5 и для третьего - 0,4. В результате произведенных выстрелов в мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.



$$P(A)=P(A1)-P(A1)\cdot[P(A2)+P(A3)-P(A2)\cdot P(A3)]$$

$$P(A)=0{,}6-0{,}6*(0{,}5-0{,}4+0{,}5*0{,}4)=0{,}6-0{,}6*0{,}7=0{,}6-0{,}42=0{,}252$$

Ответ: 0,252

Задача 4-12

Вероятность того, что данный баскетболист забросит мяч в корзину, равна 0,3. Произведено 12 бросков. Найти вероятность того, что будет 10 попаданий.

n = 12 — количество произведённых бросков

m = 10 — количество попаданий

p = 0,3 — вероятность попадания при броске

Вероятность наступления m событий в n опытах вычисляется по формуле Бернули:

$$P_n(m)=C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

где

$$q=1-p$$

$$P_{12}=\frac{12!}{(12-10)!\cdot 10!}\cdot 0,3^{10}\cdot(1-0,3)^2=0,000190968$$

Ответ: 0,000190968

Задача 5-6

Дискретная случайная величина X может принимать одно из пяти фиксированных значений x1, x2, x3, x4, x5 с вероятностями p1, p2, p3, p4, p5 соответственно (конкретные значения приведены в табл. 1.1). Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины X. Рассчитать и построить график функции распределения.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
x	-2	-1	1	3	7
p	0,1	0,3	0,2	0,2	0,2

$$M[x]=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

$$M[x]=-2\cdot 0,1-1\cdot 0,3+1\cdot 0,2+3\cdot 0,2+7\cdot 0,2=1,7$$

$$D[x]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i=M[x^2]-M^2[x]$$

$$M[x^2]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot p_i$$

$$M[x^2]=(-2)^2\cdot 0{,}1+(-1)^2\cdot 0{,}3+1^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}2+7^2\cdot 0{,}2=1{,}7=12{,}5$$

$$D[x]=12{,}5-1{,}7=10{,}8$$

$$F[x]=\sum_{x<x_i}p_i$$

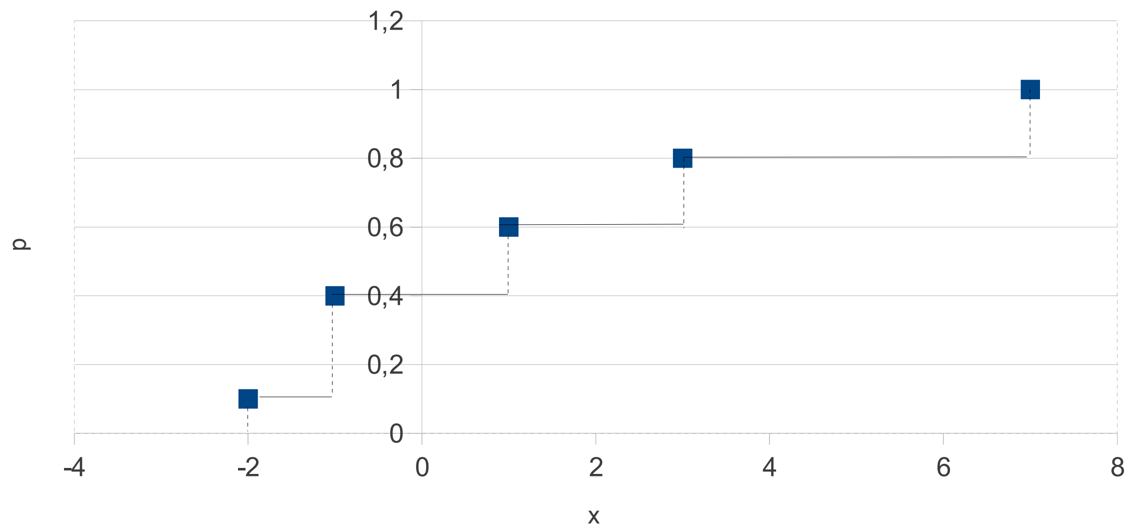
$$F[x=-2]=0{,}1$$

$$F[x=-1]=0{,}1+0{,}3=0{,}4$$

$$F[x=1]=0{,}1+0{,}3+0{,}2=0{,}6$$

$$F[x=3]=0{,}1+0{,}3+0{,}2+0{,}2=0{,}8$$

$$F[x=7]=0{,}1+0{,}3+0{,}2+0{,}2+0{,}2=1$$



Задача 6-1

Случайная величина X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a, \quad x>b,\\ \varphi(x,c), & a\le x\le b.\end{cases}$$

