

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра радиотехнических устройств

**В.М. Дашенков**

**РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ  
И СИГНАЛЫ**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

Минск 2007

# СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Спектральный анализ сигналов. Видеосигналы. ....	4
1.1. Общие сведения о спектрах .....	4
1.2. Гармонический анализ периодических сигналов.....	5
1.3. Гармонический анализ непериодических сигналов.....	8
1.4. Свойства спектров (спектральные теоремы).....	10
1.5. Спектры некоторых видеосигналов.....	11
1.5.1. Дельта-сигналы.....	12
1.5.2. Прямоугольный импульс .....	13
1.5.3. Треугольный импульс.....	13
1.5.4. Гауссов импульс.....	14
Раздел 2. Спектральный анализ сигналов. Радиосигналы.....	16
2.1 Общие сведения о модулированных колебаниях и их спектрах.....	16
2.2. Амплитудная модуляция.....	21
2.2.1. Общие соотношения.....	21
2.2.2. Однотональная АМ.....	22
2.2.3. Многотональная АМ.....	23
2.2.4. Модуляция непериодическим сигналом.....	24
2.3. Угловая модуляция.....	24
2.3.1. Общие соотношения.....	24
2.3.2. Однотональная (гармоническая) УМ.....	25
2.3.3. Линейная частотная модуляция (ЛЧМ).....	29
2.4. Амплитудно-угловая модуляция (АУМ).....	31
2.5. Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ).....	33
Раздел 3. Нелинейные преобразования сигналов.....	35
3.1. Общие сведения.....	36
3.1.1. Метод угла отсечки.....	38
3.1.2. Режим «слабых» сигналов.....	42
3.4. Нелинейные функциональные преобразования.....	44
3.4.1. Ограничение.....	44
3.4.2. Резонансное усиление колебаний.....	45
3.4.3. Умножение частоты.....	47
3.4.4. Преобразование частоты.....	48
Раздел 4. Модуляция колебаний.....	50
4.1. Амплитудная модуляция.....	50
4.1. Параметры и характеристики модуляторов.....	57

Раздел 5. Выпрямление и детектирование колебаний.....	60
5.1. Общие сведения.....	60
5.2. Выпрямление.....	61
5.2.1. Однополупериодное выпрямление.....	65
5.2.2. Двухполупериодное выпрямление.....	71
5.3 Детектирование.....	75
Раздел 6. Исследование колебаний линейных и нелинейных систем методом фазовой плоскости.....	79
6.1. Теоретические сведения.....	79
6.1.1. Элементы фазовой плоскости.....	79
6.1.2. Линейный осциллятор.....	83
6.1.3. Нелинейный маятник.....	86
6.1.4. Автоколебательные системы.....	88
Раздел 7. Автогенераторы гармонических колебаний	
7.1. Общие свойства автоколебательных систем	
7.2. LC- автогенератор	
7.3. Условия самовозбуждения. Линейная трактовка	
7.4. Стационарный режим. Квазилинейный метод.	
7.5. Переходной режим. Нелинейный анализ. Импульсная работа	

# Раздел 1. Спектральный анализ сигналов. Видеосигналы

## 1.1. Общие сведения о спектрах

В математике, физике, технике широко используется спектральный метод анализа. Суть его заключается в том, что объект изучения, описываемый некоторой функцией  $f(x)$ , может быть представлен в виде разложения по системе взаимно ортогональных базисных функций  $\psi_k(x)$ :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} C_k Y_k(x). \quad (1.1)$$

Это возможно, если функции  $f(x)$  и  $Y_k(x)$  удовлетворяют следующим условиям Дирихле: они должны быть кусочно-непрерывны, ограничены и, если они периодические, то число экстремумов на периоде должно быть конечным. Практически все функции, описывающие физические процессы, этим требованиям удовлетворяют.

Условие взаимной ортогональности базисных функций означает, что их скалярное произведение

$$(Y_i(x) Y_k(x)) = \int_{x_a}^{x_b} (Y_i(x) Y_k^*(x) dx) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \|Y_k\|^2, & \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $\|Y_k\|$  - норма функции  $Y_k$ .

Пределы интегрирования в (1.2) соответствуют области определения функций. Коэффициенты разложения  $C_k$  от  $x$  не зависят. С помощью (1.1) и (1.2) нетрудно найти, что они равны:

$$C_k = \frac{1}{\|Y_k\|^2} \int_{x_a}^{x_b} f(x) Y_k^*(x) dx. \quad (1.3)$$

В общем случае эти коэффициенты есть комплексные числа, т.е.

$$C_k = |C_k| e^{j\Phi_k}. \quad (1.4)$$

Ряд (1.1) называется комплексным рядом Фурье, а само разложение называется *спектральным*. Отдельные члены ряда называются спектральными компонентами, а коэффициенты  $C_k$  – спектральными коэффициентами.

Хотя разложение  $f(x)$  в спектр и является чисто математическим приемом, его практическое значение очень велико, особенно при исследовании линейных систем, для которых справедлив *принцип суперпозиции*, гласящий, что реакция

системы на сумму воздействий равна сумме реакций от отдельных воздействий. Благодаря этому, представив  $f(x)$  в виде суммы составляющих, для которых частные задачи решаются относительно просто, путем суммирования удастся получить общее решение. Спектральный метод получил очень широкое распространение; говорят даже о "спектральном" языке, когда каждая спектральная составляющая подсознательно ассоциируется как бы с реальной, физически существующей частью  $f(x)$ . Однако нужно четко сознавать, что такие представления – лишь удобная модель и фактически  $f(x)$  не есть сумма (1.1), а единый объект.

В зависимости от решаемой задачи разложение в спектр можно провести различными способами, используя различные системы базисных функций. Наибольшее распространение получил гармонический спектральный анализ, основанный на разложении функции  $f(x)$  по системе гармонических базисных функций  $Sinkx, Coskx, e^{jkx}$  с нормами, определяемыми их периодом  $2\pi$ .

$$\|Sinkx\|^2 = \|Coskx\|^2 = \pi, \quad \|e^{jkx}\|^2 = 2\pi. \quad (1.5)$$

## 1.2. Гармонический анализ периодических сигналов

Будем считать, что функция  $f(x)$  - это действительный и периодический сигнал  $S(t)$  (рис. 1.1) с периодом  $T$ , а роль координаты  $x$  играет величина

$$x = \omega_1 t, \quad (1.6)$$

где  $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T}$  – тактовая частота сигнала.

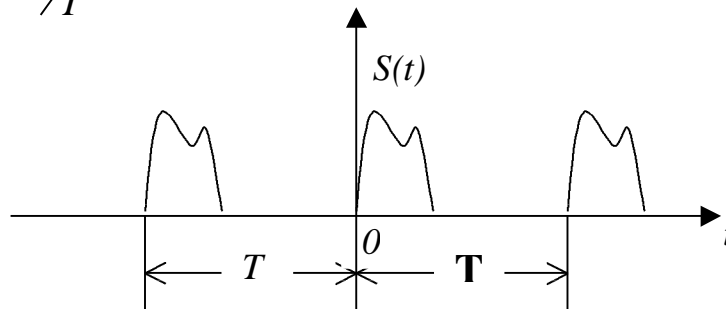


Рис. 1.1. Периодический сигнал

Базисными функциями в этом случае будут

$$\sin kx = \sin \omega_k t, \quad \cos kx = \cos \omega_k t \quad \text{и} \quad e^{jkx} = e^{j\omega_k t}, \quad (1.7)$$

где  $\omega_k = k \omega_1 = k \frac{2\pi}{T}$ .

На основании (1.1) ряд Фурье принимает вид

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} C_k e^{jkx} = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} C_k e^{j\omega_k t}. \quad (1.8)$$

Согласно (1.3) его коэффициенты равны

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-jkx} dx = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) e^{-j\omega_k t} dt. \quad (1.9)$$

Ряд (1.8) называется комплексной формой ряда Фурье. Его компоненты с частотами  $\omega_k$  называются *гармониками* сигнала. Заметим, что  $\omega_{-k} = -\omega_k$ . Иногда говорят, что это соответствует "отрицательным" частотам гармоник. На самом деле, конечно, никаких отрицательных частот нет, просто в формуле перед частотой  $\omega_k$  стоит знак минус. Ради удобства термин "отрицательная частота" можно употреблять, но нужно четко понимать его истинный смысл.

Если экспоненту в (1.9) представить как,  $e^{-j\omega_k t} = \cos \omega_k t - j \sin \omega_k t$ , то коэффициенты ряда можно выразить в виде

$$C_k = A_k - jB_k = |C_k| e^{j\varphi_k}, \quad (1.10)$$

где

$$\begin{cases} A_k = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) \cos \omega_k t dt, \\ B_k = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) \sin \omega_k t dt, \end{cases} \quad (1.11)$$

$$|C_k| = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \varphi_k = \arctg \frac{-B_k}{A_k}. \quad (1.12)$$

Из (1.11) и (1.12) видно, что коэффициенты  $A_k$  и  $|C_k|$  имеют четное, а  $B_k$  и  $\varphi_k$  – нечетное распределение по индексу  $k$ :

$$A_k = A_{-k}, \quad |C_k| = |C_{-k}|, \quad B_k = -B_{-k}, \quad \varphi_k = -\varphi_{-k}. \quad (1.13)$$

Подстановка (1.10) в (8) с учетом (1.13) приводит к следующей форме ряда Фурье, называемой тригонометрической:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t = A_0 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t. \quad (1.14)$$

Еще одна форма ряда получается, если в (8) подставить (1.4) и учесть (1.13):

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |C_k| \cos(\omega_k t + \varphi_k) = C_0 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} |C_k| \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1.15)$$

Часто именно она наиболее удобна для расчетов.

Размерность коэффициентов ряда Фурье совпадает с размерностью сигнала.

Графически спектр периодического сигнала представляется в виде отрезков линий, местоположение которых определяется частотами  $\omega_k$ , а длины - величиной спектральных коэффициентов. Возможны изображения в декартовых, полярных и цилиндрических координатах. (рис.1.2; 1.3,а; 1.3,б)

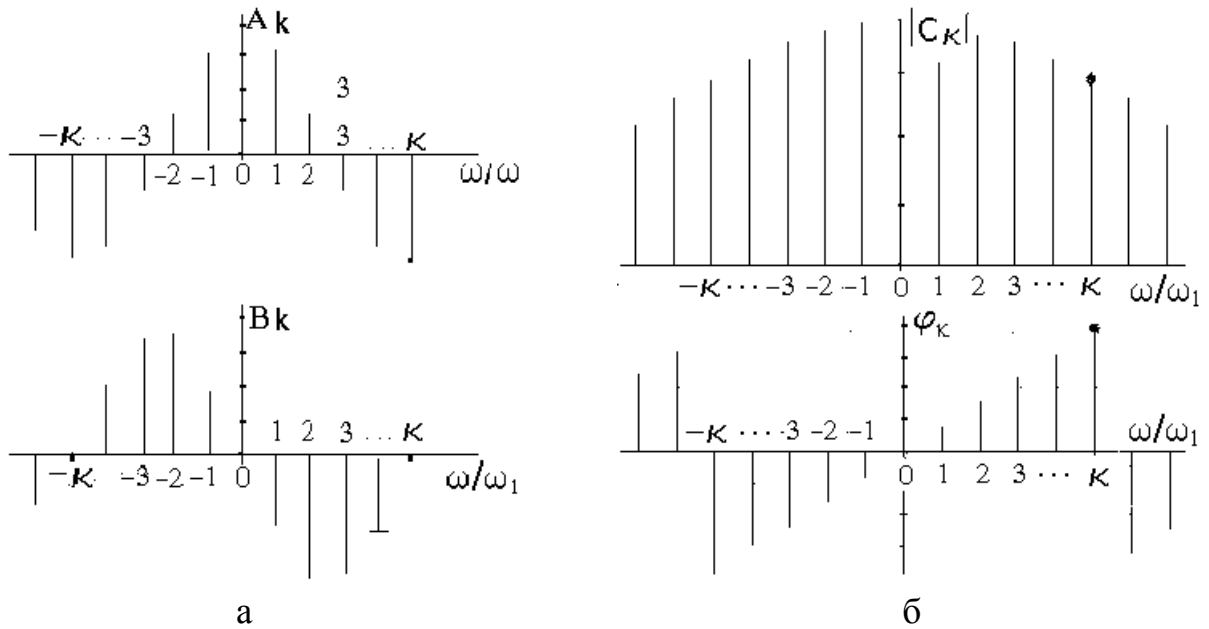


Рис.1.2. Комплексный спектр периодического сигнала:  
а – действительная и мнимая части; б – модуль и фаза

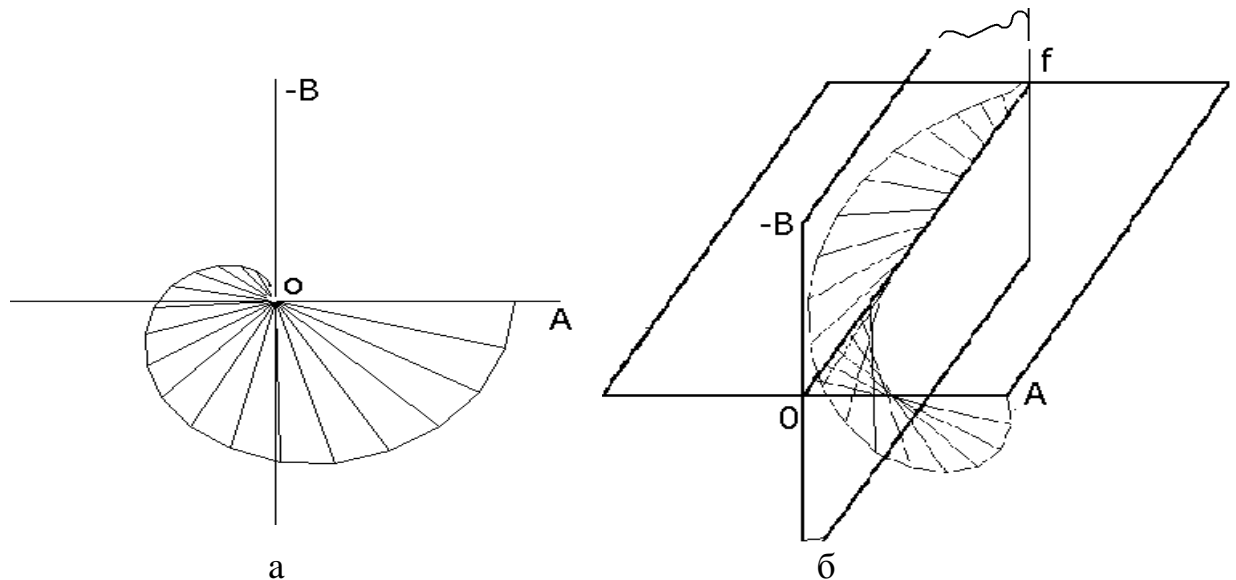


Рис.1.3. Изображение спектра на плоскости (а) и в пространстве (б)

### 1.3. Гармонический анализ непериодических сигналов

Устремив период  $T \rightarrow \infty$ , приходим к модели непериодического (одионого) сигнала. При этом интервал  $\omega_1$  между спектральными линиями уменьшается до бесконечно малого  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$  и спектр становится *сплошным*. Суммы в формулах переходят в интегралы, коэффициенты  $A_k, B_k, C_k \rightarrow A(\omega), B(\omega), C(\omega)$ , и вместо формулы (9) получаем

$$C(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = dC(\omega). \quad (1.16)$$

Отсюда находим

$$\frac{dC(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} S(\omega). \quad (1.17)$$

Величина

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.18)$$

называется *спектральной плотностью* сигнала  $S(t)$ . Ряд (1.8) переходит в интеграл

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.19)$$

Формулы (1.18) и (1.19) образуют пару интегральных преобразований Фурье, связывающих сигнал и его спектр. Символически это изображается так:

$$S(\omega) \Leftrightarrow S(t).$$

Размерность спектральной плотности равна  $[S(\omega)] = \frac{[S(t)]}{\tilde{\Delta\omega}} = [S(t)] \cdot \text{с}$ .

По аналогии с формулами (1.10) – (1.12) спектральную плотность можно представить в виде

$$S(\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = |S(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.20)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cos \omega t dt, \\ B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \sin \omega t dt, \end{array} \right. \quad (1.21)$$

$$|S(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{A(\omega)}{B(\omega)}. \quad (1.22)$$



Функции  $A(\omega) \equiv |S(\omega)|$  и  $B(\omega) \equiv \varphi(\omega)$ . По аналогии с формулами (1.14) и (1.15) теперь будет

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega. \quad (1.23)$$

Установим связь между спектрами одиночного и периодического сигналов, совпадающих на интервале, равном периоду  $T$  (рис.1.4).

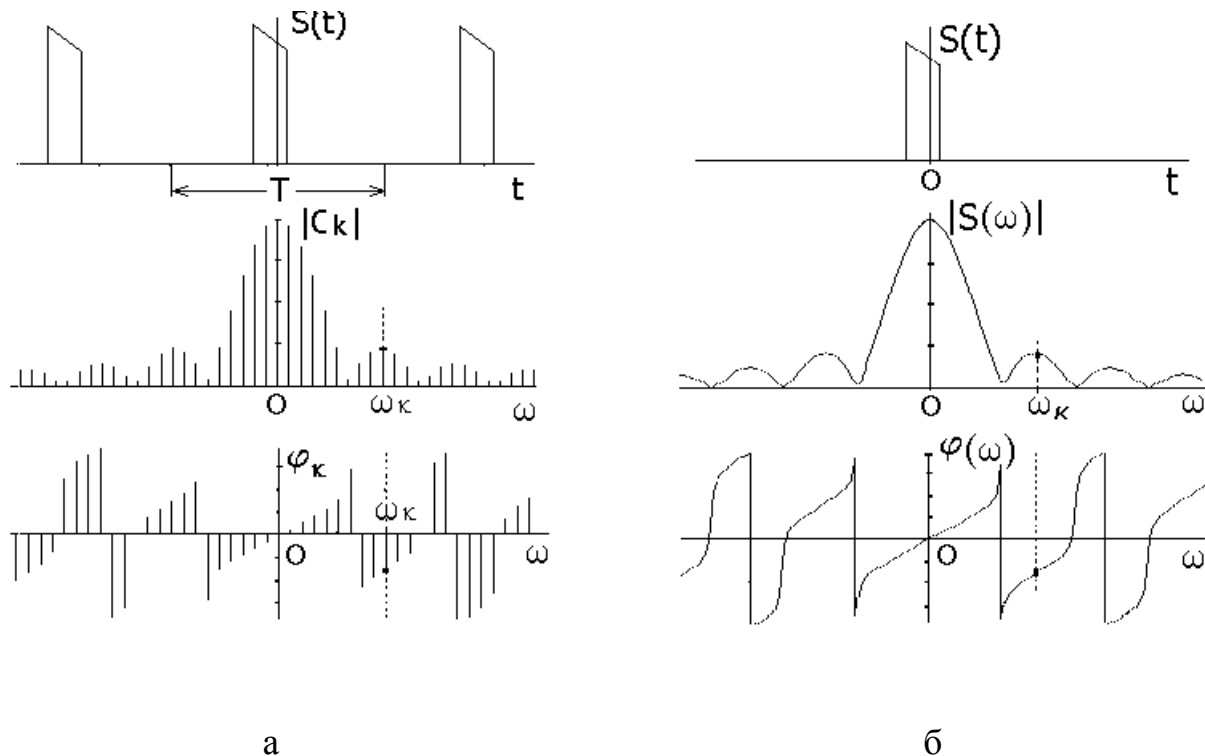


Рис.1.4. Периодический (а) и одиночный (б) сигналы с одинаковой формой огибающей их спектров

С этой целью для одной и той же частоты  $\omega = \omega_k$  сравним значения  $C_k = C(\omega_k)$  и  $S(\omega_k)$ . Используя (1.9) и (1.18), находим что

$$C_k = \frac{1}{T} S(\omega_k). \quad (1.24)$$

Они совпадают с точностью до коэффициента  $1/T$ . Другими словами, спектральные линии периодического сигнала можно находить как выборки из кривой  $S(\omega)/T$  на частотах  $\omega_k$ . Это позволяет свойства спектров одиночных сигналов переносить на спектры периодических сигналов.

## 1.4. Свойства спектров (спектральные теоремы)

Из преобразований Фурье следует ряд свойств спектров. Некоторые из них без выводов приводятся ниже. Сигнал  $S(t)$  предполагается действительным.

- Спектр несимметричного сигнала - комплексный, эрмитово сопряженный. Его реальная часть  $A(\omega)$  есть функция четная, а мнимая  $B(\omega)$  - нечетная:

$$S(t) \Leftrightarrow A(\omega) - jB(\omega). \quad (1.25)$$

- Спектр четного сигнала – действительный и четный:

$$S(t) = S(-t) \Leftrightarrow A(\omega) = A(-\omega). \quad (1.26)$$

- Спектр нечетного сигнала – мнимый и нечетный:

$$S(t) = -S(-t) \Leftrightarrow -jB(\omega) = jB(-\omega). \quad (1.27)$$

- Обращение сигнала во времени приводит к обращению спектра по частоте:

$$S(-t) \Leftrightarrow S(-\omega). \quad (1.28)$$

- Значение спектра при  $\omega = 0$  определяется площадью сигнала:

$$S(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) dt. \quad (1.29)$$

- Спектр суммы сигналов равен сумме их спектров (теорема сложения):

$$\sum_i \alpha_i S_i(t) \Leftrightarrow \sum_i \alpha_i S_i(\omega). \quad (1.30)$$

- При сдвиге сигнала на  $\tau$  фаза его спектра изменяется на  $-\omega\tau$  (теорема запаздывания):

$$S(t - \tau) \Leftrightarrow S(\omega) e^{-j\omega\tau}. \quad (1.31)$$

- При умножении сигнала на  $e^{j\omega_0 t}$  его спектр, не меняя своего вида, смещается на величину  $\omega_0$  (теорема смещения):

$$S(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow S(\omega - \omega_0). \quad (1.32)$$

- Расширению сигнала во времени соответствует сужение его спектра (теорема расширения):

$$S(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{t}{\alpha}\right). \quad (1.33)$$

- При взятии производной от сигнала его спектр умножается на  $j\omega$  (теорема о производной):

$$\frac{dS(t)}{dt} \Leftrightarrow j\omega S(\omega), \quad \frac{d^n S(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n S(\omega). \quad (1.34)$$

- Взятие интеграла от сигнала соответствует делению спектра на  $j\omega$  (теорема об интеграле):

$$\int_{-\infty}^t S(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} S(\omega), \quad \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t S(t) dt \Leftrightarrow \left(\frac{1}{j\omega}\right)^n S(\omega). \quad (1.35)$$

- Спектр произведения двух сигналов равен свертке их спектров (теорема о произведении сигналов):

$$S_1(t)S_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} S_1(\omega) \otimes S_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) S(\omega - \nu) d\nu. \quad (1.36)$$

- Спектр свертки двух сигналов равен произведению их спектров (теорема о свертке):

$$S_1(t) \otimes S_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) S(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow S_1(\omega) S_2(\omega). \quad (1.37)$$

- Теорема дуальности о взаимозаменяемости частоты  $f$  и времени  $t$ :

$$\text{Если } F(t) \Leftrightarrow S(f), \text{ то } F(f) \Leftrightarrow S(-t). \quad (1.38)$$

## 1.5 Спектры некоторых видеосигналов

*Видеосигналами* в отличие от *радиосигналов* называют сигналы без высокочастотного заполнения. Определение это, не являясь строгим, общепринято и интуитивно понятно. В данной работе изучаются спектры распространенных видеосигналов:  $\delta$ -импульсов, прямоугольного, треугольного и гауссового

### 1.5.1. Дельта-сигналы

Математической моделью сигнала очень короткой длительности является бесконечно узкая и бесконечно высокая, но с конечной площадью,  $\delta(t)$ -функция Дирака. Амплитудой  $\delta$ -функции называется ее площадь (реально - площадь сигнала). Спектр  $\delta(t)$  сплошной и для функции единичной амплитуды, располагающейся в начале координат (рис.1.5,а), равен 1:

$$\delta(t) \Leftrightarrow S(\omega) = 1. \quad (1.39)$$

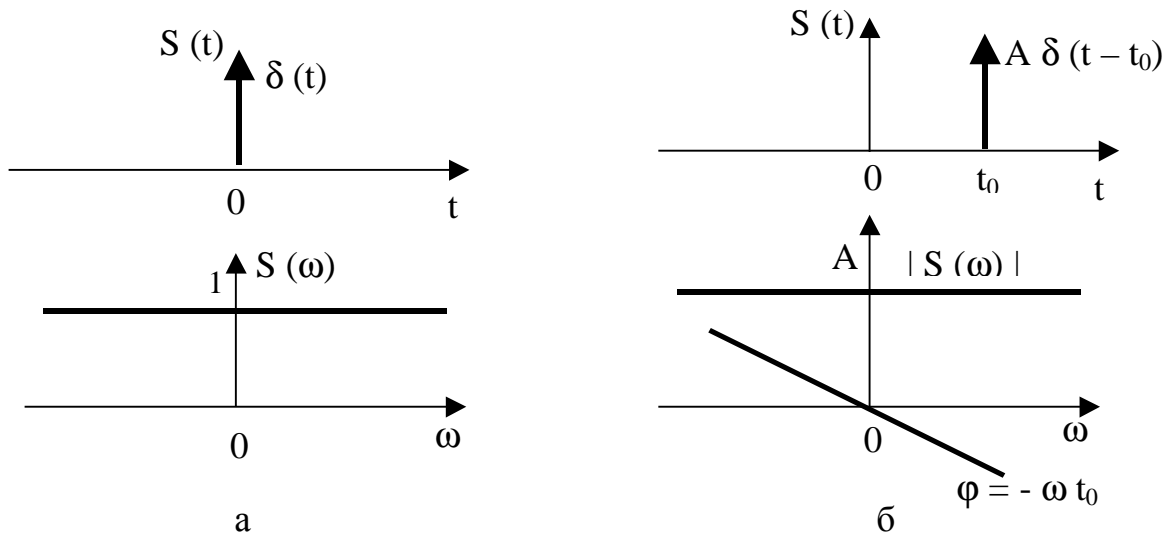


Рис.1.5. Дельта-импульсы и их спектры:

а – единичный в начале координат; б – смещенный на  $t_0$  с амплитудой  $A$

Для импульса с амплитудой  $A$ , смещенного на  $t = t_0$  (рис.5,б), будем иметь:

$$A \delta(t - t_0) \Leftrightarrow A e^{-j\omega t_0}. \quad (1.40)$$

Спектр совокупности некоторого числа  $\delta$ -импульсов на основании теоремы сложения (1.30) равен

$$S(\omega) = \sum_i A_i e^{-j\omega t_i}. \quad (1.41)$$

Периодическая последовательность  $\delta$ -импульсов с периодом  $T$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

имеет линейчатый спектр

$$S(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T}k\right). \quad (1.42)$$

Понятие энергии для  $\delta$ -импульса не определено.

### 1.5.2. Прямоугольный импульс

Сигнал прямоугольной формы – один из наиболее широко используемых на практике (рис.1.6).

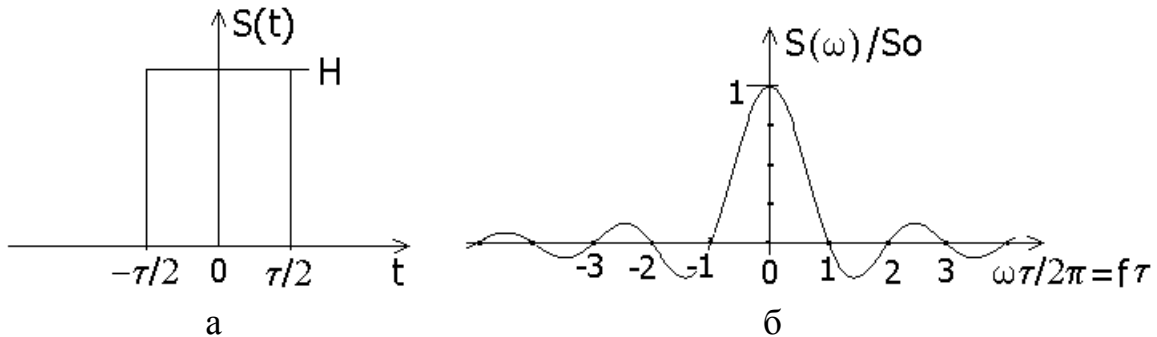


Рис. 1.6. Прямоугольный импульс (а) и его спектр (б)

Спектр прямоугольного импульса описывается формулой

$$S(\omega) = S_o \frac{\sin x}{x}, \quad (1.43)$$

где  $x = \omega t / 2$ ;  $S_o = H t$  – i eî ù àä ü èì ï óëüñà.

Спектр бесконечен, имеет лепестковый характер, ширина лепестка  $Df = 1/\tau$ . Энергия сигнала  $E = H^2 \tau$ . В центральной лепестке сосредоточено 90% всей энергии. При синтезе по спектру для удовлетворительного воспроизведения формы сигнала необходимо учитывать 4 или 5 лепестков, в чем надлежит убедиться при выполнении работы.

### 1.5.3. Треугольный импульс

Сигналы треугольной формы (рис.1.7), как и прямоугольной, также достаточно широко используются на практике.

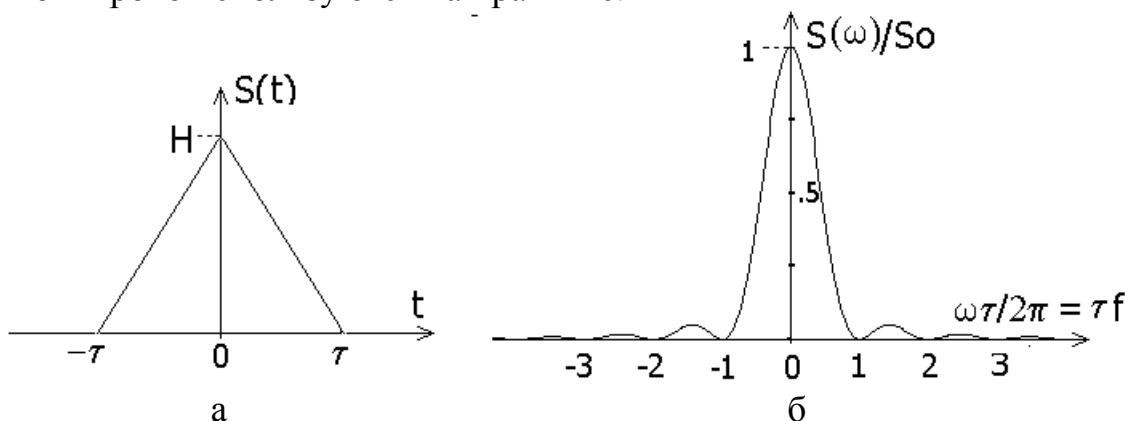


Рис.1.7. Треугольный импульс (а) и его спектр (б)

Он может рассматриваться как свертка двух прямоугольных импульсов длительностью  $\tau$ . Отсюда следует, что согласно теореме о свертке (1.37) его спектр равен произведению спектров (1.43) этих импульсов:

$$S(\omega) = S_0 \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2, \quad (1.44)$$

где  $x = \omega\tau/2$ ;  $S_0 = H\tau$  — амплитудно-частотная характеристика.

