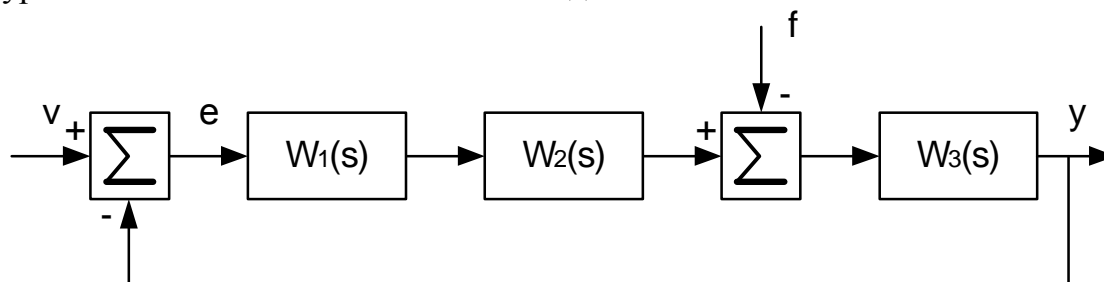


Исходные данные:

Номер варианта	T_1	T_2	T_3	K_1	K_3
29	0,5	1,5	0,8	2,5	3,8

Структурная схема линейной САУ имеет вид:



$$W_1(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1}$$

$$W_2(s) = \frac{K_2}{T_2 s + 1}$$

$$W_3(s) = \frac{K_3}{T_3 s + 1}$$

1. Найдем передаточные функции разомкнутой и замкнутой систем:

1.1 Определим передаточную функцию разомкнутой системы при $f=0$ и $e=v$:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{V(s) W_1(s) W_2(s) W_3(s)}{V(s)} = W_1(s) W_2(s) W_3(s)$$

$$W(s) = W_1(s) W_2(s) W_3(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

1.2 Определим главную передаточную функцию замкнутой системы при $f=0$:

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{V(s)}$$

Выражение для сигнала рассогласования имеет вид:

$$E(s) = V(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = W(s) E(s)$$

Исключим из этих двух выражений $E(s)$:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = V(s) - Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} + Y(s) = V(s)$$

$$\frac{Y(s) + W(s) Y(s)}{W(s)} = V(s)$$

$$\frac{Y(s) (1 + W(s))}{W(s)} = V(s)$$

$$Y(s) = V(s) \frac{W(s)}{1 + W(s)}$$

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}$$

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(T_1 s + 1) (T_2 s + 1) (T_3 s + 1) \left[\frac{K_1 K_2 K_3}{(T_1 s + 1) (T_2 s + 1) (T_3 s + 1)} + 1 \right]}$$

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + K_1 K_2 K_3 + 1}$$

1.3 Определим передаточную функцию замкнутой системы по ошибке при $f=0$:

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{V(s)}$$

$$E(s) = V(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = W(s) E(s)$$

Исключим из этих двух выражений $Y(s)$:

$$E(s) = V(s) - W(s) E(s)$$

$$E(s) + W(s) E(s) = V(s)$$

$$E(s) (1 + W(s)) = V(s)$$

$$E(s) = \frac{V(s)}{1 + W(s)}$$

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W(s)}$$

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{\frac{K_1 K_2 K_3}{(T_1 s + 1) (T_2 s + 1) (T_3 s + 1)} + 1}$$

$$\Phi_e(s) = \frac{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + 1}{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + K_1 K_2 K_3 + 1}$$

1.4 Определим передаточную функцию замкнутой системы по возмущению при $v=0$:

$$\Phi_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

$$E_{\text{ВОЗМ}}(s) = -F(s) - W_1(s) W_2(s) Y(s)$$

$$Y(s) = W_3(s) E_{\text{ВОЗМ}}(s)$$

Исключим из этих двух выражений $E_{\text{ВОЗМ}}(s)$:

$$\frac{Y(s)}{W_3(s)} = -F(s) - W_1(s) W_2(s) Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{W_3(s)} + W_1(s) W_2(s) Y(s) = -F(s)$$

$$\frac{Y(s) + W(s) Y(s)}{W_3(s)} = -F(s)$$

$$\frac{Y(s) (1 + W(s))}{W_3(s)} = -F(s)$$

$$Y(s) = -F(s) \frac{W_3(s)}{1 + W(s)}$$

$$\Phi_f(s) = -\frac{W_3(s)}{1 + W(s)}$$

$$\Phi_f(s) = -\frac{K_3}{(T_3 s + 1) \left[\frac{K_1 K_2 K_3}{(T_1 s + 1) (T_2 s + 1) (T_3 s + 1)} + 1 \right]}$$

$$\Phi_f(s) = -\frac{K_3 T_1 T_2 s^2 + (K_3 T_1 + K_3 T_2) s + K_3}{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + K_1 K_2 K_3 + 1}$$

2. Определим необходимое значение K_2 , удовлетворяющее критерию устойчивости:

2.1 Найдем характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$(1 + W(s)) Y(s) = W(s) V(s)$$

Приравняем левую часть уравнения к нулю и найдем характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$1 + W(s) = 0$$

$$1 + W(s) = \frac{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + K_1 K_2 K_3 + 1}{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + 1}$$

$$T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + K_1 K_2 K_3 + 1 = 0$$

$$a_3 = T_1 T_2 T_3$$

$$a_2 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3$$

$$a_1 = T_1 + T_2 + T_3$$

$$a_0 = K_1 K_2 K_3 + 1$$

Матрица Гурвица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

Так как матрица Гурвица является матрицей 3-го порядка, то выражения для определителей имеют вид:

$$D_1 = a_2$$

$$D_1 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$D_2 = T_1 T_2^2 + T_1^2 T_2 + T_1 T_3^2 + T_1^2 T_3 + T_2 T_3^2 + T_2^2 T_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - K_1 K_2 K_3 T_1 T_2 T_3$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = (K_1 K_2 K_3 + 1) (T_1 T_2^2 + T_1^2 T_2 + T_1 T_3^2 + T_1^2 T_3 + T_2 T_3^2 + T_2^2 T_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - K_1 K_2 K_3 T_1 T_2 T_3)$$

2.2 В общем виде критерий устойчивости Гурвица имеет вид - система устойчива, если при $a_3 > 0$:

$$D_1 > 0 \quad D_2 > 0 \quad D_3 > 0$$

2.3 Найдем максимальное граничное значение коэффициента усиления K_2 , при котором система еще устойчива:

Решая уравнение $D_2=0$ найдем $K_{2\text{крит}}$:

$$T_1 T_2^2 + T_1^2 T_2 + T_1 T_3^2 + T_1^2 T_3 + T_2 T_3^2 + T_2^2 T_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - K_1 K_2 K_3 T_1 T_2 T_3 = 0$$

$$K_{2\text{крит}} = \frac{T_1^2 T_2 + T_1^2 T_3 + T_1 T_2^2 + 2 T_1 T_2 T_3 + T_1 T_3^2 + T_2^2 T_3 + T_2 T_3^2}{K_1 K_3 T_1 T_2 T_3} = 1.049$$

С учетом коэффициента запаса устойчивости системы $a=2$ найдем K_2 :

$$K_2 = \frac{K_{2\text{крит}}}{a} = \frac{1.049}{2} = 0.525$$

3 Найдем аналитические выражения и построим графики:

3.1 $W(w)$ амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) разомкнутой системы:

$$W(w) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(1 + T_1 j w) (1 + T_2 j w) (1 + T_3 j w)}$$

$$W(w) = \frac{K_1 K_2 K_3}{-j T_1 T_2 T_3 w^3 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 + j (T_1 + T_2 + T_3) w + 1}$$

$$W(w) = \frac{K_1 K_2 K_3}{j \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right] + \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right]}$$

$$W(w) = \frac{K_1 K_2 K_3}{j \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right] + \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right]}$$

умножим числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю значение:

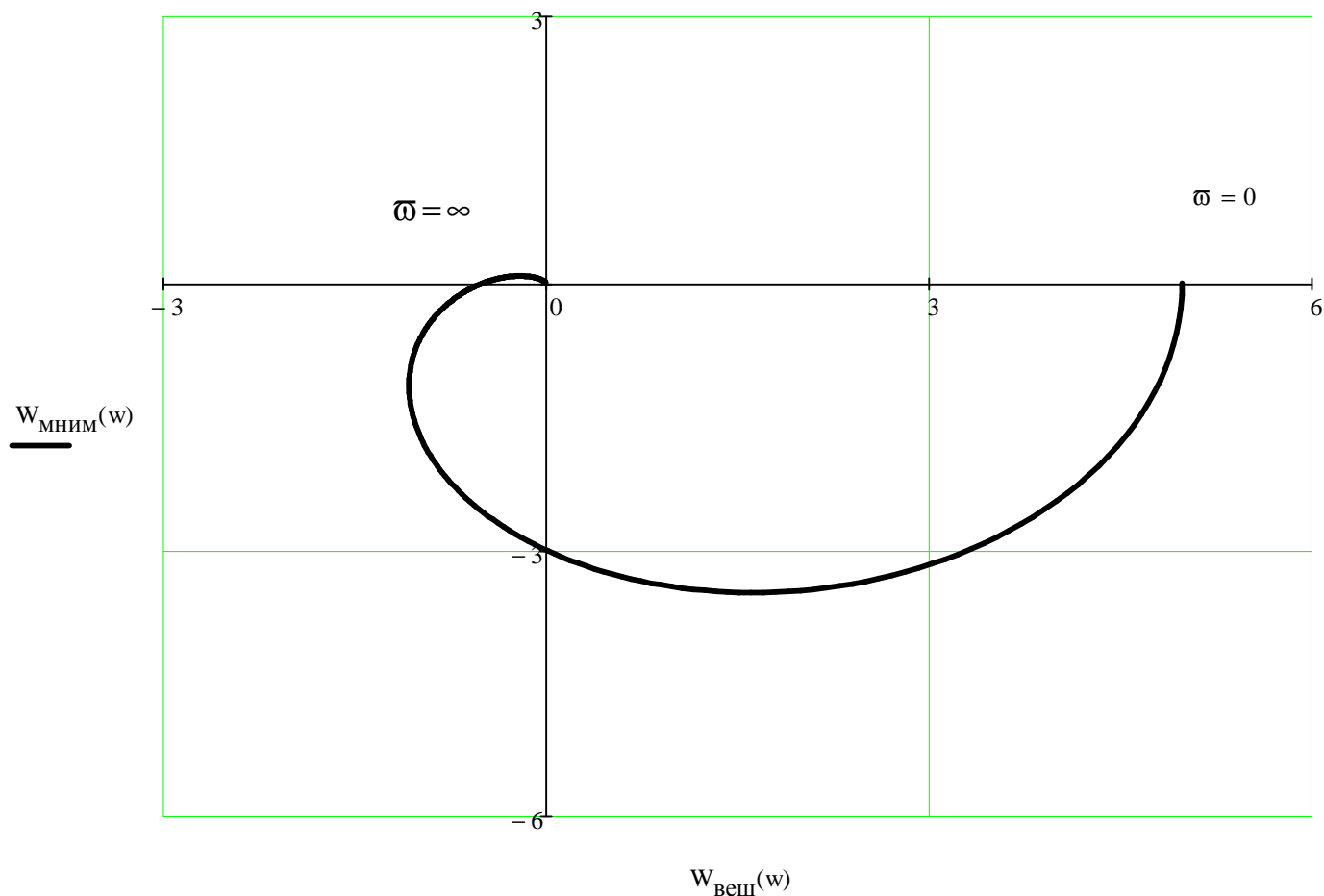
$$W(w) = W(w) \frac{\left[-j \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right] + \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right] \right]}{\left[-j \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right] + \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right] \right]}$$