Определить константу C, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения величины X, а также вероятность ее попадания в интервал $[\alpha,\beta]$

$\varphi(x,c)$	**a**	**b**	α	β
$c\cdot x$	1	2	0,5	1,5

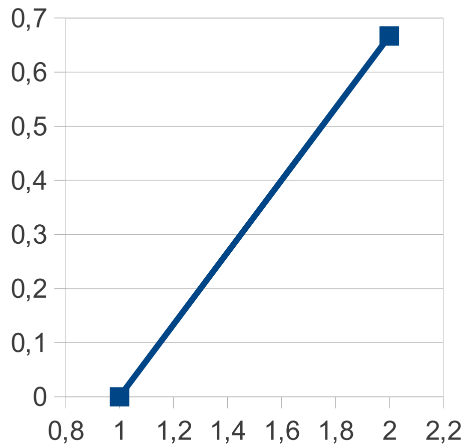
$$f(x)=\begin{cases}0, x<1, x>2\\ \varphi(x,c), 1\le x\le 2\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx=c\,x\cdot dx=c\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2=c\,\frac{2^2}{2}-c\,\frac{1^2}{2}=c\cdot 2-c\,\frac{1}{2}=1{,}5\cdot c$$

Откуда: $c=1/1{,}5=2/3$

$$f(x)=\begin{cases}0, x<1, x>2\\ x\,\frac{2}{3}, 1\le x\le 2\end{cases}$$



$M[x]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$ - математическое ожидание

$$M[x]=\int_{1}^{2} x\cdot x\,\frac{2}{3}\,dx=x^3\,\frac{2}{9}\Bigg|_1^2=2^3\,\frac{2}{9}-1^3\,\frac{2}{9}=\frac{16}{9}-\frac{2}{9}=\frac{14}{9}$$

Найдём дисперсию:

$$D[x]=M[x^2]-M^2[x]$$

$$M[x^2]-M^2[x]=\int_{1}^{2} x^2\cdot x\,\frac{2}{3}\,dx-\frac{14}{9}=x^4\,\frac{2}{12}\Bigg|_1^2-\frac{14}{9}=(2^4-1^4)\,\frac{1}{6}-\frac{14}{9}=\frac{15}{6}-\frac{14}{9}=\frac{15\cdot 3-14\cdot 2}{18}=\frac{17}{18}$$

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности:

для x < 1: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx=0$

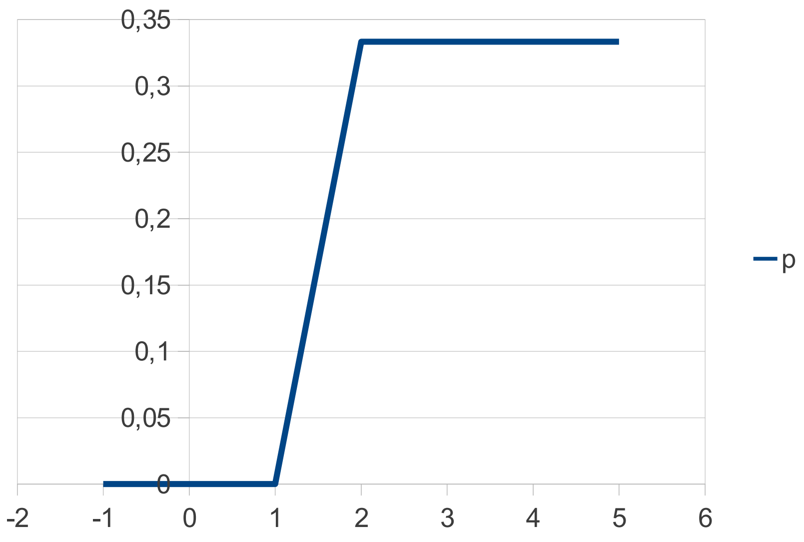
для $1\le x\le 2$: $F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0\cdot dx+\int_{1}^{x} x\frac{2}{3}\cdot dx=x^2\frac{2}{6}\Big|_1^x=(x-1)\frac{1}{3}$

для x >2: $F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0\cdot dx+\int_{1}^{2} x\frac{2}{3}\cdot dx+\int_{2}^{\infty} 0\cdot dx=x^2\frac{2}{6}\Big|_1^2=(4-1)\frac{2}{6}=1$

