**Задача №1.2**

Подбрасываются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших чисел делится без остатка на шесть.

Решение

Каждая игральная кость содержит цифры от 1 до 6. Найдём количество всех возможных комбинаций:



Сумма выпавших чисел будет делится на 6 без остатка в следующих случаях: 1 и 5, 5 и 1, 2 и 4, 4 и 2, 3 и 3, 6 и 6. То есть количество благоприятствующих исходов *m=6*.

Вероятность того, что сумма выпавших чисел делится без остатка на шесть:



**Ответ:** 

**Задача № 2.30**

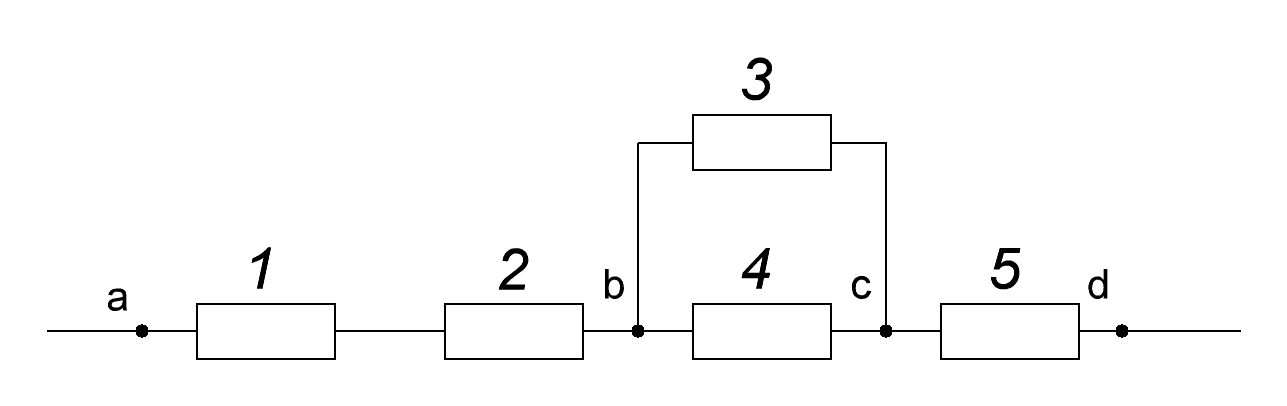
Дана схема соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом (рисунок 1). Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вероятности отказа элементов 1, 2, 3, 4, 5 соответственно равны q1=0,1; q2=0,2; q3=0,3; q4=0,4; q5=0,5. Найти вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход.

Рисунок 1

Решение

Согласно рисунку 1 элементы 1, 2 соединены последовательно между собой, 3 и 4 параллельно между собой и последовательно с элементом 5.

Введем события: *A­1* – элемент 1 исправен, *A­2* – элемент 2 исправен, *A­3* – элемент 3 исправен, *A­4* – элемент 4 исправен, *B* – сигнал проходит от точки *a* к точке *b*, *C* – сигнал проходит от точки *a* к точке *c*, *D* – сигнал проходит от *a* точки к точке *d* (со входа на выход).

Событие *B* произойдёт, если будут работать и элемент 1, и элемент 2:



Вероятность наступления события *B:*



Событие *C* произойдёт, если будут работать или элемент 3, или элемент 4:



Вероятность наступления события *C:*



Событие *D* произойдёт, если произойдут и событие *B* и событие *С* и событие *A5*:



Вероятность наступления события *D:*



**Ответ:** 

**Задача №3.27**

Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором - 10 белых и 10 черных шаров, в третьем - 20 черных шаров. Из каждого ящика вынули шар. Затем из этих трех шаров наугад взяли один шар. Вычислить вероятность того, что шар белый.

Решение

Набор из трёх шаров может иметь два варианта:

1. белый, черный, черный
2. белый, белый, черный

Соответственно, вероятность вытянуть из этого набора белый шар для 1-ого случая равна 1/3 и для 2-ого случая – 2/3.