Лепестки спектра (1.44) треугольного импульса той же ширины, что у прямоугольного, но все они положительные и затухают гораздо быстрее. Поэтому эффективная ширина его спектра значительно меньше чем прямоугольного. В центральной лепестке сосредоточено 99,7% всей энергии сигнала, и для хорошего воспроизведения формы треугольника при синтезе достаточно учесть частоты только этого лепестка.

#### 1.5.4. Гауссов импульс

Многие явления природы, в том числе и сигналы, описываются функцией, называемой гауссовой (рис.1.8):

$$S(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\pi \left( \frac{t}{\tau} \right)^2}. \quad (1.45)$$

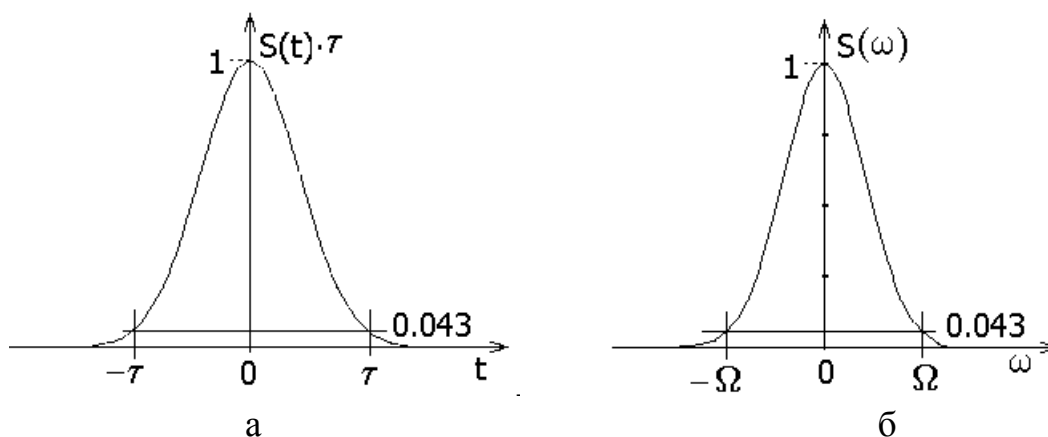


Рис.1.8. Функция Гаусса (а) и ее спектр (б)

Теоретически протяженность функции бесконечна, однако вследствие затухания практически ее можно ограничить значениями от  $-\tau$  до  $\tau$ , где уровень сигнала уменьшается до 4,3% от максимального. Площадь под кривой равна 1.

Функция эта во многих отношениях замечательная. Так, она сама и все ее производные есть функции абсолютно гладкие. Ее *спектральная* функция также является гауссовой:

$$S(\omega) = e^{-\pi \left(\frac{\omega}{W}\right)^2}, \quad W = 2\pi/\tau. \quad (1.46)$$

Гауссовой оказывается и *автокорреляционная* функция, а так называемая *база*

$$B = \Delta T_{\text{эф}} \Delta \omega_{\text{эф}}, \quad (1.47)$$

выражаемая через эффективные длительность сигнала и полосу частот его спектра, равные  $\Delta T_{\text{эф}} = \frac{t}{\sqrt{p}}$ ,  $\Delta \omega_{\text{эф}} = \frac{\Omega}{2\sqrt{p}}$ , имеет наименьшее из всех возможных для сигналов значение  $B = 1$ .

В полосе частот до  $W$  заключена практически вся энергии сигнала. Этой полосы достаточно для очень хорошего воспроизведения формы сигнала при синтезе.

В теоретическом плане гауссов сигнал занимает одно из центральных мест.

## Раздел 2. Спектральный анализ сигналов. Радиосигналы

### 2.1. Общие сведения о модулированных колебаниях и их спектрах

Радиосигналами (РС) называют электромагнитные колебания высокой частоты (обычно выше 100 кГц), предназначенные для передачи через эфир сообщений, вводимых в РС путем модуляции (изменения) их параметров. Различают амплитудную (АМ), угловую (УМ), амплитудно-угловую (АУМ), амплитудно-импульсную (АИМ), фазово-импульсную (ФИМ), широтно-импульсную (ШИМ) и другие виды модуляции.

При АМ, УМ и АУМ в качестве *несущего* используется гармоническое колебание. Эти виды сигналов описываются формулой

$$S(t) = U(t) \cos Y(t), \quad (2.1)$$

где 
$$\Psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t), \quad \varphi(t) = J(t) + \varphi_0, \quad (2.2)$$

$\omega_0$  – частота несущего колебания,  $\varphi_0$  – его начальная фаза,  $U(t)$  и  $\vartheta(t)$  – амплитуда и фаза, изменяемые в соответствии с управляющим сигналом модуляции  $U_M(t)$ . Для колебаний с УМ и АУМ вводится понятие мгновенной или текущей частоты  $\omega(t)$ , связанной с фазой сигнала  $Y(t)$  соотношениями

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + \Delta\omega(t), \quad \Psi(t) = \int \omega(t) dt. \quad (2.3)$$

Модуляция, при которой частота не меняется, а амплитуда  $U(t) \sim U_M(t)$ , называется амплитудной. Модуляция называется угловой, если модулируется фаза  $Y(t)$ , а амплитуда  $U(t) = U_0$  остается постоянной. При амплитудно-угловой модуляции изменяются и  $U(t)$ , и  $Y(t)$ , каждая по своему закону. В импульсных видах модуляции в качестве несущего используются колебания, по форме отличные от гармонического (обычно прямоугольные).

Важную роль в процессе обработки РС при их передаче и приеме играет знание спектральных характеристик РС.

Действительный сигнал  $S(t)$ , описываемый формулой (2.1), может рассматриваться как реальная часть комплексного сигнала  $Z(t)$ :

$$S(t) = \operatorname{Re}(Z(t)) = \frac{1}{2}(Z(t) + Z^*(t)), \quad \text{где } Z(t) = U(t)e^{Y(t)}. \quad (2.4)$$



Введем в рассмотрение функцию модуляции  $C_M(t)$  и комплексную амплитуду сигнала  $C(t)$  со спектрами  $C_M(\omega)$  и  $C(\omega)$ , определив их как

$$\begin{cases} C_M(t) = U(t)e^{jJ(t)} \Leftrightarrow C_M(\omega) = |C_M(\omega)|e^{jJ_M(\omega)}, \\ C(t) = U(t)e^{j(J(t)+j\omega_0 t)} \Leftrightarrow C(\omega) = |C(\omega)|e^{jJ_c(\omega)}, \\ |C_M(\omega)| = |C(\omega)|, \quad J_c(\omega) = J_M(\omega) + j\omega_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Тогда  $Z(t) = U(t)e^{\Psi(t)} = C_M(t)e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} = C(t)e^{j\omega_0 t}$ . (2.6)

Спектр функции  $C(t)$  на основании преобразования Фурье равен

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t)e^{-j\omega t} dt = |C(\omega)|e^{j\varphi_c(\omega)} = A_c(\omega) - jB_c(\omega), \quad (2.7)$$

где  $|C(\omega)|$  и  $j_c(\omega)$  - его модуль и фаза, а  $A_c(\omega)$  и  $B_c(\omega)$  - действительная и мнимая части, равные

$$\begin{cases} A_c(\omega) = |C(\omega)| \cos j_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \cos(\omega t - \varphi(t)) dt, \\ B_c(\omega) = -|C(\omega)| \sin j_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) \sin(\omega t - \varphi(t)) dt, \\ |C(\omega)| = \sqrt{A_c(\omega)^2 + B_c(\omega)^2}, \quad j_c(\omega) = \arctg \frac{-B_c(\omega)}{A_c(\omega)}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Спектр функции  $Z(t) = C(t)e^{j\omega_0 t}$  согласно спектральной теореме смещения будет равен спектру  $C(\omega)$ , перенесенному на частоту  $\omega_0$ :

$$Z(\omega) = C(\omega - \omega_0) = |C(\omega - \omega_0)|e^{j\varphi_c(\omega - \omega_0)}. \quad (2.9)$$

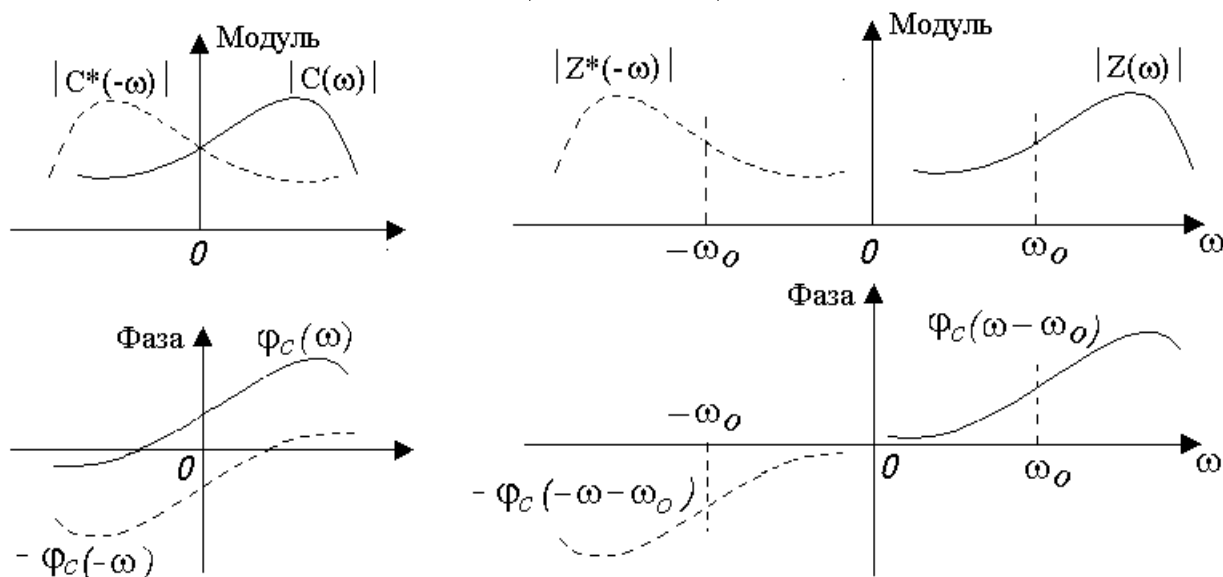


Рис.2.1. Спектры функций  $C(t)$ ,  $C^*(t)$ ,  $Z(t)$  и  $Z^*(t)$ .

Сплошные линии -  $C(\omega)$ ,  $Z(\omega)$ , пунктир -  $C^*(-\omega)$ ,  $Z^*(-\omega)$

Заметим, что в силу комплексности  $C(t)$  и  $Z(t)$  их спектры (рис.1) не обладают симметрией относительно частот  $\omega = 0$  и  $\omega = \omega_0$ .

Спектры комплексно-сопряженных функций  $C^*(t)$  и  $Z^*(t)$  будут

$$\begin{cases} C^*(-\omega) = |C(-\omega)| e^{-j\varphi_c(-\omega)} = A_c(-\omega) + jB_c(-\omega), \\ Z^*(-\omega) = C^*(-\omega - \omega_0) = |C(-\omega - \omega_0)| e^{-j\varphi_c(-\omega - \omega_0)}. \end{cases} \quad (2.10)$$

На рис.1 они изображены пунктиром.

Возможны различные формы спектра сигнала  $S(t)$ . Одна из них вытекает из формулы  $S(t) = \text{Re} Z(t)$ , согласно которой

$$\begin{aligned} S(t) &= \text{Re} \left( \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} Z(w) e^{j\omega t} dw \right) = \\ &= \text{Re} \left[ \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} (A_c(w - \omega_0) - jB_c(w - \omega_0)) (\cos \omega t + j \sin \omega t) dw \right] = \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} (A_c(w - \omega_0) \cos \omega t + B_c(w - \omega_0) \sin \omega t) dw = \\ &= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} |C(w - \omega_0)| \cos(\omega t + \varphi_c(w - \omega_0)) dw. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подынтегральные функции – это составляющие спектра. Они действительные, и отсюда форма представления спектра его компонентами  $A_c(\omega - \omega_0)$ ,  $B_c(\omega - \omega_0)$ ,  $|C(\omega - \omega_0)|$  и  $\varphi_c(\omega - \omega_0)$  называется *действительной*. Эти компоненты совпадают с компонентами спектра комплексной амплитуды  $C(\omega)$ , сдвинутыми на частоту  $\omega_0$ . В общем случае они не обладают какой-либо симметрией ни относительно частоты  $\omega = 0$ , ни относительно частот  $\pm \omega_0$  и по этой причине требуют задания на всей оси частот от  $-\infty$  до  $\infty$  (рис.2.2).

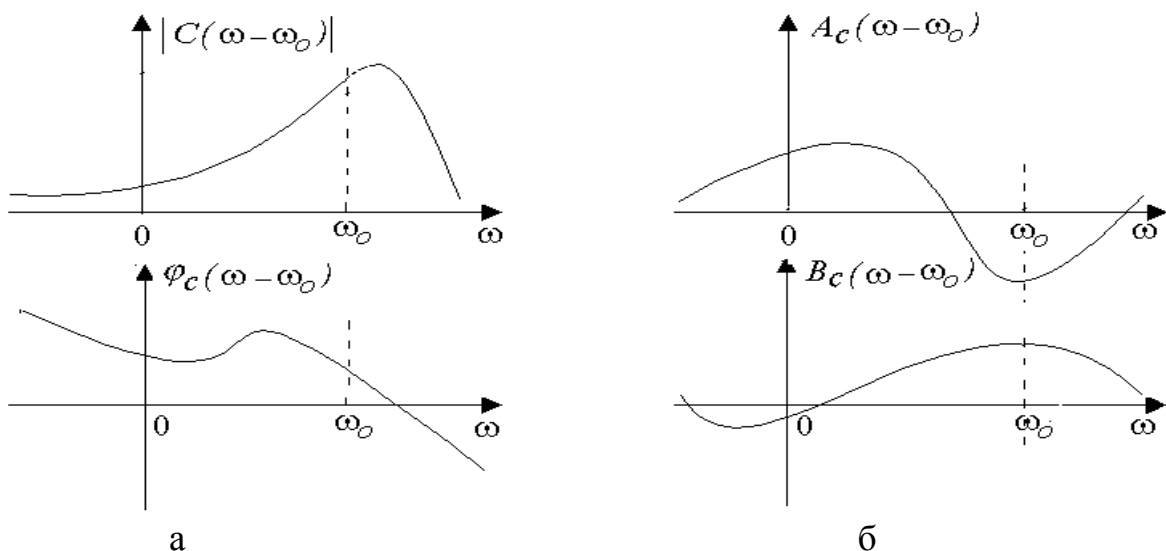


Рис.2.2. Компоненты действительной формы спектра:  
а – модуль и фаза; б – косинусная и синусная составляющие

Другая форма спектра  $S(\omega)$ , иногда называемая *комплексной*<sup>1</sup>, основана на представлениях (2.4), (2.9) и (2.10), согласно которым

$$S(\omega) = \frac{1}{2}(Z(\omega) + Z^*(-\omega)) = \tag{2.12}$$

$$= \frac{1}{2}[C(\omega - \omega_0) + C^*(-\omega - \omega_0)] = A(\omega) - jB(\omega) = |S(\omega)|e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$\begin{cases} A(\omega) = A(-\omega) = \frac{1}{2}(A_c(\omega - \omega_0) + A_c(-\omega - \omega_0)), \\ B(\omega) = -B(-\omega) = \frac{1}{2}(B_c(\omega - \omega_0) - B_c(-\omega - \omega_0)), \\ |S(\omega)| = |S(-\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \\ \varphi(\omega) = -\varphi(-\omega) = \operatorname{arctg} \frac{-B(\omega)}{A(\omega)}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Характерным для спектра (см. рис.2.2) является эрмитова симметрия  $S(\omega) = S^*(-\omega)$  относительно частоты  $\omega = 0$  и отсутствие симметрии относительно частот  $\pm\omega_0$ . Модуль  $|S(\omega)|$  и действительная часть  $A(\omega)$  - четные, фаза  $\varphi(\omega)$  и мнимая часть  $B(\omega)$  - нечетные. Функции  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  складываются из составляющих  $A_c(\pm\omega - \omega_0)$ ,  $B_c(\pm\omega - \omega_0)$  (назовем их *сопряженными*), относящихся к частотам  $\pm\omega_0$ . Если спектры этих составляющих достаточно протяженны, то они, перекрываясь, накладываются "хвостами" и создают спектры  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ , которые могут весьма заметно отличаться от их сопряженных слагаемых (рис.2.3).

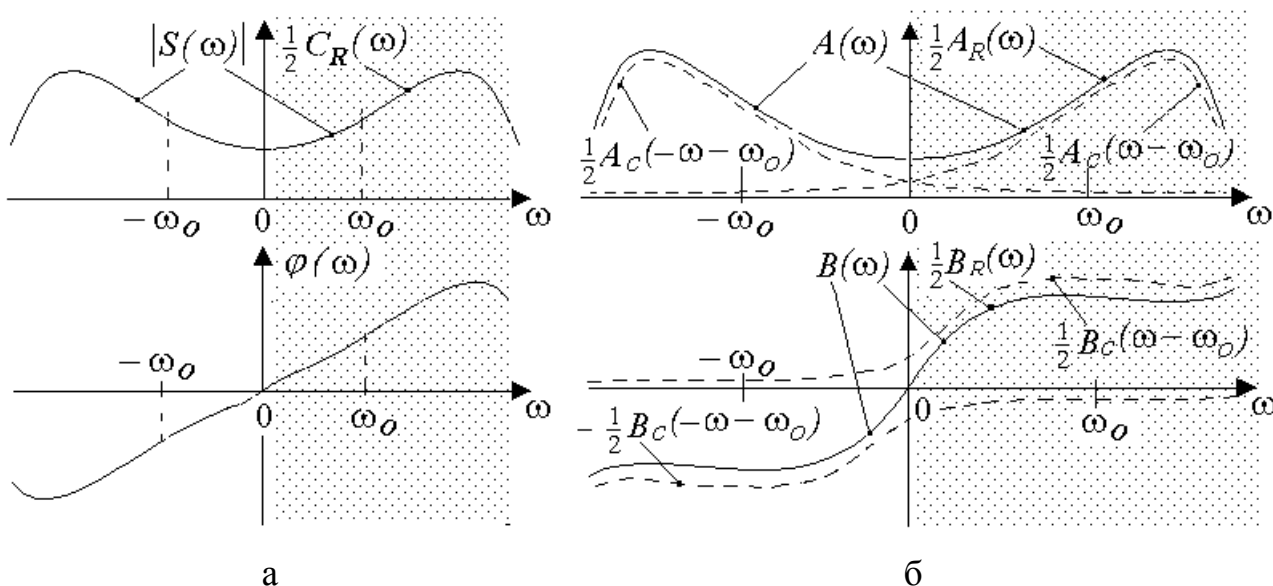


Рис.2.3. Комплексный и действительный спектры модулированного радиосигнала: а – модуль и фаза, б - четная и нечетная составляющие

<sup>1</sup> Такая форма используется в программе SAS.

Если перекрытия нет, то

$$\begin{cases} \text{при } w > 0 & \text{имеем } A(w) = \frac{1}{2} A_c(w - w_o), B(w) = \frac{1}{2} B_c(w - w_o), \\ \text{при } w < 0 & \text{имеем } A(w) = \frac{1}{2} A_c(-w - w_o), B(w) = -\frac{1}{2} B_c(-w - w_o). \end{cases} \quad (2.14)$$

Еще одна *действительная* форма спектра  $S(\omega)$  есть разновидность комплексной формы. Она является следствием эрмитовой сопряженности  $S(\omega)$ , благодаря которой для расчета сигнала  $S(t)$  достаточно вести интегрирование только в области положительных частот:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (S(\omega) + S^*(\omega)) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} C_R(\omega) \cos(\omega t + j(\omega)) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} (A_R(\omega) \cos\omega t + B_R(\omega) \sin\omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\text{Здесь } C_R(\omega) = 2|S(\omega)|, \quad A_R(\omega) = 2A(\omega), \quad B_R(\omega) = 2B(\omega). \quad (2.16)$$

Эта форма удобна тем, что для изображения составляющих спектра достаточно область только положительных частот рис.2.3. Если сопряженные спектры не перекрываются, то составляющие  $C_R$ ,  $A_R$ ,  $B_R$  - те же, что у комплексной амплитуды  $C(t)$ , но перенесенные на частоту  $\omega_o$ :

$$\begin{cases} A_R(\omega) = A_c(\omega - \omega_o), & B_R(\omega) = B_c(\omega - \omega_o), \\ C_R(\omega) = |C(\omega - \omega_o)|, & j(\omega) = j_c(\omega - \omega_o). \end{cases} \quad (2.17)$$

Если функция модуляции  $C(t)$  периодическая с периодом  $T$ , то спектр сигнала  $S(t)$  будет дискретным с шагом  $W = 2\pi/T$  и составляющими, расположенными на частотах  $\omega_k = \omega_o + Wk$ , амплитуды которых равны  $S(\omega_k)/T$ .

Одной из важных характеристик радиосигнала является наличие или отсутствие симметрии его спектра относительно несущей частоты  $\omega_o$ , о чем можно судить по симметрии спектра его комплексной амплитуды  $C(w)$ , которая, в свою очередь, определяется симметрией функций его амплитуды  $U(t)$  и фазы  $\phi(t)$ . Результаты соответствующего анализа сведены в табл.2.1.

Таблица 2.1

$j(t) = j_o + J(t)$		1	2	3
		$j(t)=0$	$j(t)=j(-t)$ четная	$j(t) = -j(-t)$ <sup>2</sup> нечетная
1	$U(t)=U(-t)$ четная  или $U(t)=U_o$	Вариант 1.1 $A_c(w) -$ четная $B_c(w) = 0$ $ C(w)  -$ четная $j_c(w) = 0, \pm\pi$	Вариант 1.2 $A_c(w) -$ четная $B_c(w) -$ четная $ C(w)  -$ четная $j_c(w) -$ четная	Вариант 1.3 $A_c(w) -$ не симметр. $B_c(w) = 0$ $ C(w)  -$ не симметр. $j_c(w) = 0, \pm\pi$
2	$U(t) = -U(-t)$ нечетная	Вариант 2.1 $A_c(w) = 0$ $B_c(w) -$ нечетная $ C(w)  -$ четная $j_c(w) = \pm\pi / 2$	Вариант 2.2 $A_c(w) -$ нечетная $B_c(w) -$ нечетная $ C(w)  -$ четная $j_c(w) -$ четная	Вариант 2.3 $A_c(w) = 0$ $B_c(w) -$ не симметр. $ C(w)  -$ не симметр. $j_c(w) = \pm\pi / 2$

Из табл.1 видно, что спектр  $|C(w)|$  симметричен, если  $j(t)=0$  или фаза  $j(t)$  - четная (столбцы 1 и 2). В остальных случаях он несимметричен. Некоторые комбинации сочетаний различного вида  $U(t)$  и  $j(t)$  рассматриваются далее.

## 2.2. Амплитудная модуляция

### 2.2.1. Общий случай

АМ колебание имеет вид

$$S(t) = U(t) \cos(\omega_o t + j_o). \quad (2.18)$$

Для него  $J(t) = 0$ , комплексная амплитуда  $C(t) = U(t) e^{j j_o}$ . Функция модуляции  $C_M(t) = U(t)$  является действительной, и поэтому ее спектр  $C_M(w) = C_M^*(-w)$  - эрмитово-сопряженный. Вид спектров  $C(w)$  и  $S(w)$  показан на рис.2.4.

<sup>2</sup> Если нечетная функция  $j(t)$  периодична  $j(t) = j(t+T)$  и на половине периода относительно  $t = T/4$  она четная, то спектр  $|C_n|$  также будет четным. Докажите это.

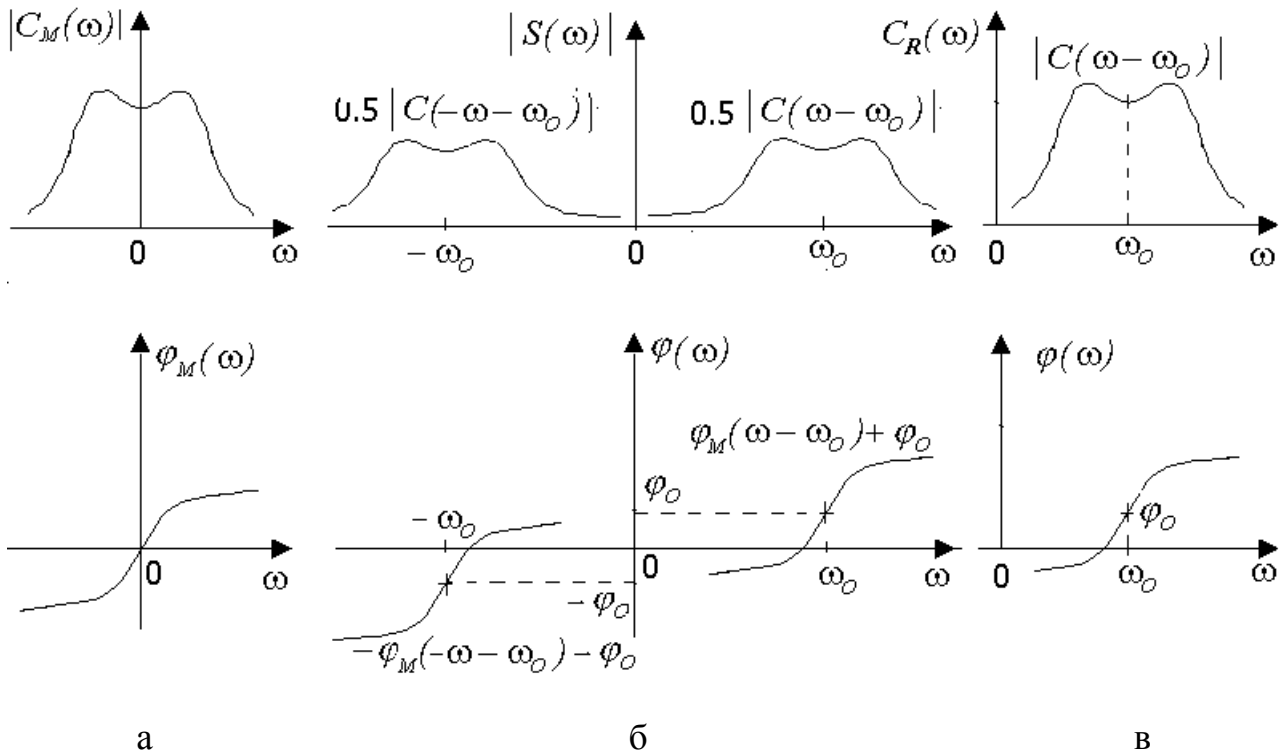


Рис.2.4. Общий вид спектров АМ сигналов:  
а - комплексная форма  $C_M(\omega)$ , б - комплексная форма  $S(\omega)$ ,  
в - действительная форма  $S(\omega)$

### 2.2.2. Однотональная АМ

Простейшим видом АМ является модуляция, осуществляемая гармоническим сигналом с частотой  $W$  (обычно  $W \ll \omega_0$ ) и начальной фазой  $F$ . Для нее функция модуляции равна

$$\begin{aligned}
 C_M(t) &= U(t) = U_o + DU \cos(Wt + F) = U_o(1 + m \cos(Wt + F)) = \\
 &= U_o \left( 1 + \frac{m}{2} \cos(Wt + F) + \frac{m}{2} \cos(-Wt - F) \right),
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

где  $m = \frac{\Delta U}{U_o} = \frac{U_{max} - U_{min}}{U_{max} + U_{min}}$  - коэффициент или глубина модуляции,  
 $U_{max} = U_o + \Delta U$ ,  $U_{min} = U_o - \Delta U$ .

Сигнал  $S(t)$  будет

$$S(t) = U_o(1 + m \cos(Wt + F)) \cos(\omega_0 t + \varphi_o). \tag{2.20}$$

Он может быть разложен по составляющим действительного спектра:

$$S(t) = U_o \cos(\omega_o t + \varphi_o) + \frac{m}{2} U_o \cos((\omega_o + W)t + \varphi_o + F) + \frac{m}{2} U_o \cos((\omega_o - W)t + \varphi_o - F). \quad (2.21)$$

Функции  $C_M(t)$  и  $S(t)$  и их спектры показаны на рис.2.5.

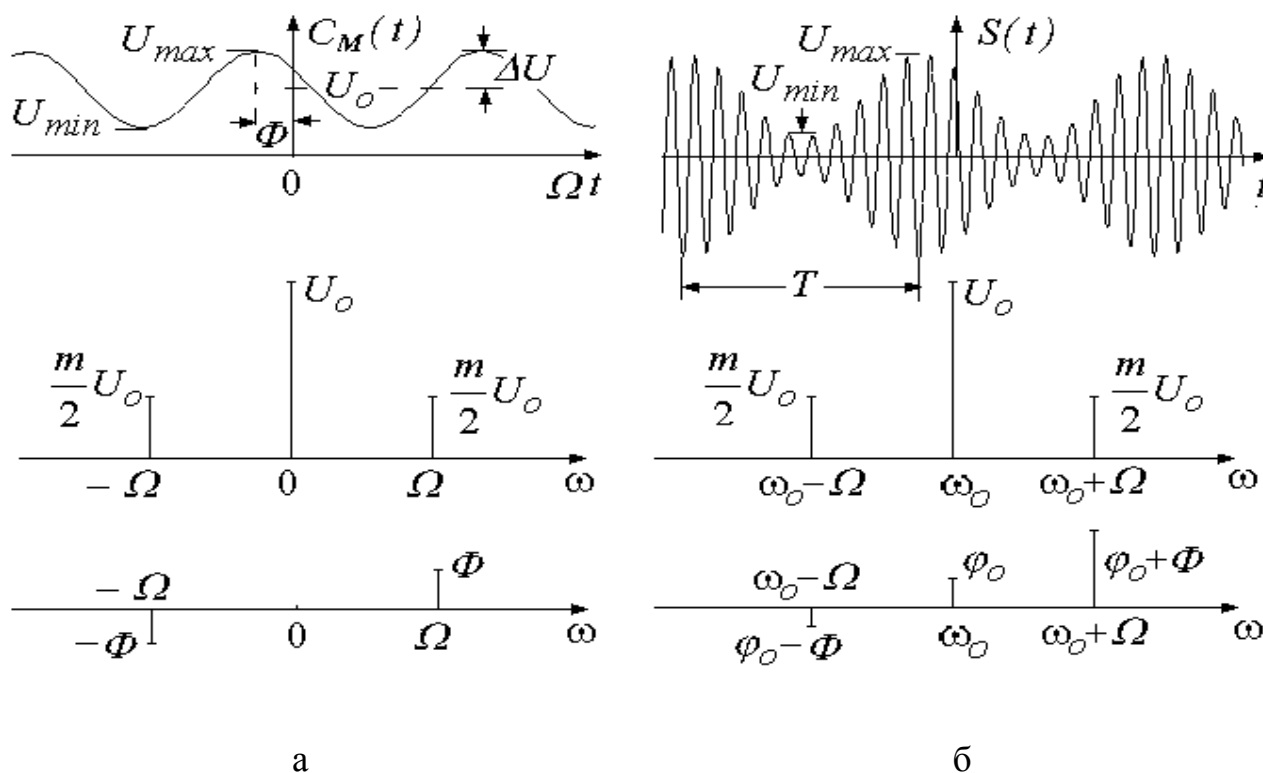


Рис.2.5. Функции: а –  $C_M(t)$ , б –  $S(t)$  и их спектры

Колебания с частотами  $\pm W$  и  $(\omega_o \pm W)$  называются верхней и нижней боковыми составляющими.

