1. Ур. Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.

Под электромагнитным полем (ЭМП) следует понимать среду, пространственно-временное состояние которой полностью определяется четырьмя векторами:

$\bar{E}$ *(x,y,z,t)* – вектор напряженности электрического поля.

$\bar{D}$ *(x,y,z,t)* – вектор электрического смещения.

$\bar{B}$ *(x,y,z,t)* – вектор индукции магнитного поля.

$\bar{H}$ *(x,y,z,t)* – вектор напряженности магнитного поля.

Будем рассматривать ЭМП в объеме V с граничной поверхностью S, на которой происходит скачок свойств среды. Во всех внутренних точках V, т.е. точках, не принадлежащих S, векторы поля непрерывны вместе с первой и второй производными по координатам, а также конечны. Эти векторы

$$1)\ rot\ \vec{H} = \vec{\delta} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\ ; \qquad 2)\ rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$3)\ div\ \vec{D} = \rho; \qquad 4)\ div\ \vec{B} = 0;$$

удовлетворяют четырем уравнениям Максвелла (УМ):

Первое УМ – обобщение закона Ампера, в соответствии с которым:

$$rot\ \vec{H} = \vec{\delta}$$

В первом УМ член $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ - плотность тока смещения.

Для перехода к интегральной форме записи первого УМ воспользуемся теоремой Стокса для некоторой поверхности *S*, опирающейся на контур l . Проинтегрируем обе части уравнения по *S*:

$$\int_S rot\, \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{\delta}\, d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$

Применяя к левой части теорему Стокса, получим:

$$\oint_\ell \vec{H} d\vec{l} = I + I_{см}$$

Где I – электрический ток через поверхность S, $I_{\text{см}}$ - ток смещения через эту поверхность.

Второе УМ – обобщение закона электромагнитной индукции.

Интегральная форма этого уравнения получается из дифференциальной тем же путем, что и первое уравнение. В результате применения теоремы Стокса в левой части получаем:

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = -\int_{s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_{s} \vec{B} d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \Phi_{м}$$

Третье уравнение Максвелла является обобщением уравнения Гаусса-Кулона на случай произвольной среды. Применяя интегрирование по *V* с границей *S* к обеим частям уравнения и используя теорему Остроградского-Гаусса к левой части, получим:

$$\oint_{S} \vec{D} d\vec{S} = \int_{V} \rho \, dV = q$$

Четвертое уравнение Максвелла утверждает отсутствие магнитных за рядов и одновременно постулирует его справедливость для любой среды. Те же действия, как и в предыдущем случае, дают интегральную форму этого уравнения:

$$\oint_{S} \vec{B} d\vec{S} = 0$$

2. Закон сохранения заряда и его связь с током смещения в 1-м УМ.

Центральным постулатом теории Максвелла является закон сохранения заряда. Полагается, что сумма электрических в мировом пространстве постоянна. Заряды не возникают и не исчезают. Причиной изменения величины заряда в данном объеме V является перемещение зарядов, т.е. электрический ток через ограничивающую этот объем поверхность S. Иначе говоря, можно утверждать для V с границей S:

$$\frac{dq}{dt} = -I$$

Представим q и I как:

$$q = \int_V \rho \, dV, \;\; I = \oint_S \vec{\delta} \, d\vec{S}$$

Тогда:

$$\oint_S \vec{\delta} \, d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV$$

Применим к левой части теорему Остроградского-Гаусса и положим, что V не зависит от t, при этом получим:

$$\int_V \left(div\,\vec{\delta} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

Поскольку объем произволен, последнее равенство может выполнятся только при условии:

$$div\,\vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Данное условие называется уравнением непрерывности.

3. Материальные уравнения и классификация сред.

В общем случае зависимости $\bar{D} = \bar{D}(\bar{E}), \bar{B} = \bar{B}(H), \bar{\delta} = \bar{\delta}(\bar{E})$ имеют линейный характер.

Рассмотрим векторную функцию $\bar{D}(\bar{E})$ и разложим её в ряд Маклорена:

$$\vec{D}(\vec{E}) = \vec{D}(0) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{E}}\Big|_0 \vec{E} + \frac{1}{2}\vec{E}^T \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial \vec{E}^2}\Big|_0 \vec{E} + \ldots$$

Здесь

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = (E_i), \; \vec{E}^T = \begin{pmatrix} E_x, & E_y, & E_z \end{pmatrix}, \; \frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{E}} = \left(\frac{\partial D_j}{\partial E_i} \right), \; \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial \vec{E}^2} = \left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial E_j \partial E_k} \right)$$

Рассмотрим линейный случай, когда квадратичным и высшими членами разложения можно пренебречь:

$$\vec{D}(\vec{E}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial \vec{E}}\Big|_0 \vec{E}$$

Или в подробной записи:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial D_x}{\partial E_x} & \frac{\partial D_x}{\partial E_y} & \frac{\partial D_x}{\partial E_z} \\ \frac{\partial D_y}{\partial E_x} & \frac{\partial D_y}{\partial E_y} & \frac{\partial D_y}{\partial E_z} \\ \frac{\partial D_z}{\partial E_x} & \frac{\partial D_z}{\partial E_y} & \frac{\partial D_z}{\partial E_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

Обозначим:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial D_x}{\partial E_x}, \; \varepsilon_{xy} = \frac{\partial D_x}{\partial E_y}, \; \varepsilon_{xz} = \frac{\partial D_x}{\partial E_z}, \ldots, \; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial D_z}{\partial E_z}$$

Введем тензор:

$$\vec{\varepsilon}_a = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Используя тензор диэлектрической проницаемости, уравнение для линейных сред можно записать в следующей форме:

$$\vec{D} = \vec{\vec{\varepsilon}}_a \vec{E}$$

Аналогичным образом вводятся тензоры магнитной проницаемости и удельной проводимости:

$$\vec{B} = \vec{\vec{\mu}}_a \vec{H}, \ \ \vec{\delta} = \vec{\vec{\sigma}} \vec{E}.$$

Среда называется изотропной, если $\varepsilon_{ij} = 0$, при условии:
$i \neq j, \ \ \varepsilon_{ii} = \varepsilon_a, \ \ \mu_{ij} = 0 \ \text{при} \ i \neq j, \ \ \mu_{ii} = \mu_a \ \ \text{и} \ \ \sigma_{ij} = 0 \ \ \text{при} \ \ i \neq j, \ \ \sigma_{ii} = \sigma$

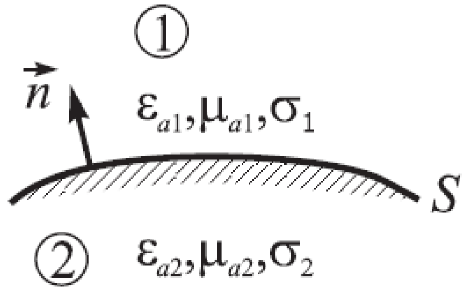
Тогда материальные уравнения имеют вид:

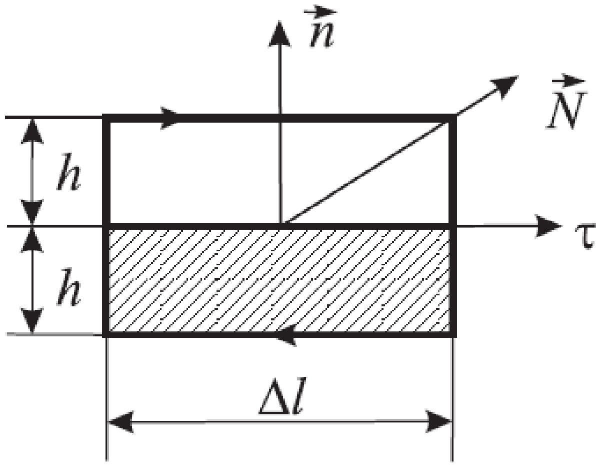
$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}, \ \vec{B} = \mu_a \vec{H}, \ \vec{\delta} = \sigma \vec{E}$$

Среда называется однородной, если $\vec{\vec{\varepsilon}}_a, \ \vec{\vec{\mu}}_a, \ \vec{\vec{\sigma}}$ не зависят от координат в рассматриваемом объеме.

В противном случае среда называется неоднородной.

<u>4. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов ЭМП</u>





Рассмотрим границу раздела двух сред:

Для тангенциальных составляющий электрического поля:

Выделим элементарный прямоугольник вблизи границы, которая отвечает следующим условиям:

1. границу в его пределах можно считать плоской.
2. среды 1 и 2 в пределах этого участка однородны.
3. поля в пределах этого участка не изменяются.

$$\bar{n} - \text{ вектор нормали к } S;$$
$$\bar{\tau} - \text{ тангенциальный вектор к } S;$$
$$\bar{N} - \text{ вектор бинормали.}$$

Данные три вектора образуют правую тройку:

$$\bar{\tau} = [\bar{N}, \bar{n}]$$

Запишем второе УМ в интегральной форме:

$$\oint_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell} = -\int_{s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS\vec{N}$$

Применим его к выделенному участку, используя его свойства:

$$\Delta\ell\, \vec{\tau}\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) + \Delta_{hE} = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} h\Delta\ell\vec{N}$$

Перейдем к пределу $h \to 0$, учитывая, что при этом на границе $\overline{E_{1,2}}$ не $\to \infty$ и $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ не $\to \infty$ получим:

$$\vec{\tau}\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0$$

т. е. тангенциальные составляющие $\bar{E}$ непрерывны при переходе границы раздела любых двух сред.

Для тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля:

Запишем первое УМ в интегральной форме:

$$\oint_{\ell} \vec{H} d\vec{\ell} = \int_{s} \vec{\delta} \; d\vec{SN} + \int_{s} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \; d\vec{SN}$$

Применим данное уравнение к ранее рассмотренному участку, используя три его свойства:

$$\Delta\ell \, \vec{\tau}\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) + \Delta_{hH} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \vec{D}_i}{\partial t} h \Delta\ell \vec{N} + \sum_{i=1}^{2} \vec{\delta}_i \Delta\ell h \vec{N}$$

Перейдем к пределу $h \to 0$, при этом $\overline{H_{1,2}}$ не $\to \infty$ и $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ не $\to \infty$ на S.

Но для тока такое утверждение неверно, поскольку при определенной идеализации ток может протекать по поверхности, не занимая объем (поверхностный ток). Такая ситуация возникает в случае, когда одна из сред предполагается идеально проводящей. Введем понятие поверхностного тока:

$$\vec{\delta}_S = \lim_{h \to 0} h \vec{\delta}$$

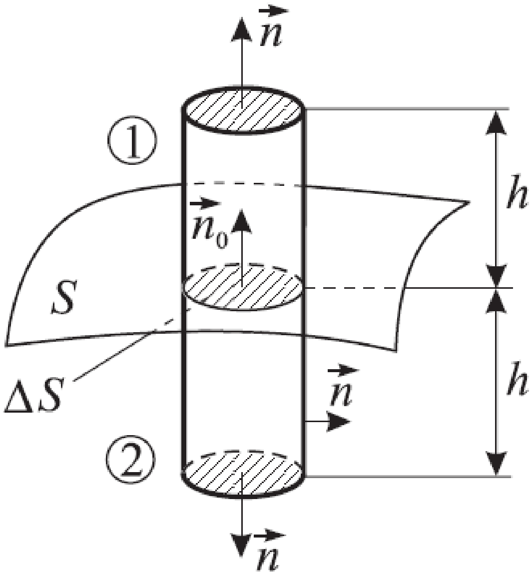
С учетом всего этого, получаем:

$$\vec{\tau}\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{\delta}_S \vec{N}$$

т.е. разрыв тангенциальных составляющих $\bar{H}$ равен поверхностному электрическому току.

5. Граничные условия для нормальных составляющих вектора ЭМП.

Рассмотрим следующий цилиндрический объем. Объем будем считать элементарным со следующими признаками:



1. в пределах $\Delta V - \Delta S$ плоская.
2. в пределах ΔV среды 1 и 2 однородные.
3. в пределах ΔV поля в средах 1 и 2 не изменяются.

Запишем третье УМ в интегральной форме:

$$\oint_S \vec{D} dS \vec{n} = q = \int_{\Delta V} \rho \, dV$$

Поскольку существуют поверхностные заряды, введем понятие о плотности поверхностного заряда:

$$\rho_S = \lim_{h \to 0} h\rho$$

Перепишем третье УМ, учитывая все признаки элементарности ΔV:

$$\vec{n}_0 \Delta S \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) + \Phi^e_{бок} = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \Delta S h$$

Перейдя к пределу $h \to 0$, учитывая $\overline{D_{1,2}}$ не $\to \infty$, и поэтому $\Phi^e_{\text{бок}} \to \infty$, получим:

$$\vec{n}_0 \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \rho_S$$

т.е. разрыв нормальных составляющих $\overline{D}$ равен поверхностной плотности электрического заряда на граничной поверхности.

30. Уравнения возбуждения волновода сторонними токами.

Представим вектора поля и тока в виде суммы поперечных и продольных составляющих:

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}^t + \dot{\vec{E}}^\ell, \quad \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}^t + \dot{H}^\ell, \quad \dot{\vec{\delta}}_e = \dot{\vec{\delta}}_e^t + \dot{\vec{\delta}}_e^\ell, \quad \dot{\vec{\delta}}_m = \dot{\vec{\delta}}_m^t + \dot{\vec{\delta}}_m^\ell$$

Решение для $\dot{\vec{E}}^t, \dot{\vec{H}}^t$ можно искать в виде:

$$\dot{\vec{E}}^t = \sum_S \left(\dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S^t + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{E}}_{-S}^t\right) \qquad \dot{\vec{H}}^t = \sum_S \left(\dot{C}_S \dot{\vec{H}}_S^t + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{H}}_{-S}^t\right)$$

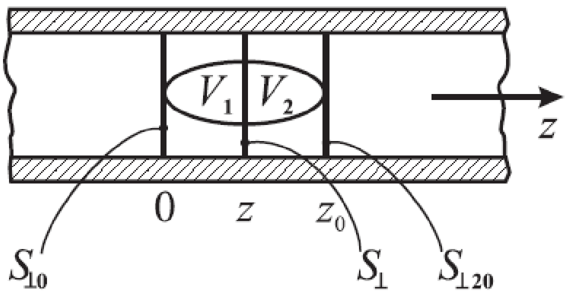
Используя поперечные и продольные составляющие уравнений Максвелла можно показать что разложение для продольных составляющих имеет вид:

$$\dot{\vec{E}}^\ell = \sum_S \left(\dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S^\ell + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{E}}_{-S}^\ell\right) - \frac{\dot{\vec{\delta}}_e^\ell}{j\omega\dot{\varepsilon}_a} \qquad \dot{\vec{H}}^\ell = \sum_S \left(\dot{C}_S \dot{\vec{H}}_S^\ell + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{H}}_{-S}^\ell\right) - \frac{\dot{\vec{\delta}}_m^\ell}{j\omega\dot{\mu}_a}$$

Полное разложение поля теперь может быть записано в виде:

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \sum_S \left(\dot{C}_S \dot{\vec{E}}_S + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{E}}_{-S}\right) - \dfrac{\dot{\vec{\delta}}_e^\ell}{j\omega\dot{\varepsilon}_a}, \\ \dot{\vec{H}} = \sum_S \left(\dot{C}_S \dot{\vec{H}}_S + \dot{C}_{-S} \dot{\vec{H}}_{-S}\right) - \dfrac{\dot{\vec{\delta}}_m^\ell}{j\omega\dot{\mu}_a}. \end{cases}$$

Рассмотрим отрезок волновода:



Запишем лемму Лоренца для объема *V1:*

$$\oint_{S_1} \left\{\left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}_{-S}\right] - \left[\dot{\vec{E}}_{-S}, \dot{\vec{H}}\right]\right\} \vec{n} dS = \int_{V_1} \left(\dot{\vec{\delta}}_e \dot{\vec{E}}_{-S} - \dot{\vec{\delta}}_m \dot{\vec{H}}_{-S}\right) dV_1$$

Для объема *V2*:

$$\oint_{S_2} \left\{\left[\dot{\vec{E}}, \dot{\vec{H}}_S\right] - \left[\dot{\vec{E}}_S, \dot{\vec{H}}\right]\right\} \vec{n} dS = \int_{V_2} \left(\dot{\vec{\delta}}_e \dot{\vec{E}}_S - \dot{\vec{\delta}}_m \dot{\vec{H}}_S\right) dV_2$$

Используя условие ортогональности собственных волн, получаем:

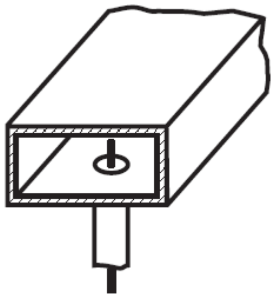
$$\dot{C}_S = \frac{1}{N_S}\int_0^Z \int_{S_\perp} \left(\dot{\vec{\delta}}_e \dot{\vec{E}}_{-S} - \dot{\vec{\delta}}_m \dot{\vec{H}}_{-S}\right) dS_\perp dz \qquad \dot{C}_{-S} = \frac{1}{N_S}\int_Z^{Z_0} \int_{S_\perp} \left(\dot{\vec{\delta}}_e \dot{\vec{E}}_S - \dot{\vec{\delta}}_m \dot{\vec{H}}_S\right) dS_\perp dz$$

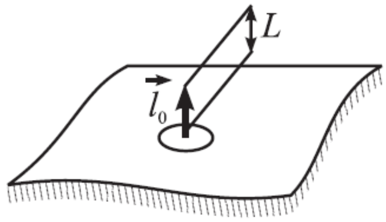
Или же в дифференциальной форме:

$$\frac{d\dot{C}_{\pm S}}{dz} = \pm\frac{1}{N_S}\int_{S_\perp} \left(\dot{\vec{\delta}}_e \dot{\vec{E}}_{\mp S} - \dot{\vec{\delta}}_m \dot{\vec{H}}_{\mp S}\right) dS_\perp$$

31. Схемы возбуждения волноводов.

1. Вибратор Герца.





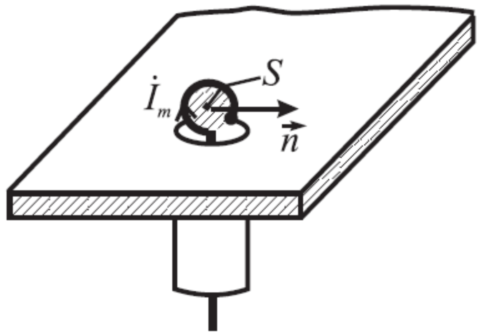
В дано случае вдоль линейного проводника длиной *L* задан сторонний ток:

$$\vec{I}_{cm} = \vec{\ell}_0 \dot{I}\left(\vec{\ell}\right)$$

Используя уравнение возбуждения в рассматриваемом случае, получаем:

$$\dot{C}_{\pm S} = \frac{1}{N_S} \int\limits_{V_{1,2}} \dot{\vec{\delta}}_e \dot{\vec{E}}_{\mp S} dV_{1,2} = \frac{1}{N_S} \int\limits_0^L \vec{\ell}_0 \dot{\vec{E}}_{\mp S} \dot{I}\left(\vec{\ell}\right) d\ell \; = \frac{1}{N_S} \int\limits_0^L \vec{\ell}_0 \dot{\vec{E}}_S^0 \left(\vec{r}_\perp\right) \dot{I}\left(\vec{\ell}\right) d\ell$$

2. Рамка с током.



Сторонний магнитный момент, создаваемый рамкой с током:

$$\dot{\vec{M}} = \vec{n} S \dot{I} \mu_a$$

Фиктивный линейный ток введем как:

$$\dot{I}^m \vec{n} \ell = j\omega \vec{M} = j\omega \vec{n} S \dot{I} \mu_a$$

Для электрического диполя получаем:

$$\dot{C}_{\pm S} = -\frac{1}{N_S} \vec{n} \dot{\vec{H}}_{\mp S}(1) \, j\omega S \dot{I} \mu_a$$

3. Узкая щель в стенке волновода.

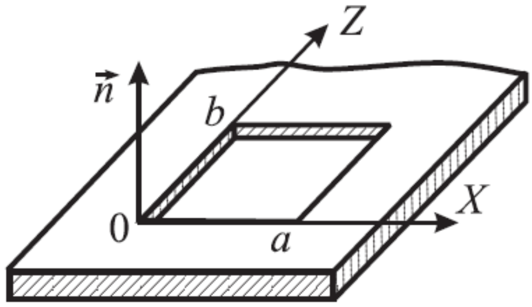
Пусть щель имеет длину *L*. Тогда, если введен линейный магнитный ток:

$$\dot{\vec{I}}^m = \vec{\ell}_0 I_m^m \varphi(\ell)$$

Тогда амплитуда возбуждаемых волн может быть записана как:

$$\dot{C}_{\mp S} = -\frac{1}{N_S} \frac{1}{L} I_m^m \int\limits_0^L \vec{\ell}_0 \vec{H}_S^0 e^{\mp j h_S Z} \varphi(\ell) d\ell$$

4. Окно.



Вводя фиктивные сторонние поверхностные токи через поля возбуждающего источника на окне:

$$\dot{\vec{\delta}}^{e}_{cm} = \left[\vec{n}, \dot{\vec{H}}_{cm}\right], \quad \dot{\vec{\delta}}^{m}_{cm} = -\left[\vec{n}, \dot{\vec{E}}_{cm}\right]$$

получаем:

$$\dot{C}_{\pm S} = \frac{1}{N_S} \int_0^a \int_0^b \left(\left[\vec{n}, \dot{\vec{H}}_{cm}\right] \vec{E}^0_S e^{\mp j h_S Z} + \left[\vec{n}, \dot{\vec{E}}_{cm}\right] \vec{H}^0_S e^{\mp j h_S Z} \right) dz dx$$

7. Баланс энергии в ЭМП. Теорема Умова-Пойнтинга

Для составления баланса энергии в первую очередь доказывают тождество:

$$div\left[\vec{E},\vec{H}\right]=\vec{H}\,rot\;\vec{E}-\vec{E}\,rot\;\vec{H}$$

Считаем его доказанным. Преобразуя 1 и 2 УМ к виду этого тождества, получаем:

$$\vec{H}rot\;\vec{E}-\vec{E}rot\;\vec{H}=div\left[\vec{E},\vec{H}\right]=-\left\{\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\}-\vec{\delta}\,\vec{E}\,.$$

В интегральной формулировке:

$$\oint_S\left[\vec{E},\vec{H}\right]d\vec{S}=-\int_V\left\{\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\}dV-\int_V\vec{\delta}\,\vec{E}dV=-\int_V\left\{\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right\}dV+P_{cm}-P_{п6}\,.$$

– характеризует скорость убывания запасённой энергии поля.

– характеризует мощность излучения через граничную поверхность ***S***, т.е.

Величина называется вектором Умова-Пойнтинга. Он указывает величину плотности потока энергии и направление распространения энергии ЭМП.

С учётом , ур. баланса энергии принимает вид:

$$\oint_S\vec{S}_0d\vec{S}+P_{п6}+\frac{dW}{dt}=P_{cm}\,.$$

Это уравнение закона сохранения энергии, есть теорема Умова-Пойнтинга. Также можно записать и в дифференциальной форме:

$$div\,\vec{S}_0+p_{п6}+\frac{\partial w}{\partial t}=p_{cm}\,.$$

8. Комплексные Амплитуды. Теорема о Комплексной мощности

Задачи электродинамики можно решать и в спектральной области (решение ищется для гармонических процессов). Считают, что частота колебаний векторов ЭМП постоянна. В этом случае применяют Метод Комплексных Амплитуд. При этом вектор в комплексной форме записывается так же как и комплексный скаляр:

$$\vec{U} = \vec{U}_m \cos(\omega t + \varphi) = Re\dot{\vec{U}}e^{j\omega t},\ \ \dot{\vec{U}} = \vec{U}_m e^{j\varphi}.$$

Диэлектрические потери: $\dot{\varepsilon}_{1a} = \frac{\dot{\vec{D}}}{\dot{\vec{E}}} = \frac{\vec{D}_m}{\vec{E}_m} e^{-j\Delta_\varepsilon} = \varepsilon'_{1a} - j\varepsilon''_{1a}$

Магнитные потери: $\dot{\mu}_a = \frac{\dot{\vec{B}}}{\dot{\vec{H}}} = \frac{\vec{B}_m}{\vec{H}_m} e^{-j\Delta_\mu} = \mu'_a - j\mu''_a$

Ур. Максвелла в комплексной форме имеют вид:

$$\begin{cases} rot\dot{\vec{H}} = j\omega\dot{\varepsilon}_a\dot{\vec{E}} + \boldsymbol{\delta}_{cm}\,, \\ rot\dot{\vec{E}} = -j\omega\dot{\mu}_a\dot{\vec{H}}\,. \end{cases}$$

Путём преобразований, из этой системы можно записать ур. баланса энергии.
В дифференциальной форме:

$$div\dot{\vec{S}}_0 + \overline{p}_n^T + 2j\omega(\overline{w}_{\text{м}}^T - \overline{w}_{\text{э}}^T) = p_{cm}$$

В интегральной форме:

$$\oint_S \dot{\vec{S}}_0 d\vec{S} + \overline{P}_n^T + 2j\omega(\overline{W}_{\text{м}}^T - \overline{W}_{\text{э}}^T) = P_{cm}$$

Выделяя **Re** и **Im** части, записывают теоремы об акт. и реакт. мощности:

$$Re\oint_S \dot{\vec{S}}_0 d\vec{S} + \overline{P}_n^T = P_a\,; \quad Im\oint_S \dot{\vec{S}}_0 d\vec{S} + 2\omega(\overline{W}_{\text{м}}^T - \overline{W}_{\text{э}}^T) = P_r$$

Активная мощность: расходуется на потери в объёме ***V*** и на активную мощность излучения через границу ***S.***
Реактивная мощность: мощность, определяемая колебаниями энергии между источником и приёмником при частоте источника не равной резонансной частоте объёма.

9. Волновые уравнения

В случае однородной среды без диэлектрических и магнитных потерь ($\boldsymbol{\varepsilon_a}, \boldsymbol{\mu_a}, \boldsymbol{\sigma} =$ c$\boldsymbol{onst}$), в ней будут только *джоулевы* потери. Уравнения Максвелла для такой системы:

$$1)\ \boldsymbol{rotH} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial \boldsymbol{t}} + \vec{\boldsymbol{\delta}};\ 2)\ \boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{t}};\ 3)\ \boldsymbol{div}\vec{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{\rho};\ 4)\ \boldsymbol{div}\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{0}.$$

 Применив к ур. **2** операцию rot ($\boldsymbol{rotrot}\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{B}} = -\boldsymbol{\mu_a}\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{H}}$) и воспользовавшись ур. **3** и тождеством $\boldsymbol{rot\,rot}\vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{grad\,div}\vec{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{\nabla}^2\vec{\boldsymbol{E}}$, получаем ($\vec{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\sigma}\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\text{СТ}}$) волновое ур. для вектора $\vec{\boldsymbol{E}}$:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\vec{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{\varepsilon_a}\boldsymbol{\mu_a}\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}^2} - \boldsymbol{\mu_a}\boldsymbol{\sigma}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\varepsilon_a}}\boldsymbol{grad\,\rho} + \boldsymbol{\mu_a}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\text{СТ}}}{\partial \boldsymbol{t}}$$

В правой части ур. мы имеем только функции источников поля (из ур. непрерывности следует, что токи проводимости не создают $\boldsymbol{\rho}_{\text{ПРОВ}}$).

 Проведя ту же операция с ур. **1** ($\boldsymbol{rotrot}\vec{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{\delta}}$) и пользуясь ур. **2** и **4**, получим волновое уравнение для $\vec{\boldsymbol{H}}$:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\vec{\boldsymbol{E}} - \boldsymbol{\varepsilon_a}\boldsymbol{\mu_a}\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}^2} - \boldsymbol{\mu_a}\boldsymbol{\sigma}\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial \boldsymbol{t}} = -\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{\delta}}_{\text{СТ}}$$

Видно, что левые части полученных ур. одинаковы, значит в случае если правые части равны нулю (в отсутствии источников), вектора $\vec{\boldsymbol{E}}$ и $\vec{\boldsymbol{H}}$ имеют одинаковый волновой характер.

Коэффициент $\boldsymbol{\varepsilon_a}\boldsymbol{\mu_a}$ перед второй производной $\vec{\boldsymbol{E}}$ по времени имеет смысл фазовой скорости волнового процесса $\boldsymbol{V}_{\Phi}^{-2}$, т.е. $\boldsymbol{V}_{\Phi} = \boldsymbol{1}/\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon_a}\boldsymbol{\mu_a}}$. Это значит, что фазовая скорость любой открытой, безграничной, изотропной среды определяется её параметрами $\boldsymbol{\varepsilon_a}$ и $\boldsymbol{\mu_a}$.

Т.о., то что электромагнитные процессы имеют волновой характер, следует из уравнений Максвелла.

10. Электродинамические потенциалы

Понятие ЭД потенциалов вводится для упрощения расчёта волновых процессов с учётом источников.

4 Ур. Максвелла: $div\vec{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0}$. Т.к. $divrot\vec{\boldsymbol{A}} = \mathbf{0}$, определим $\vec{\boldsymbol{B}}$ как $\vec{\boldsymbol{B}} = rot\vec{\boldsymbol{A}}$.

2 Ур. Максвелла: $rot\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Подставим в него выражение для $\vec{\boldsymbol{B}}$: $rot\left(\vec{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}$.

Т.к. $rotgrad = \mathbf{0}$, то $\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - grad$.

Т.о., $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{t})$ – векторный и $(\vec{\boldsymbol{r}},\boldsymbol{t})$ – скалярный потенциалы Эл.Магн. поля $\vec{\boldsymbol{E}}$ и $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Поле $\vec{\boldsymbol{E}}$ и $\vec{\boldsymbol{B}}$ не изменится, если потенциалы определить так ($\boldsymbol{f}$ – произвольная. функ.):

$$\vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + grad\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t});\ ' = -\frac{\boldsymbol{\partial f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{\partial t}}.$$

Такое определение называется ***условием калибровки потенциалов***. Т.о., Эл.Дин. потенциалы могут быть доопределены наложением любого условия связи, не нарушающего условия калибровки.

Для формулировки ур. $\vec{\boldsymbol{A}}$ и используем 1 и 3 ур. Максвелла:

$$\frac{1}{\boldsymbol{\mu_a}} rot\vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\varepsilon_a}\frac{\boldsymbol{\partial}\vec{\boldsymbol{E}}}{\boldsymbol{\partial t}} + \vec{\boldsymbol{\delta}};\ \ div\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_a}};\quad \boldsymbol{\varepsilon_a},\boldsymbol{\mu_a} = \boldsymbol{const}.$$

Подставляя в них полученные ранее тождества, окончательно получаем:

$$rotrot\vec{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{\varepsilon_a\mu_a}\frac{\boldsymbol{\partial^2}\vec{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{\partial t^2}} = -\boldsymbol{\varepsilon_a\mu_a}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}grad + \boldsymbol{\mu_a}\vec{\boldsymbol{\delta}},$$

$$\nabla^2 = -div\frac{\boldsymbol{\partial}\vec{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{\partial t}} - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_a}}.$$

Калибровки:

1)Лоренца: $div\vec{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{\varepsilon_a\mu_a}\frac{\partial}{\partial t} = \mathbf{0}$. Придаёт ур. наиболее простой вид:

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{\varepsilon_a\mu_a}\frac{\boldsymbol{\partial^2}\vec{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{\partial t^2}} = -\boldsymbol{\mu_a}\vec{\boldsymbol{\delta}},$$

$$\nabla^2 - \boldsymbol{\varepsilon_a\mu_a}\frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\boldsymbol{\partial t^2}} = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\varepsilon_a}}.$$

2)Кулоновская: $div\vec{\boldsymbol{A}} = \mathbf{0}$. Применяется в случае, когда необходимо выделить квазистатическую составляющую эл. поля, содержащую разрыв на границах источников. Тогда квазистатическая часть поля определяется через , а динамическая через $\vec{\boldsymbol{A}}$:

$$\vec{\boldsymbol{E}}^{\mathbf{1}} = -\nabla;\ \vec{\boldsymbol{E}}^{\mathbf{2}} = -\frac{\boldsymbol{\partial}\vec{\boldsymbol{A}}}{\boldsymbol{\partial t}};\quad \text{где } \vec{\boldsymbol{E}}^{\mathbf{1}} + \vec{\boldsymbol{E}}^{\mathbf{2}} = \vec{\boldsymbol{E}}.$$

Электрический вектор Герца или поляризационный потенциал

Определим векторный потенциал через электрический вектор Герца $\overrightarrow{\Pi^e}$ следующим образом $A = \varepsilon_a \mu_a \dfrac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t}$. Скалярный потенциал Ф определим через $\overrightarrow{\Pi^2}$ так, чтобы выполнялось условие калибровки Лоренца

$$\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -div\,\vec{A} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial}{\partial t} div\,\vec{\Pi}^e,$$ тогда $\Phi = -div\,\vec{\Pi}^e$.

Подчеркнем, что указанные определения возможны только при $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$, т.е. для чисто переменных полей.

При введении $\overrightarrow{\Pi^e}$ поля $\vec{E}, \vec{H}$ определяются только через один вектор $\overrightarrow{\Pi^e}$: $\vec{H} = \dfrac{1}{\mu_a} rot\,\vec{A} = \varepsilon_a rot\left(\dfrac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t}\right)$,

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - grad\,\Phi = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} + grad\,div\,\vec{\Pi}^e.$$

Выясним физический смысл $\overrightarrow{\Pi^e}$. Для этого установим его источник. Обратимся к понятию поляризованности среды и вектору поляризации $\vec{p}$.

$$\oint_S \vec{p}\,d\vec{S} = -q_{связ} = -\int_V \rho_{связ}\,dV.$$

Дифференцируя по времени и, используя уравнение непрерывности, имеем

$$div\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_{cm}}{\partial t} = div\,\vec{\delta}_{cm}.$$

С учетом тождества $div\,rot\,\vec{a} \equiv 0$ получаем $\vec{\delta}_{cm} = \dfrac{\partial \vec{p}_{cm}}{\partial t} + rot\,\vec{a} = \vec{\delta}^{\,P}_{cm} + \vec{\delta}^{\,3}_{cm}$.

Рассмотрим далее процессы, связанные только с $\overrightarrow{\delta_{ст}}^{P}$. Для этого случая УМ принимают вид

$$rot\,\vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_{cm}}{\partial t}, \quad rot\,\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Рассматриваемый случай может соответствовать, например, возбуждению ЭМП с помощью системы диполей, образованный разомкнутыми проводниками с возбужденным в них от источника сторонним током. Подставим выражения $\vec{E}, \vec{H}$, получаем

$$\varepsilon_a\ rot\ rot\left(\frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t}\right) = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} + grad\,div\,\vec{\Pi}^e\right) + \frac{\partial \vec{P}_{cm}}{\partial t}.$$

Используя в левой части записанного уравнения тождество $rot\ rot\,\vec{\Pi}^e = grad\,div\,\vec{\Pi}^e - \nabla^2 \vec{\Pi}^e$, получаем $\dfrac{\partial}{\partial t}\left\{-\nabla^2 \vec{\Pi}^e + \varepsilon_a \mu_a \dfrac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t^2} - \dfrac{\vec{p}_{cm}}{\varepsilon_a}\right\} = 0$.

Когда $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ окончательно имеем $\nabla^2 \vec{\Pi}^e - \varepsilon_a \mu_a \dfrac{\partial^2 \vec{\Pi}^e}{\partial t} = -\dfrac{\vec{p}_{cm}}{\varepsilon_a}$ Источником $\overrightarrow{\Pi^e}$ является сторонняя поляризация $\overrightarrow{p_{ст}}$, откуда и название этого вектора – поляризационный потенциал.

Фиктивные магнитные токи и заряды. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла. Магнитный вектор Герца $\overrightarrow{\Pi^m}$

Магнитное поле рамки с током i соответствует полю магнитного диполя, т.е. магнитный момент $\overrightarrow{\mathrm{M}}$ замкнутого тока определяется как $\vec{M} = i\mu_a S\vec{n}$, где $S\vec{n}$-вектор-площадка, охватываемая током i. С другой стороны можно представить, что $\vec{M} = i\mu_a S\vec{n} = \vec{\ell} q_m$ где q_m-магнитные заряды диполя длиной $\vec{l}$. В свою очередь, $i_m = \frac{dq_m}{dt}$, где i_m-разомкнутый магнитный ток. Таким образом, замкнутый ток i создает поле, подобное тому, которое возбуждает разомкнутый магнитный ток i_m. Такие эквивалентные q_m и i_m называются фиктивными магнитными зарядами и токами. При введении фиктивных магнитных токов и зарядов УМ переписываются следующим образом: $rot\,\vec{H} = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, $rot\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{\delta}_m$, $div\,\vec{D} = 0$, $div\,\vec{B} = \rho_m$. Для разомкнутых магнитных токов, как и в электрическом случае, имеет связь $\vec{\delta}_m^P = \frac{\partial \vec{J}_{cm}}{\partial t}$, где $\overrightarrow{J_{\text{ст}}}$-намагниченность среды, создаваемая $\overrightarrow{\delta_m{}^P}$. Второе УМ при этом записывается в виде $rot\,\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{J}_{cm}}{\partial t}$. Введем магнитный вектор Герца $\overrightarrow{\Pi^m}$ $\vec{E} = -\mu_a\, rot\left(\frac{\partial \vec{\Pi}^m}{\partial t}\right)$,

$$\vec{H} = -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^m}{\partial t^2} + grad\ div\,\vec{\Pi}^m.$$

При $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ получаем следующие волновое уравнение для $\overrightarrow{\Pi^m}$

$$\nabla^2 \vec{\Pi}^m - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^m}{\partial t^2} = -\frac{\vec{J}_{cm}}{\mu_a}.$$

Граничные условия для $\overrightarrow{\Pi_z^{e,m}}$ на поперечных z и продольных идеально проводящих поверхностях

Для большой группы задач, относящихся к регулярным волноводам и резонаторам, ЭМП может быть представлено в виде суперпозиции поперечно-электрических (ТЕ) и поперечно-магнитных (ТМ) полей. Поскольку эти поля выражаются соответственно через Π_z^{e} и Π_z^{m}, важнейшее значение приобретает формулировка граничных значений(ГУ) для этих функций на идеально проводящих продольных и поперечных стенках устройств. Введем обобщенно-цилиндрическую систему координат q_1, q_2, Z, где q_1, q_2 - обобщенные криволинейные а общем случае координаты в поперечной к Z плоскости Q_3. Координатные поверхности в этой системе определяются следующим образом :

$Q_1 : q_1 = Const; Q_2 : q_2 = Const; Q_3 : Z = Const$. **ГУ для Π_z^{e}:** будем исходить из того, что тангенциальная составляющая $\vec{E}$на идеально проходящей поверхности S равна нулю. Таким образом

$E_z\big|_{Q_1,Q_2} = 0,\ E_{q_1,q_2}\big|_{Q_3} = 0$. Запишем $\vec{E} = -\varepsilon_a\mu_a \dfrac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial t^2}\vec{Z}_0 + grad\left(\dfrac{\partial \Pi_z^e}{\partial z}\right)$. Пологая процессы гармоническими $\dfrac{\partial}{\partial t} = j\omega$,имеем $\vec{E} = k^2\vec{Z}_0\Pi_z^e + grad\left(\dfrac{\partial \Pi_z^e}{\partial z}\right),\ k^2 = \omega^2\varepsilon_a\mu_a$.

$$grad\left(\frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z}\right) = \vec{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z}\right) + \vec{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \Pi_z^e}{\partial z}\right) + \vec{Z}_0\frac{\partial^2 \Pi_z^e}{\partial z^2},$$

h_1, h_2- соответсвенно метрические коэффициенты Ламэ обобщенных координат q_1, q_2.Таким образом, имеем

$$E_z\big|_{Q_1,Q_2} = \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi_z^e\big|_{Q_1,Q_2} = 0.$$

Условие на поперечной стенке Q_3имеет вид

$E_{q_1,q_2}\big|_{Q_3} = \dfrac{1}{h_{1,2}}\dfrac{\partial}{\partial q_{1,2}}\left(\dfrac{\partial \Pi_z^e}{\partial z}\right)\big|_{Q_3} = 0$. Таким образом, если $\dfrac{\partial}{\partial q_{1,2}} \neq 0$, получаем $\dfrac{\partial \Pi_z^e}{\partial\ z}\big|_{Q_3} = \dfrac{\partial \Pi_z^e}{\partial\ \vec{n}}\big|_{Q_3} = 0$. **ГУ для Π_z^{m}:** будем исходить из ГУ для нормальной составляющей $\vec{H}$ на идеально проводящей поверхности :

$H_{q_1}\big|_{Q_1} = 0,\ H_{q_2}\big|_{Q_2} = 0,\ H_z\big|_{Q_3} = 0$. Для составляющей H_zимеем $H_z\big|_{Q_3} = \left(k^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi_z^m\big|_{Q_3} = 0$, откуда ввиду того, что $\left(k^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \neq 0$, получаем $\Pi_z^m\big|_{Q_3} = 0$. Для составляющих H_{q_1}можно записать

$$H_{q_1}\Big|_{Q_1} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \Pi_z^m}{\partial z}\right)\Big|_{Q_1} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial \Pi_z^m}{\partial q_1}\right)\Big|_{Q_1} = 0,$$

и для H_{q_2}

$$H_{q_2}\Big|_{Q_2} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial \Pi_z^m}{\partial z}\right)\Big|_{Q_2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial \Pi_z^m}{\partial q_2}\right)\Big|_{Q_2} = 0.$$

Из этих условий при $\dfrac{\partial}{\partial z} \neq 0$ следует

$$\frac{1}{h_{1,2}}\frac{\partial \Pi_z^m}{\partial q_{1,2}}\ \Big|_{Q_1, Q_2} = 0 \quad \text{.или} \quad \frac{\partial \Pi_z^m}{\partial\ \vec{n}}\ \Big|S_{бок} = 0$$

Схема решения волновых задач (регулярные волноводы)

Рассматриваем собственные волны волноводов, которые существуют вне области, занятой источниками, т.е. в волновых уравнениях для $\Pi_Z^{l,m}$ $\mathrm{P}_{\text{ст}} = 0$ и $J_{\text{ст}} = 0$. Стенки волновода можно считать идеально проводящими, т.е. на них справедливы ГУ. Электромагнитные процессы гармонические, т.е. можно использовать метод комплексных амплитуд. При перечисленных условиях волноводные задачи сводятся к следующим краевым задачам для $\Pi_Z^{l,m}$ $\nabla^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} + K^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} = 0$, $K^2 = \omega^2 \dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a$, $\dot{\Pi}_z^{\ell} \Big/ S_{бок} = 0$, $\dfrac{\partial \dot{\Pi}_z^m}{\partial \vec{n}} \Big/ S_{бок} = 0$. Воспользуемся условием регулярности волновода : +Z и –Z направления равноправны, а постоянная распространения волн вдоль Z постоянна. Тогда представим искомые решения для $\dot{\Pi}_Z^{l,m}$ в форме $\dot{\Pi}_z^{\ell,m} = \dot{A}^{\ell,m} \;\; \psi^{\ell,m}(q_1,\; q_2) \;\; e^{\mp j\Gamma Z}$. Здесь $\dot{A}^{l,m}$-комплексная амплитуда волн, $\psi^{\ell,m}(q_1, q_2)$ - функция сечения и мембранная функция, Г- постоянная распространения. Решение записано в обобщенно-цилиндрической системе координат q_1, q_2, Z. Представим $\nabla^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} = \nabla_\perp^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} + \dfrac{\partial^2}{\partial Z^2} \dot{\Pi}_z^{\ell,m}$,

$$\nabla_\perp^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m} = \frac{1}{h_1 \;\; h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\;\;\frac{\partial \dot{\Pi}_z^{\ell,m}}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\;\;\frac{\partial \dot{\Pi}^{\ell,m}}{\partial q_2}\right)\right\},$$

$\mathrm{h}_1(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2)$, $\mathrm{h}_2(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2)$-метрические коэффициенты Ламэ для q_1, q_2. Учтем, что $\dfrac{\partial^2}{\partial Z^2} \dot{\Pi}_z^{\ell,m} = -\Gamma^2 \dot{\Pi}_z^{\ell,m}$. Тогда $\nabla_\perp^2 \dot{\Pi}_Z^{\ell,m} + \left(K^2 - \dot{\Gamma}^2\right) \dot{\Pi}_Z^{\ell,m} = 0$. В результате исходная трехмерная краевая задача редуцируется к двухмерной:

$$\nabla^2 \psi^{\ell,m} + \aleph^2 \psi^{\ell,m} = 0, \quad \aleph^2 = \dot{K}^2 - \dot{\Gamma}^2, \;\; \psi^{\ell}(\ell) = 0, \quad \frac{\partial \psi^m}{\partial \vec{n}}(\ell) = 0.$$

Здесь l-контур поперечного сечения волновода. Поставленная краевая задача известна как задача Штурма-Луивилля.

Свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля

Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля обладают рядом специальных свойств.**1)** $\aleph_\nu$ -действительные числа. Для доказательства этого воспользуемся первой теоремой Грина : $\int\limits_{S\perp}\nabla\Phi\nabla\psi dS_\perp + \int\limits_{S\perp}\psi\nabla^2\Phi dS_\perp = \oint\limits_l \psi\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}d\ell$. Положим $\Phi=\psi=\psi_\nu^{\ell,m}$, причем имеет место равенство $\nabla^2\psi_\nu^{\ell,m}+\aleph_\nu^2\psi_\nu^{\ell,m}=0$. Умножая это равенство скалярно на $\psi_\nu^{\ell,m}$,получаем $\aleph_\nu^2|\psi_\nu|^2=-\psi_\nu\nabla^2\psi_\nu$.

Учтем также связи с ГУ $\oint\limits_l\psi_\nu\frac{\partial\psi_\nu}{\partial\vec{n}}d\ell=0$. Получаем $\aleph_\nu^2=\frac{\int\limits_{S\perp}|\nabla\psi_\nu|^2dS_\perp}{\int\limits_{S\perp}|\psi_\nu|^2dS_\perp}$. Справа стоит вещественное, строго положительное число, следовательно, и $\aleph_\nu$ -действительное число. **2)** Собственные функции $\psi_\nu(q_1,q_2)$ взаимно ортогональны на $S_\perp(\ell)$. Пусть известны две собственные функции ψ_i и ψ_j, отвечающие собственным значениям $\aleph_i^2$ и $\aleph_j^2$ причем $\aleph_i^2\neq\aleph_j^2$. Запишем уравнение сначала для ψ_i, затем для ψ_j. Первое уравнение умножим скалярно на ψ_j, второе- на ψ_i и из первого результата вычтем второй. В результате получим $\psi_j\nabla^2\psi_i-\psi_i\nabla^2\psi_j=\left(\aleph_j^2-\aleph_i^2\right)\psi_i\psi_j$. Проинтегрируем получившееся по $S_\perp(\ell)$.

$\int\limits_{S_\perp}\left(\psi_j\nabla^2\psi_i-\psi_i\nabla^2\psi_j\right)\ dS_\perp=\left(\aleph_j^2-\aleph_i^2\right)\int\limits_{S_\perp}\psi_i\psi_j dS_\perp$ Применяя к левой части уравнения дважды первую теорему Грина получаем $\oint\limits_l\left(\psi_j\frac{\partial\psi_i}{\partial\vec{n}}-\psi_i\frac{\partial\psi_j}{\partial\vec{n}}\right)d\ell=\left(\aleph_j^2-\aleph_i^2\right)\int\limits_{S\perp}\psi_i\psi_j dS_\perp$. Получаем

$\int\limits_{S_\perp(\ell)}\psi_i(q_1,\ q_2)\ \psi_j(q_1,\ q_2)dS_\perp=0$ при $i\neq j$.

3)Собственные функции $\psi_\nu^{e,m}(q_1,q_2)$ составляют полную на $S_\perp(\ell)$ систему функций, т.е. нельзя найти такую новую функцию $\varphi(q_1,q_2)$, которая была бы ортогональна на $S_\perp(\ell)$ всем функциям $\psi_\nu^{e,m}$. Это означает, что любая функция $\varphi(q_1,q_2)$ может быть представлена на $S_\perp(\ell)$ в виде разложения в базисе $\{\psi_\nu(q_1,q_2)\}$.

16. Общие свойства волн Е-типа в регулярных волноводах

Весь набор Е-волн определяется системой решений $\left\{\dot{\Pi}^{e}_{zv}\right\}$ краевой задачи. Т.е. для любой конкретной задачи

$$\dot{\Pi}^{e}_{z} = \sum_{v=1}^{\infty} \Pi^{e}_{zv}, \text{ где } \dot{\Pi}^{e}_{zv} = \dot{A}^{e}_{v}\psi^{e}_{v}e^{-j\dot{\Gamma}_{v}Z}, \quad \dot{\Gamma}_{v} = \dot{k}^{2} - \aleph^{2}_{v}.$$

Краевая задача для $\psi^{2}_{v}, \aleph^{2}_{v}$ сформулирована в предыдущем разделе. Рассмотрим компоненты полей Е-волн:

$$\dot{\vec{E}}_{v} = \dot{k}^{2}\vec{Z}_{0}\dot{\Pi}^{e}_{zv} + grad\frac{\partial\dot{\Pi}^{e}_{zv}}{\partial z}, \quad \frac{\partial\dot{\Pi}^{e}_{zv}}{\partial z} = -j\dot{\Gamma}_{v}\ \dot{\Pi}^{e}_{zv}, \quad \dot{k}^{2} = \omega^{2}\dot{\varepsilon}_{a}\dot{\mu}_{a}$$

$$\dot{\vec{H}}_{v} = j\omega\dot{\varepsilon}_{a}rot\left(\vec{Z}_{0}\dot{\Pi}^{e}_{zv}\right)$$

Продольная составляющая есть только у электрического поля Е-волны:

$$\dot{E}_{vz} = \aleph^{2}_{v}\dot{\Pi}^{e}_{zv} = \aleph^{2}_{v}\dot{A}^{e}_{v}e^{\mp j\dot{\Gamma}_{v}Z}\psi^{e}_{v}\left(q_{1},\ q_{2}\right).$$

Отметим, что $\dot{\Pi}^{e}_{zv}$ с точностью до постоянного (но размерного!) множителя $\aleph^{2}_{v}$ совпадает с $\dot{E}_{vz}$. Проанализируем далее поперечные составляющие полей.

$$\dot{\vec{E}}_{vt} = -j\dot{\Gamma}_{v}grad_{\,t}\dot{\Pi}^{e}_{zv} = -j\dot{\Gamma}_{v}\dot{A}^{e}_{v}e^{-j\dot{\Gamma}_{v}Z}\left\{\frac{\vec{e}_{1}}{h_{1}}\frac{\partial\psi^{e}_{v}}{\partial q_{1}} + \frac{\vec{e}_{2}}{h_{2}}\frac{\partial\psi^{e}_{v}}{\partial q_{2}}\right\}. \qquad (6.15)$$

$$\dot{\vec{H}}_{v} = \dot{\vec{H}}_{vt} = j\omega\dot{\varepsilon}_{a}rot\left(\vec{Z}_{0}\dot{\Pi}^{e}_{zv}\right) = j\omega\dot{\varepsilon}_{a}\dot{A}^{e}_{v}e^{-j\dot{\Gamma}_{v}Z}\left\{\frac{\vec{e}_{1}}{h_{2}}\frac{\partial\psi^{e}_{v}}{\partial q_{2}} - \frac{\vec{e}_{2}}{h_{1}}\frac{\partial\psi^{e}_{v}}{\partial q_{1}}\right\}.$$

Получим некоторые следствия записанных формул

1. Составим скалярное произведение $\left(\dot{\vec{E}}_{vt}, \dot{\vec{H}}_{vt}\right)$:

$$\left(\dot{\vec{E}}_{vt}, \dot{\vec{H}}_{vt}\right) = \left(\dot{A}_v^e\right)^2 \dot{\Gamma}_v \omega \dot{\varepsilon}_a e^{-j2\dot{\Gamma}_v z} \times$$
$$\times \left\{ \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_2} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial \psi_v^e}{\partial q_2} \right\} \equiv 0.$$

Таким образом, $\dot{\vec{E}}_{vt} \perp \dot{\vec{H}}_{vt}$. Но как следует из (6.15), $\dot{\vec{E}}_{vt}$ определяется градиентом собственной функции ψ_v^e , иначе говоря, графически поле $\dot{\vec{E}}_{vt}$ совпадает с градиентом собственной функции ψ_v^e

Поскольку же $\vec{H}_{vt} \perp \vec{E}_{vt}$, линии напряженности магнитного поля являются линиями уровня $\psi_v^e(q_1, q_2)$. Таким образом, мы получили эффективное правило графического построения полей волны типа Е волновода:

1) $\psi_v^e(q_1, q_2)$ является мембранной функцией $\vec{E}_z$;

2) силовые линии $\vec{E}_{tv}$ являются линиями градиента $\psi_v^e(q_1, q_2)$;

3) силовые линии $\vec{H}_{tv}$ являются линиями уровня $\psi_v^e(q_1, q_2)$.\

2. Введем и рассчитаем волновое сопротивление W_v^e для волн типа Е:

$$W_v^e = \frac{\dot{E}_{vt}}{\dot{H}_{vt}} = \frac{\dot{\Gamma}_v}{\omega \dot{\varepsilon}_a} = \frac{\dot{k}}{\omega \dot{\varepsilon}_a}\sqrt{1 - \left(\frac{\aleph_v}{\dot{k}}\right)^2} = W^0 \sqrt{1 - \left(\frac{\aleph_v}{\dot{k}}\right)^2}.$$

Где $W^0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\dot{\varepsilon}_a}}$ волновое сопротивление свободного пространства с характеристиками ε_a, μ_a. Наиболее просто записывается W_v^e, когда $\dot{k}$ действительное число (тогда $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$).

В этом случае, учитывая, что $\aleph_v$ - действительная величина, можно ввести одно из важнейших понятий в теории ВВ – критическую длину волны v-го типа

волн: $\lambda_{kp}^{v} = \dfrac{2\pi}{\aleph_v}$. Тогда $W_v^e = W^0 \sqrt{1 - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{kp}^{v}}\right)^2}$.

17. Общие свойства Н-волн в регулярных волноводах

В случае магнитных волн имеем

$$\dot{\vec{H}}_\nu = \dot{k}^2 \vec{Z}_0 \dot{\Pi}_{z\nu}^m + grad\,\frac{\partial \dot{\Pi}_{z\nu}^m}{\partial z}, \qquad \dot{\vec{E}}_\nu = -j\omega\dot{\mu}_a rot\left(\vec{Z}_0 \dot{\Pi}_{z\nu}^m\right),$$

Где $\dot{\Pi}_{z\nu}^m = \dot{A}_\nu^m \psi_\nu^m (q_1,\ q_2) e^{\mp j\dot{\Gamma}_\nu Z}$ - решение краевой задачи.

Продольная составляющая магнитной напряженности волны выражается как

$$\dot{H}_{\nu z} = \aleph_\nu^2 \dot{\Pi}_{z\nu}^m = \aleph_\nu^2 \dot{A}_\nu^m e^{\mp j\dot{\Gamma}_\nu Z} \psi_\nu^m (q_1,\ q_2).$$

Поперечные же компоненты полей можно записать в виде

$$\dot{\vec{H}}_{\nu t} = \mp j\dot{\Gamma}_\nu \dot{A}_\nu^m e^{\mp j\dot{\Gamma}_\nu Z} grad\,\psi_\nu^m, \quad \dot{\vec{E}}_{\nu t} = -j\omega\dot{\mu}_a \dot{A}_\nu^m e^{\mp j\dot{\Gamma}_\nu Z} rot\left(\vec{Z}_0 \psi_\nu^m\right).$$

$\left(\dot{\vec{H}}_{\nu t},\ \dot{\vec{E}}_{\nu t}\right) = 0$, т.е. $\vec{E}_{\nu t} \perp \vec{H}_{\nu t}$ и правила графического изображения Н-полей можно сформулировать так:

1) $\psi_\nu^m (q_1,\ q_2)$ является мембранной функцией $\dot{H}_z$.
2) Силовые линии $\vec{H}_{t\nu}$ являются линиями градиента ψ_ν^m.
3) Силовые линии $\vec{E}_{t\nu}$ являются линиями уровня ψ_ν^m.

Вводя волновое сопротивление W_ν^H для волн типа Н, получим

$$W_\nu^H = \frac{\dot{E}_{\nu t}}{\dot{H}_{\nu t}} = \frac{\omega\dot{\mu}_a}{\dot{\Gamma}_\nu} = \frac{W^0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{kp}^\nu}\right)^2}}, \quad \lambda_{kp}^\nu = \frac{2\pi}{\aleph_\nu^m}.$$

18.Т-волны в направляющих системах

Т или ТЕМ – волнами называются такие , в которых отсутствуют продольные составляющие как магнитного, так и электрического полей (поперечные волны).

Рассмотрим условия существования Т-полей. В соответствии с общей теорией

$$\dot{E}_{vz} = \left(\dot{k}^2 - \dot{\Gamma}_v^2\right)\dot{\Pi}_{zv}^{e}, \quad \dot{H}_{vz} = \left(\dot{k}^2 - \dot{\Gamma}_v^2\right)\dot{\Pi}_{zv}^{m}$$

имеем

Для того чтобы в волне $\dot{E}_{vz} = 0,\ \dot{H}_{vz} = 0$ необходимо потребовать $\dot{k}^2 = \dot{\Gamma}_v^2$, т. е. постоянная распространения Т-волны в ВВ должна быть равна $\dot{k}$, т. е. постоянной распространения в свободном пространстве.

Запишем уравнения Гельмгольца для $\vec{E}_v,\ \vec{H}_v$:

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_v + \dot{k}^2 \dot{\vec{E}}_v = 0,\ \nabla^2 \dot{\vec{H}}_v + \dot{k}^2 \vec{H}_v = 0.$$

Разделим оператор ∇^2 на поперечную и продольную части:

$$\nabla^2 = \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_\perp^2 - \dot{\Gamma}_v^2.$$

Тогда уравнения $\vec{E}_v,\ \vec{H}_v$ принимают вид

$$\nabla_\perp^2 \dot{\vec{E}}_v + \left(\dot{k}^2 - \dot{\Gamma}_v^2\right)\dot{\vec{E}}_v = 0, \quad \nabla_\perp^2 \dot{\vec{H}}_v + \left(\dot{k}^2 - \dot{\Gamma}_v^2\right)\dot{\vec{H}}_v = 0.$$

Для Т-волн $\dot{k}^2 = \dot{\Gamma}_v^2$ и записанные для этих волн уравнения редуцируются к виду

$$\nabla_\perp^2 \dot{\vec{E}}_v = 0,\ \nabla_\perp^2 \dot{\vec{H}}_v = 0.$$

Таким образом, Т-волны являются решением поперечных уравнений Лапласа. Как известно, нетривиальное решение этих уравнений при граничных условиях типа $E_\tau(l) = 0$, $H_n(l)=0$ существует только в многосвязных областях. Поэтому в полых волноводах, поперечное сечение которых представляет односвязную область, Т-волны существовать не могут. В ВВ с двухсвязным сечением (коаксиальная линия, например) возможна одно решение, отвечающее разным направлениям продольных токов на них. При трехсвязном сечении (экранированная двухпроводная линия, например) возможны две комбинации раздельных ГУ и соответственно два типа Т-волн (синфазный и противофазный). В общем случае m-связной области, очевидно, возможно существование m-1типов Т-волн – по числу комбинаций раздельных ГУ. Во всех случаях структура поперечных $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для Т-волн является лапласовой, т.е. такой же, какой получается структура двумерных $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при решении статических задач для той же конфигурации границ с заданным распределением зарядов и стационарных токов.

19. Дисперсия собственных волн в регулярных волноводах. Рабочий и закритический диапазоны

Дисперсией собственных волн называется зависимость от рабочей длины волны (рабочей частоты) фазовой и групповой скорости распространения волн, а также частотная зависимость волнового сопротивления.
В свободном пространстве, а также в случае Т-волн в многосвязных линиях постоянная распространения $\dot{\Gamma} = \dot{k} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a}$. Если потерь нет и $\dot{\mu}_a = \mu_a,\ \dot{\varepsilon}_a = \varepsilon_a,$ то постоянная распространения действительна:

$$\Gamma = k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{\omega}{V_\Phi} = \frac{\omega}{V_\Gamma}.$$

При этом $V_\Phi = V_\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$ от рабочей частоты не зависят, т.е. для Т-волн в среде без потерь дисперсия отсутствует. Иная ситуация имеет место в волноводах. Здесь

$$\dot{\Gamma}_v = \sqrt{\dot{k}^2 - \aleph_v^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2},\ \text{где}\ \lambda_{kp}^v = \frac{2\pi}{\aleph_v}$$

- критическая длина волны для v-го типа волн ВВ. Поскольку $\Gamma_v = \frac{\omega}{V_{\Phi v}} = \frac{2\pi}{\Lambda_v}$, где $V_{\Phi v}$ - фазовая скорость распространения v-й волны в ВВ, Λ_v - длина волны того же типа волн вдоль оси ВВ, для этих величин имеем

$$V_{\Phi v} = \frac{V_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}}, \qquad \Lambda_v = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^v}\right)^2}}.$$

Здесь $V_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$ скорость распространения волн в свободном пространстве, λ - рабочая длина волны – длина волны в свободном пространстве на рабочей частоте ω. Из формул следует, что диапазон длин волн в точке $\lambda = \lambda_{kp}^v$ разделяется для данного v-го типа волн на две различающиеся области:

1) $\lambda < \lambda_{kp}^{v}$. Здесь Γ_v действительная ненулевая величина, поэтому

$$V_{\Phi v} = \frac{\omega}{\Gamma_v}$$

- конечная величина, вдоль волновода распространяется v-го типа волна. Это докритический диапазон.

Таким образом, в отсутствие потерь, в докритическом режиме (т.е. при $\lambda < \dot{\lambda}_{kp}^{v}$) поток энергии вдоль оси волновода имеет вещественное значение, т.е. чисто активный характер. Согласованный волновод в этом диапазоне является чисто активной нагрузкой. Для Н-волн, выражая H_{vt}^{*} через $\dot{E}_{vt}^{*}$ $\left(H_{vt}^{*} = \frac{\dot{E}_{vt}^{*}}{W_v^{H*}} \right)$ имеем

$$\dot{S}_{0vz}^{H} = \frac{1}{2}\frac{E_{vtm}^{2}}{W_v^{H*}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^{v}}\right)^{2}}}{W^{0}} E_{vtm}^{2}.$$

Из этого следует, что и для Н-волн в доктрическом режиме S_{0vz}^{H} - действительная величина, волновода представляет собой
в отсутствии отражении чисто активную нагрузку. В обоих случаях при $\lambda \to \lambda_{kp}^{v}$ $S_{0vz}^{E,H} \Rightarrow 0$ и переносе энергии вдоль волновода прекращается. Поэтому критическая частота

$$f_{kp}^{v} = \frac{1}{\lambda_{kp}^{v}\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$$

часто называется частотой отсечки.

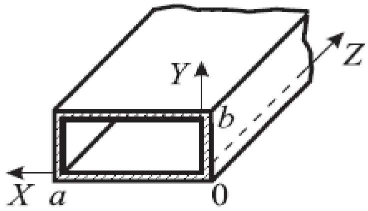
2) $(\lambda > \lambda_{kp}^{v})$. Здесь Γ_v - чисто мнимая величина (по-прежнему мы полагаем отсутствие потерь в линии). Поскольку $\Gamma_v = \frac{\omega}{V_{\Phi V}} - j\alpha_v$ и действительная часть Γ_v равна нулю, $V_{\Phi V} \to \infty$, т. е. волновой процесс на v-м типе отсутствует, а поле убывает с расстоянием от источников экспоненциально с постоянной затухания α_v. Этот диапазон длин волн называется закритическим. Поля в закритической области имеют квазистатический, а не волновой характер. Они убывают экспоненциально с удалением от источника с постоянной затухания

$$\alpha_v = k\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}^{v}}\right)^2 - 1}\ .$$

В закритическом диапазоне волны Е-типа имеют емкостный характер волнового сопротивления, Н-волны – индуктивный. Соответственно для источника закритические Е-волны создают емкостную нагрузку,Н-волны – индуктивную, что следует учитывать при согласовании возбуждающих элементов с волноводным трактом.

20. Е-типы волн в прямоугольных волноводах

Для решения краевой задачи в прямоугольной области воспользуемся прямоугольной системой координат и соорентируем ее так относительно конфигурации волновода как показано на рис.



Размер широкой стенки –а, узкой-b. Краевая задача для собственной функции ψ^e в рассмотренном случае имеет вид

$$\nabla^2 \psi_\nu^e + \aleph_\nu^2 \psi_\nu^e = 0. \qquad (6.23)$$

$$\psi_\nu^e = 0 \text{ при x=0,a; y=0,b.} \qquad (6.24)$$

Воспользуемся методом разделения переменных (метод Фурье). Представим $\psi_\nu^e = X(x) \cdot Y(y)$ и подставим в уравнение 6.23 :

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + \aleph_\nu^2 XY = 0. \qquad (6.25)$$

Разделим обе части на XY . разделяя одновременно переменные:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} + \aleph_\nu^2 = -\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = \aleph_y^2. \qquad (6.26)$$

Поскольку слева и справа в (6.26) разные переменные, обе эти части могут быть при выполнении равенства только константой, которая обозначена как $\aleph_y^2$. Эта константа имеет смысл постоянной разделения. Положим также $\aleph_\nu^2 - \aleph_y^2 = \aleph_x^2$. Тогда получим из двойного равенства (6.26) два уравнения:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \aleph_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \aleph_y^2 Y = 0.$$

Запишем общее решение пары уравнений (6.27):

$$\psi_v^e = XY = \left(A_1 \cos\left(\aleph_x x\right) + B_1 \sin\left(\aleph_x x\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(A_2 \cos\left(\aleph_y y\right) + B_2 \sin\left(\aleph_y y\right)\right).$$

Используя граничные условия, получаем $\psi_v^e = \psi_{mn}^e = \sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}$, (6.28)

Общий множитель в ψ_{mn}^e положен равным единице. Поскольку $\aleph_x = \aleph_{xm} = \frac{m\pi}{a}$, а $\aleph_y = \aleph_{ym} = \frac{n\pi}{b}$ для собственного значения $\aleph_v^e = \aleph_{mn}^e$ имеем

$$\aleph_{mn}^e = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Критическая длина волны λ_{mn}^e при этом рассчитывается как

$$\lambda_{mn}^e = \frac{2\pi}{\aleph_{mn}^e} = \frac{2ab}{\sqrt{(na)^2 + (mb)^2}}.$$

Наибольшая критическая длина волны оказывается у E_{11}-волны:

$$\lambda_{11}^e = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \psi_{11}^e = \sin\frac{\pi x}{a}\,\sin\frac{\pi y}{b}$$

25. Затухание волн в заполняющей среде

Полагаем $\overline{P}_{\sigma} = 0, \ \overline{P}_{\Sigma} = 0$.

Потери в среде и волновое число и постоянная распространения - комплексные:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}}{}^{-j\Delta_\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}'_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{j}\boldsymbol{\varepsilon}''_{\boldsymbol{a}}; \ \ \dot{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{a}}{}^{-j\Delta_\mu} = \boldsymbol{\mu}'_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{j}\boldsymbol{\mu}''_{\boldsymbol{a}};$$

$$\dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\omega}\sqrt{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{a}}\dot{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{a}}}; \ \dot{\ } = \sqrt{\dot{\boldsymbol{k}}^2 - \aleph^2} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{j}\boldsymbol{\alpha}.$$

– сочетание индексов собственной волны (прямоуг./кругл. волновод).

Т.к. $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{a}}$ и $\dot{\boldsymbol{\mu}}_{\boldsymbol{a}}$ – комплексные, то для постоянной распространения получаем:

$$\boldsymbol{2\alpha\beta} = \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{sin}(\Delta_{\boldsymbol{E}} + \Delta_{\boldsymbol{M}}); \quad \boldsymbol{\beta}^2 - \alpha^2 = \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{cos}(\Delta_{\boldsymbol{E}} + \Delta_{\boldsymbol{M}}) - \aleph^2.$$

В практически важных случаях $\boldsymbol{\alpha} \ll \boldsymbol{\beta}$, тогда:

$$\boldsymbol{cos}(\Delta_{\boldsymbol{E}} + \Delta_{\boldsymbol{M}}) \to \mathbf{1} \text{ и } \boldsymbol{sin}(\Delta_{\boldsymbol{E}} + \Delta_{\boldsymbol{M}}) \approx \Delta_{\boldsymbol{E}} + \Delta_{\boldsymbol{M}}$$

В этом случае:

$$\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{a}} - \aleph^2};$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{a}}(\Delta_{\boldsymbol{E}} + \Delta_{\boldsymbol{M}})}{\boldsymbol{2\beta}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{\lambda}}\frac{\Delta_{\boldsymbol{E}} + \Delta_{\boldsymbol{M}}}{\sqrt{\mathbf{1} - (\boldsymbol{\lambda}/\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{kp}})^2}}.$$

26. Затухание волн, связанное с потерями в стенках. Частотные зависимости

Потери в металле $\left(\overline{P}_\sigma\right)$. $\overline{P}_{cp}=0$, $\overline{P}_\Sigma=0$. Применяя энергетический подход (теорема об активной мощности), компоненты волны представляют как

$$\dot{\overline{E}}_v=\overline{E}_v^0(q_1,\ q_2)e^{-j\dot{\Gamma}_v z}=\overline{E}_v^0(q_1,\ q_2)e^{-j\beta_v z}e^{-\alpha_v z},$$

$$\dot{\overline{H}}_v=\overline{H}_v^0(q_1,\ q_2)e^{-j\dot{\Gamma}_v z}=\overline{H}_v^0(q_1,\ q_2)e^{-j\beta_v z}e^{-\alpha_v z}.$$

Далее, используя понятие вектора Умова-Пойнтинга, рассчитывают мощность, переносимую волной через поперечное сечение волновода. Тогда выражение для постоянной затухания:

$$\alpha_v=-\frac{1}{2}\frac{\dfrac{d\overline{P}_{zv}}{dz}}{\overline{P}_{zv}}.$$

Для определения производной применяют теорему об активной мощности для собственной волны в волноводе (объём без источников):

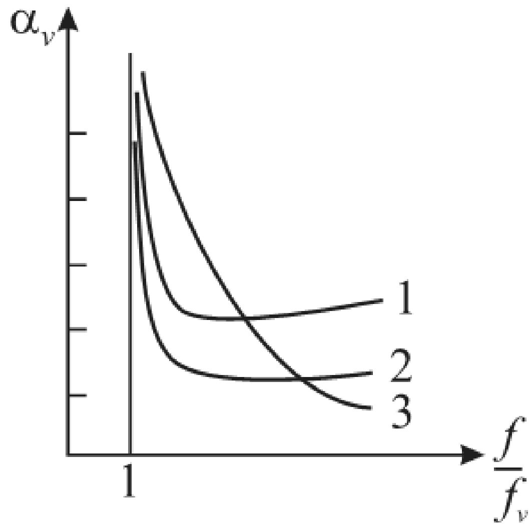
$$\frac{d\overline{P}_{zv}}{dz}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi f\mu_a}{\sigma}}\oint_\ell H_{v\tau m}^2 d\ell.$$

Окончательный результат для постоянной затухания, связанной с потерями в металлических стенках волновода:

$$\alpha_v=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi f\mu_a}{\sigma}}\frac{\oint_\ell H_{v\tau\ m}^2 d\ell}{\mathrm{Re}\int_{S_\perp}\left[\dot{\overline{E}}_v\dot{\overline{H}}_v^*\right]\overline{Z}_0 dS_\perp}.$$

Фактически, эти потери вызываются токами, текущими в неидеально проводящих стенках волновода. Типичные частотные зависимости для разных типов волн:

1- волна в прямоугольном в-воде;
2- волна в круглом в-воде;
3- волна в круглом в-воде.



25. Лемма Лоренца

Лемма Лоренца – тождество, выводимое из ур. Максвелла. Связывает два гармонических поля, не существующих одновременно, но возбуждаемых в одном и том же пространстве. Важно отметить, что при выводе принято: **1**. Среда линейная, **2**. $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_a$ и $\dot{\boldsymbol{\mu}}_a$ не являются тензорами – среда изотропная.

Считаем, что источник сторонних токов с плотностью $\dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{\boldsymbol{e1}}, \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{\boldsymbol{m1}}$ возбуждает поле $\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{1}}, \dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_{\boldsymbol{1}}$, а источник $\dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{e2}, \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{m2}$ - поле $\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_2, \dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_{\boldsymbol{2}}$. Системы УМ для этих полей:

$$\begin{cases} rot\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{j\omega}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{1}} + \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{e1}\,, \\ rot\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{1}} = -\boldsymbol{j\omega}\dot{\boldsymbol{\mu}}_a\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_{\boldsymbol{1}} - \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{m1}\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} rot\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_2 = \boldsymbol{j\omega}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_a\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_2 + \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{e2}\,, \\ rot\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_2 = -\boldsymbol{j\omega}\dot{\boldsymbol{\mu}}_a\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_2 - \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{m2}\,. \end{cases}$$

В первой сист. умножаем первое ур. на $\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{2}}$, а второе – на $\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_{\boldsymbol{2}}$.

Во второй – на $-\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_{\boldsymbol{1}}$ и $-\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_{\boldsymbol{1}}$, соответственно. Результаты сложим:

$$div\left(\left[\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_1, \dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_2\right] - \left[\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_2, \dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_1\right]\right) = \left(\dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{e1}\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_2 - \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{e2}\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_1\right) - \left(\dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{m1}\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_2 - \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{m2}\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_1\right).$$

Теорема Остроградского-Гаусса позволяет перейти к интегральной формулировке:

$$\oint_{\boldsymbol{S}} \left(\left[\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_1, \dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_2\right] - \left[\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_2, \dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_1\right]\right)\vec{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{dS} = \int_{\boldsymbol{V}} \left(\dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{e1}\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_2 - \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{e2}\dot{\vec{\boldsymbol{E}}}_1\right) - \left(\dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{m1}\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_2 - \dot{\vec{\boldsymbol{\delta}}}_{m2}\dot{\vec{\boldsymbol{H}}}_1\right)\boldsymbol{dV}.$$

Вопросы к зачету по курсу «ЭД и РРВ»

1. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах записи
2. Закон сохранения заряда и его связь с током смещения в первом уравнении Максвелла
3. Материальные уравнения. Классификация сред.
4. Граничные условия для тангенциальных составляющих векторов ЭМП
5. Граничные условия для нормальных составляющих векторов ЭМП
6. Граничные условия на поверхности идеального проводника
7. Баланс энергии в ЭМП. Теорема Умова-Пойнтинга
8. Комплексные амплитуды. Теорема о комплексной мощности
9. Волновые уравнения
10. Электродинамические потенциалы $\vec{A}, \varphi$
11. Электрический вектор Герца $\vec{\Pi}^{\ell}$ или поляризационный потенциал
12. Фиктивные магнитные токи и заряды. Перестановочная двойственность уравнений Максвелла. Магнитный вектор Герца $\vec{\Pi}^{m}$
13. Граничные условия для $\vec{\Pi}_z^{e,m}$ на поперечных z и продольных идеально проводящих поверхностях
14. Схема решения волноводных задач (регулярные волноводы)
15. Свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля
16. Общие свойства волн Е-типа в регулярных волноводах
17. Общие свойства Н-волн в регулярных волноводах
18. Т-волны в направляющих системах
19. Дисперсия собственных волн в регулярных волноводах. Рабочий и закритический диапазоны
20. Е-типы волн в прямоугольных волноводах
21. Н-типы волн в прямоугольных волноводах
22. Е-типы волн в волноводах с круговым сечением
23. Н-типы волн в волноводах с круговым сечением
24. Физическая картина распространения волн в волноводе. Излучающие и неизлучающие щели в стенках волновода
25. Затухание волн в волноводах, связанное с потерями в среде, заполняющей волновод
26. Затухание волн, связанное с потерями в стенках волновода. Частотные зависимости постоянного затухания
27. Лемма Лоренца
28. Теорема взаимности
29. Обратимость линейных изотропных электродинамических структур с замкнутыми идеально проводящими границами
30. Уравнения возбуждения волновода сторонними токами
31. Схемы возбуждения волноводов