Обозначим через А событие –вынут белый шар.

Сделаем ряд предположений:

- набор шаров включает: белый, черный, черный



- набор шаров включает: белый, белый, черный



Соответствующие условные вероятности для каждой из гипотез:



По формуле полной вероятности найдём вероятность события *A*:



**Ответ:** 

**Задача №4.1**

Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,95. Какова вероятность того, что среди десяти изделий не более одного нестандартного?

Решение

Вероятность того, что среди десяти изделий не более одного нестандартного равна вероятности того, что из *n=*10 изделий не менее *m=*9 стандартных:



**Ответ:** 

**Задача № 5.28**

Дискретная случайная величина Х может принимать одно из пяти фиксированных значений x1, x2, x3, x4, x5 с вероятностями p1, p2, p3, p4, p5 соответственно. Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины Х. Рассчитать и построить график функции распределения.

Таблица 1 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 | 5 | 7 | 8 |
|  | 0,6 | 0,1 | 0,1 | 0,05 | 0,15 |

Решение

1. Математическое ожидание и дисперсию величины Х:







1. Построим ряд распределения СВ X:

Таблица 2 –Ряд распределения СВ X

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 4 | 5 | 7 | 8 | >8 |
|  | 0,6 | 0,1 | 0,1 | 0,05 | 0,15 | 0 |
|  | 0,0 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,85 | 1,0 |

Построим график функции распределения (рисунок 2):