### 2.2.3 Многотональная АМ

Если сигнал модуляции образован суммой нескольких колебаний, называемых парциальными, с разными частотами  $W_k$ , то

$$C_M(t) = U_o + \sum_{k=1}^N D U_k \cos(W_k t + F_k). \quad (2.22)$$

Каждая парциальная составляющая с фазой  $F_k$  и коэффициентом глубины модуляции  $m_k = D U_k / U_o$  в спектре сигнала  $S(t)$  создает свою пару верхних и нижних боковых частот  $\omega_o \pm W_k$  с амплитудами  $\frac{m_k}{2} U_o$  и фазами  $\varphi_o \pm F_k$ , так что полное колебание будет

$$S(t) = U_o \cos(\omega_o t + j_o) + \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} U_o \cos((\omega_o + \Omega_k)t + \Phi_k + j_o) + \frac{m_k}{2} U_o \cos((\omega_o - \Omega_k)t - \Phi_k + j_o). \quad (2.23)$$

Совокупности верхних и нижних боковых частот образуют одноименные полосы. Полный спектр располагается в пределах от  $\omega_o - W_N$  до  $\omega_o + W_N$ , и его ширина равна  $2W_N$ .

Частным случаем многотональной модуляции является модуляция периодическим сигналом с периодом  $T$ , когда функция  $C_M(t)$  может быть разложена в ряд Фурье

$$C_M(t) = C_M(t+T) = U_o + \sum_{k=1}^N DU_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt + F_k\right). \quad (2.24)$$

В этом случае спектр получается эквидистантным с интервалом  $W = 2\pi/T$ , и его ширина равна  $2NW$ . Пример такого сигнала показан на рис.2.6.

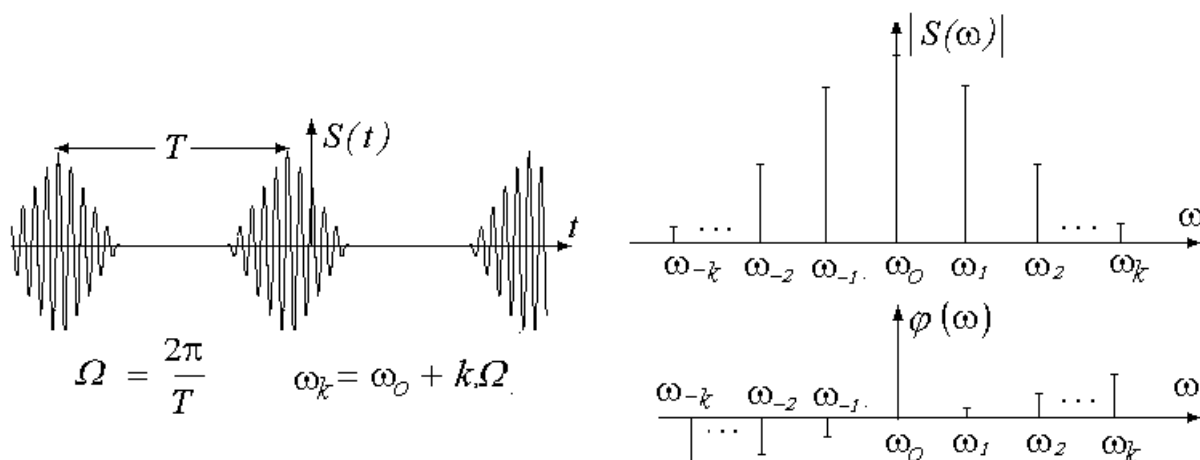


Рис.2.6. Сигнал с периодической модуляцией, и его комплексный спектр

#### 2.2.4. Модуляция непериодическим сигналом

В этом случае спектр АМ-сигнала получается сплошным. Его общий вид показан на рис.2.4.

### 2.3. Угловая модуляция

#### 2.3.1. Общие соотношения

Колебание с угловой модуляцией имеет вид

$$S(t) = U_o \cos(\omega_o t + \varphi_o + \vartheta(t)). \quad (2.25)$$

УМ называют *частотной* (ЧМ), если по закону модуляции изменяется частота  $\Delta\omega \sim U_M(t)$  и *фазовой* (ФМ), если по закону модуляции изменяется фаза



$\Delta\vartheta(t) \sim U_M(t)$ . Между ЧМ и ФМ есть сходства и различия. Чтобы легче проследить их, будем вести параллельные записи в левой и правой половинах страницы, а общие положения записывать по ее центру.

Фазовая модуляция

$$\vartheta(t) = k U_M(t). \quad (2.26)$$

Частотная модуляция

$$D\omega(t) = k U_M(t). \quad (2.27)$$

На основании формул (2.3)

$$D\omega(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt} = k \frac{dU_M(t)}{dt}. \quad (2.28)$$

$$\vartheta(t) = k \int U_M(t) dt. \quad (2.29)$$

**2.3.2. Гармоническая (однотональная) УМ**

Этот вид УМ является простейшим, для него

$$U_M(t) = U_M \cos(Wt + F_o), \quad (2.30)$$

где  $W$  и  $F_o$  – частота и начальная фаза сигнала модуляции.

С учетом формул (2.26) - (2.29)

$$\vartheta(t) = \beta \sin(Wt + F), \quad (2.31)$$

$$D\omega(t) = D\omega \cos(Wt + F). \quad (2.32)$$

Здесь  $b$  и  $Dw$  - параметры сигнала. Параметр  $b$ , равный девиации фазы, называется *индексом* угловой модуляции, а параметр  $Dw$  - *девиацией* частоты.

$$b = kU_M, \quad (2.33)$$

$$Dw = kU_M, \quad (2.34)$$

$$Dw = b W, \quad (2.35)$$

$$b = Dw / W, \quad (2.36)$$

$$F = F_o + \pi / 2.$$

$$F = F_o.$$

Согласно (2.31) и (2.32) при однотональной модуляции и фаза, и частота изменяются по гармоническому закону и, хотя на вид (рис.2.7) они вроде бы и одинаковы, спектры у них различны. Различие проявляется и в том, что при изменении частоты модуляции  $W$  их параметры  $b$  и  $Dw$  изменяются по-разному.

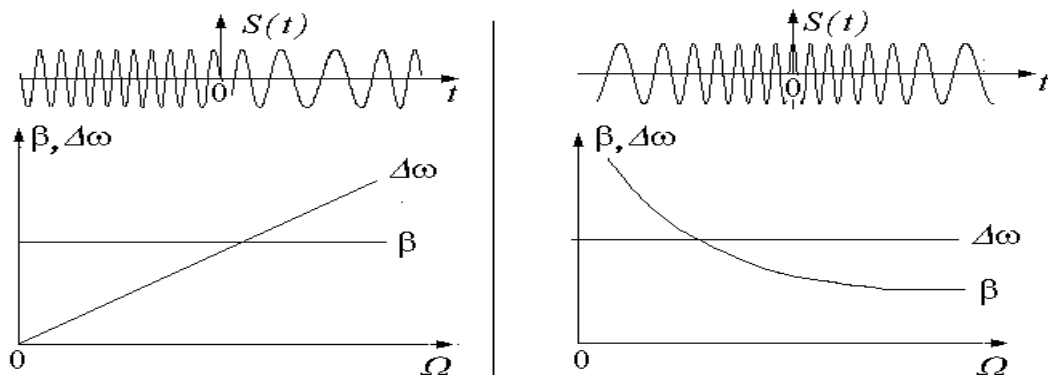


Рис.2.7. Гармоническая УМ: слева – ФМ , справа - ЧМ

Для расчета спектра сигнала гармонической УМ рассмотрим его функцию модуляции  $C_M(t)$ . Согласно (2.31)

$$C_M(t) = U_o e^{j\beta \sin \alpha(t)}, \quad (2.37)$$

где 
$$\alpha(t) = Wt + F. \quad (2.38)$$

В математике известна формула

$$e^{j\beta \sin x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{jn x}, \quad (2.39)$$

где  $J_n(\beta)$  – функции Бесселя первого рода  $n$  – порядка (рис.2.8). Для положительных и отрицательных  $n$  они связаны соотношением

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta). \quad (2.40)$$

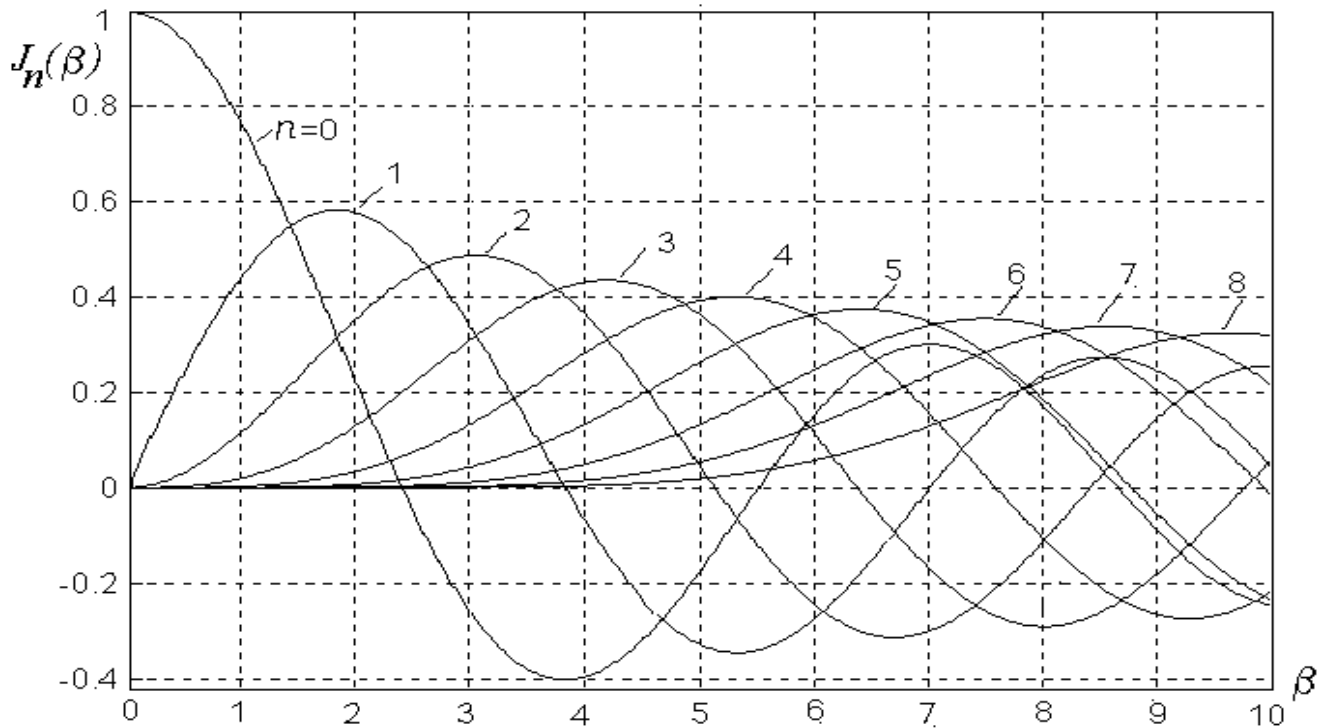


Рис.2.8. Первые 8 функций Бесселя  $J_n(b)$

Используя (2.6) и (2.37) – (2.39), получим спектральное разложение функции  $Z(t)$  :

$$Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(\omega_n t + \varphi_n)}, \quad (2.41)$$

где 
$$C_n = U_o J_n(\beta), \quad \omega_n = \omega_o + Wn, \quad \varphi_n = \varphi_o + Fn. \quad (2.42)$$

Отсюда разложение сигнала  $S(t)$  будет

$$S(t) = \operatorname{Re} Z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \operatorname{Cos}(\omega_n t + \varphi_n) = U_o \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \operatorname{Cos}(\omega_n t + \varphi_n), \quad (2.43)$$

которое может быть записано как

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \operatorname{Cos} \omega_n t + B_n \operatorname{Sin} \omega_n t, \quad (2.44)$$

где 
$$A_n = U_o J_n(\beta) \operatorname{Cos} j_n, \quad B_n = -U_o J_n(\beta) \operatorname{Sin} j_n. \quad (2.45)$$

Спектры в формах (2.43) и (2.44) показаны на рис.2.9. Характерным для них в общем случае является отсутствие симметрии относительно несущей частоты  $\omega_0$ .

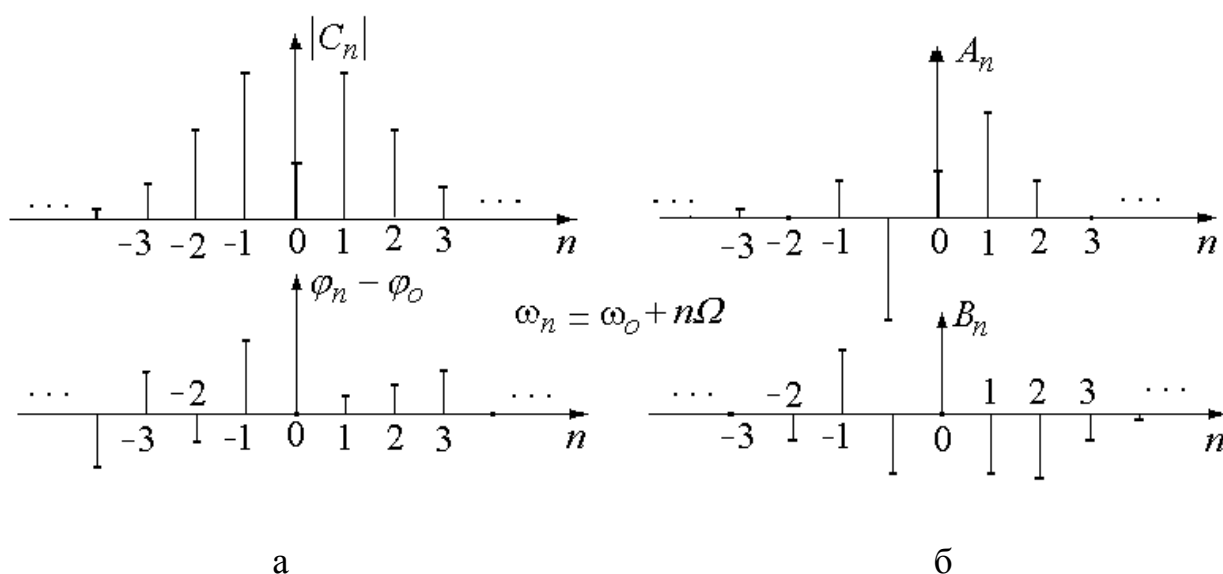


Рис.9. Спектры гармонической УМ: а - в форме (2.43), б – в форме (2.44)

Теоретически спектр УМ содержит бесконечное число гармоник  $n$ , однако из-за того, что с ростом  $n$  функции  $J_n(\beta)$  убывают, фактически число гармоник ограничено эмпирически определяемыми значениями

$$n = 1 + \beta + \sqrt{\beta}. \quad (2.46)$$

При малом индексе ( $b < 1$ ) можно считать, что спектр УМ подобно спектру АМ содержит только по одной боковой составляющей (рис.10,а), и его ширина равна  $2W$ . В этом случае

$$J_0(\beta) \approx 1, \quad J_1(\beta) \approx \beta/2, \quad J_{-1}(\beta) \approx -\beta/2.$$

При  $b \gg 1$  можно принять, что  $n \gg b$ , и поэтому ширина спектра будет  $2nW \gg 2bW = 2Dw$ , т.е. примерно равна удвоенной девиации частоты (рис.2.10,б).

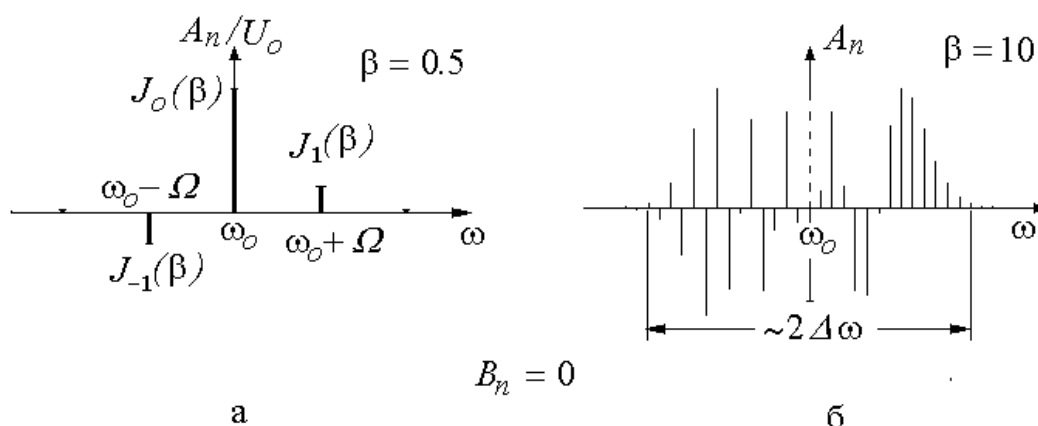


Рис.2.10. Спектры сигналов с ЧМ: а - при малом и б – при большом индексах модуляции

В заключение, используя вышеприведенные результаты, сопоставим спектры колебаний с ФМ и ЧМ при начальных фазах  $j_o = 0$  и  $F_o = 0$ .

Фазовая модуляция

Частотная модуляция

$$J(t) = b \sin(\Omega t + \Phi),$$

$$F = \pi/2,$$

$$F = 0,$$

$$\vartheta(t) = \beta \cos Wt - \text{функция четная.}$$

$$\vartheta(t) = \beta \sin Wt - \text{функция нечетная.}$$

В табл.1 это соответствует

варианту (1.2).

варианту (1.3).

Распределение составляющих спектра относительно  $\omega_0$ :

$$A_n, B_n, |C_n|, j_n - \text{четные,}$$

$$A_n, j_n - \text{несимметричные,}$$

причем,

$$A_n = 0 \text{ для нечетных } n,$$

$$B_n = 0 - \text{для всех } n,$$

$$B_n = 0 \text{ для четных } n.$$

$$j_n = 0, \pm \pi - \text{для всех } n.$$

Поэтому

$$|C_n| = |A_n| - \text{для четных } n,$$

$$A_n = U_o J_n(\beta),$$

$$|C_n| = |B_n| - \text{для нечетных } n.$$

$$|C_n| = |A_n| - \text{четные для всех } n.$$

Для примера спектры сигналов с ФМ и ЧМ показаны на рис.2.11.

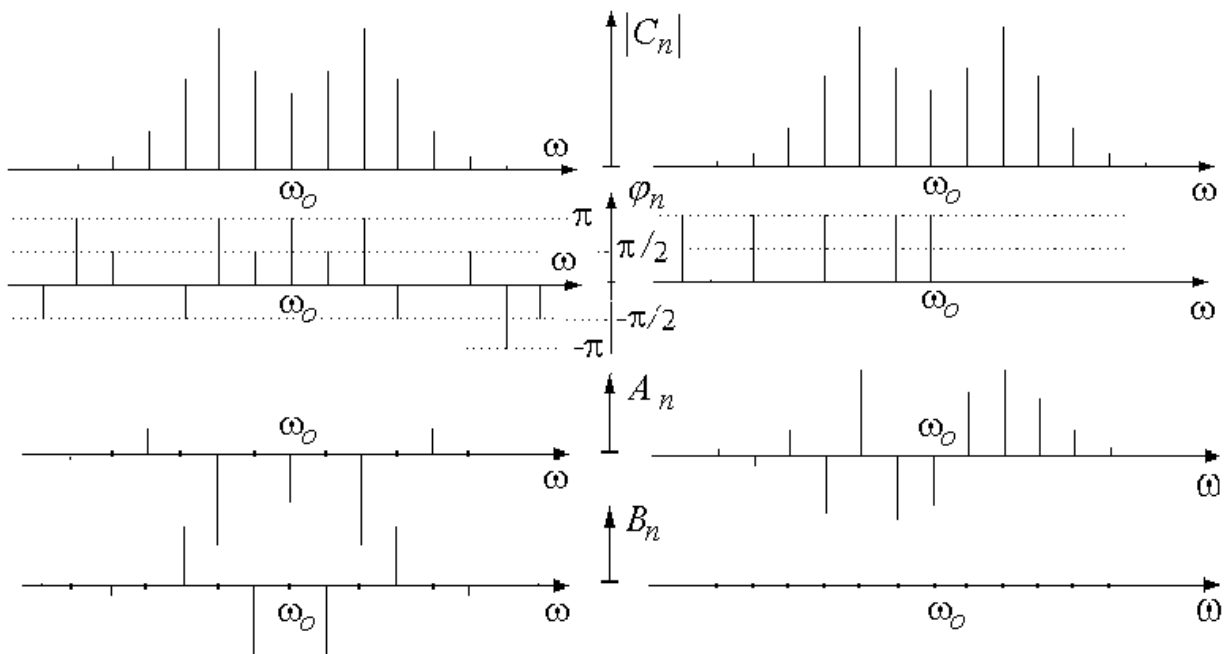


Рис.2.11. Спектры: ФМ – слева и ЧМ – справа при  $j_o = 0$ ,  $F_o = 0$  и  $b = 3$

### 2.3.3. Линейная частотная модуляция (ЛЧМ)

На практике используются радиоимпульсы (рис.2.12), частота которых меняется по линейному закону:

$$\omega(t) = \omega_o + \alpha t, \quad (2.47)$$

где  $\alpha = 2D\omega/\tau$ ,  $D\omega = 2\pi Df$  – девиация частоты,  $t$  – длительность импульса. Частота изменяется в пределах от  $\omega_{min} = \omega_o - D\omega$  до  $\omega_{max} = \omega_o + D\omega$ . Фаза сигнала модуляции

$$\vartheta(t) = \int \alpha t dt = \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad |t| \leq \frac{\tau}{2}. \quad (2.48)$$

Период колебания средней частоты  $T_o = 2\pi/\omega_o = 1/f_o$ . Число периодов  $T_o$  на длине  $\tau$  равно  $N_o = \tau/T_o$ . Глубина модуляции частоты  $m = D\omega/\omega_o = Df/f_o$ .

Основным параметром ЛЧМ-сигнала является его база  $B$ , равная произведению длительности  $\tau$  на девиацию  $Df$ <sup>3</sup>:

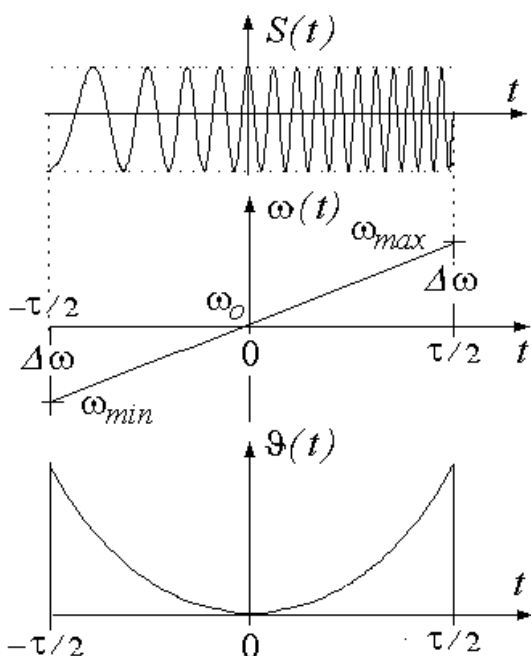


Рис.2.12. ЛЧМ-сигнал

<sup>3</sup> Ряд авторов называют базой сигнала величину  $2Df \tau$ .

$$B = Df \tau = N_o m. \quad (2.49)$$

Спектр колебания (рис.13) достаточно сложен. Он выражается через специальные функции – интегралы Френеля. Благодаря тому, что согласно (2.48) фаза  $J(t)$  здесь функция четная, все составляющие спектра имеют четное распределение относительно частоты  $\omega_o$  (табл.1, вариант 1.2).

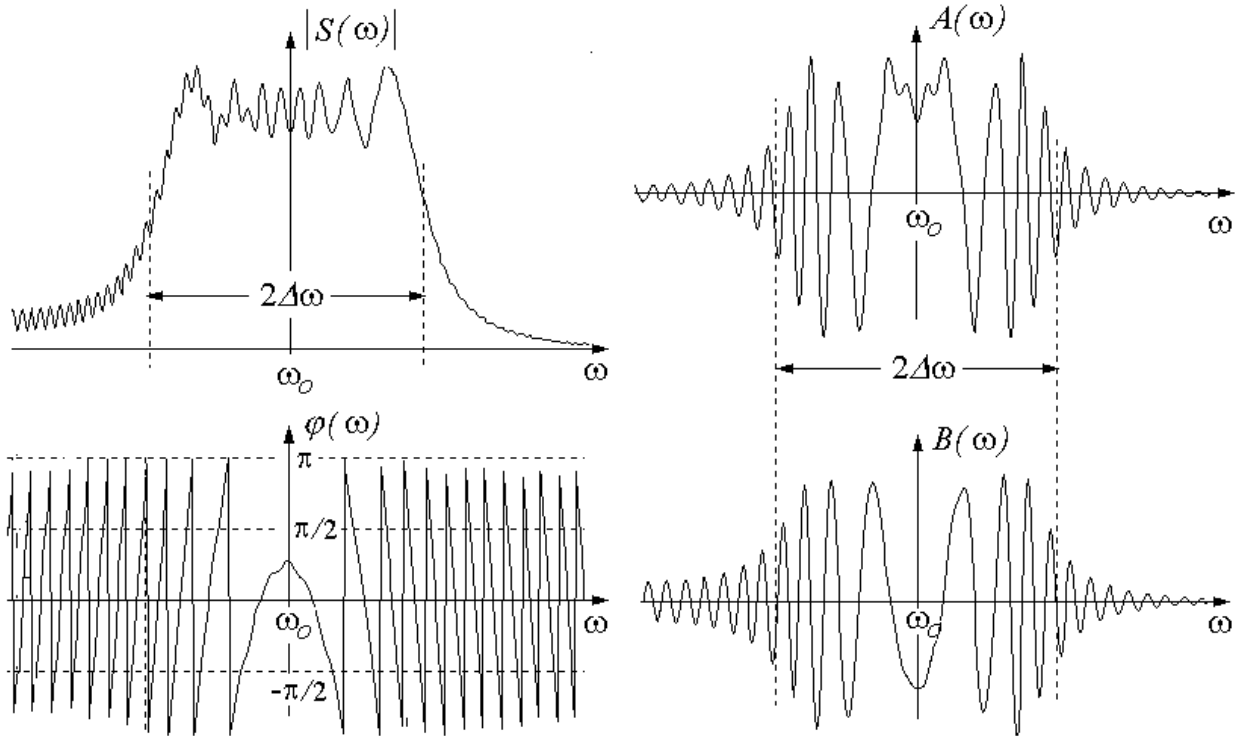


Рис.2.13. Спектр ЛЧМ-сигнала с базой  $B = 15$  и  $j_o = 0$

Модуль  $|S(\omega)|$  по форме похож на трапецию, ширина которой по половинной высоте равна  $2D\omega$ , а склоны тем круче, чем больше база  $B$ . Фазовый спектр описывается формулой

$$\varphi(\omega) \approx \frac{\pi}{4} - \frac{B}{2} \left( \frac{\omega - \omega_o}{D\omega} \right)^2.$$

ЛЧМ-сигналы широко используются в системах оптимального приема дальней радиолокации, и в этой связи важную роль играет их автокорреляционная функция, огибающая которой по форме близка к функции  $\text{Sin } D\omega t / D\omega t$  (рис.2.14)<sup>4</sup>, с шириной лепестков

$$Dt \approx \frac{1}{2Df} = \frac{\tau}{2B}. \quad (2.50)$$

В пределах центрального лепестка шириной  $2\Delta t$  укладывается  $N$  периодов  $T_o$  колебаний несущей частоты:

<sup>4</sup> Это утверждение, учитывая форму спектра, предлагается обосновать самостоятельно.

$$N = \frac{2Dt}{T_o} \approx \frac{\tau/T_o}{B} = \frac{N_o}{B} = \frac{1}{m} . \quad (2.51)$$

При  $B \gg 1$  центральный лепесток имеет вид узкого корреляционного пика. Отношение  $t/2\Delta t = B$  называется коэффициентом сжатия.

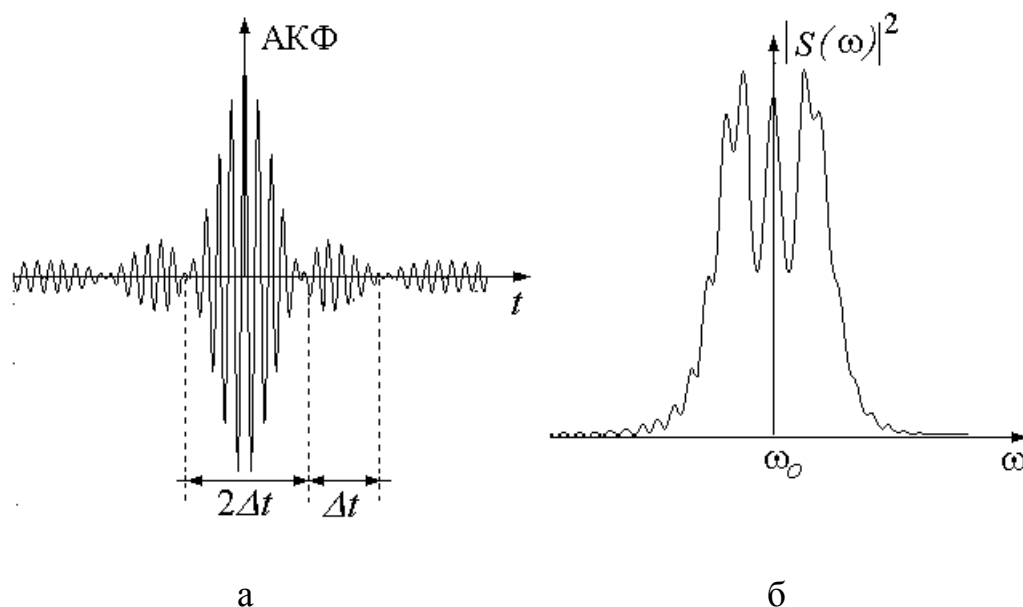


Рис.2.14. Автокорреляционная функция ЛЧМ-сигнала (а) и ее спектр (б) при  $N_0=40$ ,  $B=5$  и  $m = 1/8$

#### 2.4. Амплитудно-угловая модуляция (АУМ)

При АУМ согласно (2.1) и (2.2) сигнал можно представить как

$$S(t) = U(t)F(t), \quad (2.52)$$

где 
$$F(t) = \text{Cos } Y(t) = \text{Cos}(\omega_o t + \varphi_o + \vartheta(t)). \quad (2.53)$$

По спектральной теореме о произведении функций спектр сигнала  $S(t)$  есть свертка спектров  $U(\omega)\hat{U}U(t)$  и  $F(\omega)\hat{U}F(t)$ :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} U(\omega) \otimes F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\nu)F(\omega - \nu)d\nu. \quad (2.54)$$

Если функция  $F(t)$  периодическая с периодом  $T=2p \approx W$ , то ее можно представить рядом Фурье с комплексными амплитудами  $F_n$  на частотах  $\omega_n = \omega_o + nW$ :

$$F(t) = \sum_{n=-N}^N F_n e^{j\omega_n t}, \quad (2.55)$$

и тогда 
$$S(t) = \sum_{n=-N}^N U(t)F_n e^{j\omega_n t}. \quad (2.56)$$

Эту запись можно трактовать как сумму гармоник  $F_n e^{j\omega_n t}$ , каждая из которых модулируется сигналом  $U(t)$ , в результате чего спектр  $U(\omega)$  переносится на частоты  $\omega_n$ , вокруг которых возникают парциальные спектры  $S_n(\omega) = F_n U(\omega - \omega_n)$ . Общий спектр будет равен их сумме

$$S(\omega) = \sum_{n=-N}^N S_n(\omega) = \sum_{n=-N}^N F_n U(\omega - \omega_n). \quad (2.57)$$

Если с тем же периодом  $T$  периодична и амплитуда, то и ее можно представить рядом Фурье с комплексными амплитудами  $U_m$ :

$$U(t) = \sum_{m=-M}^M U_m e^{jmWt}. \quad (2.58)$$

Тогда 
$$S(t) = U(t)F(t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N U_m F_n e^{j\omega_{mn} t}, \quad (2.59)$$

где 
$$\omega_{mn} = \omega_n + mW = \omega_o + (m + n)W \quad (2.60)$$

есть частоты парциальных гармоник результирующего спектра. Их число равно

$$N_{mn} = 2(N + M) - 1. \quad (2.61)$$

Вид спектра оказывается достаточно сложным. Частные случаи при той или иной симметрии функций  $U(t)$  и  $\vartheta(t)$  описаны в табл.1. Пример сигнала с периодическими функциями  $U(t)$  и  $\vartheta(t)$  показан на рис.2.15.