Окончательно имеем:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<1 \\ (x-1)\frac{1}{3}, 1\le x\le 2 \\ 1, x>2 \end{cases}$$

$$p(0{,}5\le x\le 1{,}5)=F(1{,}5)-F(0{,}5)=\frac{(1{,}5-1)\cdot 2}{6}-\frac{(0{,}5-1)\cdot 2}{6}=\frac{0{,}5\cdot 2}{6}-\frac{(-0{,}5)\cdot 2}{6}=\frac{1}{3}$$

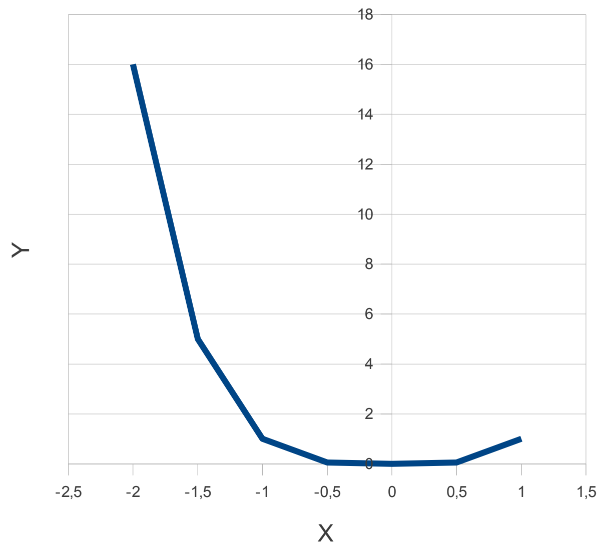


Задача 7-8

Случайная величина X распределена равномерно на интервале $[a,b]$. Построить график случайной величины $Y=F(X)$ и определить плотность вероятности $g(y)$.

$\varphi(x)$	***a***	***b***
x^4	-2	1

1)



2) Выделим интервалы по оси Y в зависимости от количества обратных функций

$(-\infty;0)\, n=0$

$(0;1)\, n=2$

$(1;4)\, n=1$

$(4;\infty)\, n=0$

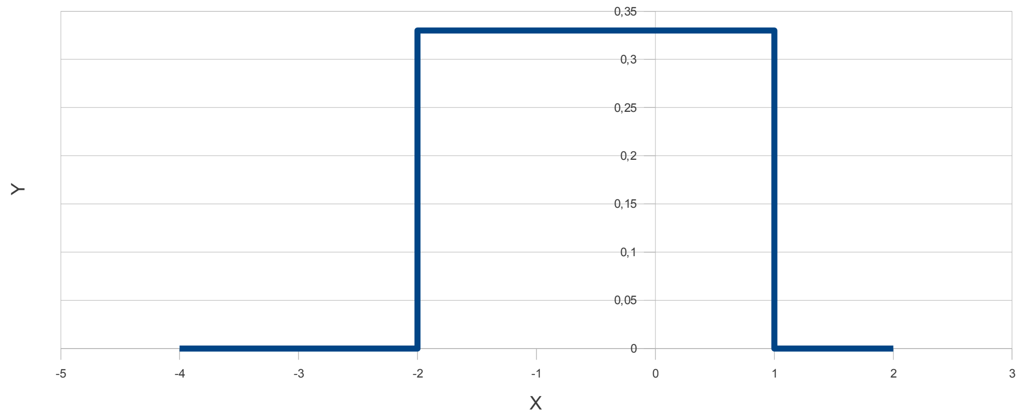
3) Выделим интервалы по Y на которых обратной функции нет.

$(-\infty;0)\, n=0$

$(4;\infty)\, n=0$

4) Найдём плотность вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, x<a, x>b\\ \dfrac{1}{b-a}, x\in[a,b]\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}0, x<-2, x>1\\ \dfrac{1}{3}, x\in[-2,1]\end{cases}$$



Для каждого интервала найдём обратные функции и производные

для $y \in (0;1)$:

$\varphi_1^{-1}(y) = y^{1/4} \quad \varphi_2^{-1}(y) = -y^{1/4}$

$(\varphi_1^{-1}(y))' = \frac{-3}{y^{3/4} \cdot 4} \quad (\varphi_2^{-1}(y))' = \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4}$

$|(\varphi_1^{-1}(y))'| = |(\varphi_2^{-1}(y))'| = \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4}$

