**Задача №1.14**

Наудачу взяты два положительных числа  и , причем , . Найти вероятность того, что  и .

Решение

Построим в декартовой системе координат (рисунок 1) пространство элементарных событий , заданное неравенствами:



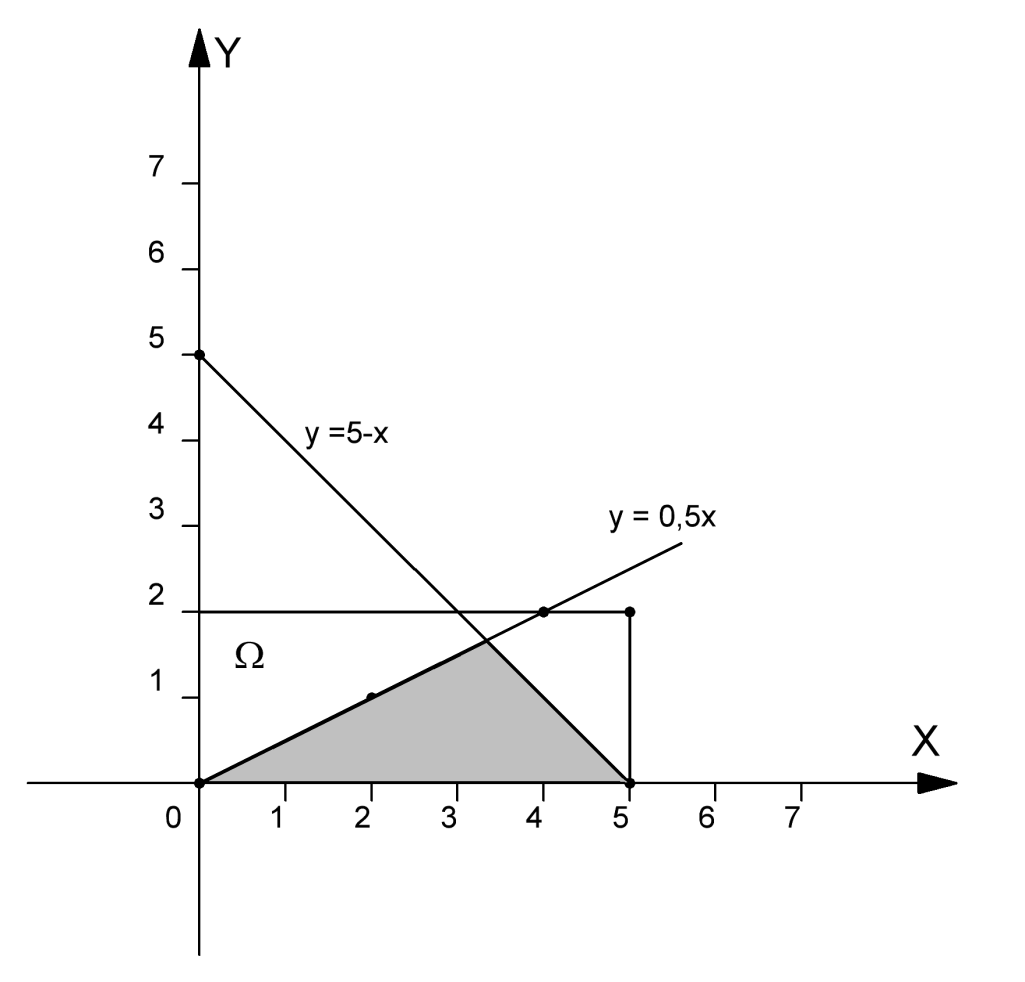


Рисунок 1

Область благоприятствующих исходов  определяется неравенствами:



Построим прямые по полученным неравенствам. Заштрихованная область описывает благоприятствующие исходы. Найдём площади областей  и :



Вероятность события  определится отношением площади области  к области :