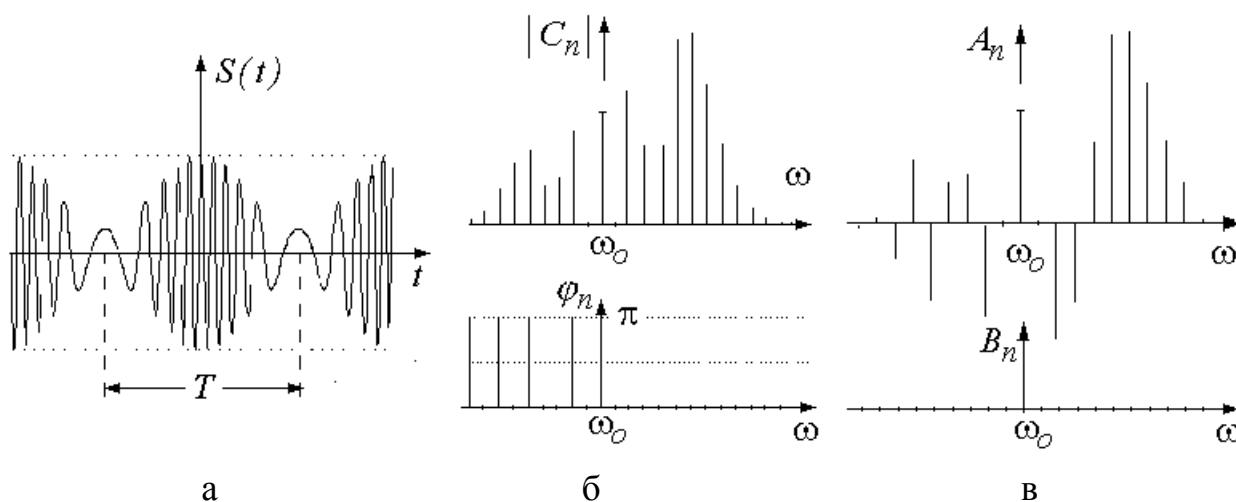


Рис.2.15. АУМ-сигнал (а) и его спектры (б,в) при

$$U(t) = 1 + m \cos Wt, \quad \vartheta(t) = \beta \sin Wt, \quad m = 0.7, \quad \beta = 7, \quad W = \omega_o / 10$$



Если  $U(t)$  и  $J(t)$  непериодические, то спектр  $S(\omega)$  получается сплошным (пример на рис.2.16).

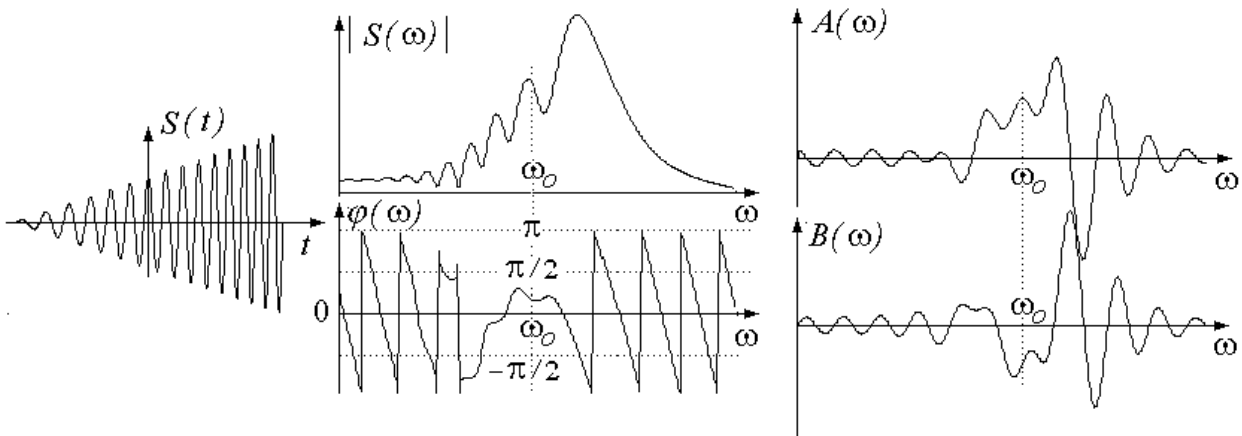


Рис.2.16. Одиночный АУМ-сигнал с пилообразной АМ и линейной ЧМ с базой  $B=5$

В некоторых случаях удается сделать сопоставимую оценку сигнала и его спектра. Например, из рис.16 видно, что модуль спектральной плотности почти линейно растет с ростом частоты, что соответствует увеличению текущей амплитуды колебаний сигнала с уменьшением длительности текущего периода.

## 2.5. Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)

При АИМ (рис.17) роль несущего колебания  $F(t)$  выполняет периодическая с периодом  $T_0$  последовательность импульсов той или иной формы  $I(t)$ :

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I(t - kT_0), \quad (2.62)$$

модулируемая по амплитуде сигналом  $U(t)$ :

$$S(t) = U(t)F(t). \quad (2.63)$$

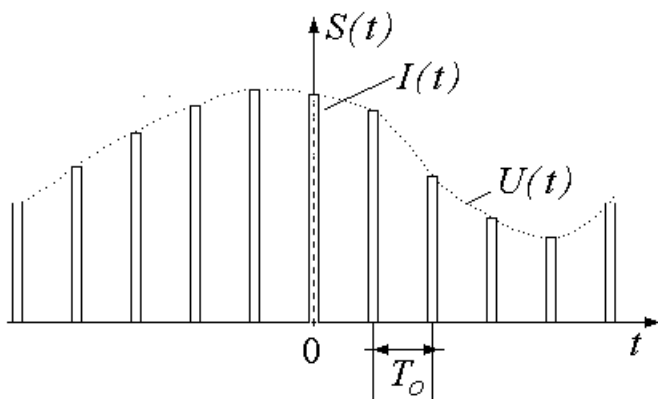


Рис.2.17. Сигнал с АИМ

В качестве импульсов могут использоваться прямоугольные, треугольные, дельта или какие-либо другие. Спектр функции  $F(t)$  - дискретный  $\omega_n = n\omega_0$  с шагом  $\omega_0 = 2\pi / T_0$  и огибающей  $I(\omega) / T_0$ , по форме совпадающей со спектральной плотностью несущего

щих импульсов. Спектр сигнала  $S(t)$ , как и при АУМ (2.54), представляет свертку спектров  $F(\omega) \Leftrightarrow F(t)$  и  $U(\omega) \Leftrightarrow U(t)$ . Возле каждой из гармоник  $\omega_n = n\omega_0$ , выполняющих теперь роль как бы несущих частот, формируются парциальные спектры  $S_n(\omega)$ , получаемые переносом спектра  $U(\omega)$  на частоты  $\omega_n$  и умножения их на  $F_n = \frac{1}{T_0} I(\omega_n)$ :

$$S_n(\omega) = F_n U(\omega - \omega_n). \quad (2.64)$$

Если функция  $U(t)$  непериодическая, то парциальные спектры будут сплошными, если  $U(t)$  периодическая  $U(t) = U(t + T)$ , то спектры  $S_n(\omega)$  - дискретные с шагом  $W = \frac{2\pi}{T}$ , определяемым периодом функции  $U(t)$  (рис.2.18).

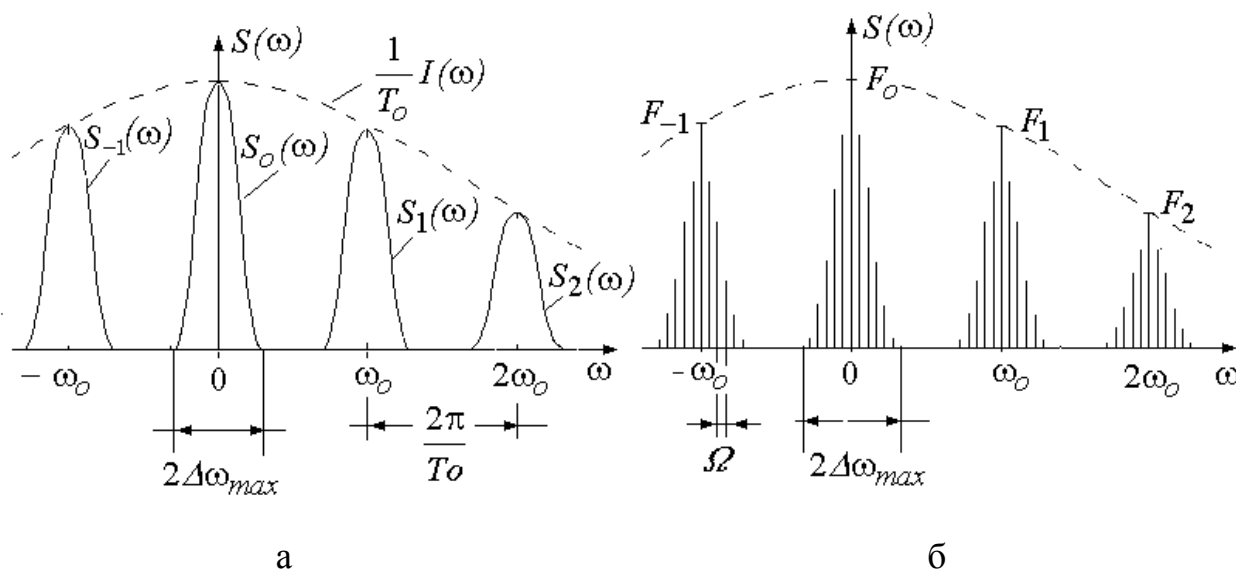


Рис.2.18. Спектры АИМ-сигналов при непериодической (а) и периодической (б) функциях  $U(t)$

Во избежание перекрытия парциальных спектров интервал между ними должен быть не меньше, чем полоса частот, занимаемая сигналом  $U(t)$ :

$$\omega_0 \geq 2\omega_{max}.$$

Каждому парциальному спектру  $S_n(\omega)$  соответствует свое парциальное АМ-колебание  $S_n(t)$  с несущей частотой  $n\omega_0$  и огибающей  $U(t)$ . Восстановить функцию  $U(t)$  можно, если выделить  $S_0(t)$ , пропустив АИМ-колебание через фильтр нижних частот или с помощью полосового фильтра, если выделить колебание  $S_n(t)$  и протектировать его.

## Раздел 3. Нелинейные преобразования сигналов

### 3.1. Общее сведения

**Нелинейными** называются такие преобразования, при которых изменяется форма сигнала и происходит обогащение его спектра новыми частотными компонентами.<sup>\*)</sup>

Нелинейные преобразования (НП) широко используются в радиотехнике. Они лежат в основе выпрямления, детектирования, модуляции, умножения частоты и других функциональных преобразований сигналов. Возникают НП в электрических цепях, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями и содержащими резистивные и реактивные элементы с нелинейными характеристиками. Появление новых частотных составляющих и изменения формы сигнала в одних случаях является нежелательным, и тогда говорят о *нелинейных искажениях*. В других случаях появление новых частотных компонент и есть смысл НП, и тогда для их выделения на выходе ставится частотный фильтр (рис.3. 1). В некоторых случаях фильтр может отсутствовать. Цепь, предназначенная для определенного вида преобразований сигнала, называется **функциональным узлом**.

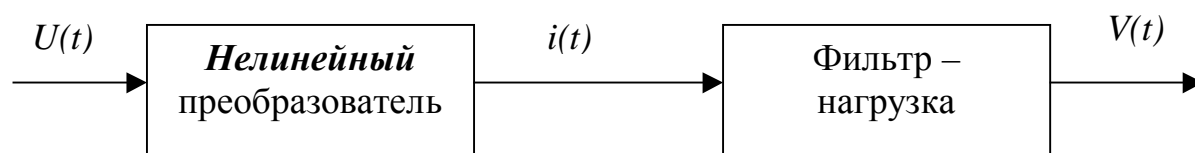


Рис.3. 1. Нелинейный функциональный узел

В дальнейшем будем рассматривать НП в цепях, содержащих резистивные нелинейные элементы (резисторы, диоды, транзисторы, лампы и т.п.), описываемые нелинейной проходной ВАХ

$$i = f(U). \quad (3.1)$$

---

\*) При *линейных* преобразованиях в спектре сигнала не появляются новые составляющие, и изменения формы сигнала, если они происходят, связаны с изменениями амплитуд и фаз уже имеющихся компонент спектра.

Математический анализ прохождения сигнала произвольной формы  $U(t)$  через нелинейную цепь представляет сложную задачу, т.к. к нелинейным цепям не применим принцип суперпозиции. Поэтому выходной сигнал не есть сумма сигналов от отдельных элементарных воздействий, на которые можно было бы разложить входной сигнал.

Рассмотрим периодический с периодом  $T$  (частота повторения  $\omega_1 = 2\pi/T$ ) входной сигнал  $U(t) = U(t+T)$ . Согласно (3.1) ток также будет периодической функцией  $i(t) = i(t+T)$  и может быть представлен рядом Фурье

$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k \cos \omega_k t \quad (3.2)$$

где  $\omega_k = k \cdot \omega_1$  – частота и  $I_k$  – амплитуда гармонических составляющих

$$I_k = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) \cos \omega_k t dt \quad (3.3)$$

Для нахождения тока  $i(t)$  прежде всего нужно знать вид ВАХ (3.1), определяемый изначально из эксперимента. При проведении расчетов функция  $f(U)$  должна быть задана аналитически, т.е. тем или иным способом аппроксимирована. Выбор аппроксимирующих функций делается из тех соображений, чтобы с одной стороны была обеспечена необходимая точность, а с другой – чтобы расчеты не были слишком громоздкими. Наиболее общим методом является представление характеристики  $i = f(U)$  степенным полиномом

$$i = \sum_{k=0}^n a_k U^k, \quad (3.4)$$

порядок которого зависит от вида характеристики и требуемой точности аппроксимации.

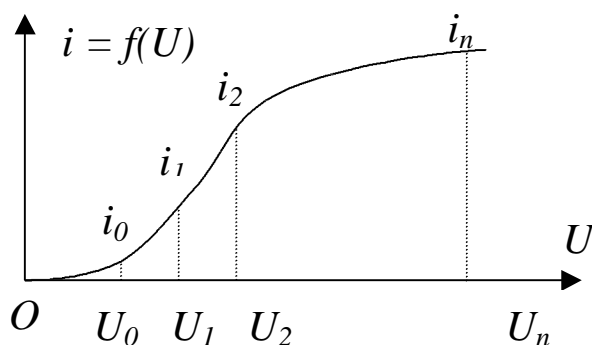


Рис.3. 2 . Узловые точки на ВАХ

Коэффициенты полинома  $a_k$  находят, пользуясь разными методами, например, методом наименьших квадратов или методом узловой аппроксимации. В по-

следнем случае на рабочем участке ВАХ выделяется  $n+1$  точек - узлов  $(U_0, i_0), (U_1, i_1), \dots (U_n, i_n)$  (рис.3.2). Затем составляется система из  $n+1$  уравнений

$$i = \sum_{k=0}^n a_k U_q^k, \quad q = 0 \dots n,$$

решаемая относительно неизвестных коэффициентов  $a_k$ . Размерность  $a_k$  зависит от их номера и равна

$$a_k = [A] / [B]^k.$$

Другим простым и потому часто используемым способом представления  $i = f(U)$  является кусочно-линейная аппроксимация, когда реальная характеристика задается отрезками прямых линий, количество которых определяется требуемой точностью.

Реальные характеристики диодов, транзисторов, ламп обычно имеют криволинейный начальный участок  $AB$ , затем более или менее выраженную линейную часть  $BC$  с крутизной  $S$  и близкую к линейной область насыщения за точкой  $D$  (рис.3. 3).

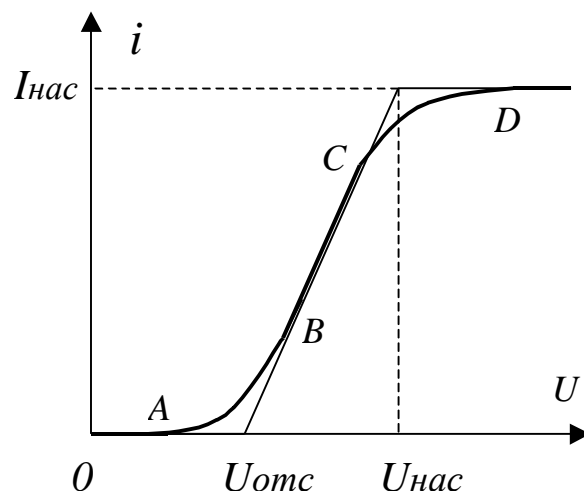


Рис.3. 3 . Кусочно-линейная аппроксимация ВАХ

Приближенно такую характеристику можно представить тремя прямыми

$$i = \begin{cases} 0, & U < U_{отс}, \\ S(U - U_{отс}), & U_{отс} \leq U \leq U_{нас}, \\ I_{нас}, & U > U_{нас}. \end{cases} \quad (3.5)$$

При расчетах часто используются понятия режимов «сильных» и «слабых» входных сигналов. Режим «сильных» сигналов предполагает, что их амплитуда велика по сравнению с протяженностью криволинейных участков  $AB$  и  $CD$  и поэтому их роль в формировании тока относительно невелика. В этих случаях с успехом можно использовать кусочно-линейную аппроксимацию ВАХ.

Режим «слабых» сигналов предполагает, что их амплитуда соизмерима с протяженностью криволинейных участков ВАХ, и работа ведется в пределах этих участков или вблизи них. В этом режиме кусочно-линейная аппроксимация дает большую погрешность и нужно пользоваться степенным представлением (3.4).

### 3.2. Метод угла отсечки

В этом методе предполагается сильный гармонический входной сигнал

$$U(t) = E_{см} + U_1 \cos \omega_1 t$$

и кусочно-линейная ВАХ. В зависимости от амплитуды  $U_1$  входного сигнала и постоянного напряжения смещения  $E_{см}$ , определяющего положение рабочей точки на ВАХ, могут иметь место следующие режимы работы: без отсечки тока, если напряжение  $U(t)$  не выходит за пределы линейного участка ВАХ, с нижней отсечкой тока, с верхней отсечкой тока, с верхней и нижней отсечкой, если  $U(t)$  сверху и снизу выходит за пределы линейной части ВАХ.

Работа без отсечки соответствует линейному режиму, и мы его не будем рассматривать.

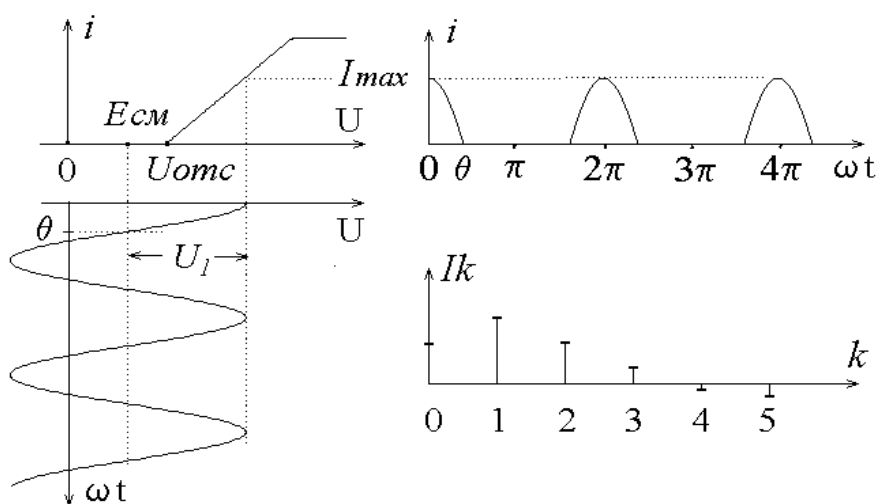


Рис.3. 4. Нижняя отсечка тока

Режим с нижней отсечкой показан на рис.3. 4. Ток имеет форму усеченных косинусоидальных импульсов, ширина которых по основанию в угловой мере оценивается углом отсечки  $\theta$ , равным части периода, в течение которой ток изменяется от  $I_{max}$  до 0. Из построений на рис.3. 4 легко установить, что

$$\text{Cos}q = (U_{omc} - E_{cm}) / U_1 \quad (3.6)$$

и

$$\begin{aligned} i(t) &= S(U(t) - U_{omc}) = S(E_{cm} - U_{omc} + U_1 \text{Cos} w_1 t) = \\ &= SU_1 (\text{Cos} w_1 t - \text{Cos}q) \quad . \end{aligned} \quad (3.7)$$

При  $\omega_1 t = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$  ток достигает максимального значения, равного согласно (3.7)

$$I_{\max} = SU_1 (1 - \text{Cos}q) \quad . \quad (3.8)$$

Спектральный состав импульсов тока находится путем разложения их в ряд Фурье (3.2). Амплитуды гармоник тока  $I_k$  определяются по формуле (3.3). С учетом (3.7) результаты вычислений представимы в виде

$$I_k = SU_1 \cdot g_k(q) \quad , \quad (3.9)$$

где  $\gamma_k(\theta)$  – так называемые коэффициенты гармоник, равные

$$\begin{cases} g_0(q) = \frac{1}{p} (\text{Sin} q - \text{Cos} q), & g_1(q) = \frac{1}{p} (q - \text{Sin} q \cdot \text{Cos} q), \\ g_k(q) = \frac{2}{p} \left( \frac{\text{Sin} kq \cdot \text{Cos} q - k \text{Cos} kq \cdot \text{Sin} q}{k(k^2 - 1)} \right), & k > 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

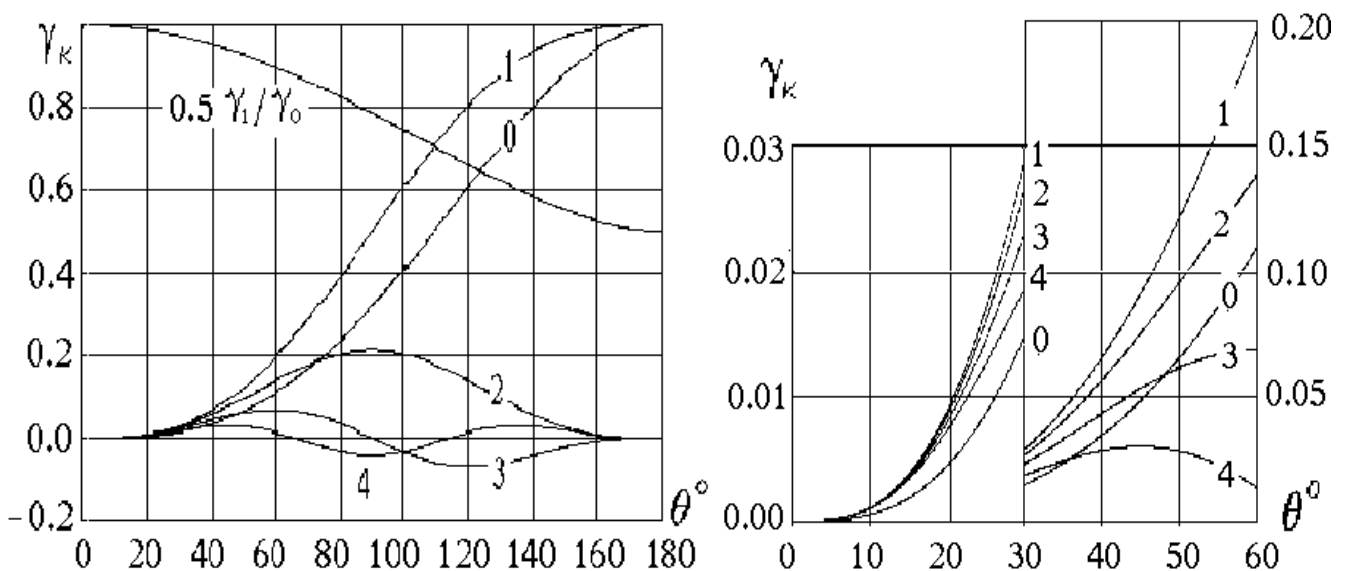


Рис.3. 5. Графики коэффициентов гармоник  $\gamma_k$

С увеличением номера  $k$  значения  $\gamma_k$  быстро уменьшаются, так что при  $k > 5$  гармоники тока  $I_k$  достаточно малы. Характерно, что при углах отсечки, называемых оптимальными и равными

$$q_{opt, g_k} = 180^0 / k, \quad (3.11)$$

значения  $\gamma_k$  максимальны. При  $q = 90^0$  для нечетных  $k= 3,5,7,\dots$   $\gamma_k$  проходят через нуль. При  $\theta = 180^0$  (переход в режим без отсечки) спектр тока содержит только постоянную составляющую  $I_0$  и первую гармонику  $I_1$ .

Если нелинейный элемент используется в условиях, когда максимальное значение тока  $I_{max}$  поддерживается постоянным, для чего при изменении угла отсечки требуется одновременное изменение амплитуды входного сигнала  $U_I$  или смещения  $E_{см}$ , то более удобно вместо  $\gamma_k(\theta)$  использовать коэффициенты гармоник Берга А.И.

$$a_k(q) = I_k / I_{max}, \quad (3.12)$$

связанные с  $\gamma_k(\theta)$  соотношением

$$a_k(q) = g_k(q) / (1 - \text{Cos}q). \quad (3.13)$$

Их графики показаны на рис.3. 6. В отличие от  $\gamma_k(\theta)$  они принимают максимальные значения при оптимальных углах

$$q_{opt, a_k} = 120^0 / k.$$

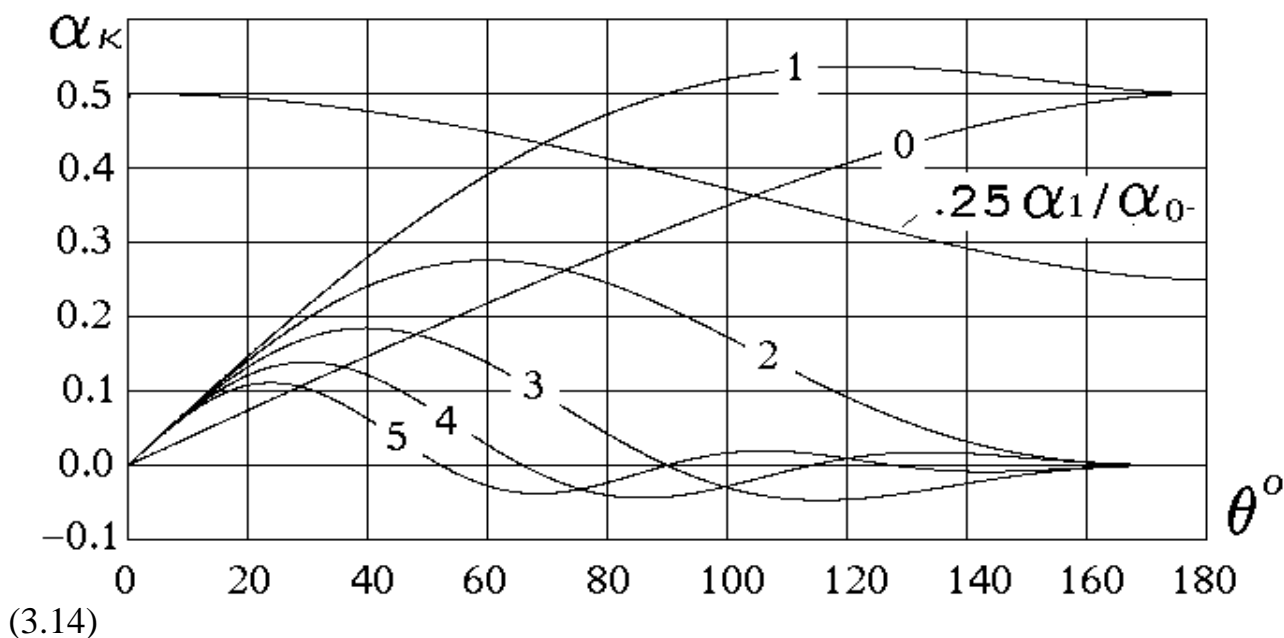


Рис.3. 6. Графики коэффициентов гармоник Берга А.И.



Если напряжение  $U(t)$ , приложенное к нелинейному элементу, в течение части периода превышает  $U_{нас}$ , то появляется верхняя отсечка тока (рис.3.7) с углом  $\theta_1$ , равным отсеченной части периода на уровне  $I_{нас}$ . Для этого случая нижний угол отсечки обозначим  $\theta_2$ .