$$W(w) = \frac{K_1 K_2 K_3 \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right] - j K_1 K_2 K_3 \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right]}{w^4 \left(T_1^2 T_2^2 + T_1^2 T_3^2 + T_2^2 T_3^2 \right) + w^2 \left(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \right) + T_1^2 T_2^2 T_3^2 w^6 + 1}$$

$$W_{\text{вещ}}(w) = \frac{K_1 K_2 K_3 \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right]}{w^4 \left(T_1^2 T_2^2 + T_1^2 T_3^2 + T_2^2 T_3^2 \right) + w^2 \left(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \right) + T_1^2 T_2^2 T_3^2 w^6 + 1}$$

$$W_{\text{мним}}(w) = \frac{-K_1 K_2 K_3 \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right]}{w^4 \left(T_1^2 T_2^2 + T_1^2 T_3^2 + T_2^2 T_3^2 \right) + w^2 \left(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \right) + T_1^2 T_2^2 T_3^2 w^6 + 1}$$

Построим график амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) разомкнутой системы на интервале от 0 до $+\infty$ рад/с, по вертикальной оси будем откладывать мнимую, а по горизонтальной оси - вещественную часть АФЧХ:



3.2 $|W(w)|$ амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) разомкнутой системы:

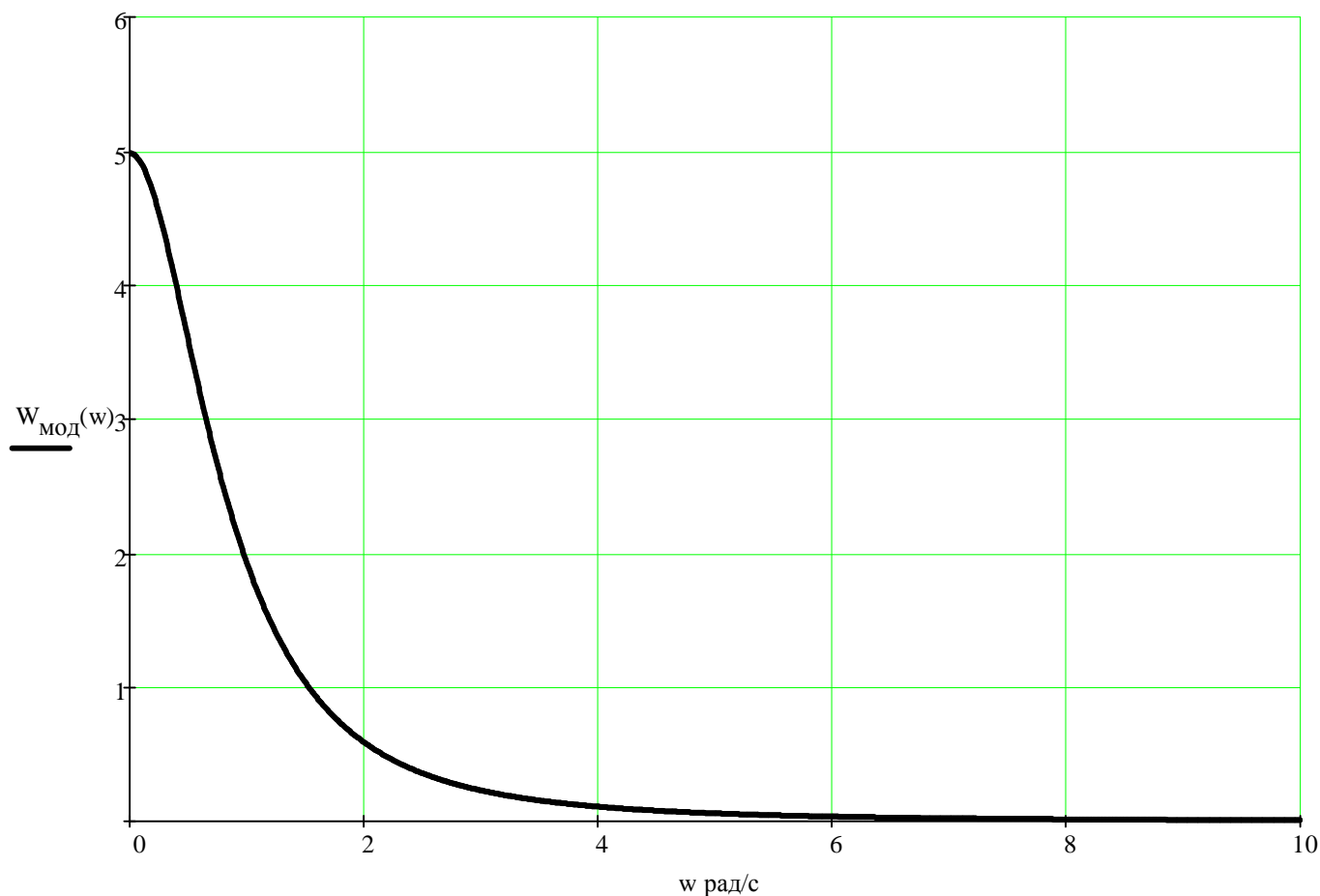
$$W_{\text{МОД}}(w) = \sqrt{W_{\text{вещ}}(w)^2 + W_{\text{мним}}(w)^2}$$

$$W_{\text{МОД}}(w) = \frac{\sqrt{\left[K_1 K_2 K_3 \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right] \right]^2 + \left[-K_1 K_2 K_3 \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right] \right]^2}}{w^4 \left(T_1^2 T_2^2 + T_1^2 T_3^2 + T_2^2 T_3^2 \right) + w^2 \left(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \right) + T_1^2 T_2^2 T_3^2 w^6 + 1}$$

$$W_{\text{МОД}}(w) = \frac{K_1 K_2 K_3 \sqrt{\left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right]^2 + \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right]^2}}{w^4 \left(T_1^2 T_2^2 + T_1^2 T_3^2 + T_2^2 T_3^2 \right) + w^2 \left(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \right) + T_1^2 T_2^2 T_3^2 w^6 + 1}$$

$$W_{\text{МОД}}(w) = \frac{K_1 K_2 K_3 \sqrt{\left[1 + (T_1 w)^2 \right] \left[1 + (T_2 w)^2 \right] \left[1 + (T_3 w)^2 \right]}}{w^4 \left(T_1^2 T_2^2 + T_1^2 T_3^2 + T_2^2 T_3^2 \right) + w^2 \left(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 \right) + T_1^2 T_2^2 T_3^2 w^6 + 1}$$

Построим график амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) разомкнутой системы на интервале 0...10 рад/с (из соображений наглядности графика), по вертикальной оси будем откладывать амплитуду, а по горизонтальной оси - частоту:



3.3 $\phi(w)$ фазо-частотной характеристики (ФЧХ) разомкнутой системы:

$$\phi(w) = \text{arctg} \left(\frac{W_{\text{вещ}}(w)}{W_{\text{мним}}(w)} \right)$$

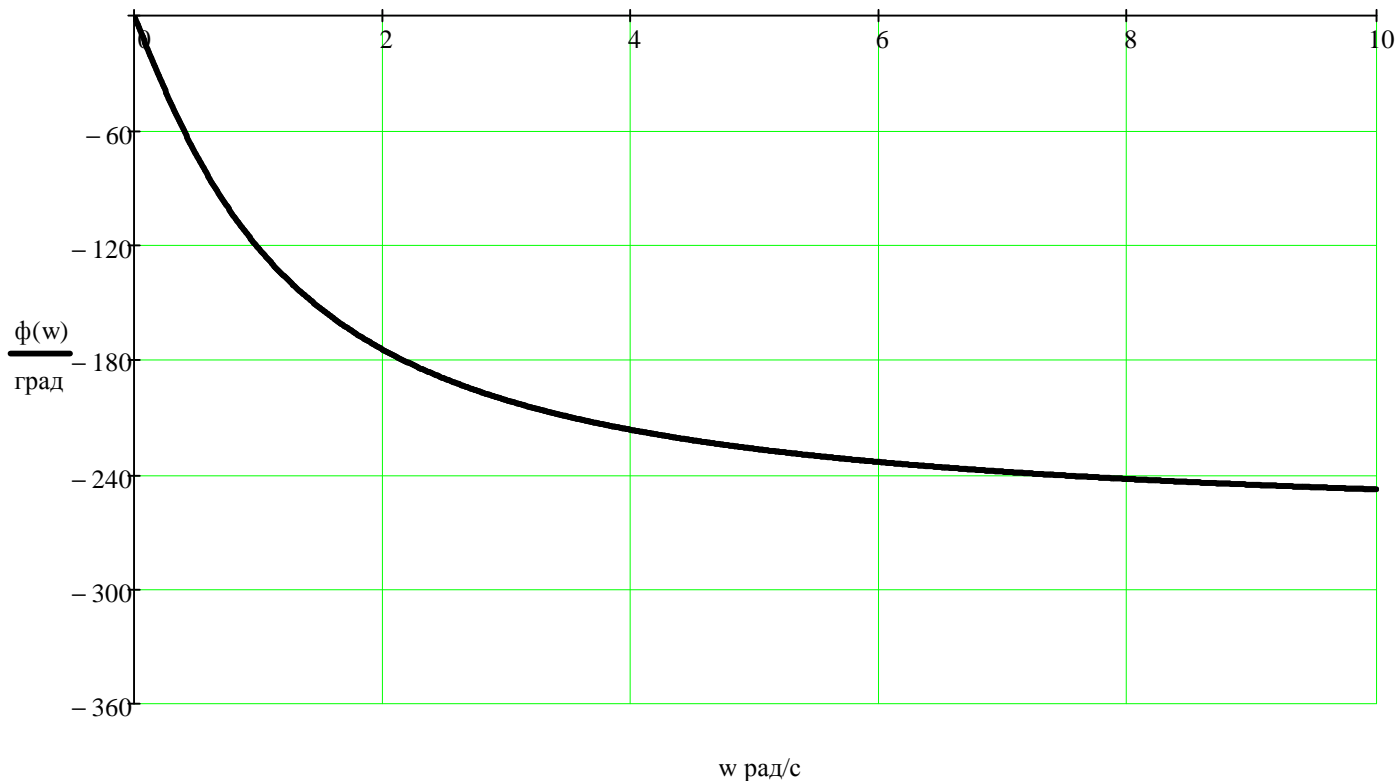
$$\phi(w) = \text{arctg} \left[\frac{\frac{K_1 K_2 K_3 \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right]}{w^4 (T_1^2 T_2^2 + T_1^2 T_3^2 + T_2^2 T_3^2) + w^2 (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) + T_1^2 T_2^2 T_3^2 w^6 + 1}}{-K_1 K_2 K_3 \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right]}}{\frac{K_1 K_2 K_3 \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right]}{w^4 (T_1^2 T_2^2 + T_1^2 T_3^2 + T_2^2 T_3^2) + w^2 (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) + T_1^2 T_2^2 T_3^2 w^6 + 1}}{-K_1 K_2 K_3 \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right]}} \right]$$