для $y \in (1;16)$:

$\varphi_1^{-1}(y) = -y^{1/4}$

$(\varphi_1^{-1}(y))' = \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4}$

Найдём плотность вероятности *g(y)* для каждого интервала

$$g(y) = f_y(y) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi^{-1}(y)) \cdot |(\varphi^{-1}(y))'|$$

для $y \in (0;1)$ $g(y) = f(\varphi_1^{-1}(y)) \cdot |(\varphi_1^{-1}(y))'| + f(\varphi_2^{-1}(y)) \cdot |(\varphi_2^{-1}(y))'| = \frac{1}{3} \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4} + \frac{1}{3} \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4} = \frac{1}{y^{3/4} \cdot 2}$

для $y \in (1;16)$ $g(y) = f(\varphi_1^{-1}(y)) \cdot |(\varphi_2^{-1}(y))'| = \frac{1}{3} \frac{3}{y^{3/4} \cdot 4} = \frac{1}{4 \cdot y^{3/4}}$

Ответ:

для $y \in (0;1)$ $g(y) = \frac{1}{2 \cdot y^{3/4}}$

для: $y \in (1;16)$ $g(y) = \frac{1}{4 \cdot y^{3/4}}$

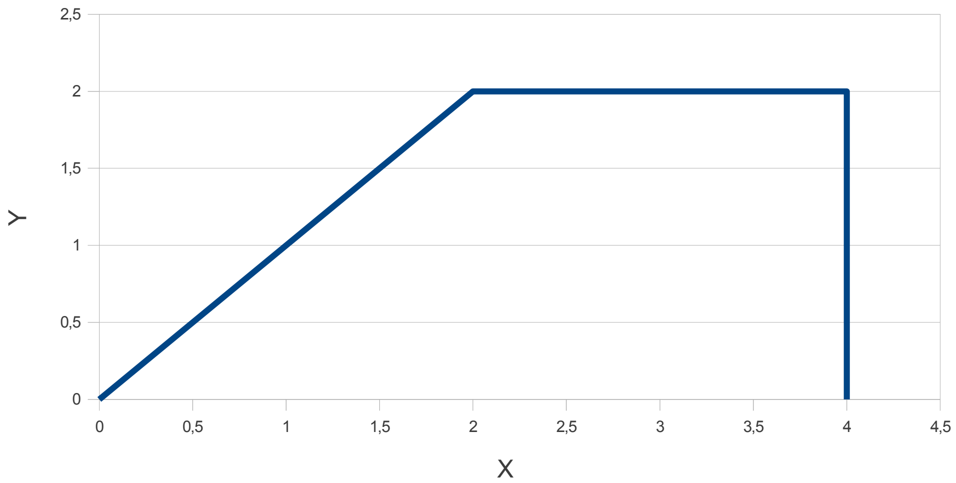
ЗАДАЧА 8-4

Двухмерный случайный вектор (*X, У*) равномерно распределен внутри выделенной жирными прямыми линиями на рис. 1.1 области B. Двухмерная плотность вероятности *f(x,y)* одинакова для любой точки этой области B:

$$f(x,y)=\begin{cases} c, (x,y)\in B \\ 0, иначе \end{cases}$$

Вычислить коэффициент корреляции между величинами X и Y.

x1	x2	x3	x4	x5	x6	y1	y2
0	2	4	4	4	4	1	2



Найдём коэффициент C

$$C=\frac{1}{S_A}=\frac{1}{1/2\cdot 2\cdot 2+2\cdot 2}=\frac{1}{6}$$

Найдём ρ_{xy} предварительно отыскав все необходимые значения:

$$\rho_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{M[x\cdot y]-M[x]\cdot M[y]}{\sqrt{D[x]}\cdot\sqrt{D[y]}}$$

$$M[x\cdot y]=\iint_B x\cdot y\cdot f(x,y)dx\,dy$$

$$M[x\cdot y]=\int_0^2\int_0^x x\cdot y\frac{1}{6}dx\,dy+\int_2^4 xdx\cdot\int_0^2 y\frac{1}{6}dy=\frac{1}{3}+2=2\frac{1}{3}$$

$$M[x]=\int_0^2 x\,dx\int_0^x \frac{1}{6}dy+\int_2^4 xdx\cdot\int_0^2 \frac{1}{6}dy=\frac{4}{9}+2=\frac{22}{9}$$