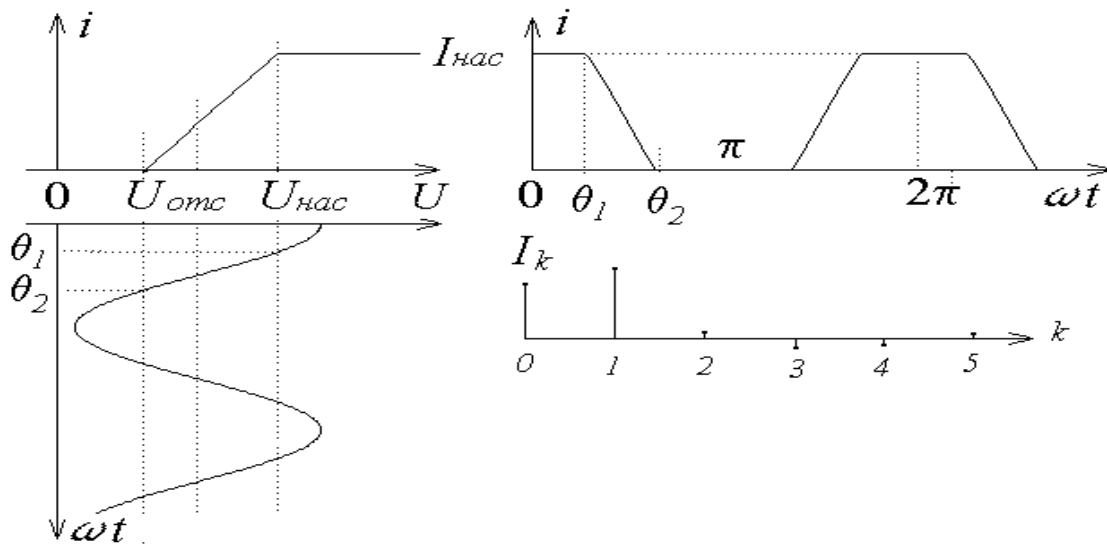


Рис.3. 7. Верхняя и нижняя отсечки тока

Нетрудно видеть, что

$$\begin{cases} \cos q_1 = SU_1(U_{нас} - E_{см})/U_1, \\ \cos q_2 = SU_1(U_{омс} - E_{см})/U_1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Усеченные сверху и снизу импульсы можно представить как разность двух импульсов, усеченных только снизу (рис.3. 8)

$$i(t) = i_2(t) - i_1(t), \quad (3.16)$$

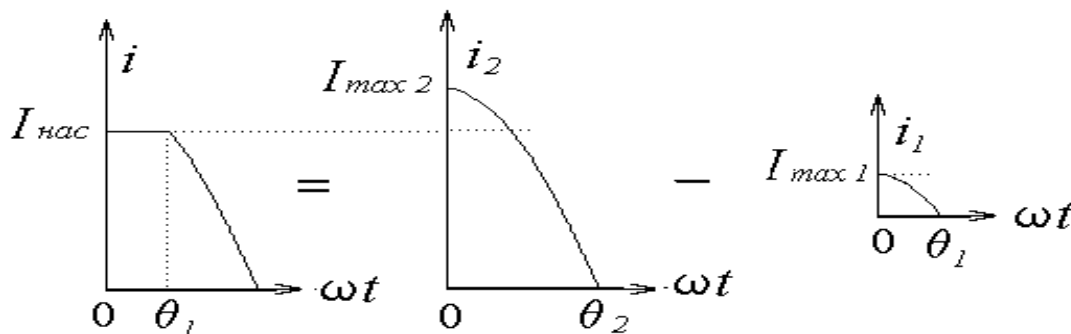


Рис.3. 8. К расчету импульсов тока с двухсторонней отсечкой

где

$$\begin{cases} i_1(t) = SU_1(\text{Cos } w_1 t - \text{Cos } q_1) \\ i_2(t) = SU_1(\text{Cos } w_1 t - \text{Cos } q_2) \end{cases} \quad (3.17)$$

Спектр тока  $i(t)$  равен разности спектров токов  $i_2(t)$  и  $i_1(t)$ , поэтому гармоники тока  $i(t)$  согласно (3.16) и (3.9) будут равны

$$I_k = SU_1 (g_k (q_2) - g_k (q_1)). \quad (3.18)$$

Метод двойного усечения при  $\theta_1 \rightarrow \theta_2$  используется на практике для формирования импульсов по форме, близкой к прямоугольной.

### 3.3. Режим «слабых» сигналов. Степенная аппроксимация ВАХ

Если ВАХ  $i = f(U)$  задана полиномом (3.4) конечной степени  $n$  (обычно  $n \leq 5$ ), и на входе действует гармонический сигнал

$$U(t) = U_1 \text{Cos } w_1 t, \quad (3.19)$$

то, как показывают расчеты, выходной ток будет содержать гармоники, высший номер которых не превосходит степени аппроксимирующего полинома, т.е.

$$i(t) = \sum_{k=0}^n I_k \text{Cos } w_1 k t. \quad (3.20)$$

Амплитуды четных гармоник  $I_0, I_2, \dots$  определяются четными коэффициентами полинома  $a_0, a_2, a_4, \dots$ , а нечетных гармоник  $I_1, I_3, \dots$  нечетными коэффициентами  $a_1, a_3, \dots$

Например, при  $n = 5$  они равны

$$\begin{cases} I_0 = a_0 + 1/2 a_2 u_1^2 + 3/8 a_4 u_1^4, & I_1 = a_1 u_1 + 3/4 a_3 u_1^3 + 5/8 a_5 u_1^5, \\ I_2 = 1/2 a_2 u_1^2 + 1/2 a_4 u_1^4, & I_3 = 1/4 a_3 u_1^3 + 5/16 a_5 u_1^5, \\ I_4 = 1/8 a_4 u_1^4, & I_5 = 1/16 a_5 u_1^5. \end{cases} \quad (3.21)$$

Вывод о том, что в выходном токе содержится только конечное число гармоник, является прямым следствием принятой аппроксимации ВАХ конечным

рядом. Естественно, что реальный вид ВАХ отличается от заданного, поэтому и гармоник на выходе будет больше.

Если входной сигнал является бигармоническим, т.е. представляет сумму двух колебаний с разными частотами

$$U(t) = U_1 \cos w_1 t + U_0 \cos w_2 t, \quad (3.22)$$

и ВАХ задана конечным полиномом  $n$  степени, то спектр выходного тока будет содержать набор так называемых **комбинационных частот** разного порядка

$$w_{k_1, k_2} = | k_1 w_1 + k_2 w_2 |, \quad (3.23)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  – целые числа в интервале от  $-n$  до  $n$ . **Порядком** комбинационной частоты называется число

$$p = | k_1 | + | k_2 |. \quad (3.24)$$

Оно не должно превышать степени аппроксимирующего полинома, т.е.

$$p \leq n. \quad (3.25)$$

Например, если ВАХ задана полиномом второй степени ( $n = 2$ ), то в спектре тока будут содержаться следующие комбинационные частоты:

одна частота нулевого порядка ( $p=0$ ),  $w_{00} = w_1$ , при  $k_1=0$  и  $k_2=0$ ;

две частоты первого порядка ( $p=1$ ),  $w_{\pm 1, 0} = w_1$  и  $w_{0, \pm 1} = w_2$ , если  $k_1=0$ ,  $k_2=\pm 1$  или  $k_1=\pm 1$ ,  $k_2=0$ ;

четыре частоты второго порядка ( $p=2$ ):

$$w_{\pm 2, 0} = 2 w_1, \text{ при } k_1 = \pm 2, k_2 = 0,$$

$$w_{0, \pm 2} = 2 w_2, \text{ при } k_1 = 0, k_2 = \pm 2,$$

$$w_{\pm 1, \pm 1} = | \pm w_1 \pm w_2 |, \text{ при } k_1 = \pm 1, k_2 = \pm 1.$$

Как видно, помимо частот входных сигналов  $w_1$  и  $w_2$  и их вторых гармоник  $2w_1$  и  $2w_2$ , ток будет содержать постоянную составляющую  $w=0$ , суммарную  $w_1 + w_2$  и разностную  $w_1 - w_2$  частоты.

В общем случае, если входное воздействие представляет полигармонический сигнал

$$U(t) = \sum_{i=1}^N U_i \cos w_i t, \quad (3.26)$$

то спектр выходного тока будет содержать различные комбинационные частоты

$$w_{k_1, k_2, \dots, k_N} = \left| \sum_{i=1}^N w_i k_i \right|, \quad (3.27)$$

порядок которых

$$p = \sum_{i=1}^N |k_i|. \quad (3.28)$$

Целые числа  $k_1, k_2, \dots, k_N$  могут принимать любые значения от  $-n$  до  $n$ , но так, что

$$p \leq n, \quad (3.29)$$

где  $n$  – степень аппроксимирующего полинома ВАХ.

Богатство спектра комбинационных частот открывает широкие возможности для реализации различных функциональных преобразований сигнала путем выделения полезных и подавления не нужных составляющих тока  $i(t)$ . Рассмотрим некоторые из них.

### 3.4. Нелинейные функциональные преобразования

#### 3.4.1. Ограничение

Различают два вида ограничения: *ограничение мгновенных значений* сигнала и *ограничение амплитуды* гармонических колебаний.

В результате ограничения первого типа мгновенные значения сигнала не выходят за некоторые пределы, называемые порогом ограничения. Возможны три типа ограничения: сверху, снизу и двустороннее.

Транзисторный усилитель с резистивной нагрузкой ВАХ имеет участок насыщения, и в зависимости от амплитуды входного сигнала и напряжения смещения может быть реализован любой из этих видов ограничения. В схеме ограничителя мгновенных значений фильтр не требуется, нагрузка чисто активная.

Целью амплитудного ограничения является стабилизация амплитуды выходного сигнала, которая не должна зависеть от амплитуды входного сигнала. Амплитудное ограничение реализуется в схеме двухстороннего ограничителя мгновенных значений, на выходе которого включается фильтр (обычно колебательный контур), настроенный на частоту первой гармоники входного сигнала.

Транзисторные схемы обоих типов ограничителей нарисуйте самостоятельно.

### 3.4.2. Нелинейное резонансное усиление колебаний высокой частоты

Функционально усиление колебаний высокой частоты представляет собой линейный процесс, т.к. выходной сигнал должен воспроизводить входное воздействие, однако реализацию выгоднее осуществлять с использованием нелинейных режимов, т.к. это позволяет улучшить энергетические характеристики.

Простейшая схема транзистора усилителя высокой частоты (УВЧ) представлена на рис.3. 9.

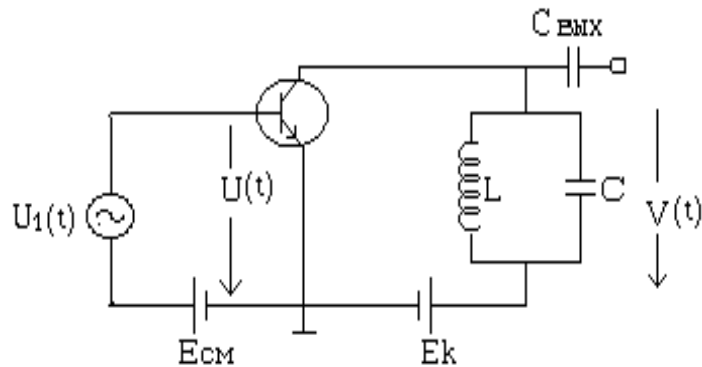


Рис.3. 9. Резонансный усилитель высокой частоты

На вход подается сигнал  $U(t) = U_1 \cos \omega_1 t$ . Усиленный сигнал  $V(t) = V_1 \cos \omega_1 t$  снимается с нагрузки – фильтра, роль которой играет колебательный контур, настроенный на частоту сигнала и потому имеющий на этой частоте чисто активное сопротивление  $R_э$ . Амплитуда сигнала на выходе определяется первой гармоникой тока коллектора  $I_1$ :

$$V_1 = R_э I_1 .$$

Отсюда коэффициент усиления

$$k = V_1/U_1 = R_э I_1/U_1 = R_э S_{cp} , \quad (3.30)$$

где  $S_{cp} = I_1/U_1$  - средняя крутизна ВАХ по первой гармонике тока.

Воспользуемся методом угла отсечки. Согласно (3.9)  $I_1 = S U_1 \gamma_1(\theta)$ , и поэтому (3.30) можно записать в виде

$$k = S \cdot R_э \cdot g_1(q) . \quad (3.31)$$

С учетом графика для  $\gamma_1(\theta)$  (см. рис.3. 5) зависимость  $k$  от  $\theta$  имеет вид, показанный на рис.3. 10.

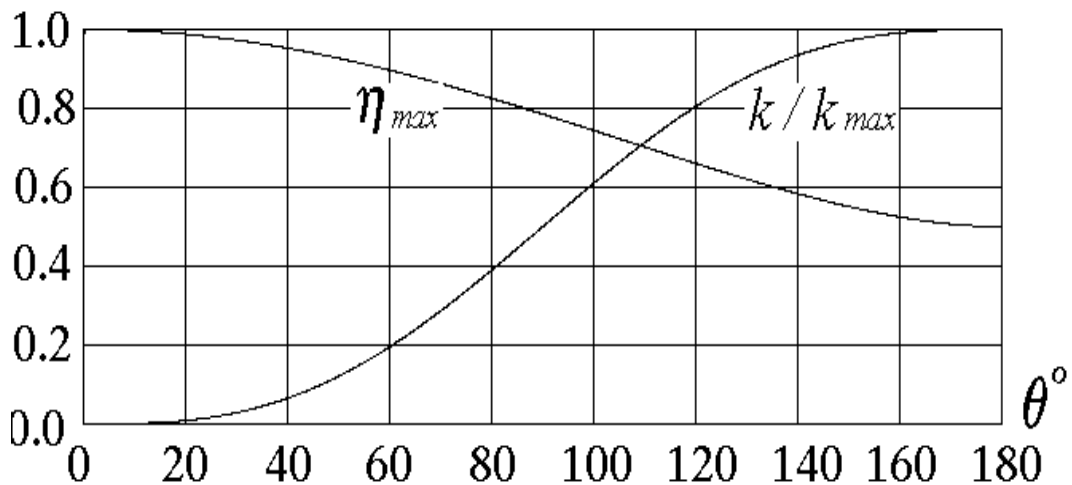


Рис.3. 10. Коэффициент усиления и к.п.д. резонансного усилителя

Максимум, равный  $k_{max} = SR_{э}$ , достигается при  $\theta = 180^0$ , т.е. при переходе в линейный режим работы без отсечки тока.

Выходная высокочастотная мощность равна  $P_1 = 0.5 V_1 I_1$ , а мощность, забираемая от источника питания  $P_0 = E_k \cdot I_0$ , где  $I_0 = S U_1 \gamma_0(\theta)$  – нулевая гармоника, т.е. постоянная составляющая тока коллектора. Отсюда к.п.д. усилителя равен

$$h = \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{2} \frac{V_1 I_1}{E_k I_0} = \frac{1}{2} \chi \frac{g_1(q)}{g_0(q)}. \quad (3.32)$$

Величина  $\xi = V_1/E_k$  называется коэффициентом напряженности режима. Напряжение на контуре  $V_1$  не может быть больше напряжения питания  $E_k$ , поэтому  $\xi \leq 1$ . Полагая для критического режима  $\xi = 1$ , находим, что к.п.д. не может превышать величину

$$h_{max} = 0.5 g_1(q) / g_0(q) = 0.5 a_1(q) / a_0(q)_1. \quad (3.33)$$

Зависимости  $\gamma_1(\theta)/\gamma_0(\theta)$  и  $a_1(\theta)/a_0(\theta)$  изображены на рис.3. 5 и 6. При больших углах отсечки ( $\theta \approx 180^0$ ) в режимах, близких к линейному, к.п.д. не превышает 50%, что энергетически явно не выгодно. Этот режим (класс «А») может использоваться в маломощных усилителях, называемых *усилителями напряжения*, когда величина к.п.д. не имеет существенного значения. Для усилителей большой мощности, называемых *усилителями мощности*, величина

к.п.д. является важнейшим параметром, и поэтому приходится переходить к нелинейным режимам с отсечкой тока, поскольку с уменьшением  $\theta$  растет к.п.д.. Однако, режимы с отсечкой  $\theta < 60^\circ$  (класс «С») обычно не используются, т.к. с уменьшением  $\theta$  падает и полная мощность

$$P_1 = 0.5 V_1 I_1 = 0.5 R_9 (S U_1 g_1(q))^2 \quad (3.34)$$

вследствие уменьшения  $\gamma_1(\theta)$ . Из компромиссных соображений между высоким к.п.д., большой выходной мощностью и большим коэффициентом усиления часто используется режим класса «В» с углом отсечки  $\theta = 90^\circ$ , при котором  $\eta = 78\%$ , а  $k = 0.5 S R_9 = 0.5 k_{max}$ . Этот режим выгоден еще и тем, что позволяет без искажений усиливать колебания с изменяющейся во времени амплитудой  $U_1(t)$  (АМ сигналы), т.к. при  $\theta = 90^\circ$ , когда  $E_{cm} = U_{отс}$  ток первой гармоники линейно зависит от  $U_1$ , ( $I_1 = 0.5 S U_1$ ).

### 3.4.3. Умножение частоты

Умножение есть такое преобразование сигнала, при котором на выходе получается колебание с частотой в целое число раз  $n$  более высокой, чем на входе. На вход же обычно подается гармоническое колебание

$$U(t) = U_1 \cos \omega_1 t.$$

Известны различные типы умножителей, в том числе транзисторный резонансный, схема которого не отличается от резонансного усилителя (рис.3. 9), но выходной контур настраивается на  $n$  гармонику входного сигнала  $\omega_n = n \cdot \omega_1$ , выделяя ее из спектра тока коллектора. Коэффициент передачи умножителя определяется по формуле

$$k_n = \frac{V_n}{U_1} = \frac{I_n \cdot R_9}{U_1} = S g_n(q) \cdot R_9, \quad (3.35)$$

а к.п.д.

$$h_n = \frac{P_n}{P_0} = \frac{0.5 I_n V_n}{E_k I_0} = \frac{1 g_n(q)}{2 g_0(q)} \cdot \frac{V_n}{E_k}. \quad (3.36)$$

Для достижения максимального выходного сигнала выбирают оптимальный угол отсечки  $\theta$ , равный  $180^\circ/n$ . Ввиду того, что с увеличением номера

гармоники ток  $I_n$  резко падает, на практике редко реализуют умножение более, чем в 2-3 раза.

### 3.2.4. Преобразование частоты

Преобразованием частоты (ПЧ) называют перемещение спектра сигнала без изменения его вида вверх или вниз по шкале частот. Осуществляется ПЧ в нелинейных или параметрических цепях. ПЧ широко используется в супергетеродинных приемниках, где основное усиление ведется на преобразованной частоте, называемой промежуточной и равной  $\omega_{np} = \omega_1 \pm \omega_2$ , где  $\omega_1$  – частота входного сигнала, а  $\omega_2$  – частота вспомогательного генератора (гетеродина).

С точки зрения нелинейного преобразования  $\omega_1 \pm \omega_2$  являются комбинационными частотами второго порядка, возникающими в том случае, если ВАХ имеет квадратичный член

$$i = a_0 + a_1 U + a_2 U^2,$$

и на входе действует бигармонический сигнал

$$U(t) = E_{cm} + U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t.$$

Раскрывая, выражение для тока, получим

$$i(t) = I_{00} + I_{10} \cos \omega_1 t + I_{01} \cos \omega_2 t + I_{20} \cos 2\omega_1 t + \\ + I_{02} \cos 2\omega_2 t + I_{1,-1} \cos (\omega_1 - \omega_2)t + I_{1,1} \cos (\omega_1 + \omega_2)t,$$

где

$$\begin{cases} I_{0,0} = a_0 + a_1 E_{cm} + a_2 E_{cm}^2 + 0.5(U_1^2 + U_2^2), \\ I_{1,0} = a_1 U_1 + 2a_2 E_{cm} U_1, & I_{0,1} = a_1 U_2 + 2a_2 E_{cm} U_2, \\ I_{2,0} = 0.5 a_2 U_1^2, & I_{0,2} = 0.5 a_2 U_2^2, \\ I_{1,-1} = a_2 U_1 U_2, & I_{1,1} = a_2 U_1 U_2. \end{cases} \quad (3.37)$$

Для выделения полезных составляющих с частотами  $\omega_1 - \omega_2$  или  $\omega_1 + \omega_2$  используют фильтр, обычно колебательный контур.



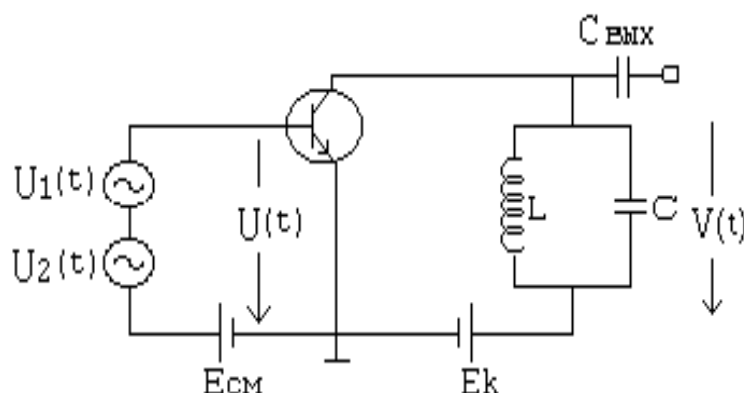


Рис.3. 11. Транзисторный преобразователь частоты

Схема транзисторного преобразователя частоты показана на рис.3. 11. Напряжение смещения  $E_{см}$  устанавливает рабочую точку на нижнем сгибе ВАХ, в середине квадратичного участка. Выходное напряжение равно

$$V(t) = S_{np} R_{э} U_1 \text{Cos}(\omega_1 \pm \omega_2) t, \quad (3.38)$$

где  $R_{э}$  – эквивалентное сопротивление контура, и

$$S_{np} = a_2 U_2 \quad (3.39)$$

- крутизна преобразования, зависящая от вида ВАХ и напряжения  $U_2$  гетеродина.

Если входной сигнал не одночастотный (например, АМ или ЧМ колебание), а реальная ВАХ описывается полиномом степени выше второй, то возникает богатый спектр комбинационных частот, среди которых наряду с полезными есть и нежелательные. Если последние попадают в полосу пропускания контура, то они накладываются на полезные составляющие и искажают выходной сигнал. Для уменьшения этих искажений на практике часто используют более сложные балансные и мостовые схемы, содержащие по 2 и 4 нелинейных элемента.

## Раздел 4. Модуляция колебаний

### 4.1 . Амплитудная модуляция

Модуляция есть процесс изменения одного или нескольких параметров высокочастотного *модулируемого* колебания под воздействием относительно низкочастотного управляющего *модулирующего* сигнала. В результате спектр управляющего сигнала переносится в область высоких частот, где передача электромагнитных сигналов посредством излучения более эффективна. Передаваемая информация заложена в управляющем сигнале. Роль переносчика информации выполняет высокочастотное колебание, называемое *несущим*. В качестве несущего могут быть использованы колебания различной формы (прямоугольные, треугольные и т.д.), однако чаще всего применяются гармонические колебания. В зависимости от того, какой из параметров несущего колебания изменяется, различают вид модуляции (амплитудная, частотная, фазовая и др.).

Сигнал с амплитудной модуляцией (АМ) и гармоническим несущим колебанием записывается в виде

$$S(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + q_0), \quad (4.1)$$

где  $A(t)$  изменяемая амплитуда,  $\omega_0$  – несущая частота и  $q_0$  – начальная фаза, значение которой для АМ сигнала не принципиально. В дальнейшем для простоты мы будем полагать  $q_0 = 0$ . При АМ сигнал  $A(t)$  *перемножается* с несущим колебанием  $\cos \omega_0 t$ , благодаря чему и происходит перенос спектра сигнала  $A(t)$  в область несущей частоты.

Покажем это. Пусть  $A(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$  есть комплексный спектр действительной функции  $A(t)$ . Его модуль – функция четная, а фаза – функция нечетная:

$$A(\omega) = A(-\omega); \quad \phi(\omega) = -\phi(-\omega). \quad (4.2)$$

Выразим  $A(t)$  через интеграл Фурье. Учитывая (4.2),

$$A(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} A(jw) e^{jw t} dw = \int_{-\infty}^{\infty} A(w) e^{j(wt + j(w))} dw = \quad (4.3)$$

$$= \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} A(w) \cos(wt + j(w)) dw.$$

Последняя запись представляет тригонометрическую форму интеграла Фурье для действительной функции  $A(t)$ . Используя (4.3), представим сигнал  $S(t)$  в аналогичной форме

$$S(t) = A(t) \cos w_0 t = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} A(w) \cos(wt + j(w)) \cos w_0 t dw.$$

После простых преобразований с учетом (4.2) получаем

$$S(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} A(w - w_0) \cos(wt + j(w - w_0)) dw. \quad (4.4)$$

Сравнивая (4.4) и (4.3) видим, что спектр сигнала  $S(t)$  получается переносом спектра сигнала  $A(t)$  на частоту  $w_0$ . Рис.4.1 иллюстрирует сказанное.

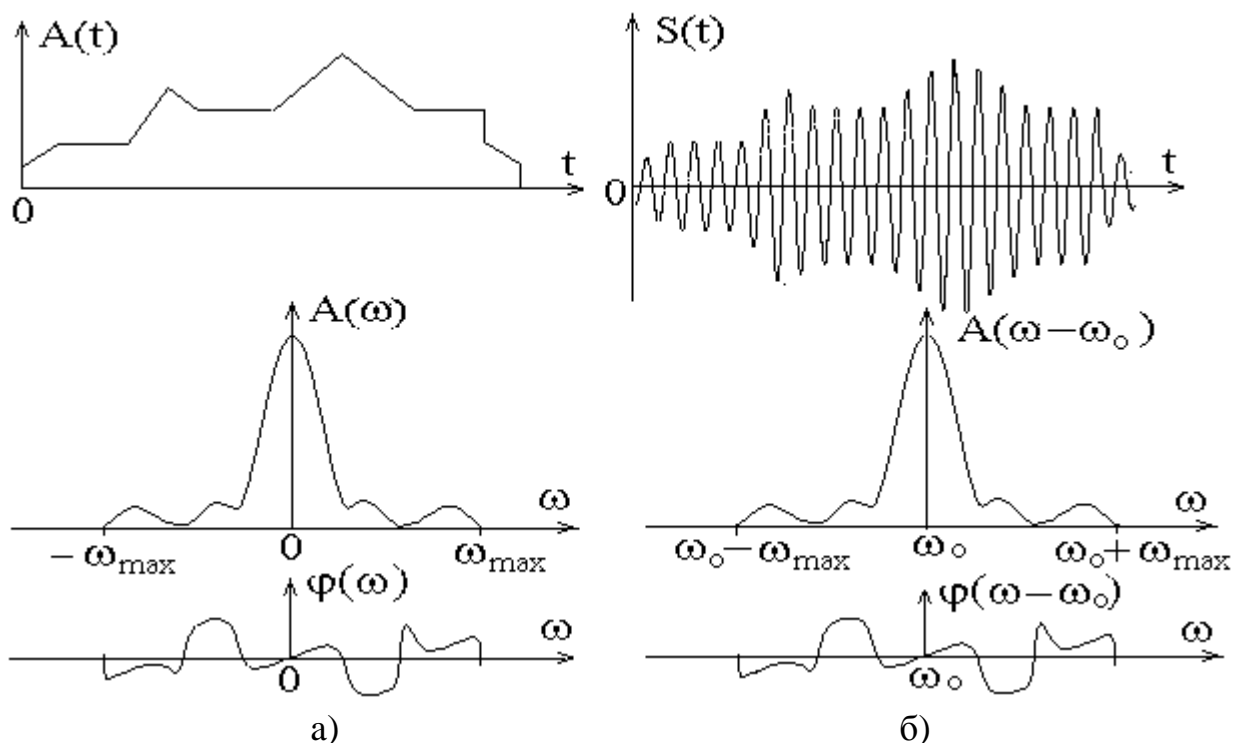


Рис.4.1. Сигналы  $A(t)$ ,  $S(t)$  и их спектры

Часть спектра сигнала  $S(t)$ , расположенная справа от несущей частоты  $\omega_0$ , называется *верхней боковой полосой*, а часть, расположенная слева от  $\omega_0$ , - *нижней боковой полосой*. Общая полоса частот, занимаемая АМ сигналом, равна  $2\omega_{\max}$ , где  $\omega_{\max}$  - высшая частота в спектре модулирующего сигнала.

Простейшим видом АМ сигнала является тонально-модулированное колебание (рис.4. 2), амплитуда которого изменяется по закону

$$A(t) = A_0 + A_M \cos(\Omega t + j) = A_0(1 + m \cos(\Omega t + j)) =$$

$$= A_0 \left(1 + \frac{m}{2} \cos(\Omega t + j) + \frac{m}{2} \cos(-\Omega t - j)\right). \quad (4.5)$$

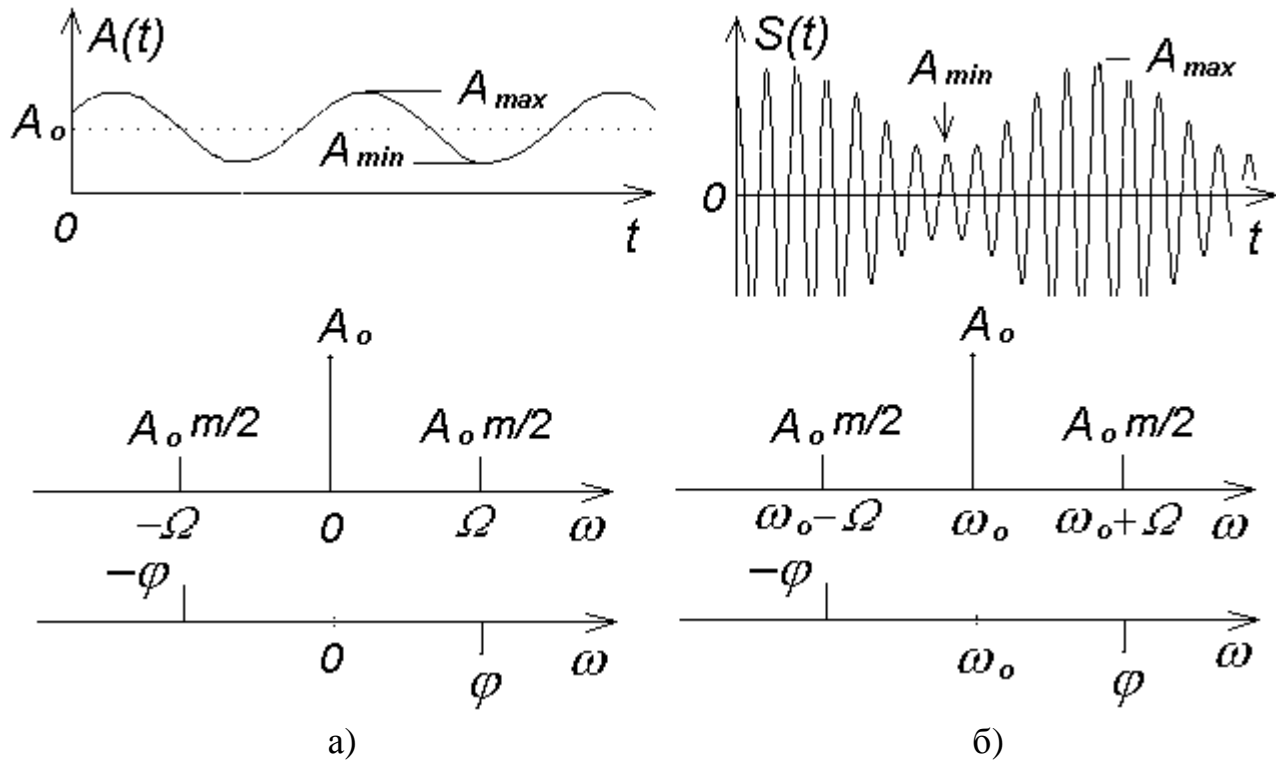


Рис.4.2. Тонально модулированное колебание

Параметр  $m = \frac{A_M}{A_0}$  называется *коэффициентом* или *глубиной модуляции*.