**Ответ:**



**Задача № 2.12**

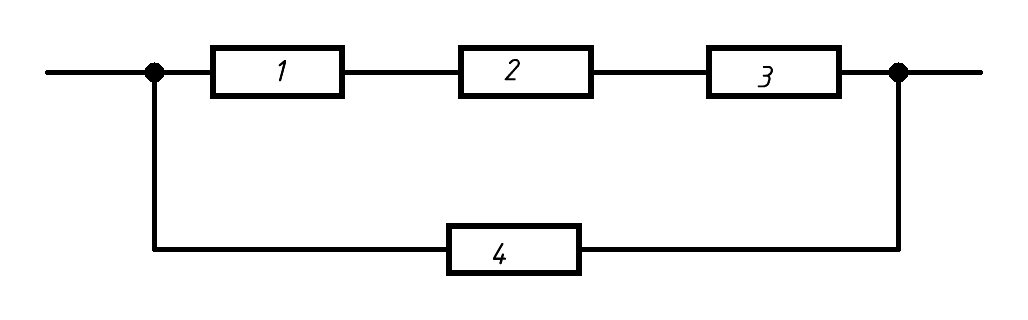
Дана схема соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом (рисунок 2). Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вероятности отказа элементов 1, 2, 3, 4, 5 соответственно равны q1=0,1; q2=0,2; q3=0,3; q4=0,4; q5=0,5. Найти вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход.

Рисунок 2

Решение

Сигнал не пройдёт со входа на выход, если одновременно откажут ветвь с элементами 1, 2, 3 и ветвь с элементом 4. Найдём вероятность отказа ветви, содержащей элементы 1, 2, 3:



Используя теорему сложения для  произвольных событий, найдём вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход:



**Ответ:** 

**Задача №3.5**

На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60% изготовлено на первом заводе и 40% - на втором. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных на первом заводе, 90 соответствуют стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных на втором заводе, соответствуют стандарту 80. Определить вероятность того, что взятая наугад лампочка с базы будет соответствовать стандарту.

Решение

Обозначим через А событие – взятая наугад на базе лампочка соответствует стандарту. Сделаем следующие предположения:

- взятая лампочка изготовлена на 1-ом заводе и соответствует стандарту:



- взятая лампочка изготовлена на 1-ом заводе и не соответствует стандарту:



- взятая лампочка изготовлена на 2-ом заводе и соответствует стандарту:



- взятая лампочка изготовлена на 2-ом заводе и не соответствует стандарту:



Событие достоверно при гипотезах , следовательно соответствующие условные вероятности равны единице:



По формуле полной вероятности, вероятность того, что взятая наугад на базе лампочка соответствует стандарту:



**Ответ:** 

**Задача №4.20**

При установившемся технологическом процессе 80% всей произведенной продукции оказывается продукцией высшего сорта. Найти наивероятнейшее число изделий высшего сорта в партии из 250 изделий.

Решение

Число изделий , вероятность появления изделия высшего сорта , вероятность противоположного события . Тогда наивероятнейшее число  изделий высшего сорта в партии из 250 изделий определим из условия:







**Ответ:** 

**Задача № 5.4**

Дискретная случайная величина Х может принимать одно из пяти фиксированных значений x1, x2, x3, x4, x5 с вероятностями p1, p2, p3, p4, p5 соответственно. Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины Х. Рассчитать и построить график функции распределения.

Таблица 1 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0,3 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,2 |

Решение

1. Математическое ожидание и дисперсию величины Х:







1. Построим ряд распределения СВ X:

Таблица 2 –Ряд распределения СВ X

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | >5 |
|  | 0,3 | 0,3 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0 |
|  | 0 | 0,3 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 1 |













Построим график функции распределения (рисунок 3):