$$\phi(w) = \text{arctg} \left[\frac{\left[K_1 K_2 K_3 \left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right] \right]}{\left[-K_1 K_2 K_3 \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right] \right]} \right]$$

$$\phi(w) = \text{arctg} \left[\frac{\left[1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right]}{\left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right]} \right]$$

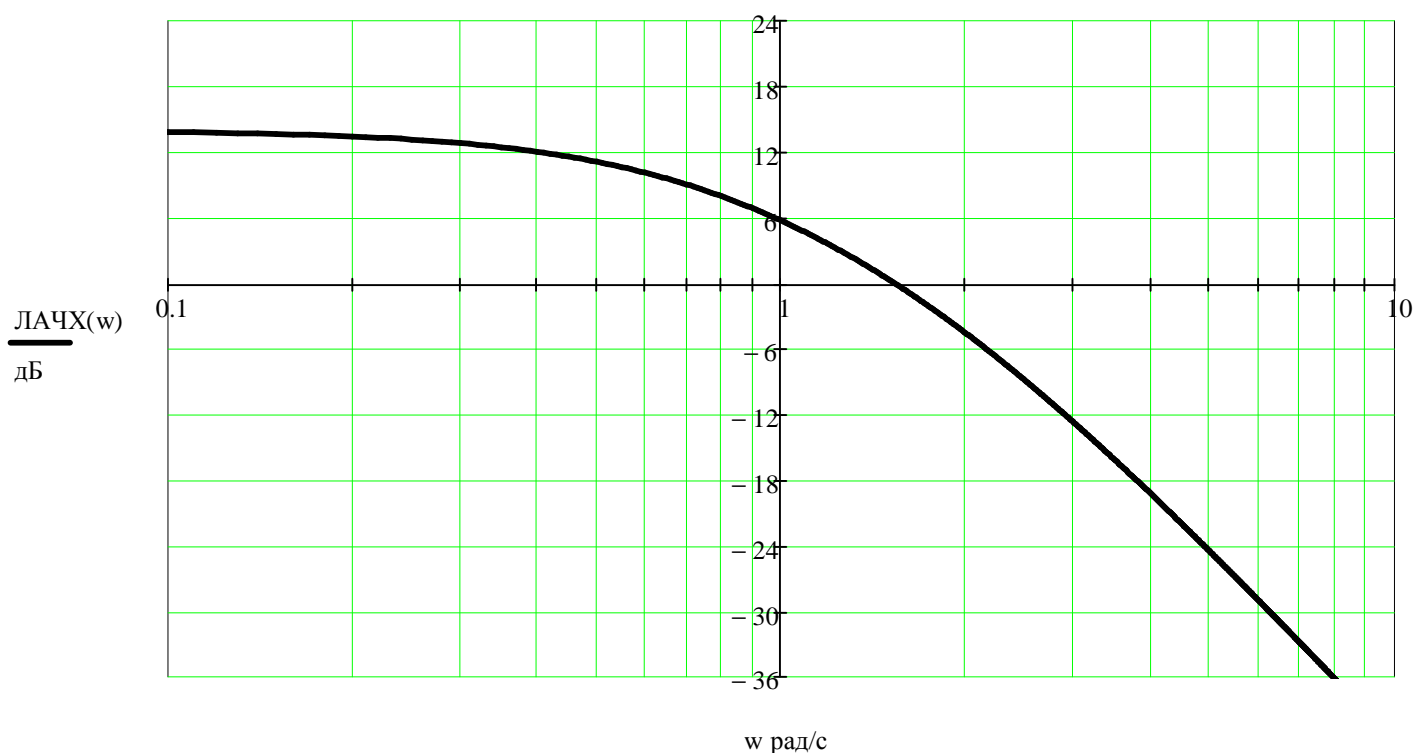
$$\phi(w) = -\text{arctg} \left[\frac{1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2}{(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3} \right]$$

Построим график фазо-частотной характеристики (ФЧХ) разомкнутой системы на интервале 0...10 рад/с (из соображений наглядности графика), по вертикальной оси будем откладывать фазу в градусах, а по горизонтальной оси - частоту:

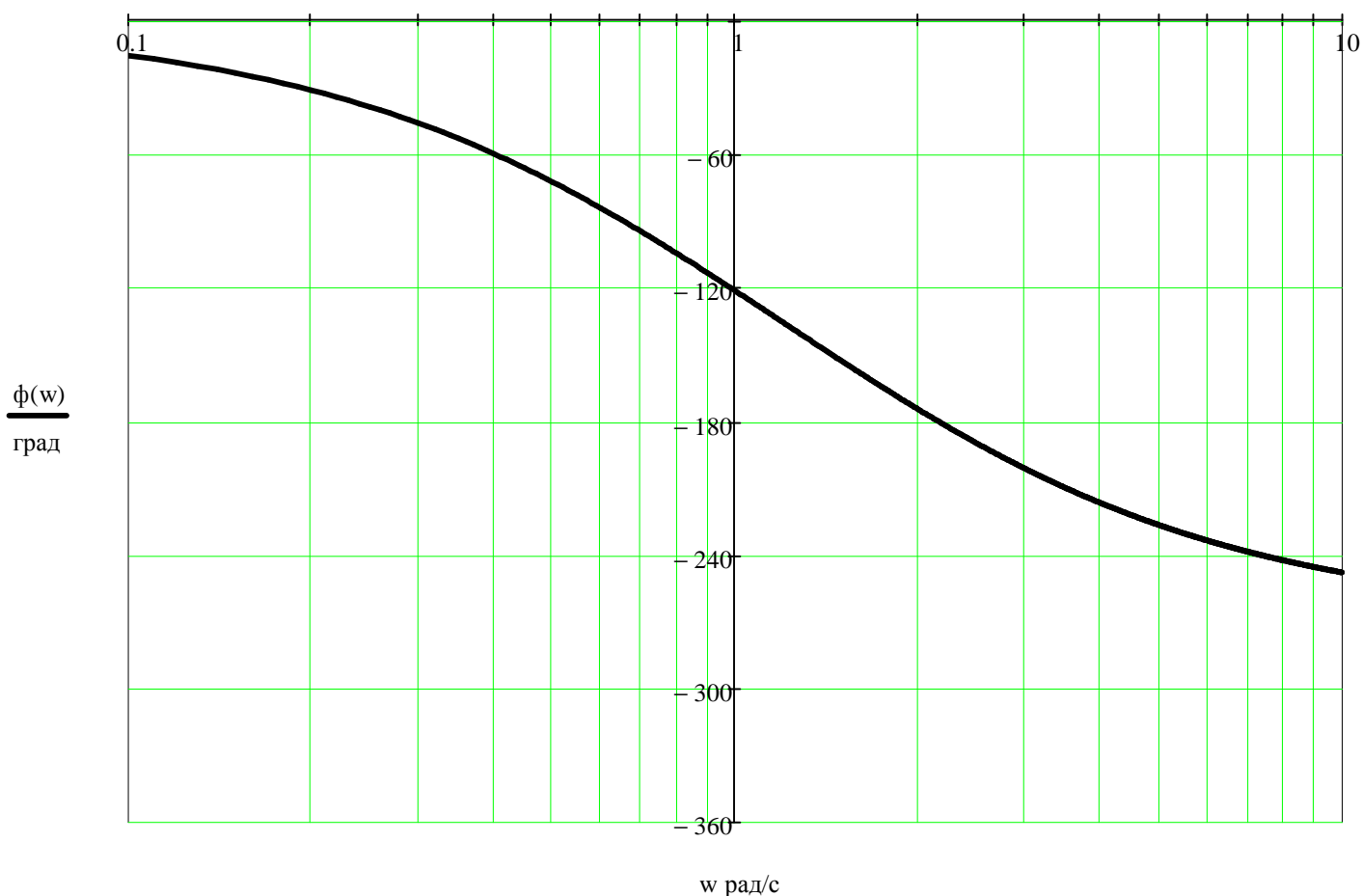


3.4 Построим в логарифмическом масштабе график амплитудно-частотной характеристики (ЛАЧХ) разомкнутой системы на интервале 0.1-10 рад/с (из соображений наглядности графика), по вертикальной оси будем откладывать амплитуду, а по горизонтальной оси - частоту:

$$\text{ЛАЧХ}(\omega) = 20 \log(W_{\text{мод}}(\omega))$$



3.5 Построим в логарифмическом масштабе график фазо-частотной характеристики (ЛФЧХ) разомкнутой системы на интервале 0.1-10 рад/с (из соображений наглядности графика), по вертикальной оси будем откладывать фазу в градусах, а по горизонтальной оси - частоту:



3.6 $P(\omega)$ вещественной частотной характеристики замкнутой системы:

$$\Phi(\omega) = \frac{K_1 K_2 K_3}{T_1 T_2 T_3 (j \omega)^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) (j \omega)^2 + (T_1 + T_2 + T_3) j \omega + K_1 K_2 K_3 + 1}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{K_1 K_2 K_3}{T_1 T_2 T_3 (j \omega)^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) (j \omega)^2 + (T_1 + T_2 + T_3) j \omega + K_1 K_2 K_3 + 1}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{K_1 K_2 K_3}{-j T_1 T_2 T_3 \omega^3 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \omega^2 + j (T_1 + T_2 + T_3) \omega + K_1 K_2 K_3 + 1}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{K_1 K_2 K_3}{j \left[(T_1 + T_2 + T_3) \omega - T_1 T_2 T_3 \omega^3 \right] + \left[K_1 K_2 K_3 + 1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \omega^2 \right]}$$

умножим числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю значение:

$$\Phi(\omega) = \Phi(\omega) \frac{\left[K_1 K_2 K_3 + 1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \omega^2 \right] - j \left[(T_1 + T_2 + T_3) \omega - T_1 T_2 T_3 \omega^3 \right]}{\left[K_1 K_2 K_3 + 1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \omega^2 \right] - j \left[(T_1 + T_2 + T_3) \omega - T_1 T_2 T_3 \omega^3 \right]}$$

упростим выражение для знаменателя:

$$A_6 = T_1^2 T_2^2 T_3^2$$

$$A_4 = (T_1^2 T_2^2 + T_1^2 T_3^2 + T_2^2 T_3^2)$$

$$A_2 = (T_1^2 - 2 K_1 K_2 K_3 T_1 T_2 - 2 K_1 K_2 K_3 T_1 T_3 + T_2^2 - 2 K_1 K_2 K_3 T_2 T_3 + T_3^2)$$

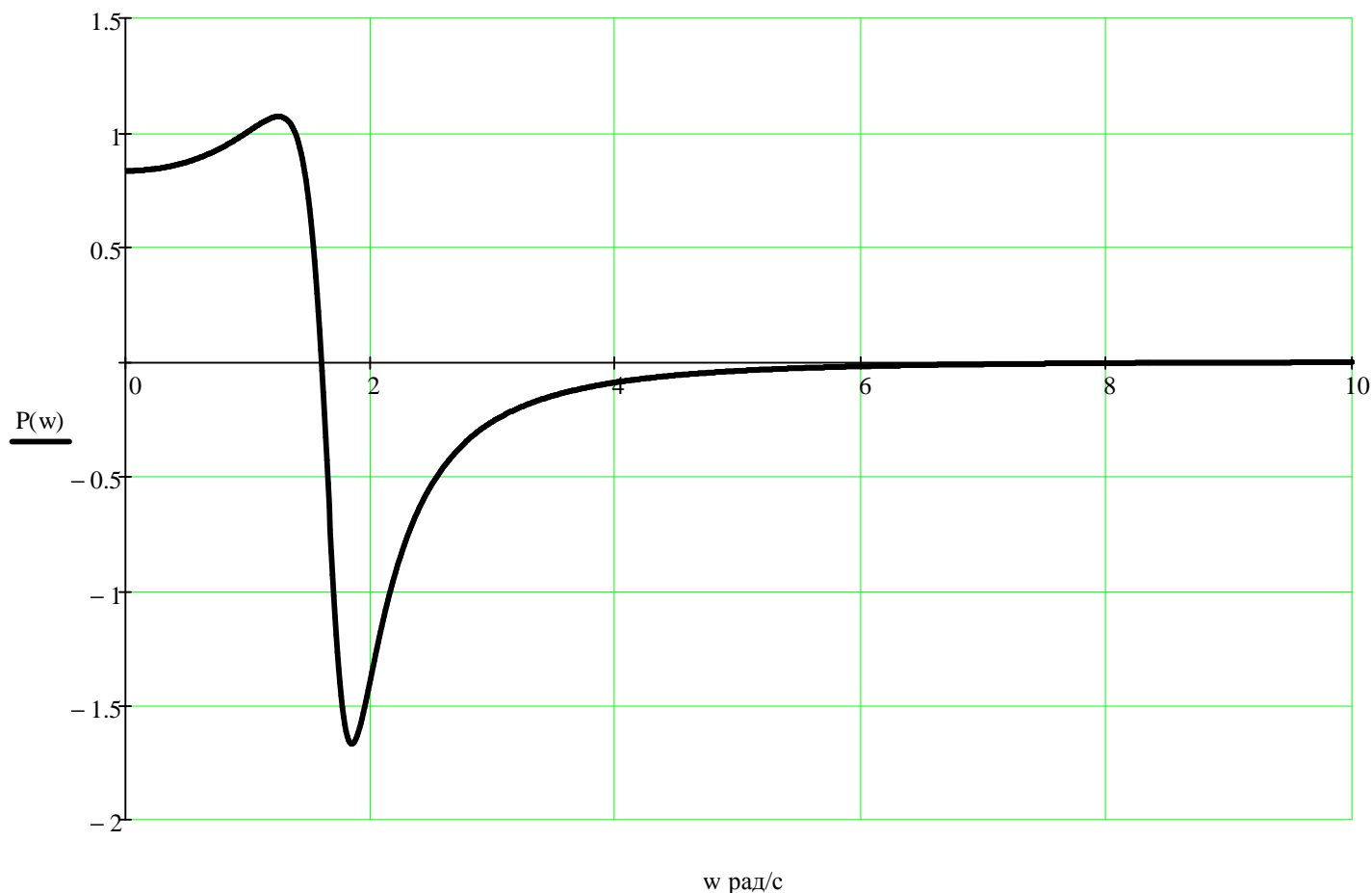
$$A_0 = (K_1 K_2 K_3 + 1)^2$$

$$\Phi(w) = \frac{K_1 K_2 K_3 \left[\left[K_1 K_2 K_3 + 1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right] - j \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right] \right]}{A_6 w^6 + A_4 w^4 + A_2 w^2 + A_0}$$

$$\Phi_{\text{вещ}}(w) = \frac{K_1 K_2 K_3 \left[K_1 K_2 K_3 + 1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) w^2 \right]}{A_6 w^6 + A_4 w^4 + A_2 w^2 + A_0}$$

$$\Phi_{\text{мним}}(w) = - \frac{K_1 K_2 K_3 \left[(T_1 + T_2 + T_3) w - T_1 T_2 T_3 w^3 \right]}{A_6 w^6 + A_4 w^4 + A_2 w^2 + A_0}$$

$$P(w) = \Phi_{\text{вещ}}(w)$$



3.7 $|\Phi(\omega)|$ амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) замкнутой системы:

$$\Phi_{\text{мод}}(\omega) = \sqrt{\Phi_{\text{вещ}}(\omega)^2 + \Phi_{\text{мним}}(\omega)^2}$$

$$\Phi_{\text{мод}}(\omega) = \frac{K_1 K_2 K_3 \sqrt{[K_1 K_2 K_3 + 1 - (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) \omega^2]^2 + [(T_1 + T_2 + T_3) \omega - T_1 T_2 T_3 \omega^3]^2}}{A_6 \omega^6 + A_4 \omega^4 + A_2 \omega^2 + A_0}$$

упростим выражение для числителя:

$$B_6 = T_1^2 T_2^2 T_3^2$$

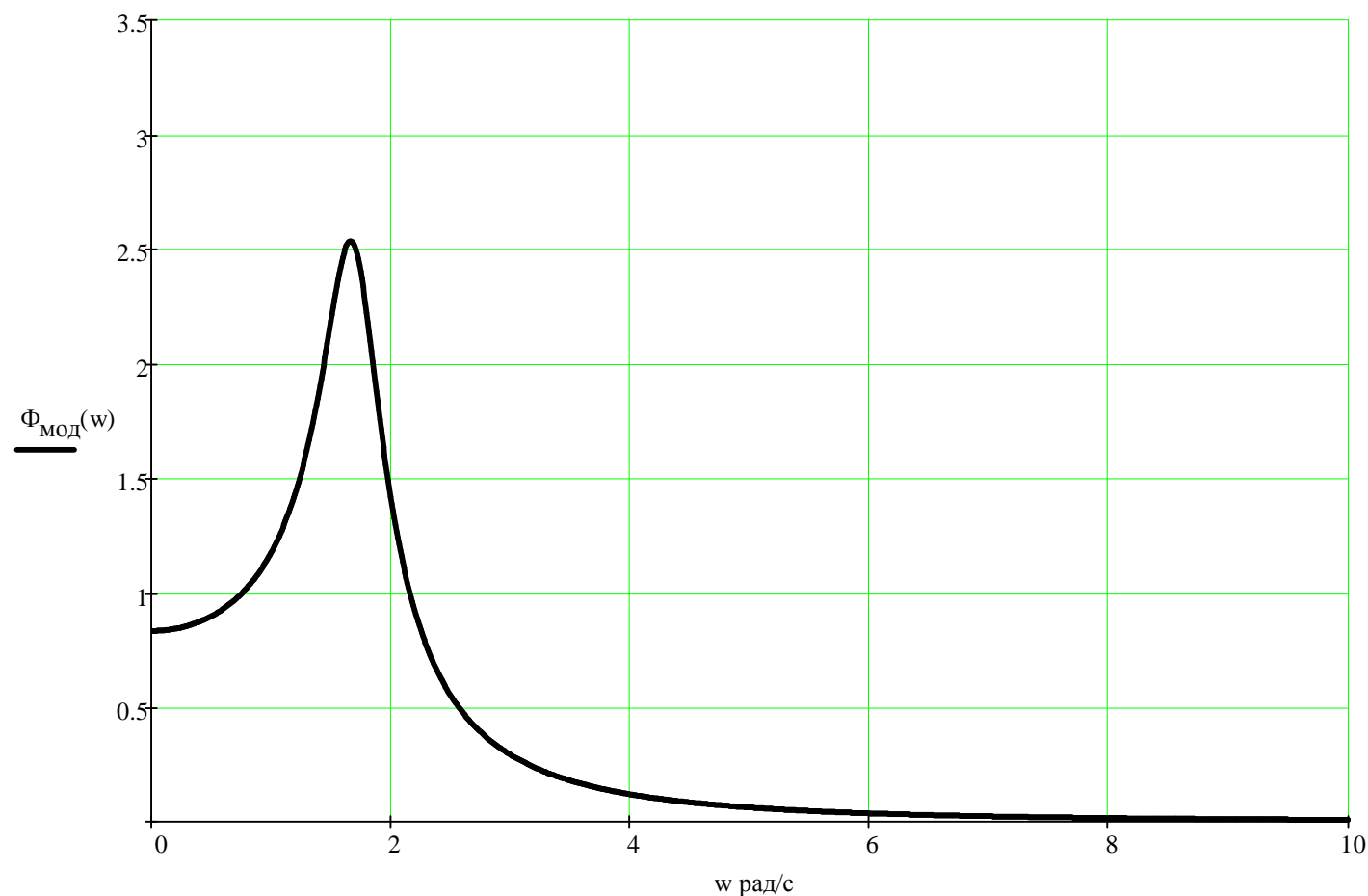
$$B_4 = (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)^2 - 2 T_1 T_2 T_3 (T_1 + T_2 + T_3)$$

$$B_2 = (T_1 + T_2 + T_3)^2 - 2 (K_1 K_2 K_3 + 1) (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)$$

$$B_0 = (K_1 K_2 K_3 + 1)^2$$

$$\Phi_{\text{мод}}(\omega) = \frac{K_1 K_2 K_3 \sqrt{B_6 \omega^6 + B_4 \omega^4 + B_2 \omega^2 + B_0}}{A_6 \omega^6 + A_4 \omega^4 + A_2 \omega^2 + A_0}$$

Построим график амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) замкнутой системы на интервале 0...10 рад/с (из соображений наглядности графика), по вертикальной оси будем откладывать амплитуду, а по горизонтальной оси - частоту:



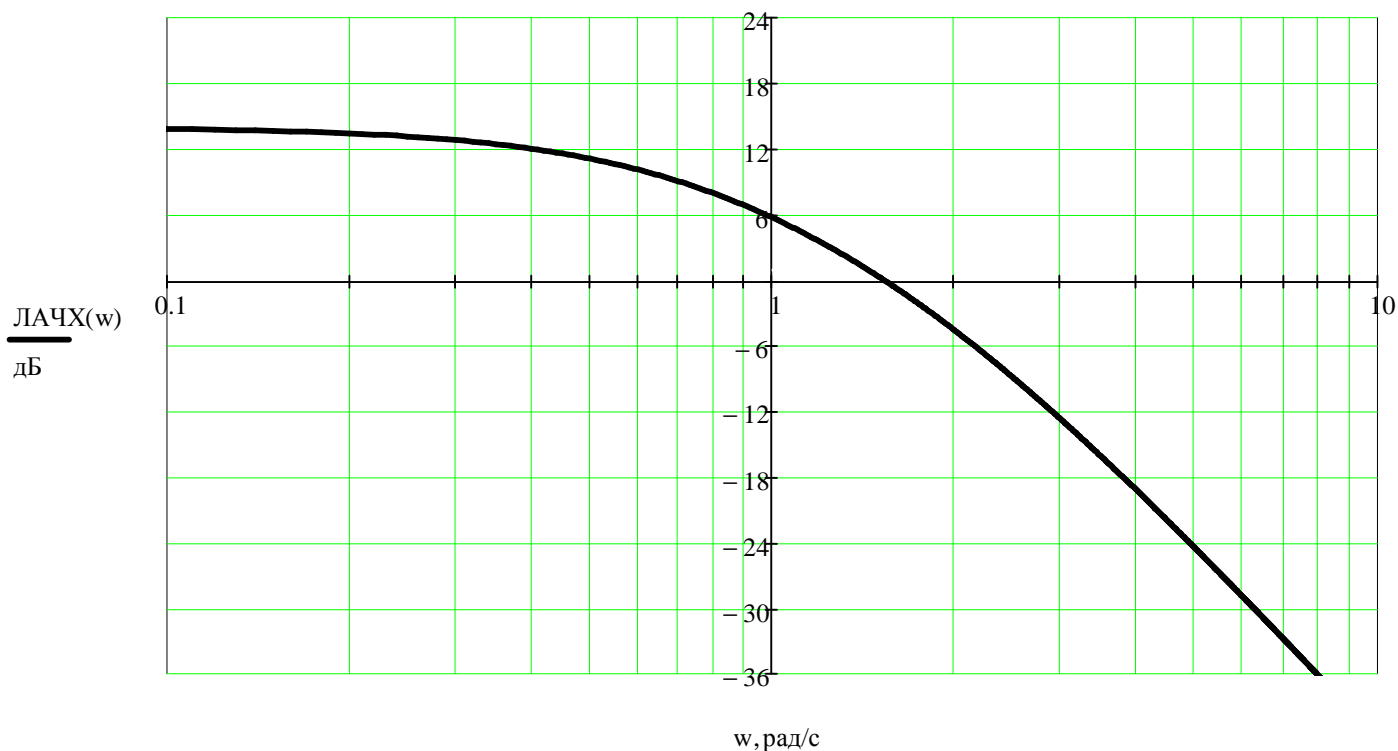
4. Используя полученные характеристики и построенные графики, найдем и оценим следующие показатели качества системы:

4.1 $e_{ст}$ - статическую ошибку при подаче на вход единичного ступенчатого воздействия:

$$e_{ст} = \frac{1}{1 + K_1 K_2 K_3} = \frac{1}{1 + 2.5 \cdot 0.525 \cdot 3.8} = 0.167$$

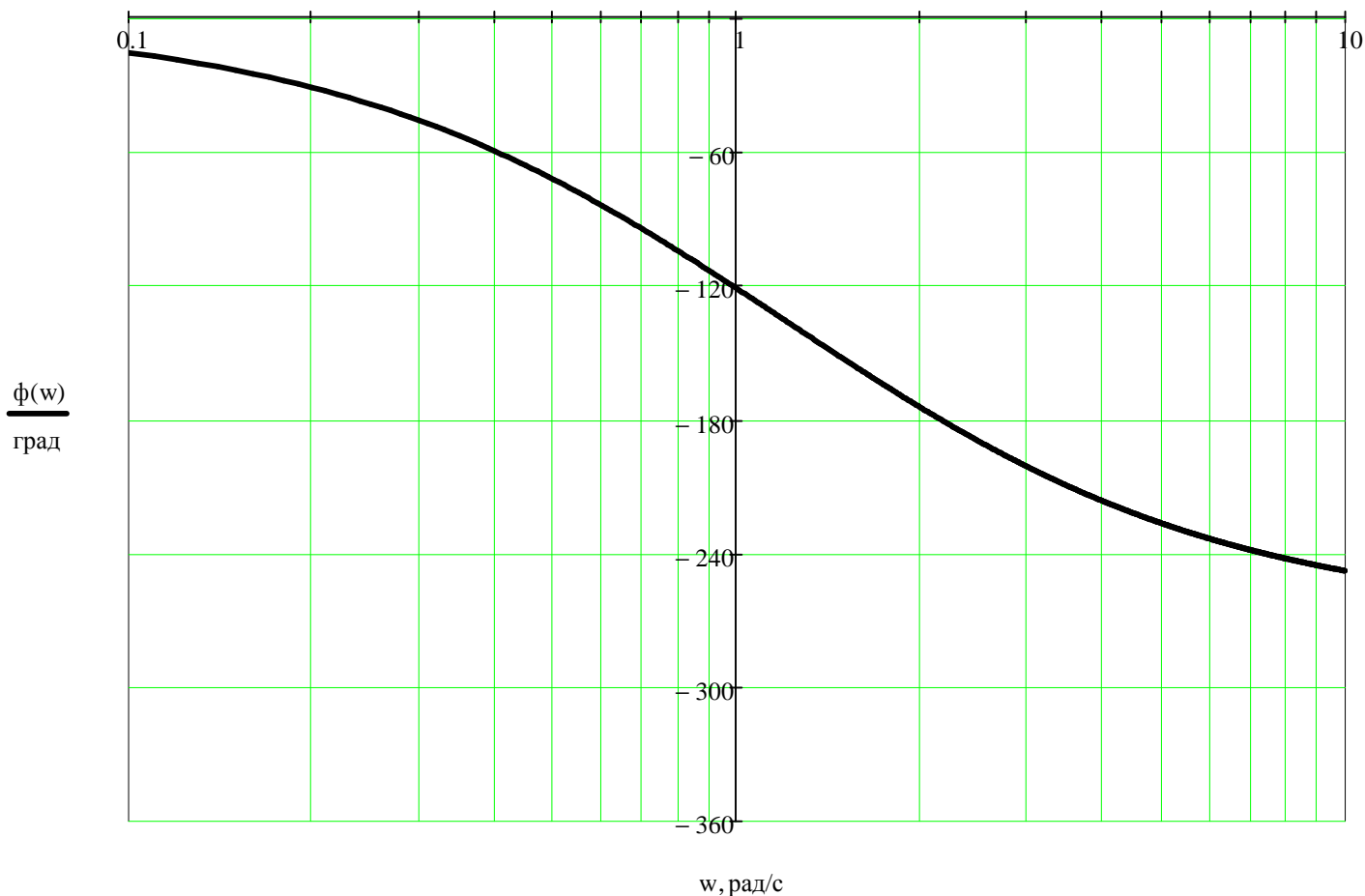
4.2 ω_c - частоту среза системы, запасы устойчивости системы по амплитуде $L_{зап}$ и фазе $\varphi_{зап}$:

частота среза системы определяется по графику ЛАЧХ как частота, на которой коэффициент усиления равен 0 дБ (корень уравнения $L(\omega)=0$):



$$\omega_c = 1.53 \text{ рад/с}$$

запас устойчивости системы по фазе $\phi_{\text{зап}}$ показывает, на какое значение ФЧХ разомкнутой системы на частоте среза отличается от π (180 град):



$$\phi_{\text{зап}} = 180 - |\phi(\omega_c)| = 180 - |-154.715| = 25.285 \text{ град}$$

критическая частота определяется из графика ФЧХ как частота, на которой фаза разомкнутой системы равна π (180 град):

$$\omega_{\text{кр}} = 2.157 \text{ рад/с}$$

запас устойчивости системы по амплитуде (усилению) $L_{\text{зап}}$ показывает, во сколько раз нужно увеличить коэффициент усиления, чтобы система оказалась на границе устойчивости

$$L_{\text{зап}} = \frac{1}{W_{\text{мод}}(\omega_{\text{кр}})} = \frac{1}{0.501} = 1.994$$

$$20 \log(L_{\text{зап}}) = 5.996 \text{ дБ}$$

4.3 М - показатель колебательности системы:

показатель колебательности системы определяется как максимальное значение АЧХ замкнутой системы (обычно стремятся, чтобы показатель колебательности не превышал двух)

$$M = \max(\Phi_{\text{мод}}(\omega)) = 2.535$$

4.4 t_p - время регулирования и перерегулирование G:

определим переходную характеристику системы как обратное преобразование Лапласа от:

$$h(t) = L^{-1} \left(\frac{W_{\text{замк}}(p)}{p} \right)$$

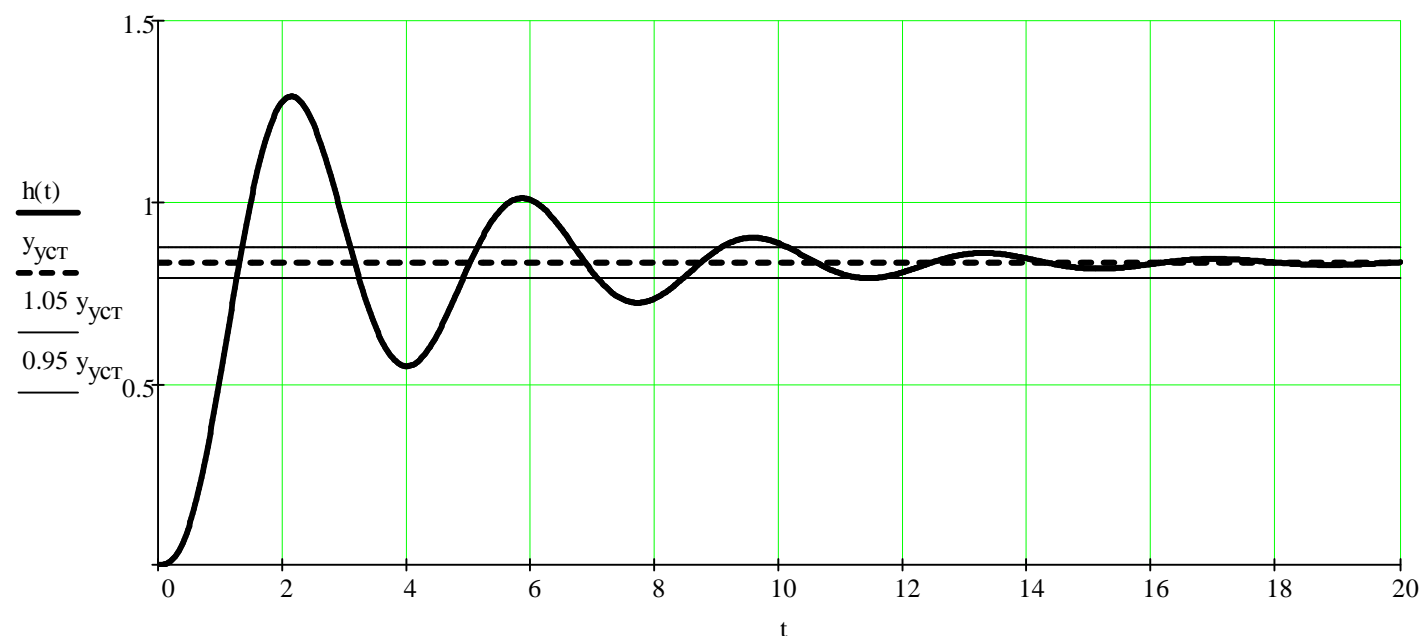
$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p} \frac{K_1 K_2 K_3}{T_1 T_2 T_3 (p)^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) (p)^2 + (T_1 + T_2 + T_3) p + K_1 K_2 K_3 + 1} \right]$$

$$h(t) = -0.191 e^{-3.41 t} + -0.642 \cos(1.69 t) e^{-0.255 t} + -0.481 \sin(1.69 t) e^{-0.255 t} + 0.833$$

определим установившееся значение на выходе системы $y_{\text{уст}}$ при воздействии на нее ступенчатой функции:

$$y_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0.833$$

построим график переходного процесса:



длительность переходного процесса определим как время, с момента подачи сигнала до момента времени, когда выходной сигнал не будет отличаться от его установившегося значения не более чем на 5%:

$$t_p = 12.465 \text{ с}$$

Определим по графику переходного процесса максимальное значение выходного сигнала:

$$h_{\text{max}} = 1.3$$

Определим перерегулирование:

$$G = \frac{|h_{\max} - y_{уст}|}{y_{уст}} = \frac{|1.3 - 0.833|}{0.833} = 56.087 \%$$

5. Найдем дифференциальное уравнение замкнутой системы, связывающее координаты y и v (полагая $f=0$):

Воспользуемся передаточной функцией замкнутой системы, для этого представим ее в виде полинома, где символ s эквивалентен операции дифференцирования:

$$\Phi(s) = \frac{K_1 K_2 K_3}{T_1 T_2 T_3 s^3 + (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) s^2 + (T_1 + T_2 + T_3) s + K_1 K_2 K_3 + 1}$$

$$a_3 = T_1 T_2 T_3 = 0.5 \cdot 1.5 \cdot 0.8 = 0.6$$

$$a_2 = T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 = 0.5 \cdot 1.5 + 0.5 \cdot 0.8 + 1.5 \cdot 0.8 = 2.35$$

$$a_1 = T_1 + T_2 + T_3 = 0.5 + 1.5 + 0.8 = 2.8$$

$$a_0 = K_1 K_2 K_3 + 1 = 2.5 \cdot 0.525 \cdot 3.8 + 1 = 5.983$$

$$K = K_1 K_2 K_3 = 2.5 \cdot 0.525 \cdot 3.8 = 4.983$$

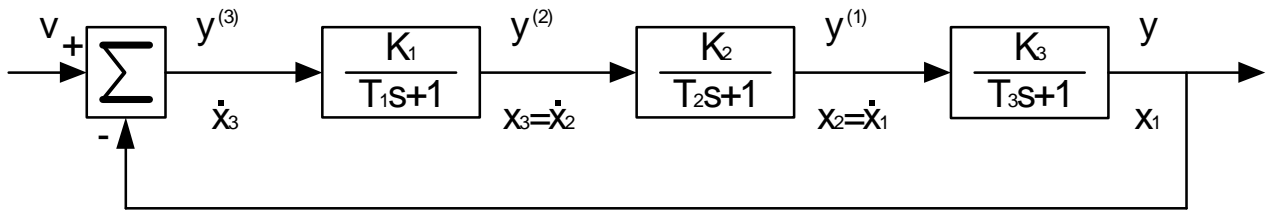
$$\Phi(s) = \frac{K}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$(a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) y = K v$$

$$a_3 \frac{d^3}{dt^3} y + a_2 \frac{d^2}{dt^2} y + a_1 \frac{d}{dt} y + y = K v$$

6. Найдем уравнение состояния замкнутой системы в векторно-матричном виде, в нормальной форме, связывающее координаты y и v (полагая $f=0$):

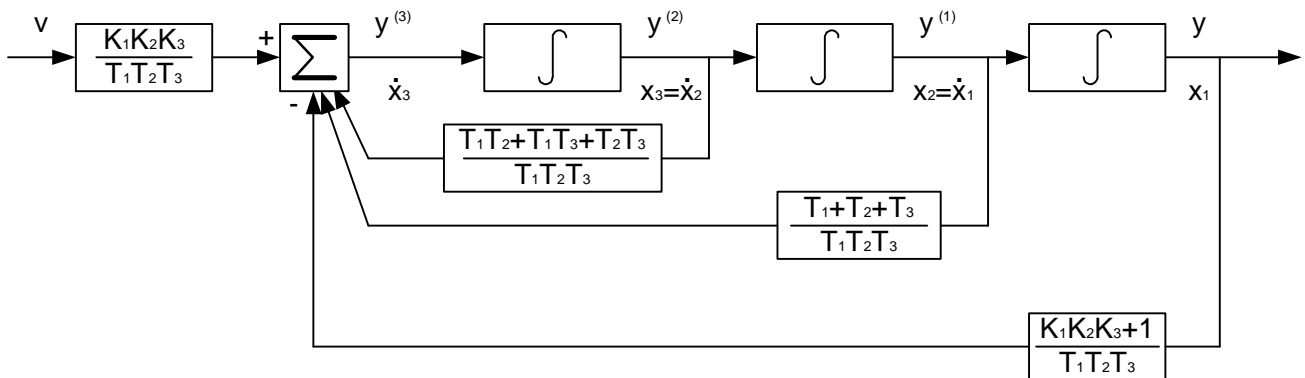
6.1 Найдем уравнение состояния замкнутой системы в векторно-матричном виде, связывающее координаты y и v (полагая $f=0$):



$$\frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_3} & \frac{K_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} \\ -\frac{K_1}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ K_1 \end{pmatrix} v \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} X$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{T_3} & \frac{K_3}{T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & \frac{K_2}{T_2} \\ -\frac{K_1}{T_1} & 0 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.25 & 4.75 & 0 \\ 0 & -0.667 & 0.35 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

6.2 Найдем уравнение состояния замкнутой системы в нормальной форме, связывающее координаты y и v (полагая $f=0$):



$$\frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1 K_2 K_3 + 1}{T_1 T_2 T_3} & -\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3} & -\frac{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}{T_1 T_2 T_3} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1 K_2 K_3}{T_1 T_2 T_3} \end{pmatrix} v \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} X$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_1 K_2 K_3 + 1}{T_1 T_2 T_3} & -\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3} & -\frac{T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3}{T_1 T_2 T_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9.97 & -4.67 & -3.92 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_1 K_2 K_3}{T_1 T_2 T_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.31 \end{pmatrix}$$

7. Обоснуем, при каком значении периода дискретизации рассматриваемая система эквивалентна импульсной системе:

Рассмотрим разомкнутую импульсную систему, приведенную на передаточная функция ЭЛНЧ которой имеет вид $W(s) = W_\phi(s)W_0(s)$. Передаточная функция импульсной системы будет $W(z)$, а частотная характеристика $W^*(j\omega)$. Существует связь между частотными характеристиками ЭЛНЧ $W(j\omega)$ и частотной характеристикой импульсной системы $W^*(j\omega)$, которая имеет вид:

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W[j(\omega + r\omega_0)], \quad (1)$$

где, как и ранее, $\omega_0 = 2\pi/T$ – частота дискретизации.

Итак, характеристика $W^*(j\omega)$ получается суммированием смещенных относительно друг друга вдоль оси ω на частоту повторения ω_0 характеристик $W(j\omega)$ ЭЛНЧ, умноженных на $1/T$. Из (1) вещественные и мнимые части частотных характеристик

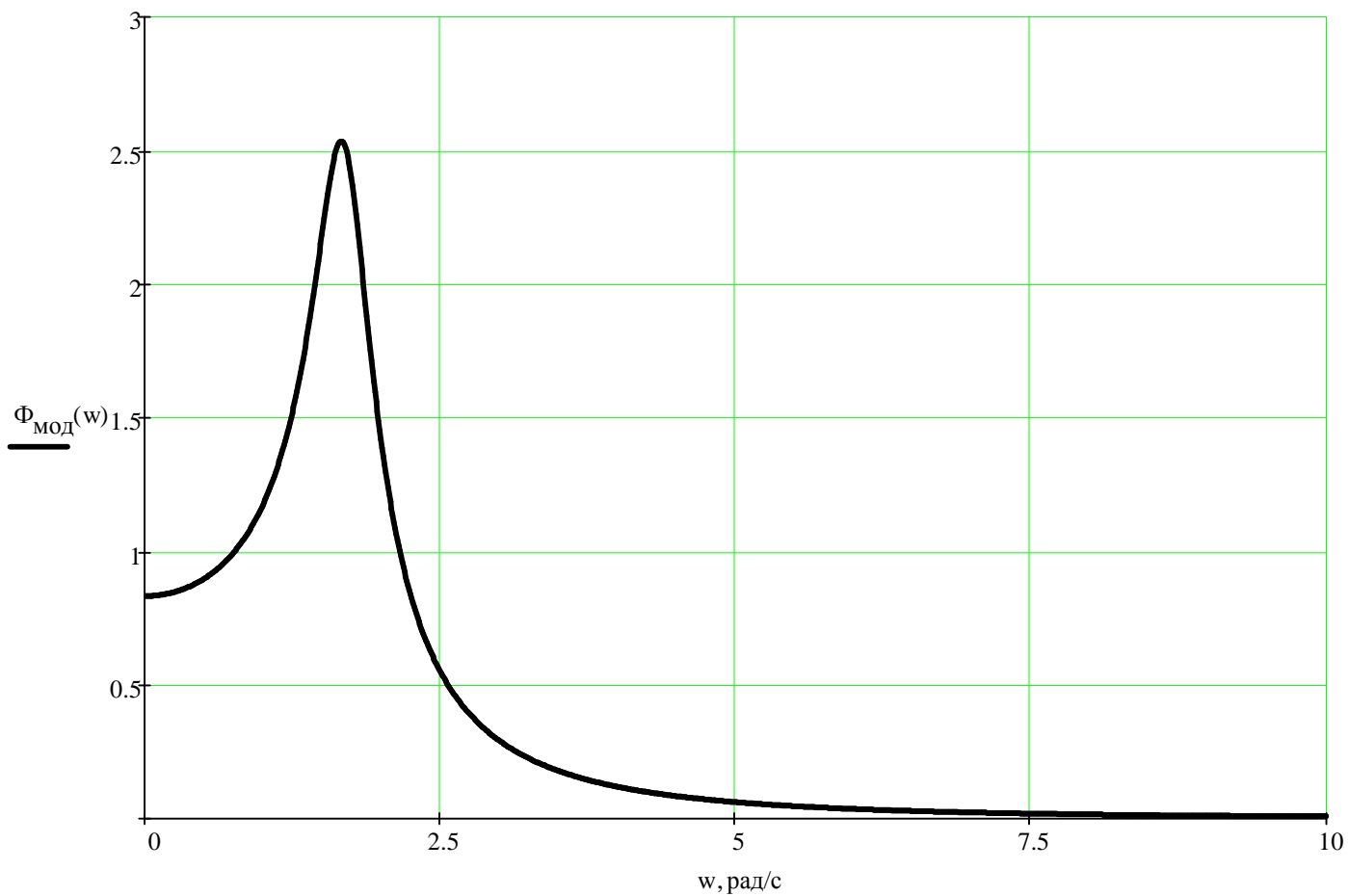
$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W^*(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} W[j(\omega + r\omega_0)], \\ \operatorname{Im} W^*(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} W[j(\omega + r\omega_0)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что вещественная и мнимая частотные характеристики заданы на интервале частоты ω от $-\omega_n$ до ω_n (ω_n – полоса пропускания) и вне этого интервала равны нулю, а спектральные характеристики входного сигнала $V(j\omega)$ определены на некотором интервале $-\omega_c < \omega < \omega_c$ и равны нулю вне этого интервала. В этом случае, если $\omega_c < \omega_n < \frac{\omega_0}{2}$, справедливо следующее соотношение

$$Y(j\omega) = W^*(j\omega)V(j\omega) = \frac{1}{T}W(j\omega)V(j\omega). \quad (3)$$

Итак, при выполнении условия $\omega_c < \omega_n < \frac{\omega_0}{2}$ импульсная система с передаточной функцией $W^*(j\omega)$ преобразует входной сигнал точно так же, как некоторая непрерывная система с передаточной функцией $\frac{1}{T}W(j\omega)$.

Фактически сформулирован аналог известной теоремы Котельникова: если спектр частот входного воздействия ограничен и лежит в диапазоне частот $-\omega_n < \omega < \omega_n$, то свойство системы с АИМ, у которой $\omega_0 > 2\omega_n$ тождественны свойствам эквивалентной непрерывной системы с АФЧХ $\frac{1}{T}W(j\omega)$.



По графику амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) замкнутой системы определим полосу пропускания как диапазон частот в котором $\Phi_{\text{мод}}(w) > 0.707\Phi_{\text{мод}}(0)$:

$$w_{\Pi} = 2.458 \text{ рад/с}$$

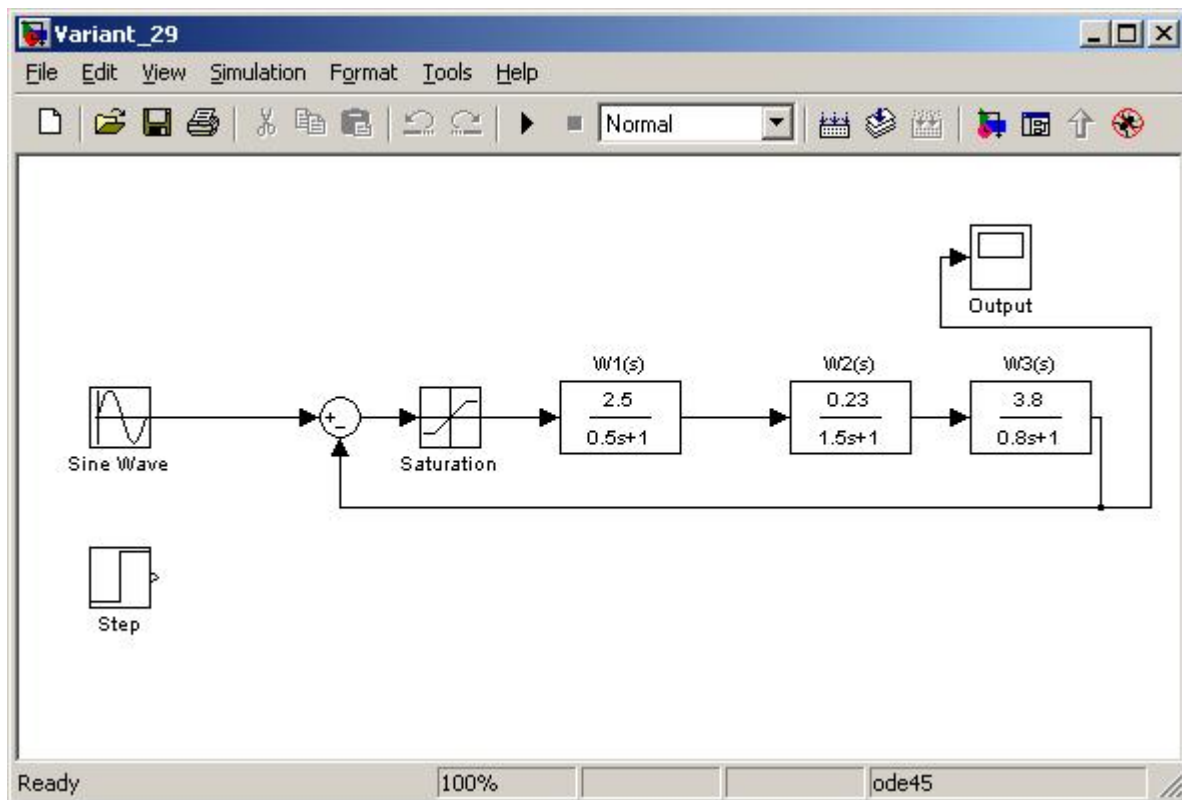
тогда минимальное значение w_0 равно:

$$w_0 = 2 w_{\Pi} = 2 \cdot 2.458 = 4.916 \text{ рад/с}$$

Определим максимальное значение периода дискретизации как:

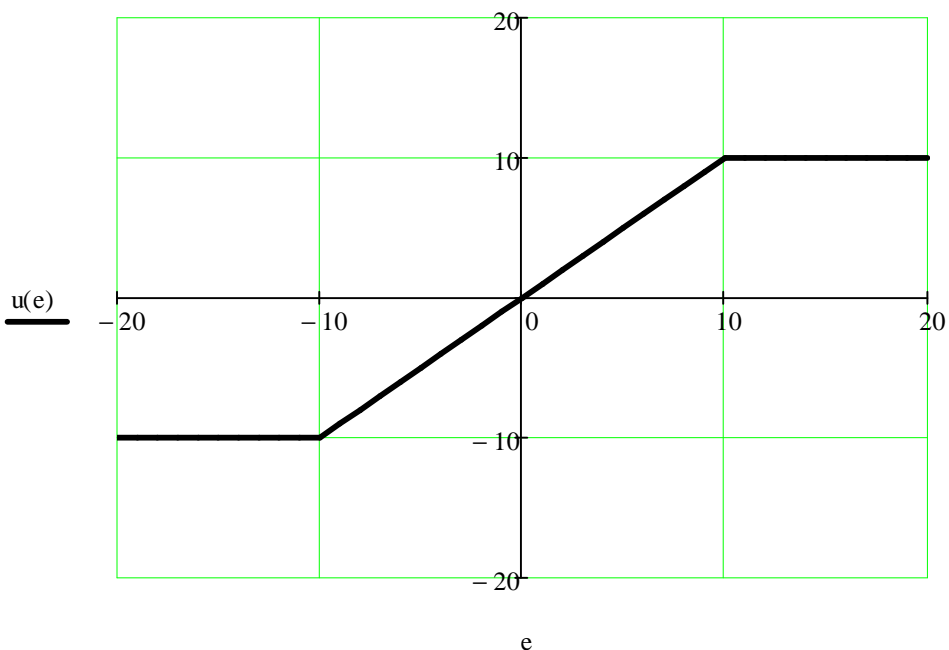
$$t_{\text{д}} = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2 \cdot 3.14}{4.916} = 1.277 \text{ с}$$

8. Оценим влияние насыщения первого звена системы на ее процессы, для этого воспользуемся специальным программным продуктом - Matlab и его пакетом численного моделирования Simulink:

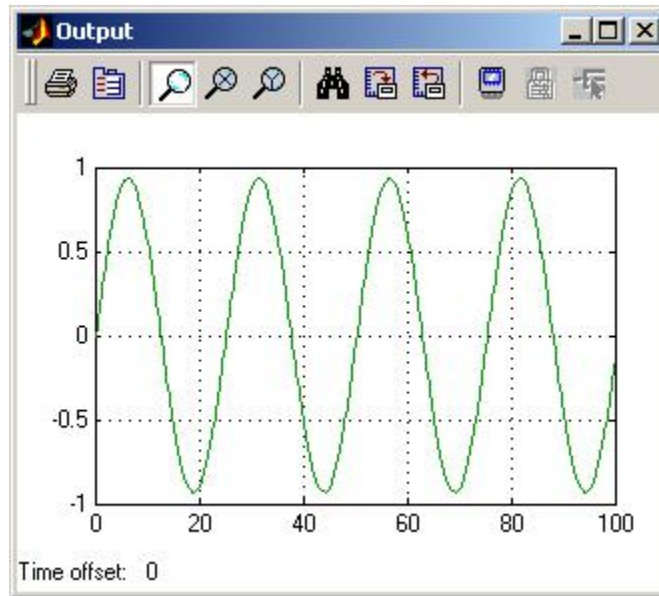


Нелинейность первого элемента системы с характеристикой типа "насыщение" имеет вид:

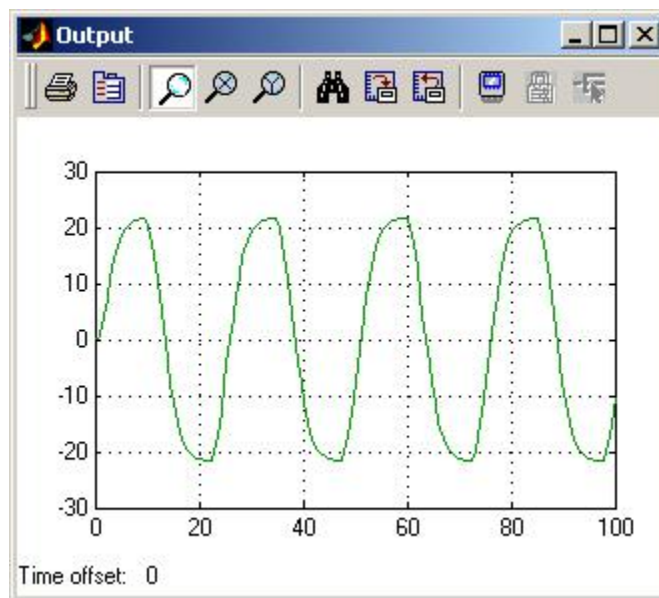
$$u(e) = \begin{cases} (-c) & \text{if } e \leq -a \\ \frac{c}{a} e & \text{if } -a < e < a \\ c & \text{if } e \geq a \end{cases}$$



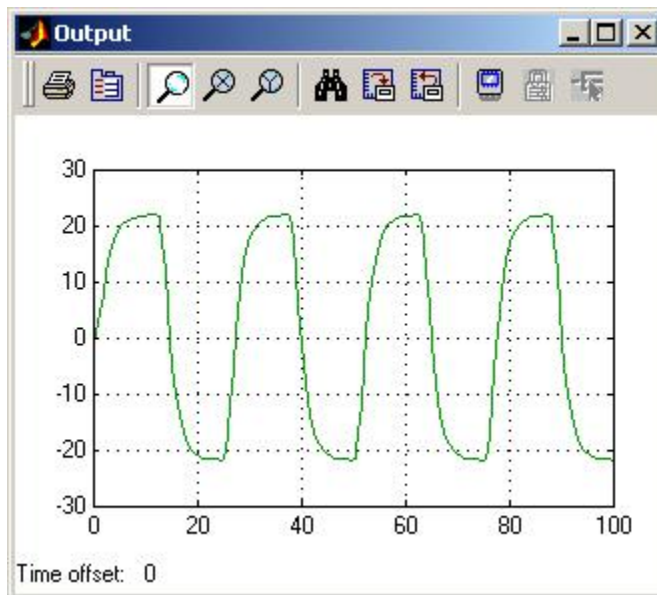
При подаче на вход гармонического сигнала $A \sin(0.25 t)$ с амплитудой $A=(1, 40, 600)$ выходной сигнал тем сильнее будет отличаться от входного, чем больше будет амплитуда:



линейная область.



область слабого насыщения.



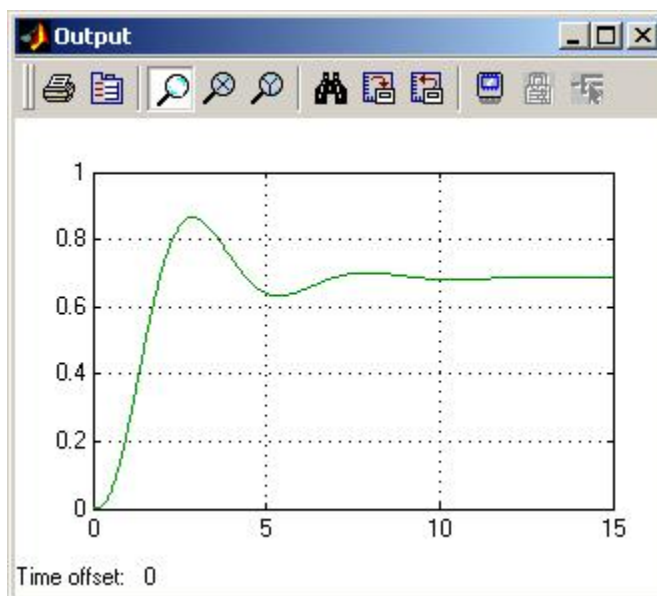
область сильного насыщения.

При значении амплитуды входного сигнала, меньшей чем амплитуда насыщения НЭ система будет линейной, и сигнал на выходе будет чисто гармоническим.

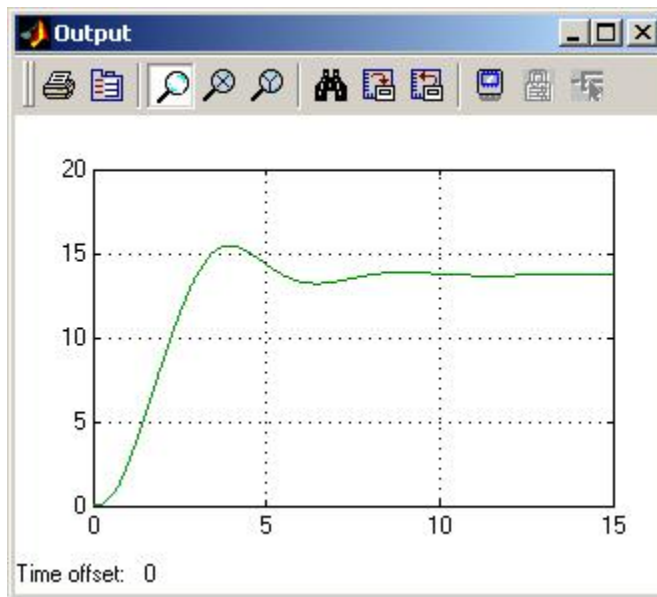
При значении амплитуды входного сигнала, незначительно большем чем амплитуда насыщения НЭ система будет нелинейной с малой степенью насыщения, и сигнал на выходе будет незначительно отличаться от гармонического.

При значении амплитуды входного сигнала, значительно большем чем амплитуда насыщения НЭ система будет нелинейной с большой степенью насыщения, и сигнал на выходе будет значительно отличаться от гармонического.

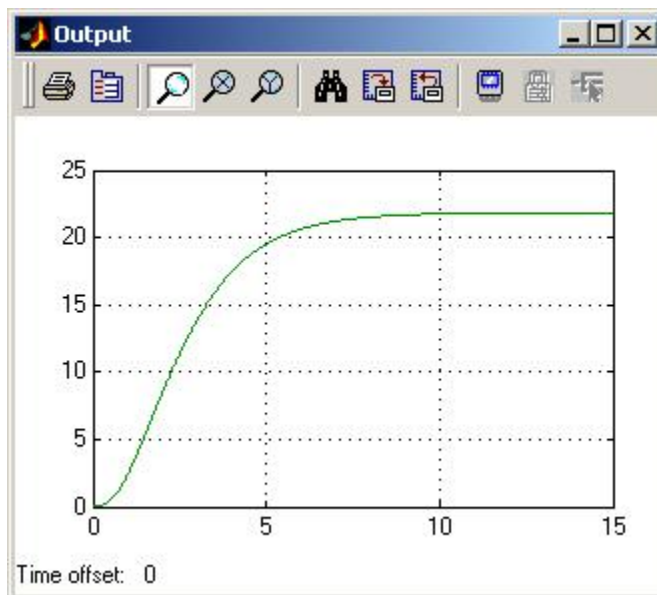
При подаче на вход ступенчатого сигнала с амплитудой $A=(1, 20, 100)$ выходной сигнал будет иметь вид:



линейная область.



область слабого насыщения.



область сильного насыщения.

При значении амплитуды входного сигнала, меньшей чем амплитуда насыщения НЭ система будет линейной, и переходный процесс будет аналогичен переходному процессу линейной системы.

При значении амплитуды входного сигнала, незначительно большем чем амплитуда насыщения НЭ система будет нелинейной с малой степенью насыщения, и переходный процесс незначительно затянется, однако перерегулирование будет меньше.

При значении амплитуды входного сигнала, значительно большем чем амплитуда насыщения НЭ система будет нелинейной с большой степенью насыщения, и переходный процесс значительно затянется, а перерегулирование практически исчезнет.

Вывод: таким образом, чем глубже насыщение НЭ, тем больше ошибка и тем хуже параметры переходного процесса.

Литература

1. Теория автоматического управления. Конспект лекций: В 2ч. Ч.1:
Линейные непрерывные системы : учеб.-метод. Пособие
/В.П.Кузнецов,С.В.Лукьянец,М.А.Крупская.-Мн.:БГУИР, 2007.-132с.
2. Теория автоматического управления. Конспект лекций: В 2ч. Ч.2:
Дискретные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: учеб.-метод. Пособие
/В.П.Кузнецов,С.В.Лукьянец,М.А.Крупская.-Мн.:БГУИР, 2007.-160с.
3. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика.-Москва: Высшая школа,1990.-334с.
4. Электронный учебно-методический комплекс: Теория автоматического
управления. Ч.1: Линейные непрерывные системы./ В.П. Кузнецов, С.В. Лукьянец, М.А.
Крупская- Мн.:БГУИР, 2006.
5. Электронный учебно-методический комплекс: Теория автоматического
управления. Ч.2:Дискретные,нелинейные, оптимальные и адаптивные системы /С.В.
Лукьянец, А.Т.Доманов,В.П.Кузнецов.М.А.Крупская-Мн.:БГУИР, 2007.