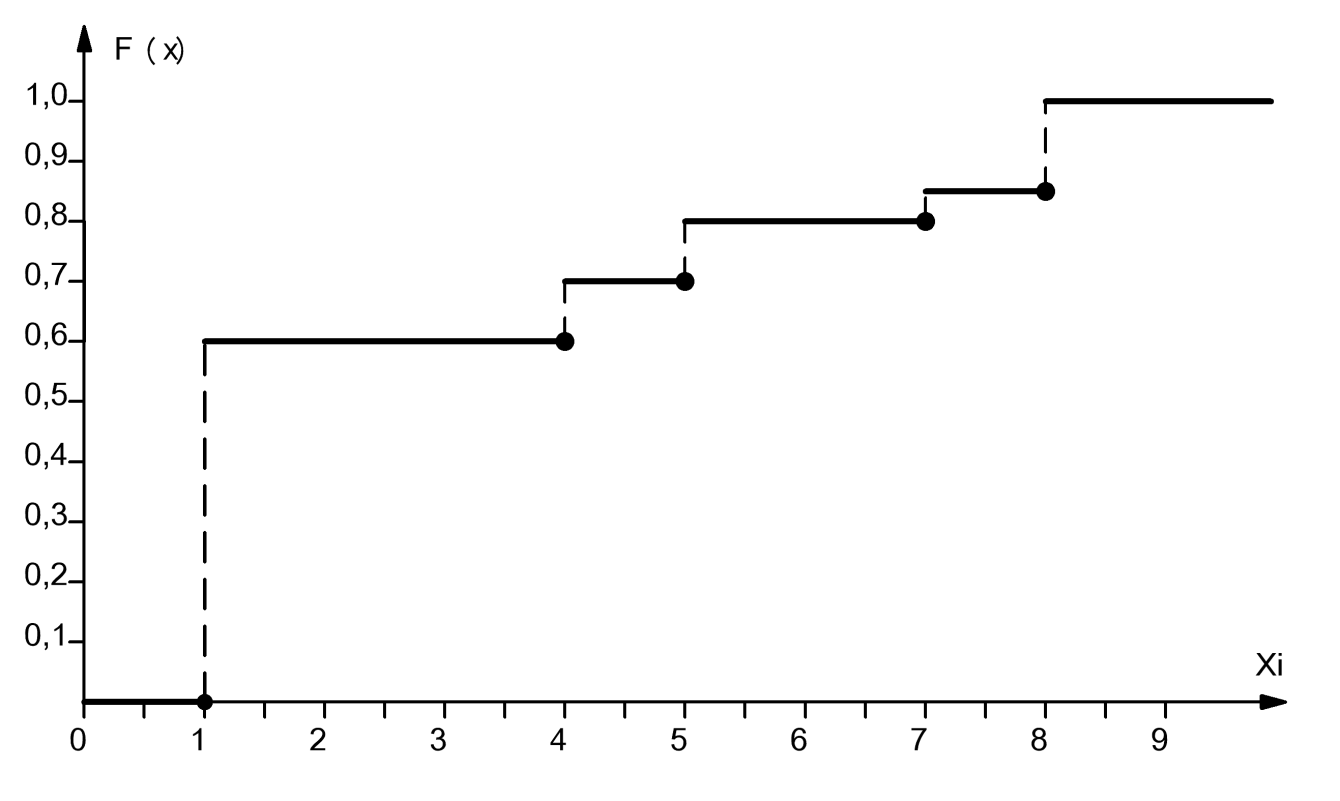


Рисунок 2 - график функции распределения F(X­i)

**Задача № 6.12**

Случайная величина *Х* задана плотностью вероятности:



Определить константу *С*, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения величины Х, а также вероятность ее попадания в интервал.



Решение

1. Вычислим константу исходя из условия нормировки:



Отсюда константа :



1. Определим математическое ожидание СВ *Х:*





Определим дисперсию СВ *Х*:









1. Определим функцию распределения величины Х:









1. Определим вероятность попадания величины Х в заданный интервал :



**Ответ:**



**Задача № 7.23**

Случайная величина *Х* распределена равномерно на интервале [*a,b*]. Построить график случайной величины *Y=ϕ(X)* и определить плотность вероятности *g(y).*



Решение

1. Построим график случайной величины  для в интервале значений  и определим диапазон значений  (Рисунок 3):  [0; 2]
2. В зависимости от числа обратных функций выделим следующие интервалы для :

обратных функций не существует







1. Вычислим модули производных обратных функций:



**Y**

**X**

Рисунок 3 – график функции 

Так как случайная величина *Х* распределена равномерно на интервале [-1;8] , то её плотность вероятности равна:



Определим плотность вероятности величины :



**Задача № 8.15**

Двухмерный случайный вектор (*Х, У*) равномерно распределен внутри выделенной жирными прямыми линиями на рисунок 4 области B. Двухмерная плотность вероятности *f(x,y)* одинакова для любой точки этой области B:

Вычислить коэффициент корреляции между величинами X и Y.

Таблица 3 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | y1 | y2 |
| 8.15 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 | 0 | 1 | 2 |



Рисунок 4

Решение

1. Построим область *B* согласно координатам из таблицы 5 и рисунку 4.

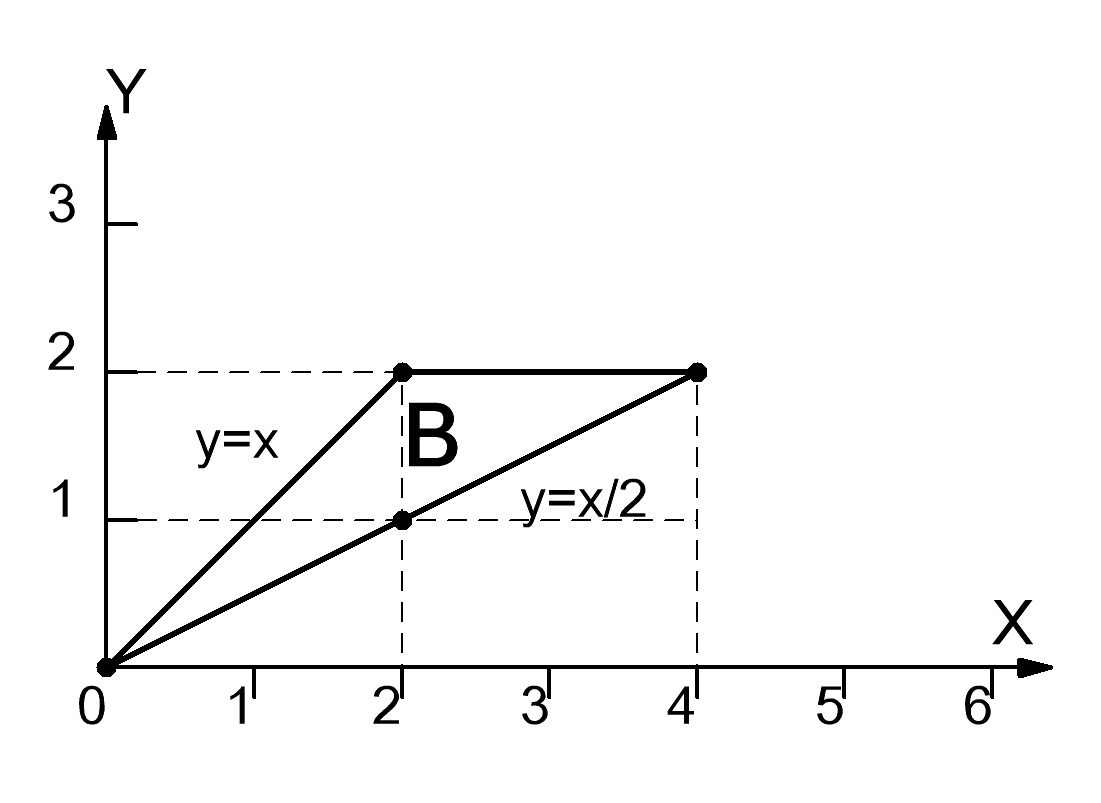


Рисунок 5

Проанализируем рисунок 5: область *B* на промежутке  ограничена снизу прямой , сверху , на промежутке  ограничена снизу прямой , сверху - 

Следовательно, совместная плотность вероятности примет вид:



1. Найдём константу  из условия нормировки:



1. 
2. 



Таким образом:



Проверим полученный результат геометрически. Объём тела, ограниченного поверхностью распределения *В* и плоскостью xOy равен 1, т.е:



Следовательно, константа  рассчитана верно.

1. Вычислим математические ожидания:



1. 
2. 





1. 
2. 



1. Вычислим дисперсии:



1. 
2. 





1. 
2. 



1. Вычислим корреляционный момент:



1. 
2. 



Вычислим коэффициент корреляции между величинами X и Y:



**Ответ:** 

**Задача № 9**

По выборке одномерной случайной величины:

- получить вариационный ряд;

- построить график эмпирической функции распределения *F\*(x)*;

- построить гистограмму равноинтервальным способом;

- построить гистограмму равновероятностным способом;

- вычислить точечные оценки математического ожидания и дисперсии;

- вычислить интервальные оценки математического ожидания и дисперсии (γ = 0,95);

- выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины и проверить ее при помощи критерия согласия *χ2*  и критерия Колмогорова (*α* = 0,05).

Одномерная выборка:

Размер выборки 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1,32 | 1,43 | 3,01 | 0,50 | 0,44 | 0,29 | 0,53 | 0,83 | 0,79 | 0,95 | 1,50 | 0,93 | 1,04 | 1,15 | 0,54 |
| 0,14 | 1,47 | 0,59 | 0,02 | 1,16 | 1,07 | 0,02 | 0,49 | 0,04 | 0,28 | 0,59 | 0,17 | 0,62 | 0,71 | 3,16 |
| 1,88 | 0,83 | 2,31 | 1,95 | 0,07 | 1,41 | 1,87 | 0,93 | 1,75 | 1,93 | 1,92 | 1,99 | 0,41 | 1,00 | 0,19 |
| 0,13 | 1,84 | 2,11 | 0,54 | 0,53 | 0,50 | 0,27 | 4,32 | 0,78 | 0,17 | 1,06 | 2,24 | 0,15 | 0,47 | 0,25 |
| 1,31 | 0,20 | 0,55 | 0,17 | 0,17 | 0,62 | 0,00 | 1,04 | 0,60 | 1,41 | 0,59 | 2,90 | 0,10 | 0,68 | 3,97 |
| 0,66 | 0,76 | 2,51 | 0,75 | 0,01 | 1,63 | 0,31 | 0,70 | 1,37 | 2,83 | 0,53 | 2,46 | 0,87 | 0,91 | 2,70 |
| 0,22 | 0,08 | 0,77 | 1,86 | 1,18 | 0,05 | 2,48 | 2,64 | 0,68 | 0,02 |  |  |  |  |  |

Решение

1. Получим вариационный ряд из исходного:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,02 | 0,02 | 0,04 | 0,05 | 0,07 | 0,08 | 0,10 | 0,13 | 0,14 | 0,15 | 0,17 | 0,17 |
| 0,17 | 0,17 | 0,19 | 0,20 | 0,22 | 0,25 | 0,27 | 0,28 | 0,29 | 0,31 | 0,41 | 0,44 | 0,47 | 0,49 | 0,50 |
| 0,50 | 0,53 | 0,53 | 0,53 | 0,54 | 0,54 | 0,55 | 0,59 | 0,59 | 0,59 | 0,60 | 0,62 | 0,62 | 0,66 | 0,68 |
| 0,68 | 0,70 | 0,71 | 0,75 | 0,76 | 0,77 | 0,78 | 0,79 | 0,83 | 0,83 | 0,87 | 0,91 | 0,93 | 0,93 | 0,95 |
| 1,00 | 1,04 | 1,04 | 1,06 | 1,07 | 1,15 | 1,16 | 1,18 | 1,31 | 1,32 | 1,37 | 1,41 | 1,41 | 1,43 | 1,47 |
| 1,50 | 1,63 | 1,75 | 1,84 | 1,86 | 1,87 | 1,88 | 1,92 | 1,93 | 1,95 | 1,99 | 2,11 | 2,24 | 2,31 | 2,46 |
| 2,48 | 2,51 | 2,64 | 2,70 | 2,83 | 2,90 | 3,01 | 3,16 | 3,97 | 4,32 |  |  |  |  |  |

1. Построим график эмпирической функции непосредственно по вариационному ряду, так как *F\*(x)* – неубывающая и практически все ступеньки графика имеют одинаковую величину  (Рисунок 6).
2. Построим гистограмму равноинтервальным способом (рисунок 7).

Для построения гистограммы составим интервальный статистический ряд, учитывая что длина у всех интервалов должна быть одинаковая.

 - количество интервалов;

 - ширина интервала;

- частота попадания СВ X в j-ый интервал;

 - статистическая плотность в j-ом интервале.

Таблица 4 – Интервальный статистический ряд

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | Aj | Bj | hj | vj | pj\* | fj\* |
| 1 | 0 | 0,432 | 0,432 | 26 | 0,26 | 0,602 |
| 2 | 0,432 | 0,864 | 0,432 | 29 | 0,29 | 0,671 |
| 3 | 0,864 | 1,296 | 0,432 | 13 | 0,13 | 0,301 |
| 4 | 1,296 | 1,728 | 0,432 | 9 | 0,09 | 0,208 |
| 5 | 1,728 | 2,16 | 0,432 | 10 | 0,1 | 0,231 |
| 6 | 2,16 | 2,592 | 0,432 | 5 | 0,05 | 0,116 |
| 7 | 2,592 | 3,024 | 0,432 | 5 | 0,05 | 0,116 |
| 8 | 3,024 | 3,456 | 0,432 | 1 | 0,01 | 0,023 |
| 9 | 3,456 | 3,888 | 0,432 | 0 | 0 | 0,000 |
| 10 | 3,888 | 4,32 | 0,432 | 2 | 0,02 | 0,046 |

**f\*(x)**

**X**

Рисунок 7

1. Построим гистограмму равновероятностным способом (рисунок 8).

Для построения гистограммы составим интервальный статистический ряд, учитывая что частота попадания СВ X в в каждый j-ый интервал должна быть одинаковая (Таблица 5).

Таблица 5 – Интервальный статистический ряд

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | Aj | Bj | hj | vj | pj\* | fj\* |
| 1 | 0 | 0,115 | 0,115 | 10 | 0,1 | 0,870 |
| 2 | 0,115 | 0,235 | 0,12 | 10 | 0,1 | 0,833 |
| 3 | 0,235 | 0,5 | 0,265 | 10 | 0,1 | 0,377 |
| 4 | 0,5 | 0,595 | 0,095 | 10 | 0,1 | 1,053 |
| 5 | 0,595 | 0,765 | 0,17 | 10 | 0,1 | 0,588 |
| 6 | 0,765 | 0,975 | 0,21 | 10 | 0,1 | 0,476 |
| 7 | 0,975 | 1,345 | 0,37 | 10 | 0,1 | 0,270 |
| 8 | 1,345 | 1,865 | 0,52 | 10 | 0,1 | 0,192 |
| 9 | 1,865 | 2,47 | 0,605 | 10 | 0,1 | 0,165 |
| 10 | 2,47 | 4,32 | 1,85 | 10 | 0,1 | 0,054 |

**f\*(x)**

**X**

Рисунок 8

1. Вычислим точечные оценки математического ожидания и дисперсии:





1. Вычислим интервальные оценки математического ожидания и дисперсии (γ = 0,95):











1. По виду графика эмпирической функции распределения и гистограмм выдвигаем двухальтернативную гипотезу о законе распределения случайной величины X:

H0 – величина X распределена по экспоненциальному закону:



H1 – величина X не распределена по экспоненциальному закону



Таким образом получаем полностью определенную гипотетическую функцию распределения:



Проверим гипотезу о нормальном законе по критерию Пирсона . Вычислим значение критерия  на основе равноинтервального статистического ряда:



Теоретические вероятности попадания в интервалы вычислим по формуле:



Таблица 6 – Результаты расчётов

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 0,432 | 0,000 | 0,338 | 0,338 | 0,26 | 0,018 |
| 2 | 0,432 | 0,864 | 0,338 | 0,561 | 0,224 | 0,29 | 0,020 |
| 3 | 0,864 | 1,296 | 0,561 | 0,709 | 0,148 | 0,13 | 0,002 |
| 4 | 1,296 | 1,728 | 0,709 | 0,808 | 0,098 | 0,09 | 0,001 |
| 5 | 1,728 | 2,16 | 0,808 | 0,873 | 0,065 | 0,1 | 0,019 |
| 6 | 2,16 | 2,592 | 0,873 | 0,916 | 0,043 | 0,05 | 0,001 |
| 7 | 2,592 | 3,024 | 0,916 | 0,944 | 0,029 | 0,05 | 0,016 |
| 8 | 3,024 | 3,456 | 0,944 | 0,963 | 0,019 | 0,01 | 0,004 |
| 9 | 3,456 | 3,888 | 0,963 | 0,975 | 0,013 | 0 | 0,013 |
| 10 | 3,888 | +∞ | 0,975 | 1,000 | 0,025 | 0,02 | 0,001 |
| Сумма: | | | | | 1,000 | 1 | 0,094 |

Проверим правильность вычислений :



Вычислим критерий Пирсона:



Определим число степеней свободы:



Выбираем критическое значения критерия Пирсона из таблицы [1, стр.63] для степени свободы и заданного уровня значимости :



Так как условие выполняется, то гипотеза H0 об экспоненциальном законе распределения принимается (нет оснований ее отклонить).

8) Проверим гипотезу при помощи критерия Колмогорова. Для этого построим график гипотетической функции распределения в одной системе координат с эмпирической функцией (рисунок 6). В качестве опорных точек используем 10 значений из таблицы 6. По графику определим максимальное по модулю отклонение между функциями и :



Вычислим значение критерия Колмогорова:



Из таблицы Колмогорова [1, стр. 64] по заданному уровню значимости выбираем критическое значение критерия:



Так как условие выполняется, гипотеза *H­0* об экспоненциальном законе распределения принимается (нет оснований ее отклонить).

**Задача №10**

По выборке двухмерной случайной величины:

- вычислить точечную оценку коэффициента корреляции;

- вычислить интервальную оценку коэффициента корреляции ;

- проверить гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости ;

- вычислить оценки параметров *a0* и *a1* линии регрессии ;

- построить диаграмму рассеивания и линию регрессии.

Выборка:

( 4.77; 1.47) ( 1.77; 3.86) ( 5.30; 8.30) ( 0.25; 4.09) ( -2.78; 0.55) ( 3.61; 8.59) ( 1.48; 5.84) ( 1.58; 4.76)

( 8.01; 5.71) ( 4.23; 7.36) ( 9.80; 15.22) ( 4.01; 4.68) ( 2.22; 4.70) ( 0.23; 9.23) ( 6.81; 7.64) ( 0.70; 1.12)

( 5.76; 12.74) ( -4.64; -0.27) ( 2.41; 6.13) ( 3.22; 6.77) ( 5.68; 12.31) ( 2.05; 6.32) ( 4.03; 1.89) ( 8.78; 8.93)

( 5.30; 5.94) ( 5.35; 10.72) ( 4.05; 9.71) ( 6.55; 11.21) ( 9.43; 7.51) ( 6.88; 4.32) ( 3.96; 7.38) ( 0.18; 2.54)

( 3.31; 5.78) ( 5.51; 4.20) ( 11.42; 6.69) ( 3.87; 5.42) ( 4.93; 8.14) ( 7.13; 7.49) ( 4.68; 4.21) ( 5.62; 9.29)

( -1.35; 0.90) ( 0.16; 7.25) ( 6.28; 3.53) ( 9.93; 11.77) ( 5.62; 0.80) ( -2.01; 2.12) ( 0.44; 3.62) ( 5.97; 6.68)

( 9.27; 8.18) ( 1.55; 4.77)

Решение

Для удобства все промежуточные вычисления поместим в таблицу 7, Вычислим:

1. Оценки математических ожиданий по каждой переменной:



1. Оценки начальных моментов второго порядка по каждой переменной:



1. Оценку смешанного начального момента второго порядка:



1. Оценки дисперсий:



1. Оценку корреляционного момента:



Таблица 7 – Результаты промежуточных вычислений

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | x2 | y2­ | x\*y |
|  | 4,770 | 1,470 | 22,753 | 2,161 | 7,012 |
| 1,770 | 3,860 | 3,133 | 14,900 | 6,832 |
| 5,300 | 8,300 | 28,090 | 68,890 | 43,990 |
| 0,250 | 4,090 | 0,063 | 16,728 | 1,023 |
| -2,780 | 0,550 | 7,728 | 0,303 | -1,529 |
| 3,610 | 8,590 | 13,032 | 73,788 | 31,010 |
| 1,480 | 5,840 | 2,190 | 34,106 | 8,643 |
| 1,580 | 4,760 | 2,496 | 22,658 | 7,521 |
| 8,010 | 5,710 | 64,160 | 32,604 | 45,737 |
| 4,230 | 7,360 | 17,893 | 54,170 | 31,133 |
| 9,800 | 15,220 | 96,040 | 231,648 | 149,156 |
| 4,010 | 4,680 | 16,080 | 21,902 | 18,767 |
| 2,220 | 4,700 | 4,928 | 22,090 | 10,434 |
| 0,230 | 9,230 | 0,053 | 85,193 | 2,123 |
| 6,810 | 7,640 | 46,376 | 58,370 | 52,028 |
| 0,700 | 1,120 | 0,490 | 1,254 | 0,784 |
| 5,760 | 12,740 | 33,178 | 162,308 | 73,382 |
| -4,640 | -0,270 | 21,530 | 0,073 | 1,253 |
| 2,410 | 6,130 | 5,808 | 37,577 | 14,773 |
| 3,220 | 6,770 | 10,368 | 45,833 | 21,799 |
| 5,680 | 12,310 | 32,262 | 151,536 | 69,921 |
| 2,050 | 6,320 | 4,203 | 39,942 | 12,956 |
| 4,030 | 1,890 | 16,241 | 3,572 | 7,617 |
| 8,780 | 8,930 | 77,088 | 79,745 | 78,405 |
| 5,300 | 5,940 | 28,090 | 35,284 | 31,482 |
| 5,350 | 10,720 | 28,623 | 114,918 | 57,352 |
| 4,050 | 9,710 | 16,403 | 94,284 | 39,326 |
| 6,550 | 11,210 | 42,903 | 125,664 | 73,426 |
| 9,430 | 7,510 | 88,925 | 56,400 | 70,819 |
| 6,880 | 4,320 | 47,334 | 18,662 | 29,722 |
| 3,960 | 7,380 | 15,682 | 54,464 | 29,225 |
| 0,180 | 2,540 | 0,032 | 6,452 | 0,457 |
| 3,310 | 5,780 | 10,956 | 33,408 | 19,132 |
| 5,510 | 4,200 | 30,360 | 17,640 | 23,142 |
| 11,420 | 6,690 | 130,416 | 44,756 | 76,400 |
| 3,870 | 5,420 | 14,977 | 29,376 | 20,975 |
| 4,930 | 8,140 | 24,305 | 66,260 | 40,130 |
| 7,130 | 7,490 | 50,837 | 56,100 | 53,404 |
| 4,680 | 4,210 | 21,902 | 17,724 | 19,703 |
| 5,620 | 9,290 | 31,584 | 86,304 | 52,210 |
| -1,350 | 0,900 | 1,823 | 0,810 | -1,215 |
| 0,160 | 7,250 | 0,026 | 52,563 | 1,160 |
| 6,280 | 3,530 | 39,438 | 12,461 | 22,168 |
| 9,930 | 11,770 | 98,605 | 138,533 | 116,876 |
| 5,620 | 0,800 | 31,584 | 0,640 | 4,496 |
| -2,010 | 2,120 | 4,040 | 4,494 | -4,261 |
| 0,440 | 3,620 | 0,194 | 13,104 | 1,593 |
| 5,970 | 6,680 | 35,641 | 44,622 | 39,880 |
| 9,270 | 8,180 | 85,933 | 66,912 | 75,829 |
| 1,550 | 4,770 | 2,403 | 22,753 | 7,394 |
| Сумма: | 203,310 | 308,110 | 1409,1987 | 2475,940 | 1595,593 |

1. Точечную оценку коэффициента корреляции:



1. Вычислим интервальную оценку коэффициента корреляции с заданной надёжностью , По таблице функции Лапласа [1, стр, 61] :





Таким образом, доверительный интервал для коэффициента корреляции имеет вид:



1. Проверим гипотезу о корреляционной зависимости:



Так как объём выборки велик (n>50), то критерий вычислим по формуле:



По таблице функции Лапласа .

Так как , то гипотеза  отклоняется, т.е, величины и  коррелированны.

1. Вычислим оценки параметров линии регрессии:



Уравнение линии регрессии имеет вид:



Исходя из двухмерной выборки построим диаграмму рассеивания и линию регрессии  (рисунок 9):

Список литературы

1. А, И, Волковец, А, Б, Гуринович, А, В,Аксенчик, Теория вероятностей и математическая статистика: метод, указания по типовому расчету ,– Минск БГУИР, 2009, – 65 с,: ил,
2. А, И, Волковец, А, Б, Гуринович, Теория вероятностей и математическая статистика: Конспект лекций для студ, всех спец, и форм обучения,– Минск БГУИР, 2003, – 84 л,