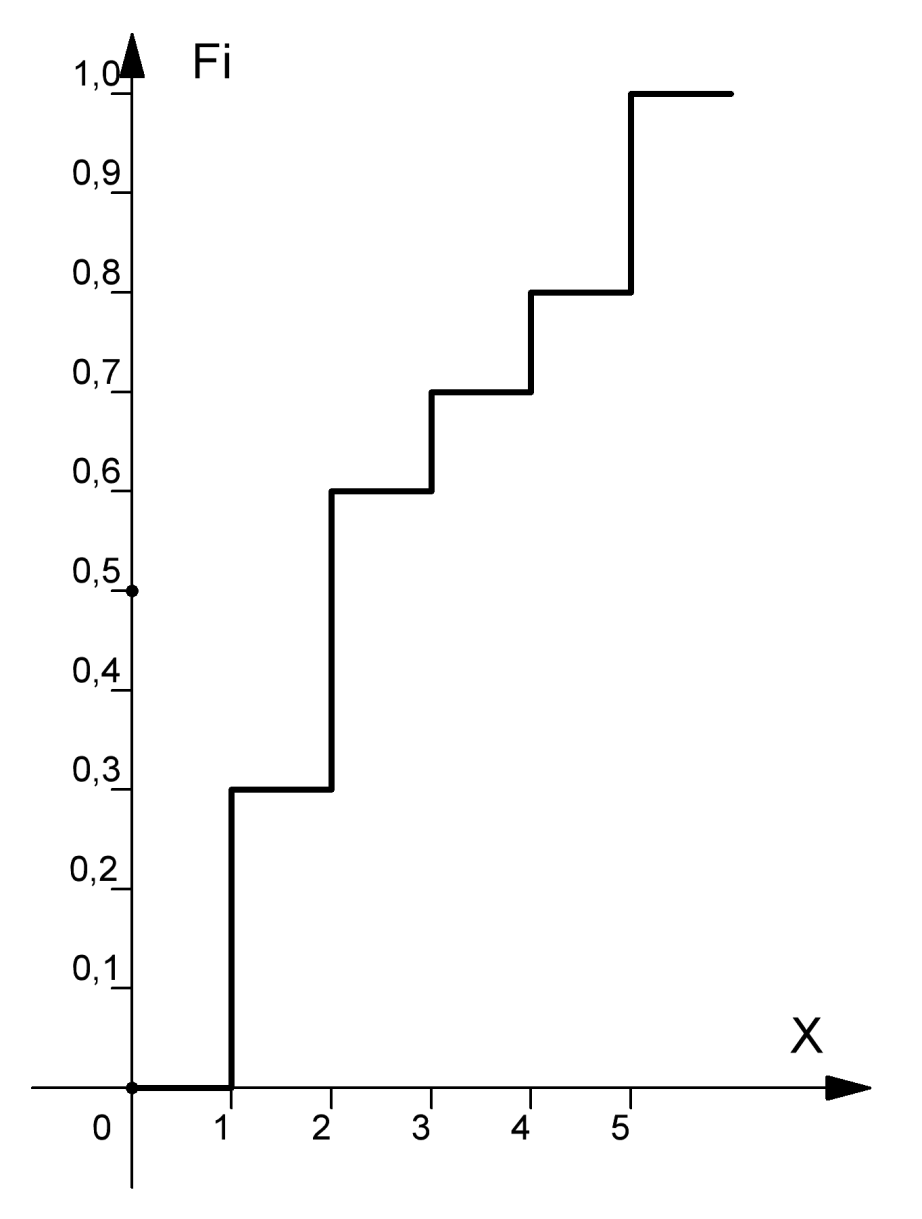


Рисунок 3

**Задача № 6.24**

Случайная величина *Х* задана плотностью вероятности:



Определить константу *С*, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения величины Х, а также вероятность ее попадания в интервал.



Решение

1. Вычислим константу исходя из условия нормировки:



Отсюда константа :



1. Определим математическое ожидание СВ *Х:*



1. Определим дисперсию СВ *Х:*



1. Определим функцию распределения величины Х:









1. Определим вероятность попадания величины Х в заданный интервал :



**Ответ:** 

**Задача № 7.27**

Случайная величина *Х* распределена равномерно на интервале [*a,b*]. Построить график случайной величины *Y=ϕ(X)* и определить плотность вероятности *g(y).*



Решение

1. Построим график случайной величины  для в интервале значений  и определим диапазон значений  (Рисунок 4): .
2. В зависимости от числа обратных функций выделим следующие интервалы для :

обратных функций не существует





 обратных функций не существует

1. Вычислим модули производных обратных функций:



**Y**

**X**

Рисунок 4

Так как случайная величина *Х* распределена равномерно на интервале , то её плотность вероятности равна:



1. Определим плотность вероятности величины :



**Задача № 8.27**

Двухмерный случайный вектор (*Х, У*) равномерно распределен внутри выделенной жирными прямыми линиями на рисунок 5 области B. Двухмерная плотность вероятности *f(x,y)* одинакова для любой точки этой области B:

Вычислить коэффициент корреляции между величинами X и Y.

Таблица 3 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | y1 | y2 |
| 8.27 | 0 | 2 | 6 | 4 | 6 | 8 | 1 | 2 |



Рисунок 5

Решение

1. Построим область B согласно координатам из таблицы 3 и рисунку 5.

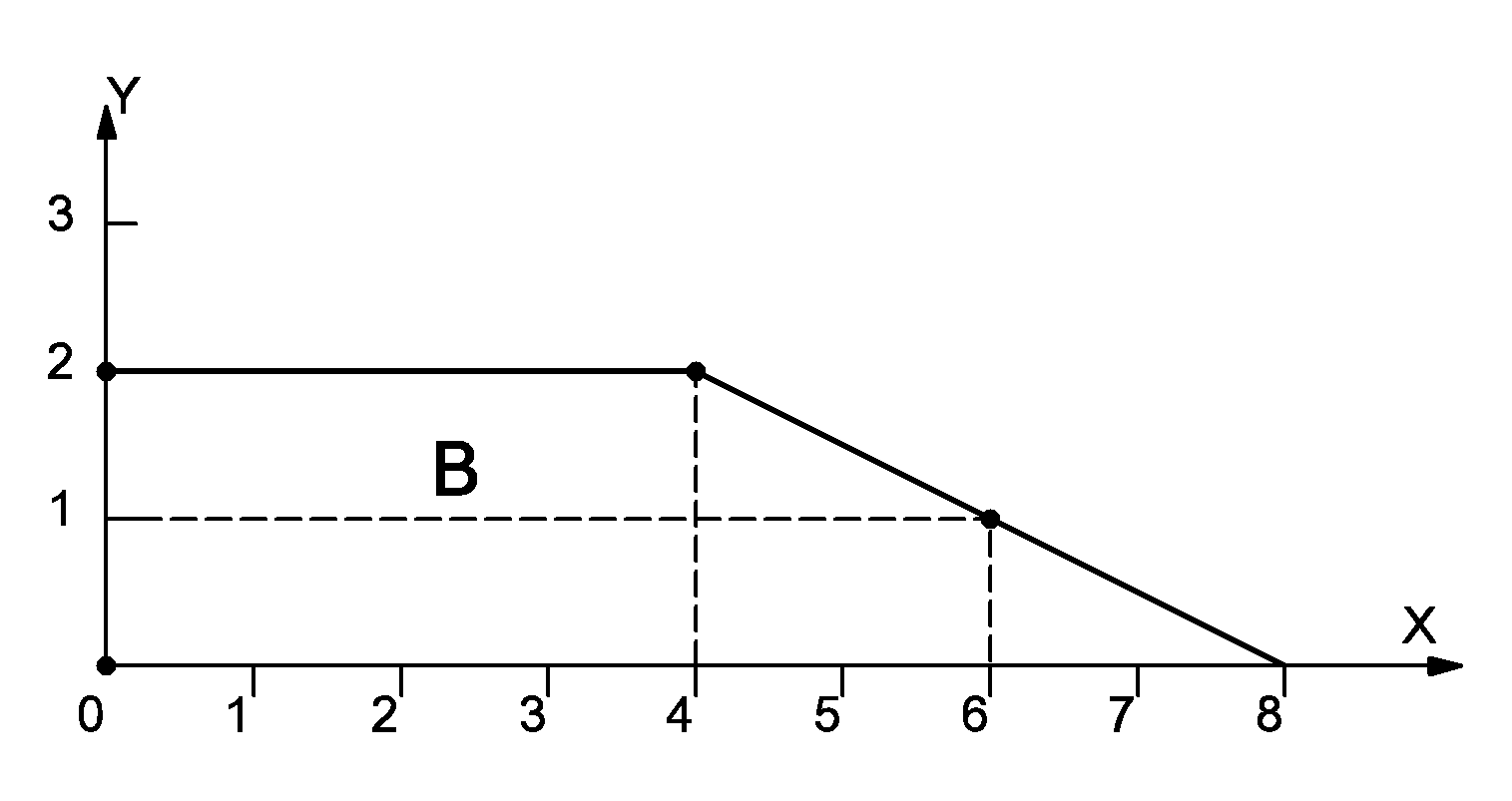


Рисунок 6

Совместная плотность вероятности примет вид:



1. Найдём константу  из условия нормировки:





Таким образом:



Проверим полученный результат геометрически. Объём тела, ограниченного поверхностью распределения В и плоскостью xOy равен 1, т.е:



Следовательно, константа  рассчитана верно.

1. Вычислим математические ожидания:









1. Вычислим дисперсии:













1. Вычислим корреляционный момент:







1. Вычислим коэффициент корреляции между величинами X и Y:



**Ответ:** 

**Задача № 9**

По выборке одномерной случайной величины:

- получить вариационный ряд;

- построить график эмпирической функции распределения *F\*(x)*;

- построить гистограмму равноинтервальным способом;

- построить гистограмму равновероятностным способом;

- вычислить точечные оценки математического ожидания и дисперсии;

- вычислить интервальные оценки математического ожидания и дисперсии (γ = 0,95);

- выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины и проверить ее при помощи критерия согласия *χ2*  и критерия Колмогорова (*α* = 0,05).

Одномерная выборка:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2,46 | 3,12 | 4,68 | 0,09 | 6,56 | 0,73 | 1,34 | 4,73 | 3,36 | 2,92 | 1,19 | 0,36 | 6,82 | 0,36 | 1,97 |
| 3,14 | 1,03 | 7,68 | 2,73 | 4,66 | 0,07 | 0,23 | 1,77 | 2,73 | 1,28 | 0,37 | 5,17 | 10,34 | 7,02 | 10,13 |
| 5,74 | 0,02 | 1,71 | 0,22 | 0,09 | 0,57 | 0,45 | 1,91 | 3,69 | 4,97 | 7,16 | 2,54 | 0,41 | 8,73 | 0,56 |
| 2,90 | 0,11 | 2,76 | 0,26 | 0,88 | 2,52 | 0,08 | 0,96 | 2,81 | 0,10 | 1,74 | 1,90 | 5,21 | 2,26 | 1,34 |
| 2,53 | 9,54 | 5,05 | 2,20 | 0,35 | 2,99 | 3,36 | 7,85 | 0,43 | 9,90 | 3,80 | 3,20 | 7,55 | 2,23 | 2,01 |
| 1,31 | 0,37 | 1,92 | 0,46 | 2,51 | 0,47 | 0,11 | 0,56 | 1,42 | 0,02 | 11,89 | 9,67 | 10,69 | 5,56 | 5,75 |
| 0,21 | 0,27 | 6,05 | 16,75 | 2,28 | 2,04 | 1,91 | 3,17 | 3,61 | 12,76 |  |  |  |  |  |

Размер выборки 

Решение

1. Получим вариационный ряд из исходного:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0,02 | 0,02 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,09 | 0,10 | 0,11 | 0,11 | 0,21 | 0,22 | 0,23 | 0,26 | 0,27 | 0,35 |
| 0,36 | 0,36 | 0,37 | 0,37 | 0,41 | 0,43 | 0,45 | 0,46 | 0,47 | 0,56 | 0,56 | 0,57 | 0,73 | 0,88 | 0,96 |
| 1,03 | 1,19 | 1,28 | 1,31 | 1,34 | 1,34 | 1,42 | 1,71 | 1,74 | 1,77 | 1,90 | 1,91 | 1,91 | 1,92 | 1,97 |
| 2,01 | 2,04 | 2,20 | 2,23 | 2,26 | 2,28 | 2,46 | 2,51 | 2,52 | 2,53 | 2,54 | 2,73 | 2,73 | 2,76 | 2,81 |
| 2,90 | 2,92 | 2,99 | 3,12 | 3,14 | 3,17 | 3,20 | 3,36 | 3,36 | 3,61 | 3,69 | 3,80 | 4,66 | 4,68 | 4,73 |
| 4,97 | 5,05 | 5,17 | 5,21 | 5,56 | 5,74 | 5,75 | 6,05 | 6,56 | 6,82 | 7,02 | 7,16 | 7,55 | 7,68 | 7,85 |
| 8,73 | 9,54 | 9,67 | 9,90 | 10,13 | 10,34 | 10,69 | 11,89 | 12,76 | 16,75 |  |  |  |  |  |

2) Построим график эмпирической функции непосредственно по вариационному ряду, так как *F\*(x)* – неубывающая и практически все ступеньки графика имеют одинаковую величину  (Рисунок 7).

1. Построим гистограмму равноинтервальным способом (рисунок 8).

Для построения гистограммы составим интервальный статистический ряд, учитывая что длина у всех интервалов должна быть одинаковая.

 - количество интервалов;

 - ширина интервала;

- частота попадания СВ X в j-ый интервал;

 - статистическая плотность в j-ом интервале.

Таблица 4 – Интервальный статистический ряд

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | Aj | Bj | hj | vj | pj\* | fj\* |
| 1 | 0,02 | 1,693 | 1,673 | 37 | 0,37 | 0,221 |
| 2 | 1,693 | 3,366 | 1,673 | 32 | 0,32 | 0,191 |
| 3 | 3,366 | 5,039 | 1,673 | 7 | 0,07 | 0,042 |
| 4 | 5,039 | 6,712 | 1,673 | 8 | 0,08 | 0,048 |
| 5 | 6,712 | 8,385 | 1,673 | 6 | 0,06 | 0,036 |
| 6 | 8,385 | 10,058 | 1,673 | 4 | 0,04 | 0,024 |
| 7 | 10,058 | 11,731 | 1,673 | 3 | 0,03 | 0,018 |
| 8 | 11,731 | 13,404 | 1,673 | 2 | 0,02 | 0,012 |
| 9 | 13,404 | 15,077 | 1,673 | 0 | 0 | 0,000 |
| 10 | 15,077 | 16,75 | 1,673 | 1 | 0,01 | 0,006 |

**f\*(x)**

**X**

Рисунок 8

1. Построим гистограмму равновероятностным способом (рисунок 9).

Для построения гистограммы составим интервальный статистический ряд, учитывая что частота попадания СВ X в в каждый j-ый интервал должна быть одинаковая (Таблица 5).

Таблица 5 – Интервальный статистический ряд

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | Aj | Bj | hj | vj | pj\* | fj\* |
| 1 | 0,02 | 0,215 | 0,195 | 10 | 0,1 | 0,513 |
| 2 | 0,215 | 0,42 | 0,205 | 10 | 0,1 | 0,488 |
| 3 | 0,42 | 0,995 | 0,575 | 10 | 0,1 | 0,174 |
| 4 | 0,995 | 1,835 | 0,84 | 10 | 0,1 | 0,119 |
| 5 | 1,835 | 2,27 | 0,435 | 10 | 0,1 | 0,230 |
| 6 | 2,27 | 2,855 | 0,585 | 10 | 0,1 | 0,171 |
| 7 | 2,855 | 3,65 | 0,795 | 10 | 0,1 | 0,126 |
| 8 | 3,65 | 5,65 | 2 | 10 | 0,1 | 0,050 |
| 9 | 5,65 | 8,29 | 2,64 | 10 | 0,1 | 0,038 |
| 10 | 8,29 | 16,75 | 8,46 | 10 | 0,1 | 0,012 |

**f\*(x)**

**X**

Рисунок 9

1. Вычислим точечные оценки математического ожидания и дисперсии:





1. Вычислим интервальные оценки математического ожидания и дисперсии (γ = 0,95):











1. По виду графика эмпирической функции распределения и гистограмм выдвигаем двухальтернативную гипотезу о законе распределения случайной величины X:

H0 – величина X распределена по экспоненциальному закону



H1 – величина X не распределена по экспоненциальному закону



Таким образом получаем полностью определенную гипотетическую функцию распределения:



Проверим гипотезу об экспоненциальном законе по критерию Пирсона . Вычислим значение критерия  на основе равноинтервального статистического ряда:



Теоретические вероятности попадания в интервалы вычислим по формуле:



Таблица 6 – Результаты расчётов

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | Aj | Bj | F0(Aj) | F0(Bj) | pj | pj\* |  |
| 1 | 0 | 1,693 | 0,000 | 0,403 | 0,403 | 0,37 | 0,0026748540 |
| 2 | 1,693 | 3,366 | 0,403 | 0,641 | 0,238 | 0,32 | 0,0279474173 |
| 3 | 3,366 | 5,039 | 0,641 | 0,784 | 0,143 | 0,07 | 0,0374355781 |
| 4 | 5,039 | 6,712 | 0,784 | 0,870 | 0,086 | 0,08 | 0,0004256073 |
| 5 | 6,712 | 8,385 | 0,870 | 0,922 | 0,052 | 0,06 | 0,0013318420 |
| 6 | 8,385 | 10,058 | 0,922 | 0,953 | 0,031 | 0,04 | 0,0025707838 |
| 7 | 10,058 | 11,731 | 0,953 | 0,972 | 0,019 | 0,03 | 0,0068855517 |
| 8 | 11,731 | 13,404 | 0,972 | 0,983 | 0,011 | 0,02 | 0,0068845411 |
| 9 | 13,404 | 15,077 | 0,983 | 0,990 | 0,007 | 0 | 0,0067373948 |
| 10 | 15,077 | 100 | 0,990 | 1,000 | 0,010 | 0,01 | 0,0000019552 |

Проверим правильность вычислений :



Вычислим критерий Пирсона:



Определим число степеней свободы:



Выбираем критическое значения критерия Пирсона из таблицы [1, стр.63] для степени свободы и заданного уровня значимости :



Так как условие выполняется, гипотеза H0 об экспоненциальном законе распределения принимается (нет оснований ее отклонить).

1. Проверим гипотезу при помощи критерия Колмогорова. Для этого построим график гипотетической функции распределения в одной системе координат с эмпирической функцией (рисунок 7). В качестве опорных точек используем 10 значений F0(Aj) из таблицы 6. По графику определим максимальное по модулю отклонение между функциями и :



Вычислим значение критерия Колмогорова:



Из таблицы Колмогорова [1, стр. 64] по заданному уровню значимости выбираем критическое значение критерия:



Так как условие выполняется, гипотеза H0 об экспоненциальном законе распределения принимается (нет оснований ее отклонить).

**Задача №10**

По выборке двухмерной случайной величины:

- вычислить точечную оценку коэффициента корреляции;

- вычислить интервальную оценку коэффициента корреляции ;

- проверить гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости ;

- вычислить оценки параметров *a0* и *a1* линии регрессии ;

- построить диаграмму рассеивания и линию регрессии.

Выборка:

( -0,01; -5,46) ( 3,42; -4,85) ( 5,28; 1,73) ( -1,65; 2,48) ( 4,66; 2,05) ( 2,49; -1,68) ( 1,91; -0,06) ( 8,29; -1,87)

( 0,25; 0,08) ( 4,66; -0,91) ( -0,95; -0,53) ( 6,33; -2,00) ( -1,46; -3,24) ( 3,32; 5,53) ( -2,74; 1,93) ( -2,38; 4,46)

( 2,45; -1,28) ( 0,41; 3,94) ( 4,63; 0,83) ( 2,99; 1,49) ( 0,49; 7,08) ( 3,46; 2,28) ( 3,76; 2,40) ( 3,53; 1,77)

( -0,42; 4,52) ( 5,57; 0,80) ( -4,83; 2,56) ( -3,01; 1,66) ( 5,13; 0,64) ( 4,20; -1,15) ( 4,11; -0,74) ( -0,47; 5,29)

( 1,59; 8,16) ( 3,42; -2,21) ( 1,69; -0,20) ( 4,34; 0,68) ( 0,30; 1,61) ( 4,87; -1,51) ( 5,57; -2,45) ( 0,80; 1,32)

( -1,34; 4,38) ( 2,87; 0,69) ( -0,91; 1,35) ( 0,05; -1,07) ( 1,88; -3,52) ( -1,31; -0,88) ( 1,90; 3,65) ( 0,82; 4,08)

( 0,01; 2,17) ( 1,89; 3,54)

Решение

Для удобства все промежуточные вычисления поместим в таблицу 7. Вычислим:

1. Оценки математических ожиданий по каждой переменной:



1. Оценки начальных моментов второго порядка по каждой переменной:



1. Оценку смешанного начального момента второго порядка:



1. Оценки дисперсий:



1. Оценку корреляционного момента:



Таблица 7 – Результаты промежуточных вычислений

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | x2 | y2 | x\*y |
| -4,83 | 2,56 | 23,3289 | 6,5536 | -12,3648 |
| -3,01 | 1,66 | 9,0601 | 2,7556 | -4,9966 |
| -2,74 | 1,93 | 7,5076 | 3,7249 | -5,2882 |
| -2,38 | 4,46 | 5,6644 | 19,8916 | -10,6148 |
| -1,65 | 2,48 | 2,7225 | 6,1504 | -4,092 |
| -1,46 | -3,24 | 2,1316 | 10,4976 | 4,7304 |
| -1,34 | 4,38 | 1,7956 | 19,1844 | -5,8692 |
| -1,31 | -0,88 | 1,7161 | 0,7744 | 1,1528 |
| -0,95 | -0,53 | 0,9025 | 0,2809 | 0,5035 |
| -0,91 | 1,35 | 0,8281 | 1,8225 | -1,2285 |
| -0,47 | 5,29 | 0,2209 | 27,9841 | -2,4863 |
| -0,42 | 4,52 | 0,1764 | 20,4304 | -1,8984 |
| -0,01 | -5,46 | 0,0001 | 29,8116 | 0,0546 |
| 0,01 | 2,17 | 0,0001 | 4,7089 | 0,0217 |
| 0,05 | -1,07 | 0,0025 | 1,1449 | -0,0535 |
| 0,25 | 0,08 | 0,0625 | 0,0064 | 0,02 |
| 0,30 | 1,61 | 0,0900 | 2,5921 | 0,483 |
| 0,41 | 3,94 | 0,1681 | 15,5236 | 1,6154 |
| 0,49 | 7,08 | 0,2401 | 50,1264 | 3,4692 |
| 0,80 | 1,32 | 0,6400 | 1,7424 | 1,056 |
| 0,82 | 4,08 | 0,6724 | 16,6464 | 3,3456 |
| 1,59 | 8,16 | 2,5281 | 66,5856 | 12,9744 |
| 1,69 | -0,20 | 2,8561 | 0,0400 | -0,338 |
| 1,88 | -3,52 | 3,5344 | 12,3904 | -6,6176 |
| 1,89 | 3,54 | 3,5721 | 12,5316 | 6,6906 |
| 1,90 | 3,65 | 3,6100 | 13,3225 | 6,935 |
| 1,91 | -0,06 | 3,6481 | 0,0036 | -0,1146 |
| 2,45 | -1,28 | 6,0025 | 1,6384 | -3,136 |
| 2,49 | -1,68 | 6,2001 | 2,8224 | -4,1832 |
| 2,87 | 0,69 | 8,2369 | 0,4761 | 1,9803 |
| 2,99 | 1,49 | 8,9401 | 2,2201 | 4,4551 |
| 3,32 | 5,53 | 11,0224 | 30,5809 | 18,3596 |
| 3,42 | -4,85 | 11,6964 | 23,5225 | -16,587 |
| 3,42 | -2,21 | 11,6964 | 4,8841 | -7,5582 |
| 3,46 | 2,28 | 11,9716 | 5,1984 | 7,8888 |
| 3,53 | 1,77 | 12,4609 | 3,1329 | 6,2481 |
| 3,76 | 2,40 | 14,1376 | 5,7600 | 9,024 |
| 4,11 | -0,74 | 16,8921 | 0,5476 | -3,0414 |
| 4,20 | -1,15 | 17,6400 | 1,3225 | -4,83 |
| 4,34 | 0,68 | 18,8356 | 0,4624 | 2,9512 |
| 4,63 | 0,83 | 21,4369 | 0,6889 | 3,8429 |
| 4,66 | 2,05 | 21,7156 | 4,2025 | 9,553 |
| 4,66 | -0,91 | 21,7156 | 0,8281 | -4,2406 |
| 4,87 | -1,51 | 23,7169 | 2,2801 | -7,3537 |
| 5,13 | 0,64 | 26,3169 | 0,4096 | 3,2832 |
| 5,28 | 1,73 | 27,8784 | 2,9929 | 9,1344 |
| 5,57 | 0,80 | 31,0249 | 0,6400 | 4,456 |
| 5,57 | -2,45 | 31,0249 | 6,0025 | -13,6465 |
| 6,33 | -2,00 | 40,0689 | 4,0000 | -12,66 |
| 8,29 | -1,87 | 68,7241 | 3,4969 | -15,5023 |

1. Точечную оценку коэффициента корреляции:



1. Вычислим интервальную оценку коэффициента корреляции с заданной надёжностью . По таблице функции Лапласа [1, стр. 61] :





Таким образом, доверительный интервал для коэффициента корреляции имеет вид:



1. Проверим гипотезу о корреляционной зависимости:



Так как объём выборки велик (n>50), то критерий вычислим по формуле:



По таблицы функции Лапласа .

Так как , то гипотеза  не ­принимается , т.е. величины и  коррелированны.

1. Вычислим оценки параметров линии регрессии:



Уравнение линии регрессии имеет вид:



Исходя из двухмерной выборки построим диаграмму рассеивания и линию регрессии  (рисунок 10).