Амплитуда  $A(t)$  изменяется от  $A_{\min} = A_0 - A_M = A_0(1 - m)$  до  $A_{\max} = A_0 + A_M = A_0(1 + m)$ . Коэффициент  $m$  можно выразить через  $A_{\min}$  и  $A_{\max}$ :

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}. \quad (4.6)$$

АМ колебание имеет вид:

$$\begin{aligned} S(t) &= A(t) \cos w_o t = A_o (1 + m \cos(\Omega t + j)) \cos w_o t = \\ &= A_o \cos w_o t + \frac{m}{2} A_o \cos((w_o + \Omega)t + j) + \frac{m}{2} A_o \cos((w_o - \Omega)t - j) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Согласно (4.5) и (7) спектры сигналов  $A(t)$  и  $S(t)$  содержат по три составляющих с частотами  $-\Omega, 0, \Omega$  и  $w_o - \Omega, w_o, w_o + \Omega$ .

Устройства, предназначенные для получения модулированных колебаний, называются *модуляторами*. Так как АМ сигнал согласно (4.1) является произведением двух сигналов, то амплитудный модулятор по сути должен быть их *перемножителем*. Операцию перемножения можно осуществить в нелинейных и параметрических цепях. На практике более широко используются преобразователи на основе нелинейных цепей, выражение для ВАХ которых должны содержать квадратичный член, т.к. именно он отвечает за перемножение сигналов. В самом деле, если на нелинейный элемент с характеристикой

$$i = a_o + a_1 u + a_2 u^2$$

подать сумму двух колебаний

$$u(t) = U_o \cos w_o t + U_M \cos \Omega t,$$

то получим ток

$$\begin{aligned} i &= a_o + a_1 (U_o \cos w_o t + U_M \cos \Omega t) + \\ &+ a_2 (U_o^2 \cos^2 w_o t + 2U_o U_M \cos w_o t \cos \Omega t + U_M^2 \cos^2 \Omega t) = \\ &= a_o + \frac{1}{2} a_2 (U_o^2 + U_M^2) + a_1 U_M \cos \Omega t + \frac{1}{2} a_2 U_M^2 \cos 2\Omega t + \\ &+ (a_1 U_o + 2a_2 U_o U_M \cos \Omega t) \cos w_o t + \frac{1}{2} a_2 U_o^2 \cos 2w_o t, \end{aligned}$$

среди составляющих которого содержатся члены, соответствующие АМ колебанию

$$\begin{aligned} i_{AM}(t) &= (a_1 U_o + 2a_2 U_o U_M \cos \Omega t) \cos w_o t = \\ &= I_o (1 + M \cos \Omega t) \cos w_o t, \end{aligned}$$

где 
$$I_o = a_1 U_o \quad \text{и} \quad M = 2 \frac{a_2}{a_1} U_M. \quad (4.8)$$

Наряду с полезной составляющей  $i_{AM}(t)$  ток содержит и «ненужные» компоненты с частотами  $0, 2\Omega$  и  $2\omega_o$ , которые должны быть удалены (отфильтрованы).

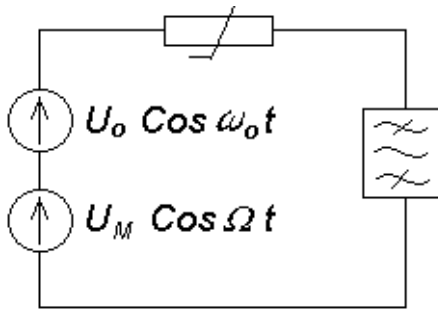


Рис.4.3

Из сказанного следует, что АМ модулятор должен содержать источники модулирующего и несущего колебаний, нелинейных элемент с квадратичной характеристикой и фильтр, выделяющий полезные частоты (рис.4.3). В качестве фильтра обычно используют колебательный контур, настроенный на несущую частоту с полосой пропускания, достаточной для выделения верхней и нижней боковых полос спектра АМ сигнала.

Реальные ВАХ нелинейных элементов описываются полиномами, степени которых обычно выше второй, и потому спектры их тока содержат большое число комбинационных частот

$$W_{mn} = m\omega_o + n\Omega, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

среди которых могут быть и «ненужные». Если окажется, что некоторые из них попадут в полосу пропускания фильтра, то это приведет к нелинейным искажениям формы огибающей  $A(t)$ , которая уже не будет воспроизводить информационный сигнал. Для предотвращения возникновения нежелательных частот применяют более сложные балансные и мостовые схемы модуляторов с двумя и четырьмя нелинейными элементами (обычно диодами). Простые схемы модуляторов строятся на одном нелинейном элементе (транзисторе или электронной лампе). Управляющий сигнал вводят в цепь базы или коллектора транзистора, сетки или анода лампы. Соответственно модуляцию называют *базовой, коллекторной, сеточной или анодной*.

Рассмотрим схему базовой модуляции на транзисторе (рис.4.4).

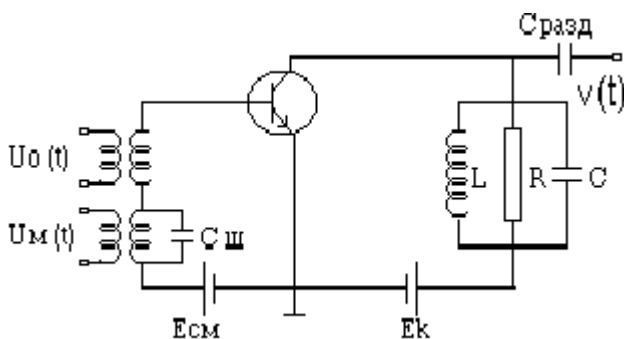


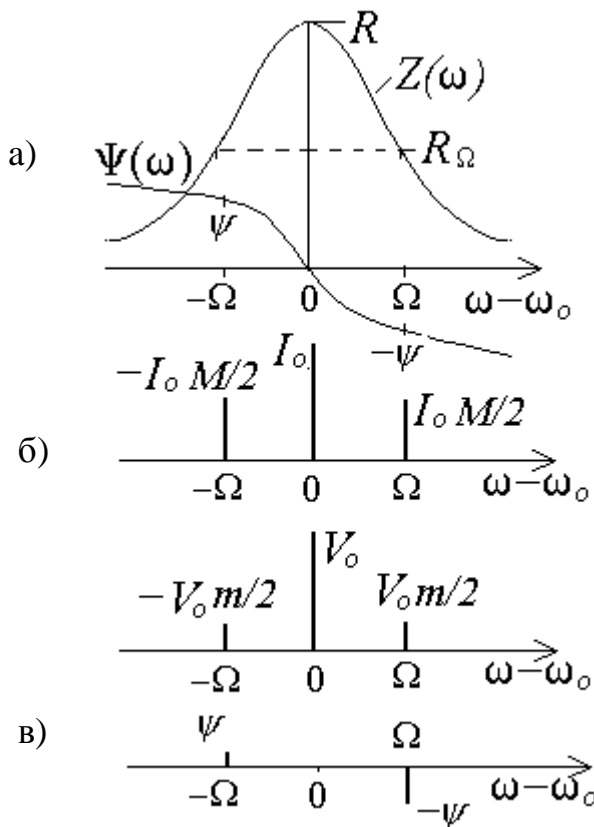
Рис.4.4. Базовый модулятор

На базу поданы напряжение смещения  $E_{см}$ , определяющее положение рабочей точки на ВАХ транзистора, высокочастотное напряжение несущей  $U_o(t) = U_o \cos \omega_o t$  и низкочастотное напряжение сигнала модуляции  $U_M(t) = U_M \cos \Omega t$ . В цепь коллектора включен колебательный контур LCR, настроенный на несущую частоту.

Выходное напряжение  $V(t)$  снимается через разделительный конденсатор  $C_{разд}$ .

Комплексное сопротивление контура (резонансная характеристика рис.4.5а) равно

$$Z(j\omega) = \frac{R}{1 + jzQ} = Z(\omega) e^{j\Psi(\omega)},$$



где  $R$  - эквивалентное активное сопротивление (АЧХ),

$Q$  - добротность контура,

$M$  - относи-

тельная расстройка,

$m$  - фазовая характе-

ристика (ФЧХ),

На несущей частоте  $\omega_0$  сопротивление и фаза .

Рис.4.5. а) АЧХ и ФЧХ контура,  
 б) спектр тока  $i_{AM}(t)$ ,  
 в) спектр выходного сигнала  $V(t)$ .

На боковых частотах

Работа схемы иллюстрируется рис.4.6.

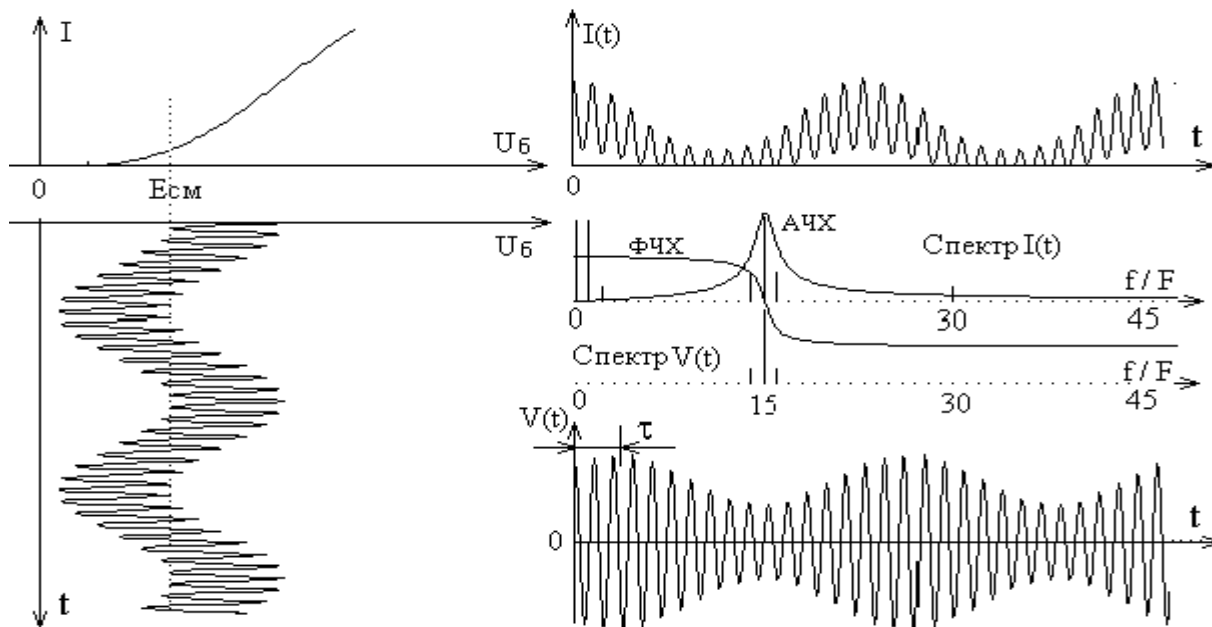


Рис.4. 6. Работа модулятора на квадратичном участке ВАХ.

Начальный участок ВАХ близок к квадратичному. Рабочая точка выбирается на его середине. Как было показано выше, в спектре тока коллектора будут содержаться колебания с частотами  $\omega$  и  $3\omega$ , образующие АМ составляющую тока

$$(4.9)$$

Здесь  $m$  - глубина модуляции тока.

Расчет спектральным методом показывает, что выходное напряжение на колебательном контуре, создаваемое током  $I_{\text{к}} \cos(\omega t)$ , будет равно

$$(4.10)$$

где  $\omega$  и  $\omega_0$ . (4.11)

Спектр этого колебания показан на рис.4.5, в и рис.4.6. Как видно из (4.11), глубина модуляции напряжения оказывается в  $\frac{1}{3}$  раз меньше, чем у тока  $I_{\text{к}} \cos(\omega t)$ , и кроме того огибающая напряжения сдвинута по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  относительно огибающей тока. Уменьшение глу-



бины модуляции объясняется тем, что, как видно из рис.4.6а, на боковых частотах активное сопротивление контура в раз меньше, чем на несущей частоте . Сдвиг же по фазе огибающей обусловлен реактивными свойствами контура, создающими задержку выходного сигнала на время .

Зависимость по форме совпадает со склоном резонанс-

ной характеристики колебательного контура (рис.4. 5а), откуда видно, что с увеличением частоты модуляции глубина модуляции  $m$  выходного сигнала уменьшается. Аналогично влияет и увеличение добротности  $Q$ .

При неточной настройке контура на несущую частоту спектр выходного сигнала  $V(t)$  становится несимметричным («перекашивается»). Форма огибающей выходного сигнала искажается и возникает модуляция по фазе, так называемая псевдофазовая модуляция

Спектр тока коллектора, а, следовательно, и форма выходного напряжения, зависят от режима работы транзистора (напряжения смещения и амплитуд сигналов и ).

## 4.2. Параметры и характеристики модуляторов

Оценка качества работы модулятора производится по так называемым *модуляционным* характеристикам: *статической*, *динамической* и *частотной*.

**Статическая** модуляционная характеристика (СМХ) представляет зависимость амплитуды тока несущей частоты от напряжения смещения при подаче на вход модулятора несущего колебания с постоянной амплитудой, равной рабочему напряжению, т.е.

На практике, однако, удобнее измерять не ток  $I_0$ , а выходное напряжение

амплитуда которого пропорциональна току , поэтому в качестве СМХ можно использовать зависимость

Изменяя при снятии СМХ, мы в статическом режиме как бы воспроизводим процесс модуляции.

Вид СМХ показан на рис.4.7. С некоторым приближением (тем лучшим, чем меньше установлено  $\beta$ ) он совпадает с кривой крутизны ВАХ тока коллектора.

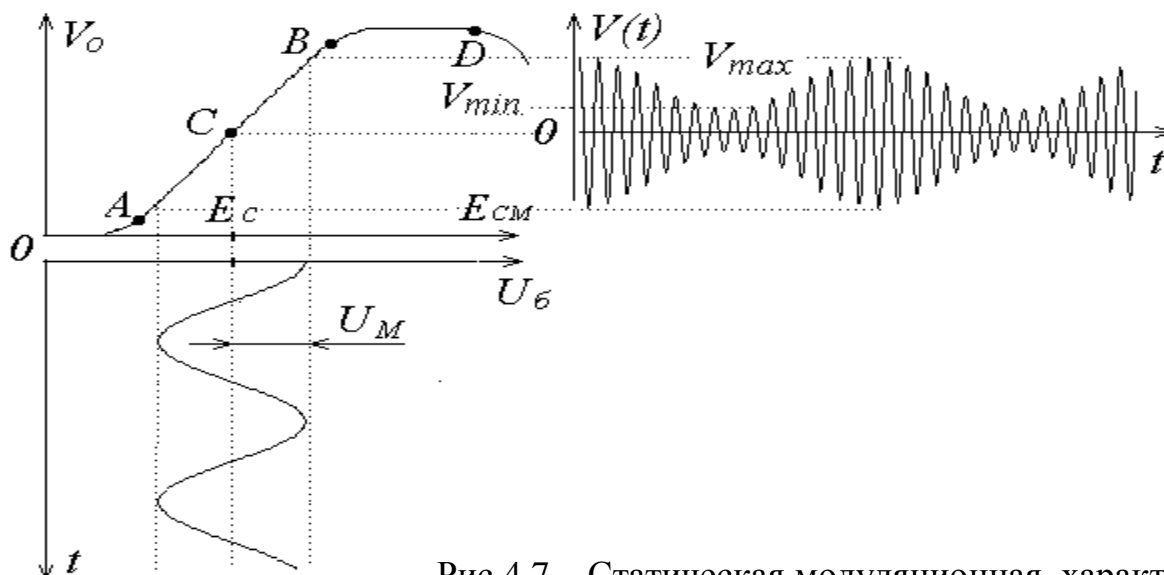
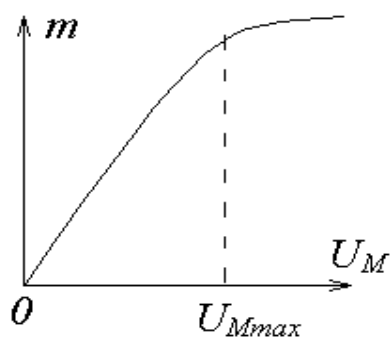


Рис.4.7. Статическая модуляционная характеристика, и определение  $m$  с ее помощью  $V_{max}$  и  $V_{min}$  и  $M$ .

В средней части СМХ имеется участок  $AB$ , соответствующий квадратичному участку ВАХ транзистора, в пределах которого  $I_c$  и  $V_o$  линейно зависят от  $I_b$ . Правее точки  $B$  начинается горизонтальный участок СМХ, соответствующий линейной части ВАХ тока. Завал правее точки  $D$  соответствует переходу к горизонтальной части ВАХ. Для получения неискаженной модуляции с наибольшей глубиной нужно рабочую точку  $C$  выбирать на середине линейного участка  $AB$  ( $I_b = I_{b0}$ ), что соответствует середине квадратичного участка ВАХ. Амплитуда модулирующего сигнала  $U_M$  не должна выходить за пределы линейного участка. С помощью СМХ, пользуясь методом трех плоскостей, можно найти форму огибающей напряжения  $V_o(t)$ , ее максимальные и минимальные значения, по которым определяется глубина модуляции  $m$ . Затем, если задана частота модуляции  $\Omega$ , то можно определить и  $t$ .

**Динамическая** модуляционная характеристика (ДМХ) определяет зависимость глубины модуляции  $m$  выходного сигнала от амплитуды модулирующего колебания  $U_M$ , т.е.  $m = f(U_M)$  при заданных смещении  $E_c$  и амплитуде несущей  $U_{cm}$ .



На рис.4.8 показан примерный вид ДМХ. Она снимается либо экспериментально, либо может быть построена по известной СМХ путем нахождения  $m$  для различных значений  $U_M$ . Ее линейный участок соответствует работе в пределах линейной части СМХ. Загиб начинается при  $U_M \approx (E_B - E_a)/2$ .

$$U_{M \max} \approx (E_B - E_a)/2.$$

Если  $\Omega_{\text{min}} < \Omega < \Omega_{\text{max}}$ , то модуляция происходит без искажений.

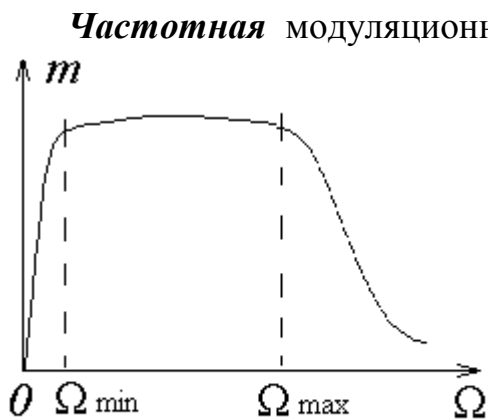


Рис.4.9

Частотная модуляционная характеристика (ЧМХ) устанавливает зависимость коэффициента модуляции от частоты модулирующего сигнала (рис.4.9). Она имеет завалы: на низких частотах из-за свойств модуляционного трансформатора и на высоких частотах — вследствие избирательных свойств колебательного контура и шунтирующего действия емкости. ЧМХ позволяет судить о частотных искажениях при АМ. Если спектр модулирующего сигнала укладывается в пределах полосы частот от  $\Omega_{\text{min}}$  до  $\Omega_{\text{max}}$ , где ЧМХ из-

меняется слабо, то искажения при модуляции будут незначительны.

Работа модулятора в пределах квадратичного участка ВАХ тока коллектора соответствует режиму так называемых «слабых» сигналов.

В режиме «сильных» сигналов, далеко выходящих за пределы квадратичного участка, ВАХ удовлетворительно аппроксимируется отрезками прямых с крутизной  $S$ , и тогда для расчетов допустимо применение метода угла отсечки, позволяющего без труда определить зависимость  $I_o$  от  $U_o$ , т.е. СМХ. Эта характеристика (рис.4.10) оказывается практически линейной в пределах участка  $AB$ , середина которого совпадает с напряжением отсечки  $E_{\text{см}} - U_{\text{отс}}$ , а ширина примерно равна  $1.6U_o$ ,

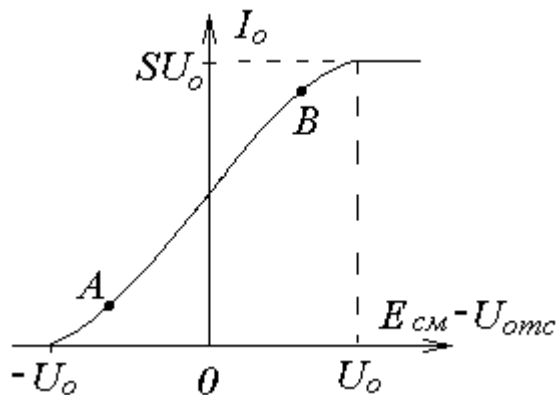


Рис.4.10

откуда следует, что амплитуда сигнала модуляции  $U_M$  не должна превышать  $0.8U_o$ . Режим сильных сигналов выгоден энергетически, поскольку работа модулятора происходит с отсечкой тока.

## Раздел 5. Выпрямление и детектирование колебаний

### 5.1. Теоретические сведения.

Термин детектирование означает выделение. Имеется в виду выделение низкочастотного (НЧ) сигнала модуляции из высокочастотного (ВЧ), модулированного колебания.

Пусть

$$E(t) = E_1(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1)$$

есть АМ колебание с несущей частотой  $\omega_0$ , начальной фазой  $\varphi_0$  и амплитудой  $E(t)$ , изменяющейся по закону сигнала модуляции. Как правило, функция  $E(t)$  медленная в сравнении с периодом несущей  $T_0 = 2\pi / \omega_0$

**Детектированием** называется такой процесс преобразования сигнала, в результате которого появляется НЧ составляющая, обусловленная сигналом модуляции и выделяемая фильтром низких частот (ФНЧ). В идеале воспроизводится  $E_i(t)$ .

**Выпрямление** есть частный случай детектирования, когда из спектра преобразованного сигнала выделяется только постоянная составляющая (нулевая гармоника), и на выходе получается постоянное напряжение или ток. Для выпрямления в качестве  $E(t)$  целесообразно использовать немодулированное колебание с постоянной амплитудой, т.е. когда  $E(t) = E$ . Выпрямление можно рассматривать, как детектирование немодулированного сигнала. С другой стороны детектирование АМ колебания есть не что иное, как выпрямление ВЧ сигнала с медленно меняющейся амплитудой  $E(t)$ . Таким образом, нужно четко понимать, что термины детектирование и выпрямление соответствуют одному и тому же физическому процессу и потому могут быть взаимозаменяемы в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям. В быту, однако, под выпрямлением обычно понимают получение постоянных токов и напряжений в результате преобразования немодулированных колебаний промышленных частот 50 - 400 Гц, тогда как детектирование связывают с преобразованием модулированных сигналов радиочастот от 100 кГц и выше.

Со спектральной точки зрения выпрямление и детектирование различаются тем, что в первом случае, как указывалось, из спектра преобразованного сигнала выделяется только одна нулевая гармоника, тогда как во втором - целая полоса частот, заключающая сигнал модуляции. В обоих случаях мы имеем дело с **преобразованием спектра** исходного сигнала

(т.е. процессом, который может быть реализован либо в нелинейных, либо в параметрических цепях). Большее распространение получило детектирование с нелинейным преобразованием. Структурная схема такого детектора на основе нелинейного преобразователя (НП) с характеристикой  $f(E)$  показана на рис. 1.

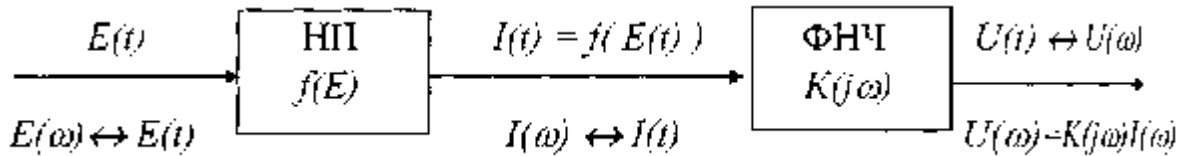


Рис.1.

ФНЧ выделяет полезные НЧ и отсекает ненужные ВЧ составляющие спектра. В данной схеме он выполняет также и роль нагрузки. Для упрощения анализа будем полагать, что входное сопротивление последующих каскадов достаточно велико, и его влиянием на процессы, происходящие в схеме, можно пренебречь.

## 5.2. Выпрямление

Изучение детектирования проще начать с выпрямления, когда на входе действует немодулированное колебание

$$E(t) = E_1 \cos \omega_0 t \quad (2)$$

Начальная фаза  $\varphi_0$  в (1) не оказывает влияния на результаты детектирования и выпрямления, поэтому для простоты положено  $\varphi_0 = 0$ . Существенную роль играет вид характеристики НП  $f(E)$ , которую в общем случае можно аппроксимировать степенным полиномом

$$f(E) = a_0 + a_1 E + a_2 E^2 + a_3 E^3 + \dots \quad (3)$$

и разложить на четную и нечетную составляющие

$$f(E) = f_{\text{чет}}(E) + f_{\text{неч}}(E), \quad (4)$$

где

$$f_{\text{чет}}(E) = a_0 + a_2 E^2 + a_4 E^4 + \dots$$

$$f_{\text{неч}}(E) = a_1 E + a_3 E^3 + a_5 E^5 + \dots$$

Сигнал на выходе НП ( будем считать, что это ток  $I(t)$  ) также представим в виде четной и нечетной компонент

$$I(t) = I_{\text{чет}}(t) + I_{\text{неч}}(t), \quad (5)$$

где

$$I_{\text{чет}}(t) = f_{\text{чет}}(E(t))$$

и

$$I_{\text{неч}}(t) = f_{\text{неч}} \quad (6)$$

что иллюстрируется Рис.2.

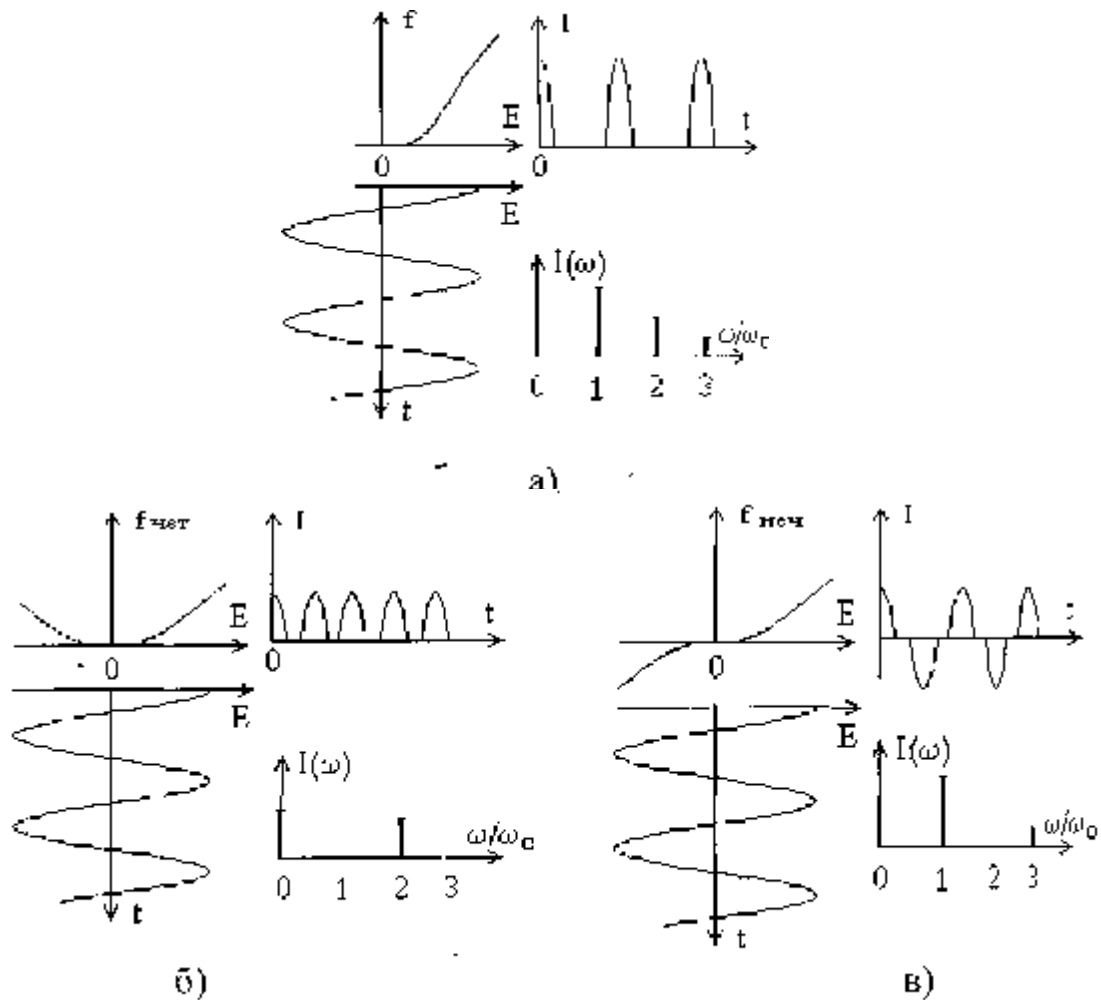


Рис. 2

Вследствие нелинейности характеристики  $f(E)$  выходной сигнал  $I(t)$  получается негармоническим и поэтому раскладывается в ряд Фурье по гармоникам частоты  $\omega_0$ :

$$I(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k \cos k\omega_0 t, \quad (7)$$

причем четная и нечетная составляющие тока определяются четными и нечетными гармониками:

$$I_{чет}(t) = I_0 + I_2 \cos 2\omega_0 t + I_4 \cos 4\omega_0 t + \dots \quad (8)$$

$$I_{неч}(t) = I_1 \cos \omega_0 t + I_3 \cos 3\omega_0 t + I_5 \cos 5\omega_0 t + \dots$$

Полезной является только нулевая гармоника  $I_0$ , а остальные должны быть отфильтрованы. Гармоника  $I_0$  содержится в спектре сигнала  $I_{чет}(t)$  (Рис. 26). За ее появление отвечает только  $f_{чет}(E)$ , тогда как  $f_{неч}(E)$  создает ненужные для детектирования нечетные гармоники (Рис. 2в). Отсюда следует, что для детектирования желательно использовать НП с четным видом характеристик, обеспечивающих так называемое, *двухполупериодное* выпрямление (Рис. 26). Для получения НП с четными характеристиками применяют специальные балансные и мостовые схемы, содержащие по два и более нелинейных элементов. Выпрямление и детектирование с характеристиками обычного вида (рис. 2а) называется *однополупериодным*.