$$M[y]=\int_0^2 dx\int_0^x y\frac{1}{6}dy+\int_2^4 dx\cdot\int_0^2 y\frac{1}{6}dy=\frac{8}{9}$$

$$D[x]=\int_0^2\int_0^x (x-m_x)^2\frac{1}{6}dx\,dy+\int_2^4\int_0^2 (x-m_x)^2\frac{1}{6}dxdy=\frac{74}{81}$$

$$D[y]=\int_0^2\int_0^x (y-m_y)^2\frac{1}{6}dx\,dy+\int_2^4\int_0^2 (y-m_y)^2\frac{1}{6}dxdy=\frac{26}{81}$$

$$\rho_{xy}=\frac{M[x\cdot y]-M[x]\cdot M[y]}{\sqrt{D[x]}\cdot\sqrt{D[y]}}=\frac{\frac{7}{3}-\frac{22}{9}\frac{8}{9}}{\sqrt{\frac{74}{81}}\cdot\sqrt{\frac{26}{81}}}=0.29637$$

Ответ: $M[x\cdot y]=2\frac{1}{3}$ $M[x]=\frac{22}{9}$ $M[y]=\frac{8}{9}$ $D[x]=\frac{74}{81}$ $D[y]=\frac{26}{81}$

$\rho_{xy}=0.29637$

ЗАДАЧА 10.

По выборке двухмерной случайной величины:

- вычислить точечную оценку коэффициента корреляции;
- вычислить интервальную оценку коэффициента корреляции (γ = 0,95);
- проверить гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости;
- вычислить оценки параметров a_0 и a_1 линии регрессии $\overline{y}(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x$;
- построить диаграмму рассеивания и линию регрессии.

Двумерная выборка:

(0.30;0.75) (-0.98; 4.02) (3.42; -5.79) (0.20; -1.46) (1.25; 0.28) (-3.85; -5.29) (-0.98; 1.10) (-0.60; 2.36) (-1.13; -4.60) (-1.74; 1.56) (-1.90; 3.94) (3.62; -0.26) (1.64; 3.25) (-2.58; -3.62) (-3.03; 3.84) (-0.85; 0.52) (0.76; 2.99) (0.80; 1.67) (-1.60; -2.25) (-1.76; 4.38) (4.98; 0.44) (1.12; -1.39) (-1.20; 0.23) (-0.08; 2.01) (2.05; 0.16) (2.46; -2.58) (1.23; -2.48) (-2.14; 5.15) (1.14; 1.65) (1.32; -1.03) (2.32; 0.93) (2.97; -1.07) (-0.25; 0.51) (1.32; -0.09) (5.48; -0.48) (0.77; 2.81) (-3.04; -0.46) (1.55; -2.20) (-3.20; 1.21) (0.51; -0.85) (1.78; 4.50) (0.83; 1.52) (-2.65; 0.96) (-3.85; -1.13) (0.89; -6.09) (-3.06; -2.09) (0.28; -0.53) (1.87; 3.86) (2.53;0.54) (-0.67; -7.41)

n=50- количество двумерных чисел
Вычислим точечную оценку коэффициента корреляции.
Оценки математических ожиданий:

$$m_x = \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0{,}165$$

$$m_y = \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = 0{,}0798$$

Оценка дисперсий:

$$D_x = S_o^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n-1} \cdot \overline{x}^2 = 4{,}888$$

$$D_y = S_o^2(y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n-1} \cdot \overline{y}^2 = 8{,}258$$

Состоятельная оценка корреляционного момента равна:

$$K_{xy}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i-\frac{1}{n-1}\cdot\overline{x}\cdot\overline{y}=-0,233$$

Состоятельная оценка коэффициента корреляции равна:

$$R_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{S_0^2(x)\cdot S_0^2(y)}}=-0,03667$$

Вычислим интервальную оценку коэффициента корреляции с надежностью g=0.95 по формуле:

$$\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}<R_{xy}<\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}$$

Где, $a=0,5\ln\frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}}-\frac{z_\gamma}{\sqrt{n-3}}$ $b=0,5\ln\frac{1+R_{xy}}{1-R_{xy}}-\frac{z_y}{\sqrt{n-3}}$

z_y - значение функции Лапласа, т.е. $\Phi z_y=y/2=0,95/2=0,475$

Которое в нашем случае равно 1,96.

тогда

$a=-0,106$ $b=0,325$

Построим диаграмму рассеивания и линию регрессии: