**1.** **Комплексные числа и операции над ними. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на области.**

 **Комплексные числа и операции над ними:**

 Комплексным числом *z* называется выражение , где *a* и *b* – действительные числа, *i* – мнимая единица, которая определяется соотношением: При этом число *a* называется действительной частью числа *z* (*a = Re z*), а *b*- мнимой частью (*b = Im z*). Если *a =Re z =0,* то число *z* будет чисто мнимым, если *b = Im z = 0*, то число *z* будет действительным. Определение. Числа  и называются комплексно – сопряженными**.** Определение. Два комплексных числа  и  называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.Из геометрических соображений видно, что . Тогда комплексное число можно представить в виде: 

При этом величина *r* называется модулемкомплексного числа, а угол наклона ϕ -аргументом комплексного числа. 

1.и 

2.

В тригонометрической форме: 

3.  **i4k=1; i4k+1=i;i4k+2=-1; i4k+3=-i**

В тригонометрической форме: 

4.Возвед. в степень:  - формулой Муавра.

5. Извлечение корня из комплексного числа. 



 **Многочлен**: Определение. Функция вида *f(x)* называется целой рациональной функцией от *х*.Теорема Безу.*При делении многочлена f(x) на разность x – a получается остаток, равный f(a).* Следствие. *Если, а – корень многочлена, т.е. f(a) = 0, то многочлен f(x) делится на (х – а) без остатка.*

 Определение. Если уравнение имеет вид *Р(х)* = 0, где *Р(х)* – многочлен степени *n*, то это уравнение называется алгебраическим уравнением степени *n*.Теорема. (**Основная теорема алгебры**) *Всякая целая рациональная функция f(x) имеет, по крайней мере, один корень, действительный или комплексный.*Теорема. *Всякий многочлен n – ой степени разлагается на n линейных множителей вида (x – a) и множитель, равный коэффициенту при xn.*

Теорема. *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

**2. Формула Тейлора.Разложение по формуле Тейлора многочлена, основные разложения элементарных функций!**

**Формула Тейлора:**

**** ,(Rn(x) - остаточный член формулы Тейлора).

 Ост. член в форме Лагранжа:

 

Ост. член в форме Коши



Ост. член в форме Пеано:



**Основные разложения функций:**

 



Ряд Тейлора:



**Основные Разложение в ряд Тейлора:**







**Формулой Маклорена** называется формула Тейлора при а = 0:





**3.Дифференциальное исследование функции одной переменной. Монотонность.Локальные экстремумы, наиб и наим значения. Исследование функции на выпуклость.Точки перегиба,выпуклость. Ассимптоты.Схема.**

**Возрастание и убывание функций.**

Теорема. 1) *Если функция f(x) имеет производную на отрезке [a, b] и возрастает на этом отрезке, то ее производная на этом отрезке неотрицательна, т.е. f′(x) ≥ 0 и наоборот*

 2) *Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на промежутке (а, b), причем f′(x) > 0 для a < x < b, то эта функция возрастает на отрезке [a, b]. и наоборот.*

**Точки экстремума.**

Определение. Функция f(x) имеет в точке х1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку х1. Функция f(x) имеет в точке х2 минимум, если f(x2 +Δx) > f(x2) при любом Δх (Δх может быть и отрицательным).

Определение. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема. (необходимое условие существования экстремума) *Если функция f(x) дифференцируема в точке х = х1 и точка х1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.* Следствие. Обратное утверждение неверно.

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

 Теорема. (Достаточные условия существования экстремума)

 *Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку х1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки х1).*

 *Если при переходе через точку х1 слева направо производная функции f′(x) меняет знак с “+” на “-“, то в точке х = х1 функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с “-“ на “+”- то функция имеет минимум.*

 Теорема. *Если f′(x1) = 0, то функция f(x) в точке х = х1 имеет максимум, если f′′(x1)<0 и минимум, если f′′(x1)>0.*

**Выпуклость и вогнутость кривой.**

Точки перегиба**.** Определение. Кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (а, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется выпуклой, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется вогнутой

 Теорема 1. *Если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции f(x) отрицательна, то кривая y = f(x) обращена выпуклостью вверх (выпукла).*

 Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется точкой перегиба.

 Теорема 2. *Пусть кривая определяется уравнением y = f(x). Если вторая производная f′′(a) = 0 или f′′(a) не существует и при переходе через точку х = а f′′(x) меняет знак, то точка кривой с абсциссой х = а является точкой перегиба.*

**Асимптоты.** При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты х точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

 Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Вертикальные асимптоты.

 Из определения асимптоты следует, что если или  или , то прямая х = а – вертикальная асимптота кривой y = f(x).

Наклонные асимптоты. Итак, прямая y = kx + b – асимптота кривой  ; .Горизонтальные асимптоты являются частным случаем наклонных асимптот при k =0.

**Схема исследования функций** Область опред. 2.т.разрыва., т. пересеч с осями координат., вертик асимптоты 3.четностья, переодичность. 4. Монотоность и экстремум.5.Выпуклость, т. перегиба.6.

Ассимптоты(накл). 7. График.

**4. Неопределенный интеграл.Первообразная.Неопределенный интеграл и его свойства.Основные методы интегрирования.**

Множество всех пepвoобpaзныx функций F(x)+С для ƒ(х) называется неопределенным интегралом от функции ƒ(х) и обозначается символом ∫ ƒ(х) dx.

Таким образом, по определению

∫ƒ(x)dx= F(x)+C.

Здесь ƒ(х) называется подынтегральнoй функцией, ƒ(x)dx — подынтегральным выражением, х - переменной интегрирования, ∫ - знаком неопределенного интеграл

Функция F(x) называется первообразной функции ƒ(х) на интервале (а; b), если для любого х є (а;b) выполняется равенство: F'(x)=ƒ(x)

Если функция F(x) является первообразной функции ƒ(х) на (а;b), то множество всех первообразных для ƒ(х) задается формулой F(x)+С, где С - постоянное число.

**Свойства:**

1. 

2. 

3. 

4.  где u, v, w – некоторые функции от х.



**Методы интегрирования :**

1.Метод непосредственного интегрирования

2. Способ подстановки (замены переменных).

 x = ϕ(t) и dx = ϕ′(t)dt получается:

 

3. Интегрирование по частям. ;

**5. Рациональные функции и их интегрирование.**

Рn(х)= a0хn+a1x n-1+….+а n-1 х+аn,

где n - натуральное число, αi (i=0,1,.., n) - постоянные коэффициенты, называется многочленом (или целой рациональной функцией). Число n называется степенью многочлена

Корнем многочлена называется такое значение х0 (вообще говоря, комплексное) переменной х, при котором многочлен обpaщaeтcя в нуль, т. е. Рn(хо)=0.

Теорема 1: Любое целая рац функция имеет хотя бы один корень: действ или комп.

Теорема 2: Всякий многочлен Рn(х) можно представить в виде: Рn(x)= αn(х-х1)(х-х2)... (х-хn),

где х1, х2,...,хn - корни многочлена, αn - коэффициент многочлена при хn.

Следствие: Рац ф. n-oй степени не может иметь более n корней.

Теорема 3: Если x0 является для Pn(x) корнем кратности k , то для многочлена Pn’(x), x0 явялется корнем кратности k-1.

Теорема 4: Если многочлен Рn(х) с действительными коэффициентами имеет комплексный корень a+ib, то он имеет и сопряженный корень a-ib

Теорема Гауса: Любяа действ рац. ф. степени >2 разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т. е. многочлен Рn(х) можно представить в виде

Рn(х)=αn(х-x1)k1(х-х2)k2... (х-хr)kr × (х2 +p1x+q1)s1... (х2+рmх+qm)sm.

Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т. е. ƒ(х) =  , где Рm(х) - многочлен степени т, а Qn(x) - многочлен степени n.

Рациональная дpобь называется правильной если степень числителя меньше степени знаменателя, т. е. m<n; в противном случае (если т ип ) рациональная дробь называется неправильной.

Всякую неправильную рациональную дробь  можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена L(x) и правильной рациональной дроби  т. е. Простейшие рац. дроби:

1.  2. 3. 4. 

 ,где x2 +px+q – не им действ корней.

Всякую правильную рациональную дpобь , знаменатель которой разложен на множители

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

 При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. **метод неопределенных коэффициентов** **метод произвольных значений**.

**6.Тригонометрические функции и основные методы интегрирования**

Вычисление неопределенных интегралов типа сводится к вычислению интегралов от paциoнaльнoй фyнкции подстановкой  которая называется универсальной. 

Частные случаи:

1.∫R(sinx)coxdx ; t=sinx; coxdx=dt



2.∫R(cox)sinxdx; t=cosx;-dt=sinxdx



3.∫R(tgx)dx; t=tgx; dx=dt/1+t2



4.∫R(sinx,cosx)dx ; sin и cos входят в подинтегр. Ф. в четных четвертях

 t=tgx; cos2x=1/1+t2; sin2x=t2/1+t2 ; dx=dt/1+t2

Интегралы типа ∫sinmх•cosnx dx

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

1) подстановка sinx=t, если n - целое положительное нечетное число;

2) подстановка cosx=t, если m - целое положительное нечетное число;

3) формулы понижения порядка: cos2x=1/2(1+cos2x), sin2x =1/2(1-cos 2x), sinx-cosx =1/2 sin2x, если тип - целые неотрицательные четные числа;

4) подстановка tg х=t, если m+n - есть четное отрицательное целое число.

**7. Интегрирование простейших иррациональный функций. Дифференциальный бином.Теорема Чебышева.**

**Интегрирование некоторых иррациональных функций.**

*Интеграл вида где n- натуральное число.* С помощью подстановки  функция рационализируется.



Тогда 

 Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

 Определение: **Биноминальным дифференциалом** называется выражение

*xm(a + bxn)pdx*

где *m, n,* и *p* – рациональные числа.

 **Метод Чебышева:**

1. Если *р* – целое число, то интеграл рационализируется с помощью подстановки

, где λ - общий знаменатель *m* и *n*.

1. Если  - целое число, то интеграл рационализируется подстановкой

, где *s* – знаменатель числа *р*.

3) Если  - целое число, то используется подстановка , где *s* – знаменатель числа *р*.

**8. Определенный интеграл, его св-ва, необходимое и достаточное условие интегрируемости.**

**Определенный интеграл.**

 Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]

 Сумма  называется нижней интегральной суммой, а сумма  – верхней интегральной суммой.

Т.к. mi ≤ Mi, то n ≤ n, а m(b – a) ≤ n ≤ n ≤ M(b – a)

 Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε.

x0 < ε1 < x1, x1 < ε < x2, … , xn-1 < ε < xn.

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется интегральной суммой для функции f(x) на отрезке [a, b].

Следовательно, 



 Определение: Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что *maxΔxi→ 0* и произвольном выборе точек εi интегральная сумма  стремится к пределу S, который называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

 Обозначение : 

а – нижний предел, b – верхний предел, х – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

 Определение: Если для функции f(x) существует предел  то функция называется интегрируемой на отрезке [a, b].

 Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1. 
2.  3). 

 5).Если f(x) ≤ ϕ(x) на отрезке [a, b] a < b, то

 6).Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:



 7).Теорема о среднем. Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что

 Обобщенная теорема о среднем. Если функции f(x) и ϕ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция ϕ(х) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что



**9. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Формула Ньютона – Лейбница. Формула замены переменой и интегрирования по частям для определенного интеграла.**

Пусть в интеграле  нижний предел а = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

 Обозначим  = Ф(х). Найдем производную функции Ф(х) по переменному верхнему пределу х. 

 Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

 Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

 Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

 Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то



это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

 Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = F(x).

**Замена переменных.**

 Пусть задан интеграл , где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = ϕ(t).

 Тогда если

1) ϕ(α) = а, ϕ(β) = b

2) ϕ(t) и ϕ′(t) непрерывны на отрезке [α, β]

3) f(ϕ(t)) определена на отрезке [α, β], то



 Тогда 

 Пример.



**Интегрирование по частям**

Если функции u = ϕ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям:



**10. Геометрическое приложение определенного интеграла: вычисление площади фигуры, длины дуги кривой,объема с помощью определенного интеграла**

**Вычисление площадей плоских фигур.**

 Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ох, т.е. f(x) < 0, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ох, т.е. f(x) > 0, то площадь имеет знак “+”.

 Для нахождения суммарной площади используется формула .

**Вычисление длины дуги кривой.**

Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как .

Тогда длина дуги равна .

Из геометрических соображений: 

Т.е. 

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем

, где х = ϕ(t) и у = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и х = ϕ(t), у = ψ(t) и z = Z(t), то Если кривая задана в **полярных координатах**, то, ρ = f(ϕ) **Вычисление объемов тел:** Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки хi разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения [xi-1, xi] функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно Mi и mi.

 Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси х, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны MiΔxi и miΔxi здесь Δxi = xi -xi-1.

 Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно  и .При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:  Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

**11. Несобственные интеграллы первого и второго рода.Определение , примеры ,признаки сходимости.** Несоб инт, т. е. опред ин от непрер ф., но с беск пром интег или опред инт с конеч промеж интег, но от ф., имющ. на нем беск разрыв. Инт с беск пром интегр (**нес инт I рода**) Пусть ƒ(х) непр на пром [а;+∞). Если сущ конеч предел  то его назыв несобст интегралом 1 родаи обозначают  Таким образом, по определению В этом случае говорят, что несоб интеграл схо-ся. Если же указанный предел не сущ или он бесконечен,то говорят, что интеграл расх-ся. Аналогичноопределяется несобственный интеграл на промежутке (-∞; b]:

Примеры:

1. сход

2.   расх  **Признаки**:

1.Сравнения : Если на промежутке [а; +∞) непрерывные функции ƒ(х) и φ(х) удовлетворяют условию 0 ≤ ƒ(х) ≤ φ(х), то из сходимости следует сходимость 

а из расходимости интеграла  следует расх 

2. Если существует предели φ(х) > 0), то интегралы одновременно оба сходятся или оба расходятся

 **Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)**

Пусть функция ƒ(х) непрерывна на промежутке [а; b) и имеет бесконечный разрыв при х = b. Если существует конечный пределто его называют несобственным интегралом второго рода и обозначаютТаким образом,поопределению 

Если предел в правой части существует, то несобственный интегралсходится. Если же указанный предел не существует или бесконечен,то говорят, что интеграл расходится.

Пример:  Решение: При х = 0 функция терпит бесконечный разрыв; 

Признаки сходимости для 2-го рода: 1. Сравнение : Пусть на [а; b) ƒ(х) и φ(х) непр, при х = b терпят беско разрыв и удовлет условию 0 ≤ ƒ(х) ≤ φ(x). Как в в 1-ом роде только промеж интегр от a до b 2. Пусть ƒ(х) и φ(х) непр на [а; b) и в т. х = b терпят разрыв. Если существует пределто одновременно сходятся или одновременно расходятся.

**12. Определение ф.м.п. Область определения ф.м.п. Предел и непрерывность ф.м.п. Точки и линии разрыва.**

**Функции нескольких переменных**

 При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

 **Определение:** Если каждой паре независимых друг от друга чисел (х, у) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

z = f(x, y)**Определение:** Если паре чисел (х, у) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**. **Определение:** **Областью определения** функции z называется совокупность пар (х, у), при которых функция z существует.

**Определение:** **Окрестностью точки** М0(х0, у0) радиуса r называется совокупность всех точек (х, у), которые удовлетворяют условию . **Определение:** Число А называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки М(х, у) к точке М0(х0, у0), если для каждого числа ε > 0 найдется такое число r >0, что для любой точки М(х, у), для которых верно условие

также верно и условие . Записывают:  **Определение:** Пусть точка М0(х0, у0) принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке М0(х0, у0), если

  (1)

причем точка М(х, у) стремится к точке М0(х0, у0) произвольным образом.

 Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции f(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1. Функция z = f(x, y) не определена в точке М0(х0, у0).
2. Не существует предел .
3. Этот предел существует, но он не равен f( x0, y0).

**Свойство.** Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой и

 ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка

N(x0, y0, …), такая, что для остальных точек верно неравенство

f(x0, y0, …) ≥ f(x, y, …) а также точка N1(x01, y01, …), такая, что для всех остальных точек верно неравенство f(x01, y01, …) ≤ f(x, y, …)

тогда f(x0, y0, …) = M – **наибольшее значение** функции, а f(x01, y01, …) = m – **наименьшее значение** функции f(x, y, …) в области D.

 Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

 **Свойство.** Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки μ ∈ [m, M] существует точка

N0(x0, y0, …) такая, что f(x0, y0, …) = μ.

 Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

 **Свойство.** Функция f(x, y, …), непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, если существует такое число К, что для всех точек области верно неравенство . **Свойство.** Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа ε существует такое число Δ > 0, что для любых двух точек (х1, y1) и (х2, у2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство 

**13. Дифференцируемость ф.м.п. Частные производные и полный дифференциал. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости ф.м.п. Геометрический смысл частных производных. Частные производные и диференциалы высших порядков. Теорема Шварца.**

**Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.**

 Определение. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку М(х, у) и зададим приращение Δх к переменной х. Тогда величина Δxz = f( x + Δx, y) – f(x, y) называется частным приращением функции по х.

Можно записать  . Тогда  называется частной производной функции z = f(x, y) по х. Обозначение:  Геометрическим смыслом частной производной (допустим ) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке N0(x0, y0, z0) к сечению поверхности плоскостью у = у0.

**Полное приращение и полный дифференциал.**

 Определение. Для функции f(x, y) выражение Δz = f( x + Δx, y + Δy) – f(x, y) называется полным приращением. Определение. Выражение  называется полным приращением функции f(x, y) в некоторой точке (х, у), где α1 и α2 – бесконечно малые функции при Δх → 0 и Δу → 0 соответственно. Определение: Полным дифференциалом функции z = f(x, y) называется главная линейная относительно Δх и Δу приращения функции Δz в точке (х, у).  .Для функции произвольного числа переменных: 

**Геометрический смысл полного дифференциала.**

 Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (х0, у0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (х0, у0) к точке (х0+Δх, у0+Δу).

**Частные производные высших порядков. :** Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные  и  тоже будут определены в той же области или ее части. Будем называть эти производные частными производными первого порядка.

Производные этих функций будут частными производными второго порядка.

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков. Определение. Частные производные вида и т.д. называются смешанными производными. **Теорема Шварца** :

Если частные производные высших порядков ф.м.п. непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования = между собой.

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.

**14. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности!**

Пусть N и N0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN0. Плоскость, которая проходит через точку N0, называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN0.

 Определение. **Нормалью** к поверхности в точке N0 называется прямая, проходящая через точку N0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

 В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

 Если поверхность задана уравнением z = f(x, y), где f(x, y) – функция, дифференцируемая в точке М0(х0, у0), **касательная плоскость** в точке N0(x0,y0,(x0,y0)) существует и имеет уравнение:

.

 **Уравнение нормали к поверхности в этой точке**:



**Геометрическим смыслом** полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (х0, у0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (х0, у0) к точке (х0+Δх, у0+Δу).

 Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

**16. Скалярное поле и его характеристики.Линии ур-ня, производые по направлению,градиент скалярного поля.**

Если каждой точке пространства ставится в соответствие скалярная величина , то возникает скалярное поле (например, поле температуры, поле электрического потенциала). Если введены декартовы координаты, то обозначают также или  Поле может быть плоским, если  центральным  (сферическим), если  цилиндрическим, если 

Поверхности и линии уровня: Свойства скалярных полей можно наглядно изучать с помощью поверхностей уровня. Это поверхности в пространстве, на которых принимает постоянное значение. Их уравнение: . В плоском скалярном поле линиями уровня называют кривые, на которых поле принимает постоянное значение: В отдельных случаях линии уровня могут вырождаться в точки, а поверхности уровня в точки и кривые.

Производная по направлению и градиент скалярного поля:

Пусть  единичный вектор с координатами   - скалярное поле. Производная по направлению характеризует изменение поля в данном направлении и вычисляется по формуле  Производная по направлению представляет собой скалярное произведение вектора  и вектора с координатами , который называется градиентом функции и обозначается.Поскольку , где угол между и , то вектор указывает направление скорейшего возрастания поля а его модуль равен производной по этому направлению. Так как компоненты градиента являются частными производными, нетрудно получить следующие свойства градиента:











**17. Экстремумы ф.м.п.Локальный экстремум ф.м.п., необходимые и достаточные условия его существования . Наибольшее и наименьшее значение ф.м.п. в огран. замкнутой области.**

Пусть функция z = ƒ(х;у) определена в некоторой области D, точка N(x0;y0)

Точка (х0;у0) называется точкой максимума функции z=ƒ(х;у), если существует такая d-окрестность точки (х0;у0), что для каждой точки (х;у), отличной от (хо;уо), из этой окрестности выполняется неравенство ƒ(х;у)<ƒ(хо;уо). Аналогично определяется точка минимума функции: для всех точек (х; у), отличных от (х0;у0), из d-окрестности точки (хо;уо) выполняется неравенство: ƒ(х;у)>ƒ(х0;у0). Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум и минимум функции называют ее экстремумами. Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют локальный (местный) характер: значение функции в точке (х0;у0) сравнивается с ее значениями в точках, достаточно близких к (х0; у0). В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

**Необходимые(1) и достаточное(2) условия существования:**

**(1)** Если в точке N(x0;y0) дифференцируемая функция z=ƒ(х;у) имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: ƒ'x(х0;у0)=0, ƒ'y(х0;у0)=0. Замечание. Функция может иметь экстремум в точках, где хотя бы одна из частных производных не существует. Точка, в которой частные производные первого порядка функции z ≈ ƒ(х; у) равны нулю, т. е. f'x=0, f'y=0, называется стационарной точкой функ ции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются критическими точками

 **(2)**Пусть в стационарной точке (хо;уо) и некоторой ее окрестности функция ƒ(х;у) имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке (х0;у0) значения A=f''xx(x0;y0), В=ƒ''xy(х0;у0), С=ƒ''уy(х0;у0). ОбозначимТогда:

1. если Δ > 0, то функция ƒ(х;у) в точке (х0;у0) имеет экстремум: максимум, если А < 0; минимум, если А > 0;

2. если Δ < 0, то функция ƒ(х;у) в точке (х0;у0) экстремума не имеет.

3.В случае Δ = 0 экстремум в точке (х0;у0) может быть, может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

**Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области**

Пусть функция z=ƒ(х;у) определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда она достигает в некоторых точках D своего наибольшего М и наименьшего т значений (т. н. глобальный экстремум). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области D , или в точках, лежащих на границе области.

Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области D функции z = ƒ(х;у) состоит в следующем:

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие D , и вычислить значения функции в них;

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции z = ƒ(х;у) на границах области;

3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее М и наименьшее т.

**18. Условные экстремумы ф.м.п. Методы решения задач на условыне экстремумы.**

Пусть функция **** определена в некоторой области  и в этой области задана кривая уравнением  . Условным экстремумом функции двух переменных  называют ее экстремум при условии, что точки берутся на заданной кривой. Если из уравнения кривой можно, например, выразить  , то задача о нахождении условного экстремума сводится к исследованию на экстремум функции одной переменной 

**Методы решения задач на условный экстремум**:

1. Если представляется возможным, то из уравнения связи  В результате функция  преобразуется в функцию одной переменной 

2.Метод множителей Лагранжа:

Если уравнение  не разрешимо ни относительно  ни относительно  , то рассматривают функцию Лагранжа  . Необходимым условием существования условного экстремума функции  при условии  является равенство нулю всех частных производных функции Лагранжа: 

**Пример**: Найти экстремум функции f(x, y) = xy, если уравнение связи:

2x + 3y – 5 = 0









 Таким образом, функция имеет экстремум в точке .

Использование функции Лагранжа для нахождения точек экстремума функции называется также **методом множителей Лагранжа.**

Выше мы рассмотрели функцию двух переменных, однако, все рассуждения относительно условного экстремума могут быть распространены на функции большего числа переменных.

**19. Понятие об эмпирических формулах.Метод наименьших квадратов.**

**Эмпирические формулы** — формулы, полученные из опыта посредством наблюдения и эксперимента. Имея серию исходных данных х1, x2, . . ., хn, в результате эксперимента получают соответствующие этим исходным данным результаты: y1, y2, ..., yn . Ставят задачу об отыскании такой функции из некоторого заранее заданного класса функций, чтобы отклонение этой функции от реальной зависимости было по возможности мало. Полученная зависимость называется Э. ф. Задача нахождения Э. ф. неоднозначна. Мерой отклонения функции f (х) от реальной зависимости считают



**МНК:**

Пусть в качестве исходных данных имеем таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | x1 | x2 | … | xn |
| y | y1 | y2 | … | yn |

содержащую статистические данные, или данные экспериментов. Если в качестве X выступает время, то имеем динамический ряд (тогда  размещены в возрастающем порядке). Необходимо получить аналитическую зависимость  (\*) , которая наилучшим образом описывает начальные данные. Словосочетание «наилучшим образом», будем понимать в смысле минимума суммы квадратов отклонений значений , данных в таблице от, рассчитанных по (\*):(\*\*).Определение зависимости (\*) необходимо, в т.ч., и для нахождения что уже представляет собой задачу прогнозирования.

 Нанесём точки из таблицы на координатную плоскость и сделаем предположение, что зависимость (\*) есть линейной  , а отклонения от прямой вызваны Определим уравнение прямой (найдем значения коэффициентов a и b).

Функция  .Продифференцируем по a и по b. Получим:





Для того, чтобы найти минимум функции E(a,b), приравняем нулю производные и упростим систему:



 Находим а и b и подставляем.

**20.Двойной интеграл.Его свойства.Вычисление двойного интеграла в декартовой и полярной системах координат.Геометрическое приложение двойного интеграла.**

Двойные интегралы.

 **Определение:** Если при стремлении к нулю шага разбиения области Δ интегральные суммы  имеют конечный предел, то этот предел называется **двойным интегралом** от функции f(x, y) по области Δ.



 Т.к. деление области интегрирования произвольно, также произволен и выбор точек Рi, то, считая все площади Si одинаковыми, получаем формулу:



Условия существования двойного интеграла.

Сформулируем достаточные условия существования двойного интеграла.

 **Теорема.** *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, то двойной интеграл  существует.*

Свойства двойного интеграла.

1) 

2) 

3) Если Δ = Δ1 + Δ2, то



4) Теорема о среднем. Двойной интеграл от функции f(x, y) равен произведению значения этой функции в некоторой точке области интегрирования на площадь области интегрирования.



5) Если f(x, y) ≥ 0 в области Δ, то **.

 Вычисление двойного интеграла.

 **Теорема.** *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями х = a, x = b, (a < b), y = ϕ(x), y = ψ(x), где ϕ и ψ - непрерывные функции и*

*ϕ ≤ ψ, тогда*



 **Теорема.** *Если функция f(x, y) непрерывна в замкнутой области Δ, ограниченной линиями y = c, y = d (c < d), x = Φ(y), x = Ψ(y) (Φ(y) ≤ Ψ(y)), то*

**20.** Выражение  называется **определителем Якоби** или **Якобианом** функций f(u, v) и ϕ(u, v).

 **Формула замены переменной в двойном интеграле :**

**Двойной интеграл в полярных координатах.**

 Воспользуемся формулой замены переменных:



При этом известно, что 

В этом случае Якобиан имеет вид:



Тогда 

Здесь τ - новая область значений, 

**Приложение двойного интеграла:**

Вычисление площади  .

Вычисление объемов тел. V=

Нахождение массы плоской пластинки m = , где - ф. задающая плотность данной пластинки

**21.Тройной интеграл.Его свойства.Вычисление двойного интеграла в декартовой цилиндрической и сферической системах координат.Геометрическое приложение двойного интеграла**



 Суммирование производится по области v, которая ограничена некоторой поверхностью ϕ(x, y, z) = 0.



Здесь х1 и х2 – постоянные величины, у1 и у2 – могут быть некоторыми функциями от х или постоянными величинами, z1 и z2 – могут быть функциями от х и у или постоянными величинами.

**Замена переменных в тройном интеграле.**





**Декартава система :**

, Д – проекция области V на плоскость oxy. Если Д явл. Прав. В направлении oy, и огран снизу y=y1(x). Сверху y=y2(x), а по бокам х=а и х=b/

**Цилиндрическая система координат.**

 z

 0

 θ x

 y





 Для представления тройного интеграла в цилиндрических координатах вычисляем Якобиан



**21.**



Итого: 

**Сферическая система координат.**

 z

 P

 ρ

 ϕ

 0 θ x

 y









**Геометрическое приложение:**



**ФОРМУЛЫ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  Интеграл |  Значение  |  Интеграл |  Значение |
| 1 |  |  -ln⏐cosx⏐+C | 9 |  |  ex + C |
| 2 |  |  ln⏐sinx⏐+ C | 10 |  |  sinx + C |
| 3 |  |   | 11 |  |  -cosx + C |
| 4 |  |   | 12 |  |  tgx + C |
| 5 |  |  | 13 |  |  -ctgx + C |
| 6 |  | ln | 14 |  |  arcsin + C |
| 7 |  |  | 15 |  |  |
| 8 |  |   | 16 |  |   |

****