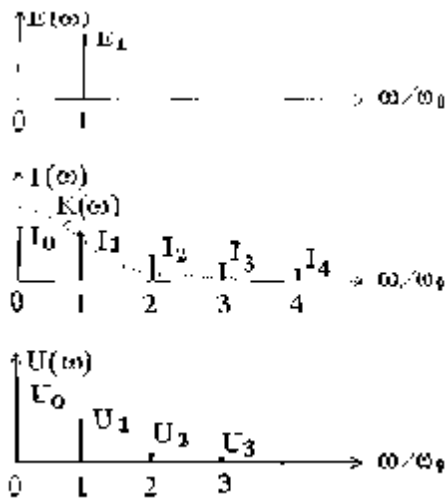


Рис.3

На рис. 3 показано, как преобразуется спектр входного сигнала (2) в процессе его нелинейного преобразования и фильтрации. Если фильтрация не идеальная, что обычно имеет место на практике, то выходное напряжение оказывается не постоянным, а пульсирующим

$$U(t) = U_0 + \Delta U(t).$$

Величина и форма пульсаций  $\Delta U(t)$  обусловлены наличием в спектре выходного сигнала неотфильтрованных гармоник  $U_1, U_2, U_3, \dots$

Важной характеристикой является зависимость выпрямленного тока  $I_0$  от амплитуды входного сигнала  $E_1$ :

$$I_0 = \Phi(E_1) \quad (9)$$

которая называется *детекторной* или *выпрямительной* характеристикой. В зависимости от вида характеристики  $f(E)$ , точнее ее части  $f_{чет}(E)$  функция  $\Phi(E_1)$  может быть либо линейной, либо нелинейной. Как прави-

ло, реальные характеристики  $f(E)$  имеют квадратичный начальный участок, переходящий затем в линейную часть.

При слабых входных сигналах, не выходящих за пределы квадратичного участка, для описания  $f(E)$  в разложении (3) достаточно ограни-

$$f(E) = a_0 + a_1 E + a_2 E^2$$

читься только квадратичным членом:

(10)

Подставляя сюда (2), получим:

$$I(t) = f(E(t)) = a_0 + a_1 E_1 \cos \omega_0 t + a_2 E_1^2 \cos^2 \omega_0 t = I_0 + I_1 \cos \omega_0 t + I_2 \cos 2\omega_0 t,$$

где  $I_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 E_1^2$ ;  $I_1 = a_1 E_1$ ;  $I_2 = \frac{1}{2} a_2 E_1^2$  (11)

В данном случае зависимость  $I_0$  от  $E_1$  получается квадратичной, а отсюда и само детектирование *слабых* сигналов называется **квадратичным**.

В режиме сильных сигналов, далеко выходящих за пределы квадратичного участка, работа происходит в основном на линейной части характеристики  $f(E)$ . Для ее описания допустимо использовать кусочно-линейную аппроксимацию (Рис.4):

$$f(E) = \begin{cases} 0, & E \leq E_{отс} \\ S_0 (E - E_{отс}), & E \geq E_{отс} \end{cases} \quad (12)$$

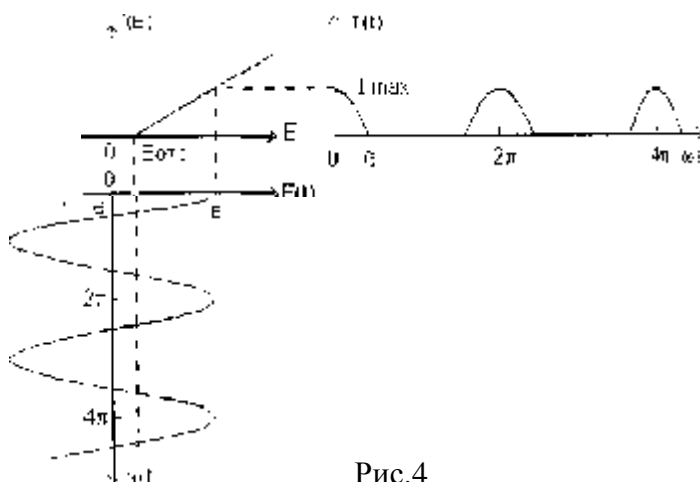


Рис.4

Здесь  $S_0$  - крутизна линейной части характеристики. В этом случае анализ можно вести, пользуясь методом угла отсечки  $\theta$ , выражая гармоники тока через коэффициенты Берга  $a_k(\theta)$ :

$$I_k = I_{\max} \alpha_k(\theta), \quad (13)$$

где

$$I_{\max} = S_0 E_1 (1 - \cos \theta). \quad (14)$$



Используя известные формулы для  $a_0(\theta), a_1(\theta), a_2(\theta)$ , запишем выражения для гармоник тока  $I_0, I_1, I_2$ :

$$I_0 = S_0 E_1 (\sin \theta - \theta \cos \theta) / \pi. \quad (15)$$

$$I_1 = S_0 E_1 (\theta - \sin \theta \cos \theta) / \pi, \quad (16)$$

$$I_2(\theta) = \frac{2}{5} S_0 E_1 \sin^3 \theta / \pi. \quad (17)$$

Как видно из (15), зависимость  $I_0$  от  $E_1$  получается линейной, почему и называют детектирование *сильных* сигналов *линейным детектированием*. Заметим, что понятия "слабый" или "сильный" сигнал являются относительными, поскольку связаны с видом характеристики  $I_{ex}/E_1$ . Кроме того, не должен вводить в заблуждение термин "линейное детектирование", который относится исключительно к виду детекторной характеристики (9), но не к самому процессу детектирования, который по сути является процессом нелинейным.

Важным параметром, определяющим нагрузку детектора на предыдущие каскады, является его активное входное сопротивление  $R_{ex}$ , выражаемое через энергию, потребляемую на входе детектора

$$W = \frac{1}{2} \frac{E_1^2}{R_{ex}} = \int_0^{T_0} E(t) I_{ex}(t) dt. \quad (18)$$

Ток на входе детектора  $I_{ex}(t)$ , вообще говоря, не гармонический, поэтому его нужно представить рядом Фурье

$$I_{ex}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{ex,k} \cos(k \omega_0 t + \psi_k).$$

Тогда с учетом (2)

$$W = \int_0^{T_0} E(t) I_{ex}(t) dt = \frac{1}{2} E_1 I_{ex,1} \cos \psi_1,$$

и из (18) получаем

$$R_{ex} = \frac{E_1}{I_{ex,1} \cos \psi_1}. \quad (19)$$

Таким образом, для определения  $R_{ex}$  нужно знать первую гармонику входного тока и ее фазу  $\psi_1$

### 5.2.1 Однополупериодное (ОПП) выпрямление

Простейшим видом детектора-выпрямителя является ОПП диодный детектор, показанный на Рис.5, именуемый далее, как Схема 1.

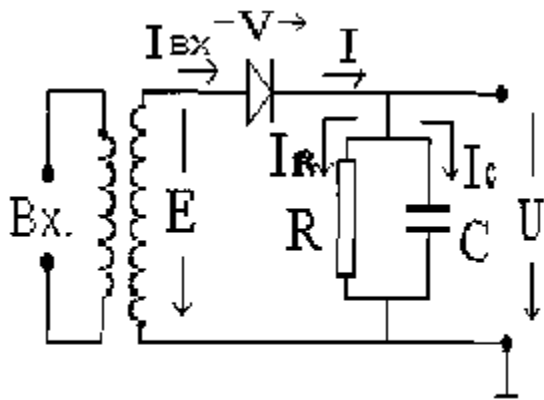


Рис. 5. Схема 1.

Входной трансформатор для простоты считаем идеальным. Цепь RC играет роль нагрузки и ФНЧ. Особенностью схемы является то, что к диоду приложено не все напряжение, а лишь его часть  $V = E - U$ , т.е. имеется 100 % отрицательная обратная связь, что приводит к существенной линеаризации характеристики диода.

Выведем дифференциальное уравнение, описывающее работу Схемы 1. Учтем, что токи через диод, емкость и резистор соответственно равны:

$$I = f(V) = f(E - U); \quad I_C = C \frac{dU}{dt}; \quad I_R = \frac{U}{R}.$$

Тогда из уравнения баланса токов  $I = I_C + I_R$  получаем уравнение для  $U$

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau} U - \frac{R}{\tau} f(E - U) = 0, \quad (20)$$

где  $\tau = RC$  - постоянная времени цепи нагрузки.

Решение этого уравнения можно проводить разными способами. В программе к данной лабораторной работе использован пошаговый метод Рунге-Кутты 4 порядка.

Проведем качественный анализ физических процессов, происходящих при работе схемы, иллюстрируемый Рис. 6.

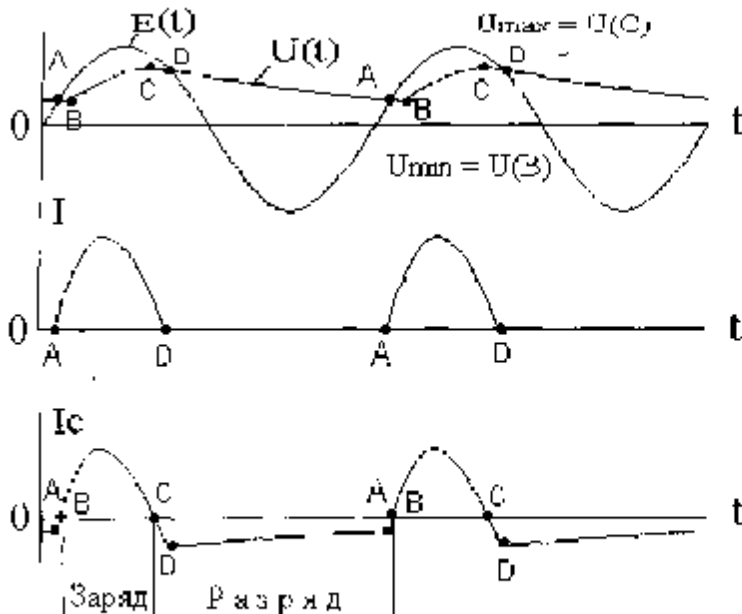


Рис.6

Сделаем два очевидных утверждения:

■ Выходное напряжение  $U(t)$ , не отрицательно, в силу чего также не отрицателен ток через резистор

$$I_R = \frac{U}{R}.$$

■ Диод остается открытым, и через него протекает ток  $I > 0$ , пока приложенное к диоду напряжение  $V = E - U$  будет положительным (интервал от А до D на Рис. 6.)

Рассуждаем далее. В течение интервала времени от D до A диод закрыт, и ток через него не течет, т.е.  $I = I_C + I_R = 0$ . Отсюда следует, что в это время емкость разряжается, т.к.

$$I_C = -I_R < 0.$$

Поскольку  $I_C = C \frac{dU}{dt}$ , то ясно, что здесь и  $\frac{dU}{dt} < 0$ , т.е. напряжение уменьшается. Установив, что на интервале D-A идет разряд емкости, мы должны сделать вывод, что заряд емкости и рост напряжения должны происходить где-то *внутри* интервала A-D, между некоторыми точками B и C, в которых  $I_C = 0$ ,  $\frac{dU}{dt} = 0$ , и происходит переход от разряда емкости к ее заряду, и наоборот. В начале цикла заряда ток  $I_C$  растет, т.к. увеличивается приложенное к диоду напряжение  $V$ , и растет ток через диод  $I$ . Однако, по мере роста  $U$  и приближения его к некоторому максимальному значению происходит сперва уменьшение  $I_C$ , а затем начинается разряд емкости, который на интервале C-D идет через открытый диод и резистор R, а после того, как диод закрывается, на интервале D-A только через R. После точки A диод снова открывается, скорость разряда емкости резко возрастает, и в точке B, когда  $U$  достигает некоторого минимума, снова начинается заряд емкости. Затем циклы заряда и разряда повторяются. Выходное напряжение  $U(t)$  изменяется по закону близкому к пилообразному. Величина пульсаций зависит от постоянной времени  $\tau = RC$ . Чем она больше, тем медленнее заряд и разряд емкости, меньше успевает измениться  $U(t)$ , меньше пульсации. Напряжение близкое к постоянному  $U(t) \approx U_0$  получается, если

$$RC \gg T_0 \quad .(21)$$

Для установления количественных соотношений при выпрямлении будем считать, что (21) выполняется (напряжение  $U(t) \approx U_0$ ), и характеристику  $I=f(V)$  допустимо аппроксимировать отрезками прямых (Рис .7). Тогда можно использовать метод угла отсечки.

Напряжение  $U_0$ , определяемое через нулевую гармонику выпрямленного тока, равно

$$U_0 = I_0 R, \quad (22)$$

откуда согласно (15) находим

$$U_0 = E_1 S_0 R (\sin \theta - \theta \cos \theta) / \pi. \quad (23)$$

С другой стороны из Рис. 7 видно, что

$$U_0 = E_1 \cos \theta. \quad (24)$$

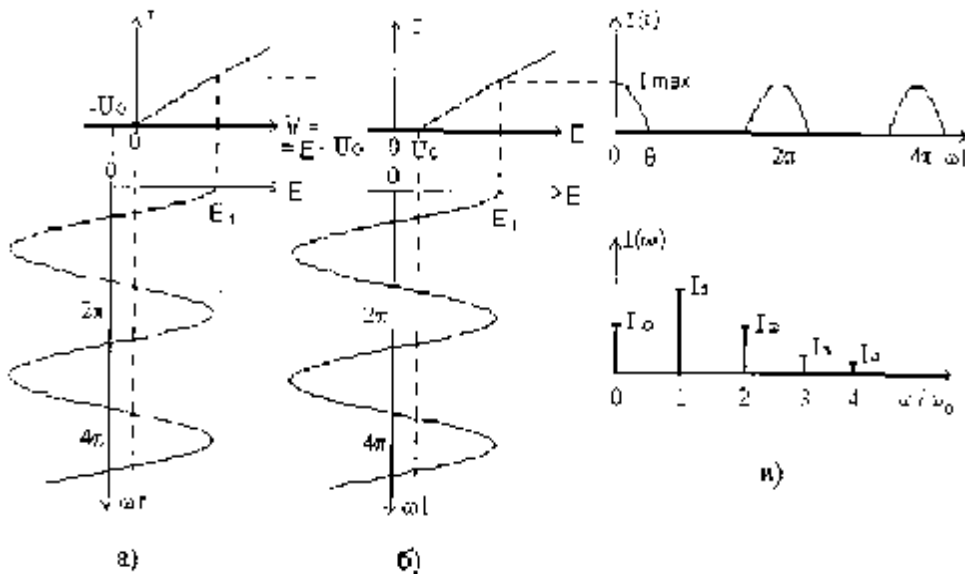


Рис.7. Варианты а) и б) построений в методе угла отсечки

Подставляя (24) в (23) и используя вместо крутизны характеристики  $S_0$  внутреннее сопротивление диода

$$R_i = I/S_0,$$

получим связь между углом отсечки, сопротивлением нагрузки  $R$  и сопротивлением  $R_i$ .

$$\frac{R}{R_i} = \frac{\pi}{\text{tg}\theta - \theta} \quad (25)$$

Совместное использование (24) и (25) позволяет построить графики зависимости угла отсечки и выпрямленного напряжения  $U_0$  от сопротивления нагрузки (Рис. 8).

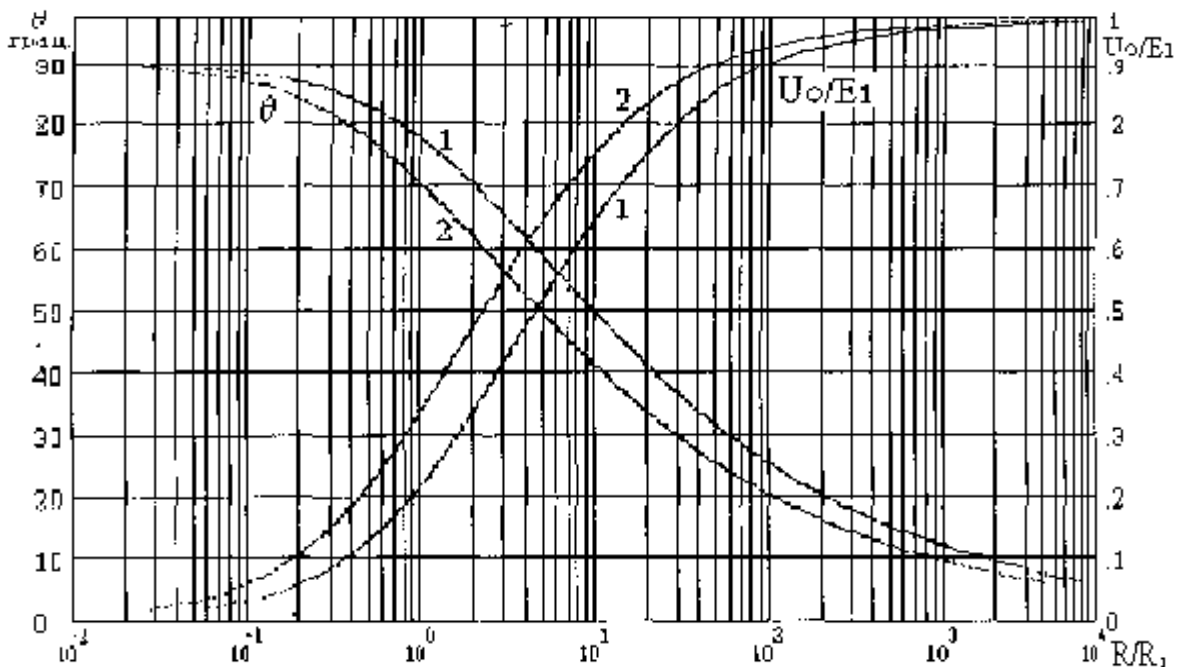


Рис.8 . Выпрямленное напряжение и углы отсечки однополупериодного (1 и двухполупериодного (2).линейного выпрямителя.

$E_1$  при  $R/R_i \rightarrow \infty$ . Это значит, что лишь при очень малом потреблении нагрузкой тока (большие  $R$ ) можно получить  $U_o$  близкие к  $E_1$ .

Входное сопротивление детектора найдем по формуле (19). В данном случае ток на входе  $I_{вх}$  совпадает с выпрямленным током  $I$ , т.е.  $I_{вх,1} = I_1$ , а фазовый сдвиг  $\psi_1 = 0$ . Поэтому

$$R_{вх} = E_1 / I_1. \quad (27)$$

С учетом (16) для  $I_1$  получаем

$$R_{вх} = R_i \cdot \frac{\pi}{\theta - \sin\theta \cos\theta}. \quad (28)$$

Так как угол отсечки зависит от  $R/R_i$ , то, пользуясь (28) и (25), можно установить показанную на Рис.9 связь между  $R_{вх}/R_i$  и  $R/R_i$

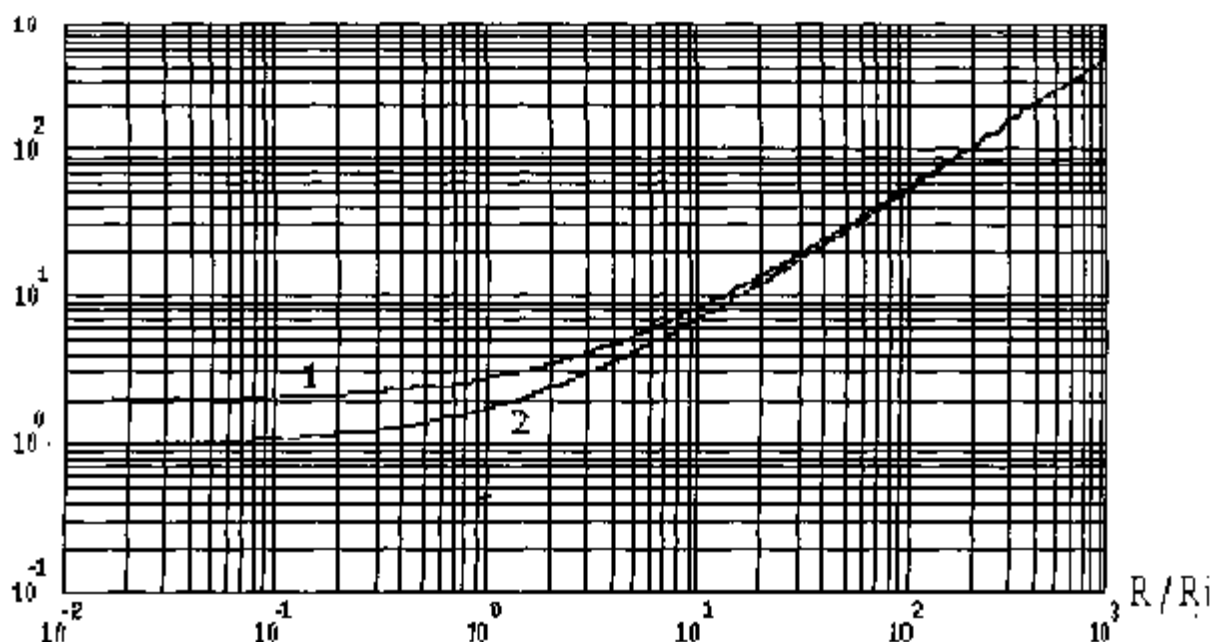


Рис. 9. Входное сопротивление нополупериодного (1) и двухполупериодного (2) линейного детектора.

При малых  $R/R_i$  (малые выпрямленные напряжения  $U_o$ )

$$R_{вх} \approx 2 R_i, \quad (29)$$

При больших  $R/R_i$  (большие выпрямленные напряжения  $U_o$ )

$$R_{вх} \approx 0.5 R. \quad (30)$$

Избирательные свойства цепи RC определяются ее коэффициентом передачи

$$K(j\omega) = \frac{R}{1 + j\omega\tau} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (31)$$

где

$$K(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega\tau. \quad (32)$$

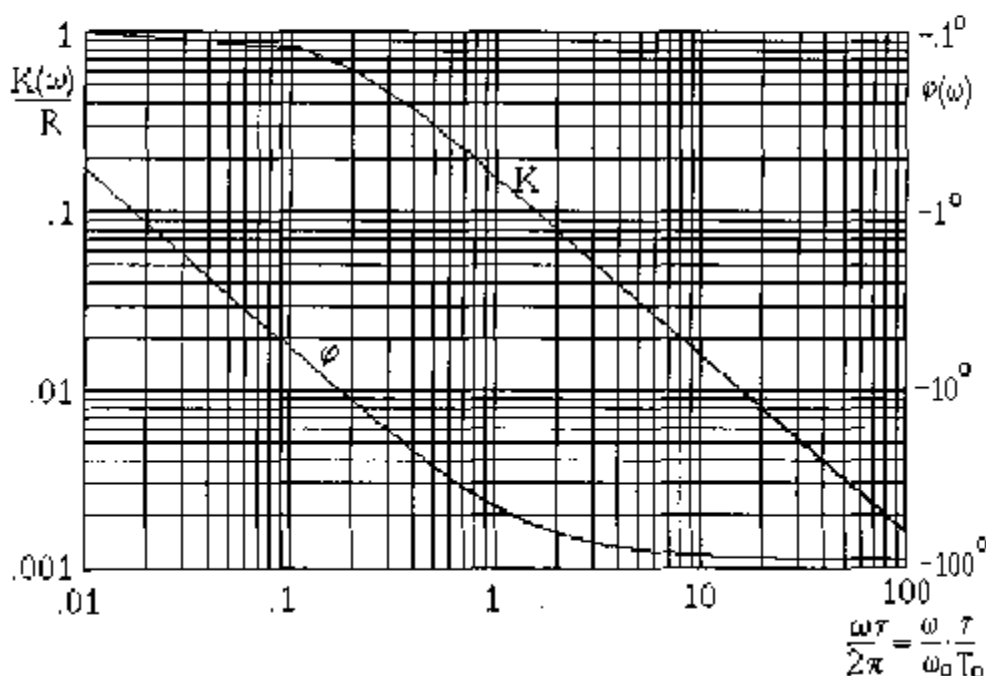


Рис. 10. АЧХ и ФЧХ фильтра RC.

График на Рис. 10 дает возможность определить степень подавления гармоник при фильтрации. Например, для первой гармоники ( $\omega / \omega_0 = 1$ ) при  $\tau / T_0 = 10$  ослабление будет равно  $\approx 0.16$ .

Оценим пульсации выпрямленного напряжения  $U(t)$ , обусловленные неидеальной фильтрацией. Назовем коэффициентом пульсаций величину

$$\xi = \frac{\Delta U}{U_{\text{сред}}} = \frac{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} + U_{\text{min}}}. \quad (33)$$

Если пульсации невелики, то можно считать, что основной вклад принадлежит первой гармонике. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{2}(U_{\text{max}} - U_{\text{min}}) \approx U_1 = I_1 K(\omega_0), \\ U_{\text{сред}} &= \frac{1}{2}(U_{\text{max}} + U_{\text{min}}) \approx U_0 = I_0 R, \end{aligned} \quad (34)$$

и

$$\xi \approx \frac{U_1}{U_0} = \frac{I_1 K(\omega_0)}{I_0 R} = \xi_1(\theta) \frac{K(\omega_0)}{R}. \quad (35)$$

где

$$\xi_1(\theta) = \frac{I_1}{I_0} = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\theta - \sin \theta \cos \theta}. \quad (36)$$

Величина  $\xi_1(\theta)$  с ростом  $\theta$  убывает в пределах от  $\xi_1(\theta = 0) = 2$  до  $\xi_1(\theta = 90^\circ) = \pi / 2$ . Таким образом,

$$\left( \begin{array}{l} \text{Большие } \theta, \\ \text{Малые } \frac{U_0}{E_1}, \frac{R}{R_1} \end{array} \right) 157 \frac{K(\omega_0)}{R} \leq \xi \leq 2 \frac{K(\omega_0)}{R} \left( \begin{array}{l} \text{Малые } \theta, \\ \text{Большие } \frac{U_0}{E_1}, \frac{R}{R_1} \end{array} \right) \quad (37)$$

### 5.2.2. Двухполупериодное (ДПП) выпрямление

Как отмечалось, Двухполупериодное выпрямление - детектирование предпочтительнее вследствие того, что выпрямленный ток содержит только четные гармоники, и потому облегчается проблема фильтрации. ДПП выпрямители строятся по балансным или мостовым схемам. Схема с балансным трансформатором, именуемая в дальнейшем Схемой 2, изображена на Рис. 11. Трансформатор считаем идеальным,

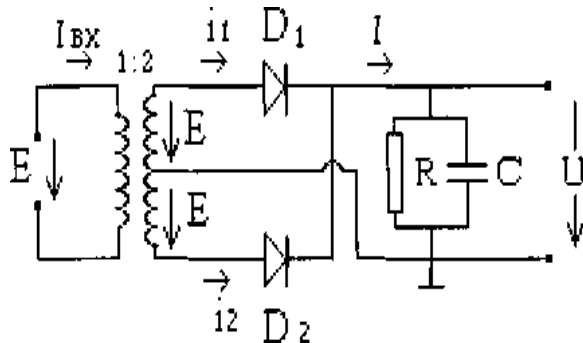


Рис.11. Схема 2

а напряжения на плечах вторичной обмотки одинаковыми и равными входному. Плечи схемы работают поочередно: в положительный полупериод плечо 1, в отрицательный - плечо 2, как показано на Рис. 12.

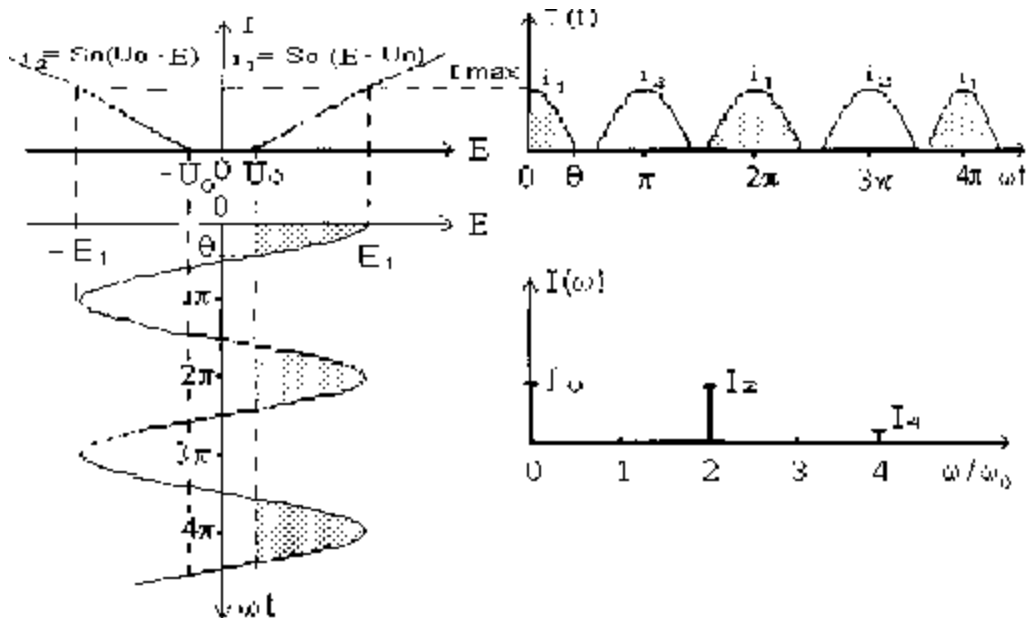


Рис. 12. Выпрямление в двухполупериодной Схеме 2.

Нетрудно видеть, что те же самые результаты можно получить, если на вход ОПП Схемы 1 (Рис.5) подать однополярный сигнал

$$E(t) = E_1 |\cos \omega_0 t| . \quad (38)$$

Работу такой схемы иллюстрирует Рис.13.

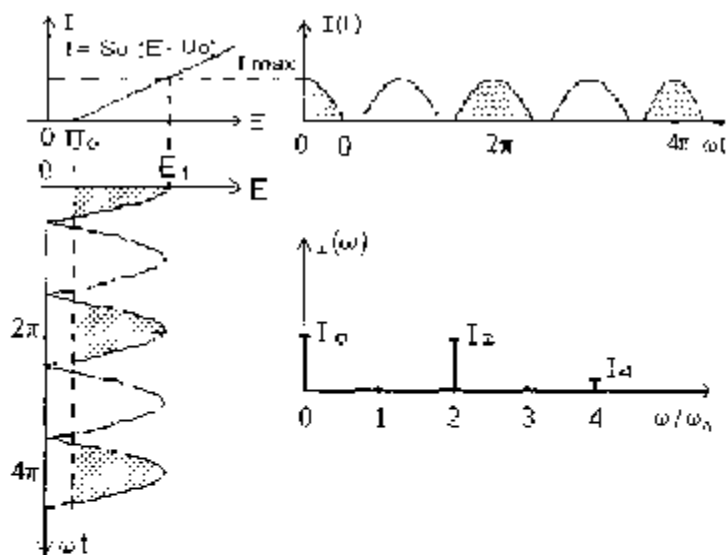


Рис. 13

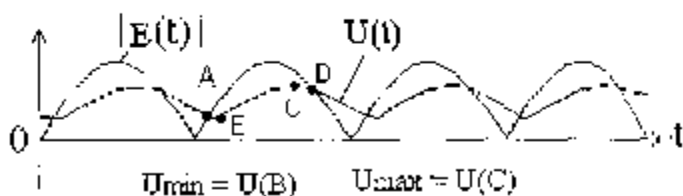


Рис. 14

Эта эквивалентная замена удобна при проведении расчетов, т.к. удастся сохранить без изменения дифференциальное уравнение (18) и алгоритм его решения, что и было использовано в программе к данной лабораторной работе.

Форма выходного напряжения  $U(t)$  показана на Рис.14. Диоды остаются открытыми пока входное напряжение превышает выходное  $U(t)$  (интервал AD). На интервале BC происходит заряд емкости, подобно тому, как было в ОПП Схеме 1. Пульсации выходного напряжения

здесь получаются меньше, т.к. сокращается время разряда, и за счет этого увеличивается  $U_{min}$ , а также-улучшаются условия фильтрации, т.к. в спектре выпрямленного тока отсутствует первая гармоника.

Покажем, что при ДПП выпрямленный ток  $I$  содержит только четные гармоники, амплитуды которых вдвое больше, чем при ОПП выпрямлении. Импульсы тока  $i_2(t)$  (см.Рис.12) те же, что  $i_1(t)$ , но сдвинуты на полпериода, т.е.

$$i_2(t) = i_1(t - T_0 / 2) . \quad (39)$$

По спектральной теореме запаздывания спектр  $i_2(\omega)$  можно выразить через спектр  $i_1(\omega)$

$$i_2(\omega) = e^{-j\omega T_0 / 2} i_1(\omega) . \quad (40)$$

Функции  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  периодические, поэтому их спектральные компоненты располагаются только на дискретных частотах  $n\omega_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) .

Подставим  $\omega = n\omega_0$  в (40) :



$$i_2(n\omega_0) = e^{-jn\omega_0 T_0/2} i_1(n\omega_0) = e^{-jn\pi} i_1(n\omega_0) . \quad (41)$$

Полный ток  $I(t) = i_1(t) + i_2(t)$ , а его спектр

$$\begin{aligned} I(\omega) &= i_1(\omega) + i_2(\omega) = i_1(n\omega_0)(1 + e^{-jn\pi}) = \\ &= \begin{cases} 2 i_1(n\omega_0), & n = 0, 2, 4, \dots \\ 0, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

Четные гармоники удвоились, а нечетные исчезли. Теперь постоянная составляющая тока по сравнению с (23) будет в два раза больше:

$$U_0 = 2E_1 S_0 R (\sin\theta - \theta \cos\theta) / \pi, \quad (43)$$

и формула (25), связывающая угол отсечки с сопротивлением нагрузки  $R$ , принимает вид

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{(\theta \cos\theta - \sin\theta)}. \quad (44)$$

Постоянная составляющая выпрямленного напряжения в Схеме 2 (см. Рис.12 и 13), как и для Схемы 1 равна

$$U_0 = E_1 \cos\theta .$$

Зависимости  $q$  и  $U_0$  от  $R/R_0$  показаны на Рис.8 (кривые 2). По сравнению с соответствующими кривыми для ОПП Схемы 1 они сдвинуты в область вдвое меньших  $R/R_0$ . Это значит, что одно и то же  $U_0$  теперь можно получить при меньших сопротивлениях нагрузки, т.е. схема 2 обладает большей токоотдачей.

Чтобы найти входное сопротивление, согласно (19) нужно знать первую гармонику входного тока. По сравнению ОПП спектр тока  $i_{ex}$  изменяется: в нем исчезают четные гармоники, а нечетные удваиваются (при

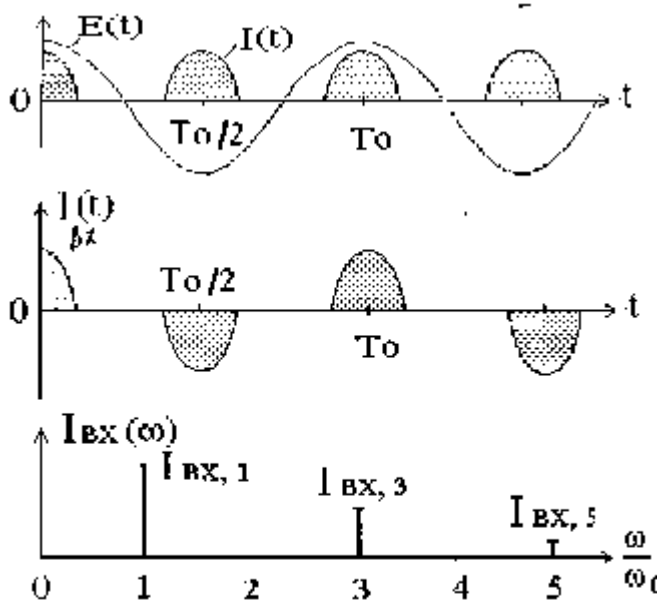


Рис. 15

одинаковых  $q$ ). Это утверждение, иллюстрируемое Рис.15, предлагается доказать самостоятельно.

В формуле (28) теперь появляется коэффициент 1/2, т.е. при одинаковых  $\theta$   $R_{ex}$  уменьшается вдвое:

$$R_{ex} = \frac{1}{2} R_0 \frac{\pi}{\theta - \sin\theta \cos\theta}. \quad (45)$$

Однако, при определении зависимости  $R_{ex}$  от  $R$ , то нужно учесть, что одинаковые  $q$  теперь получаются при вдвое меньших  $R$ , и поэтому кривая зависимо-

сти  $R_{ex}$  от  $R$  не только опускается вниз, но и сдвигается влево, принимая положение 2 на Рис.9. При больших  $R/R_i$  (большие  $U_0$ ) кривые 1 и 2 практически накладываются, т.е.  $R_{ex}$  оказывается тем же, что для Схемы 1

$$R_{ex} \approx \frac{1}{2} R. \quad (46)$$

При малых,  $R/R_i$  (малые  $U_0$ ) теперь

$$R_{ex} \approx R_i. \quad (47)$$

тогда как в Схеме 1 было  $R_{ex} \approx 2 R_i$ .

Мостиковая Схема 3 (Рис.16) с 4 диодами не имеет балансного трансформатора, и это упрощает ее конструкцию, однако токоотдача у нее

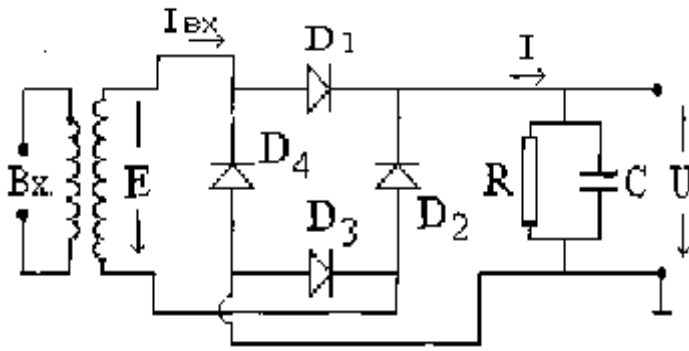


Схема 3

меньше, чем у схемы 2. В положительные полупериоды входного напряжения ток протекает через диод  $D_1$ , цепь нагрузки RC и диод  $D_3$ . Последовательно включенные диоды  $D_1$  и  $D_3$  ведут себя, как один эквивалентный диод с удвоенным внутренним сопротивлением, т.е. вдвое меньшей крутизной.

Рис. 16

Аналогичная ситуация имеет место с диодами  $D_2, D_4$  в отрицательные полупериоды  $E(t)$ . Рис. 12,13,14 сохраняют силу, при условии замены крутизны  $S_0$  на  $S=S_0/2$ , и поэтому амплитуды гармоник токов  $I(t)$  и  $I_{ex}(t)$  остаются теми же, что были в ОПП Схеме!, а это значит одинаковыми остаются  $U_0$  и  $R_{ex}$ . Следовательно, для Схемы 3 годятся кривые 1 на Рис.8 и 9.

Пulsации при ДПП выпрямлении в основном определяются второй гармоникой напряжения  $U(t)$ , поэтому

$$\xi = \frac{\Delta U}{U_0} \approx \frac{U_2}{U_0} = \frac{I_2(\theta) K(2\omega_0)}{I_0(\theta) R} = \xi_2(\theta) \frac{K(2\omega_0)}{R}, \quad (48)$$

где 
$$\xi_2(\theta) = \frac{I_2(\theta)}{I_0(\theta)} = \frac{2}{3} \frac{\sin^3 \vartheta}{\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta}$$

С учетом выражений (15) и (17) для  $I_0$  и  $I_2$  устанавливаем пределы изменения  $\xi_2(\theta)$ :

$$\xi_2(\theta \approx 0) = 2 \quad \xi_2(\theta \approx 90^\circ) = 2/3.$$

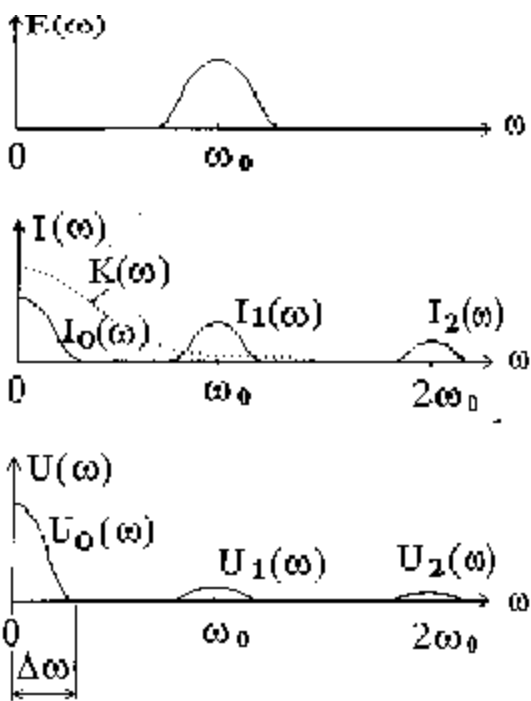
Таким образом

$$\left( \begin{array}{l} \text{Большие } \theta, \\ \text{Малые } \frac{U_0}{E_1}, \frac{R}{R_1} \end{array} \right) \frac{2}{3} \frac{K(2\omega_0)}{R} \leq \xi \leq 2 \frac{K(2\omega_0)}{R} \left( \begin{array}{l} \text{Малые } \theta, \\ \text{Большие } \frac{U_0}{E_1}, \frac{R}{R_1} \end{array} \right) \quad (49)$$

При той же постоянной времени  $m = RC$  коэффициент пульсаций здесь получается заметно меньше, в ОПП Схеме 1.

### 5.3. Детектирование

АМ детектирование можно рассматривать, как выпрямление ВЧ сигнала  $E(t) = E_1(t) \cos \omega_0 t$  с медленно изменяющейся амплитудой  $E_1(t)$ . При этом амплитуды гармоник выпрямленного тока  $I(t)$  становятся функциями времени  $I_0(t), I_1(t), I_2(t), \dots$  изменяющимися в такт с  $E_1(t)$ . Со спектральных позиций это соответствует тому, что спектральные компоненты на частотах  $n\omega_0$  теперь превращаются в спектральные полосы  $I_0(\omega), I_1(\omega), I_2(\omega)$  с дискретным или сплошным заполнением в зависимости от того является  $E_1(t)$  периодической или непериодической функцией (Рис. 17).



Задача заключается в том, чтобы выделить составляющие спектра

$$U_0(\omega) = I_0(\omega) K(\omega), \quad (50)$$

содержащие информацию о сигнале модуляции  $E_1(t)$ . В отличие от выпрямления, когда выделяется только одна постоянная составляющая (нулевая частота), теперь нужно выделить целую полосу  $\Delta\omega$ , подавив все высокочастотные компоненты. В идеальном случае ФНЧ должен был бы иметь прямоугольную форму АЧХ шириной  $\Delta\omega$ , однако реальные ФНЧ и, в частности, RC-фильтр такой характеристикой не обладают, поэтому для удовлетворительного выделения  $U_0(\omega)$  приходится делать  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ , т. е. использовать

Рис. 17

узкополосные сигналы и накладывать следующие ограничения на постоянную времени  $\tau = RC$ :

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll \tau \ll \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (51)$$

-Рассмотрим детектирование тонально-модулированного сигнала  

$$E(t) = E_1(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad (52)$$

для которого

$$E_1(t) = E_1(1 + m \cos \Omega t). \quad (53)$$

Вид и спектры  $E_1(t)$  и  $E(t)$  показаны на рис. 18.

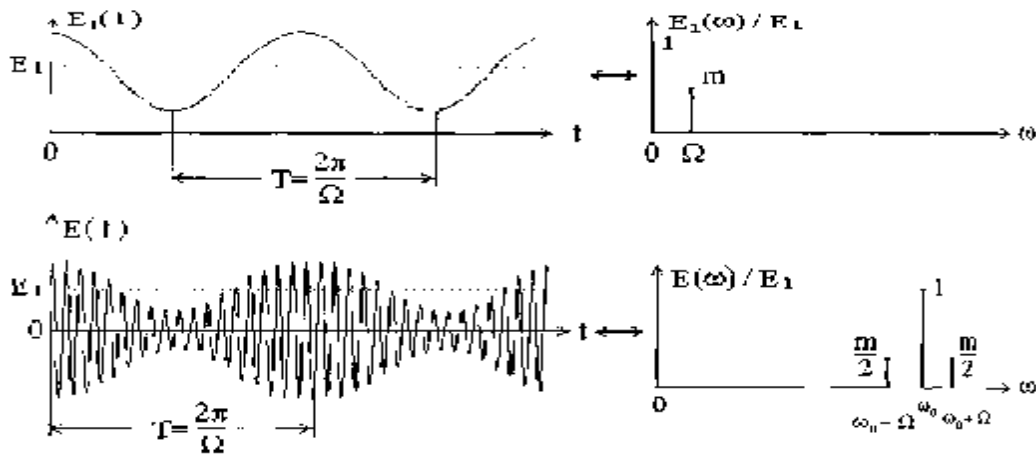


Рис. 18

Процесс детектирования происходит подобно тому, как показано на Рис.6. Условия (51) теперь можно записать в виде

$$T_0 \ll \tau \ll T. \quad (54)$$

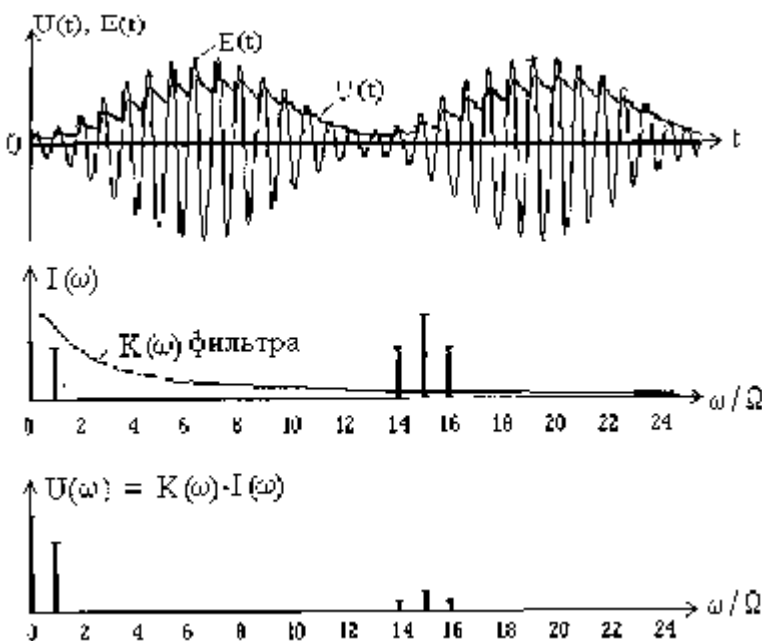
Если они выполняются, то низкочастотная составляющая, выпрямленного напряжения  $u_0(t)$  (?) будет изменяться по закону

$$U_0(t) = I_0(t) K(\Omega), \quad (55)$$

то есть, определяется видом детекторной характеристики (9)

$$I_0(t) = \Phi(E_1(t)).$$

Если эта характеристика линейная (режим сильных сигналов), то напря-



жение  $U_0(t)$  воспроизводит форму  $E(t)$ , и детектирование происходит без искажений (Рис.19). Небольшие пульсации пилообразной формы, обусловленные не полностью отфильтрованными ВЧ гармониками, обычно не оказывают влияния на воспроизведение протектированного сигнала, так как сильно различаются по частоте ( $\Omega \ll \omega_0$ ).

Рис. 19

В большей или меньшей степени детектирование всегда сопровождается нелинейными искажениями, причиной которых могут быть нелинейность детекторной характеристики (9) и невыполнения условий (51). В режиме детектирования слабых сигналов, когда ВАХ можно считать квадратичной, согласно (11)

$$I_0(t) = a_0 + \frac{1}{2} a_2 E_1(t)^2 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 E_1^2 (1 + m \cos \Omega t)^2 = I_0 + I_\Omega \cos \Omega t + I_{2\Omega} \cos 2\Omega t, \quad (56)$$

где 
$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 E_1^2 \left(1 + \frac{m^2}{2}\right),$$

$$I_\Omega = a_2 m E_1^2,$$

$$I_{2\Omega}(t) = \frac{1}{4} a_2 E_1^2 m^2.$$

Соответственно

$$U_0(t) = U_0 + U_\Omega \cos(\Omega t + \varphi(\Omega)) + U_{2\Omega} \cos(2\Omega t + \varphi(2\Omega)), \quad (57)$$

где 
$$U_0 = I_0 K(0) = I_0 R,$$
  

$$U_\Omega = I_\Omega K(\Omega),$$
  

$$U_{2\Omega} = I_{2\Omega} K(2\Omega).$$

Первое слагаемое в (57) - это постоянное напряжение  $U_0$ . Оно информации не несет и обычно отфильтровывается последующими каскадами. Второе слагаемое - полезный ИЧ сигнал с частотой  $\Omega$ . Третье слагаемое - паразитный НЧ сигнал с частотой  $2\Omega$ , который и вызывает нелинейные искажения. Степень нелинейных искажений оценивается коэффициентом

$$\eta = \frac{\sqrt{U_{2\Omega}^2 + U_{3\Omega}^2 + \dots}}{U_\Omega} \approx \frac{U_{2\Omega}}{U_\Omega} = \frac{I_{2\Omega}}{I_\Omega} \frac{K(2\Omega)}{K(\Omega)} = \eta_1 \frac{K(2\Omega)}{K(\Omega)}, \quad (58)$$

где 
$$\eta_1 = \frac{I_{2\Omega}}{I_\Omega} = \frac{m}{4}, \quad (59)$$

При большой глубине модуляции ( $m \approx 1$ )  $\eta$  достигает почти 25%. Это очень большая величина. Для снижения  $\eta$  нужно либо уменьшать глубину модуляции (что не выгодно энергетически), либо переходить к линейному детектированию в режиме сильных сигналов.

Другой причиной появления нелинейных искажений является излишне большая постоянная времени  $\tau = RC$  (не выполняется правая часть (54)), когда

разряд конденсатора  $C$  происходит слишком медленно, и выходное напряжение не успевает следовать за огибающей ВЧ сигнала  $E(t)$  (Рис. 20).

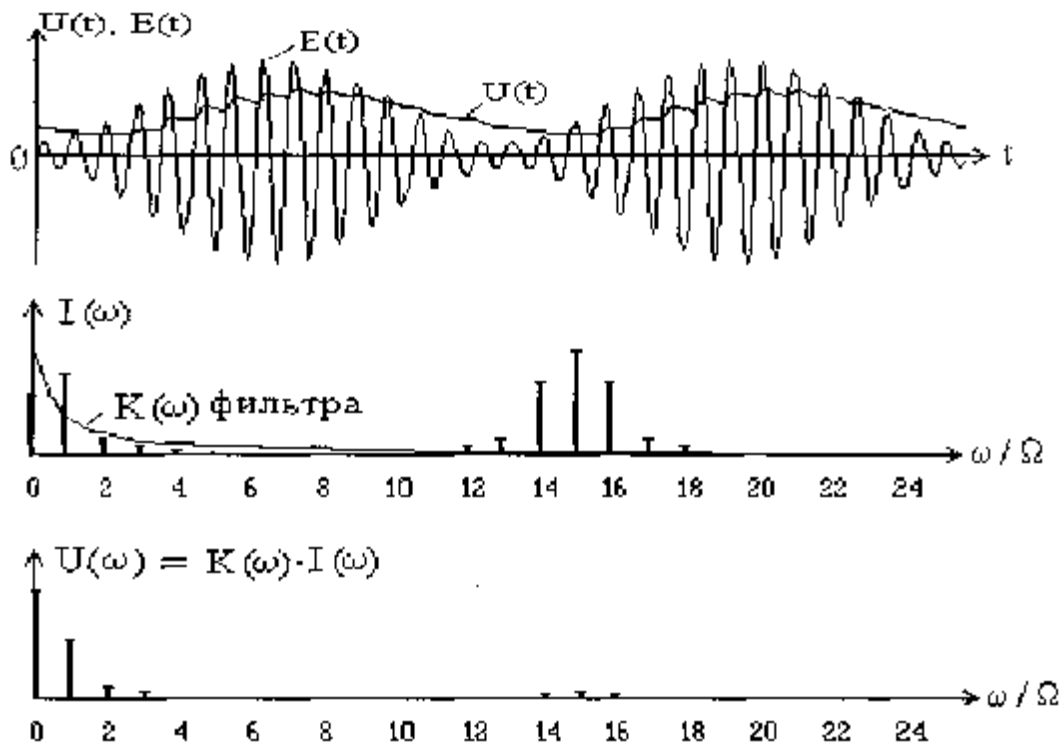


Рис. 20

В этом случае в спектре  $I_0(t)$  и  $U_0(t)$  также появляются гармоники с частотами  $2\Omega, 3\Omega, \dots$  и режим детектирования начинает напоминать режим выпрямления.

Кроме отмеченных нелинейных искажений при детектировании сигналов со сложным законом модуляции и спектром достаточной ширины  $\Delta\omega$  возникают еще и линейные искажения, связанные с преобразованием спектра в процессе фильтрации, если **частотная характеристика детектора  $K(j\omega)$**  не имеет идеальной прямоугольной формы с полосой  $\Delta\omega$ . Экспериментально  $K(\omega)$  определяется по изменению амплитуды выходного НЧ сигнала  $U_0$  при изменении частоты модуляции  $\Omega$  входного сигнала  $E(t)$  и при условии, что амплитуда несущей  $E$  и глубина модуляции  $m$  остаются неизменными. Форма частотной характеристики RC-цепи показана на Рис. 10.

## Раздел 6. Исследование колебаний линейных и нелинейных систем методом фазовой плоскости

### 6.1. Теоретические сведения

#### 6.1.1. Элементы фазовой плоскости: интегральные кривые, поле направлений, изоклины, особые точки, предельные циклы

Состояние (фаза) системы с  $n$  степенями свободы описывается заданием  $2n$  переменных, т.е. определяется точкой в  $2n$ -мерном пространстве координат. Это пространство состояний называется *фазовым пространством*. В физике и математике метод фазового пространства является важным инструментом исследования поведения сложных систем. Для систем с одной степенью свободы фазовое пространство вырождается в *фазовую плоскость*, и метод приобретает особую физическую наглядность. По сути метод фазовой плоскости является графоаналитическим методом интегрирования линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка типа

$$d^2x/dt^2 + F(x,y) dx/dt + F(x,y) x = 0, \quad (6.1)$$

где

$$y = dx/dt.$$

Фазовое пространство является пространством переменных  $(x, y)$ . Физический смысл  $x$  и  $y$  определяется природой изучаемого объекта. Так, в механике  $x$  - координата материальной точки, а  $y$  - ее скорость, в электротехнике  $x$  может быть напряжением, током, зарядом, магнитным потоком и т.д.

В каждый данный момент времени состояние системы характеризуется значениями  $x(t)$  и  $y(t)$ , т.е. положением так называемой изображающей точки на фазовой плоскости (рис.6.1).

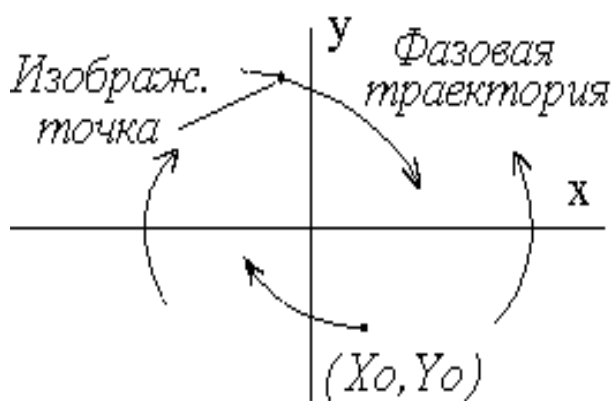


Рис.6.1

С течением времени  $x(t)$  и  $y(t)$  изменяются, и изображающая точка перемещается по фазовой плоскости. Траектория движения изображающей точки называется *фазовой траекторией*. Направление движения по фазовой траектории определяется местоположением точки. Так, в верхней полуплоскости ( $y > 0$ ), где скорость положительна, движение сопровождается увеличением  $x$ , т.е. точка смещается вправо. В нижней полуплоскости ( $y < 0$ ), где скорость отрицательная, смещение происходит

влево. При переходе через ось  $x$  скорость и направление движения меняют знак, поэтому здесь  $dx/dy = 0$ .

Через каждую точку на фазовой плоскости проходит как минимум одна траектория. В зависимости от начальных условий, т.е. от исходного положения  $(X_0, Y_0)$  изображающей точки движение происходит по той фазовой траектории, которая проходит через  $(X_0, Y_0)$ .

Рисунок фазовой плоскости, заполненный фазовыми траекториями, называется *фазовым портретом* системы.

Найдем уравнение фазовой траектории. Для этого уравнение второго порядка (6.1) представим в виде системы из двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} dx/dt = y, \\ dy/dt = -F(x,y) y - F(x,y) x \end{cases} \quad (6.2.)$$

или в более общем виде

$$\begin{cases} dx/dt = P(x,y), \\ dy/dt = Q(x,y). \end{cases}$$

Поделив уравнения друг на друга и исключив тем самым зависимость от времени, получим

$$dy/dx = Q(x,y)/P(x,y), \quad (6.3.)$$

что является уравнением *интегральных кривых*, совпадающих, как правило, с фазовыми траекториями. Встречаются, однако, случаи, когда одной интегральной кривой соответствуют сразу несколько фазовых траекторий.

В отдельных случаях уравнение (6.3.) допускает непосредственное интегрирование, но в большинстве случаев переменные не разделяются, и приходится прибегать к различным обходным приемам, используя численные или графоаналитические методы.



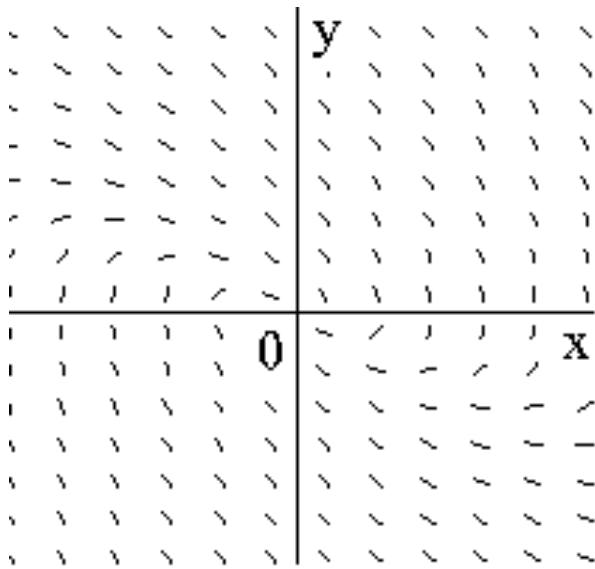


Рис.6. 2

Метод изоклин использует ту же идею, но в отличие от предыдущего метода, где производная  $dy/dx$  определяется в отдельных заданных точках  $(x,y)$ , здесь находят геометрическое место точек (линию) на фазовой плоскости, в которых угол наклона касательных к фазовой траектории один и тот же :

$$dy/dx = k = Const .$$

Для этого задают  $k$  и находят линию, определяемую уравнением

$$k = Q(x,y)/P(x,y) . \quad (6.4.)$$

Такая линия называется *изоклиной* (линией равных наклонов). При различных  $k$  строится семейство изоклин (рис.6. 3), по которым затем можно построить сами фазовые траектории.

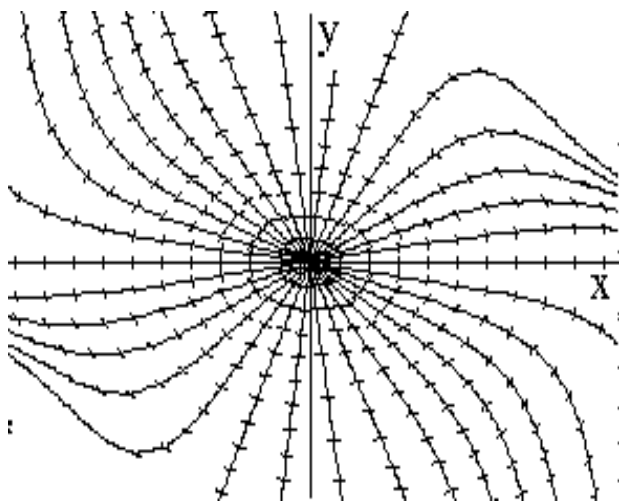


Рис.6.3

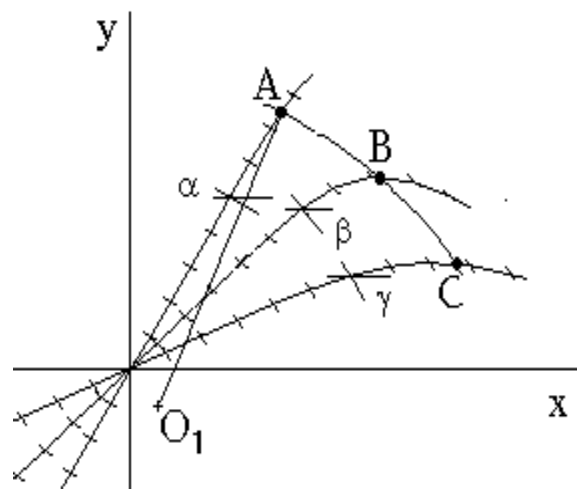


Рис.6. 4

Самый простой метод, дающий возможность, не интегрируя (6.3.), составить представление о фазо-вом портрете - это изобразить на фазовой плоскости *поле направлений* траекторий, т.е. покрыть фазовую плоскость сетью из от-резков векторов, направленных по касательным к фазовым траекто-риям (рис.6. 2) . Аналогично воспроизводят форму силовых линий магнитного поля, помещая туда железные опилки.

Для этого нужно взять две соседние изоклины с углами касательных  $\alpha$  и  $\beta$  и некоторую точку А (рис.б. 4). Через точку А под углом  $(\alpha+\beta)/2$  проводят прямую, которая пересекает другую изоклину в точке В. Далее точки А и В соединяют дугой окружности радиусом  $O_1A$  так, чтобы касательные к дуге в точках А и В совпали с направлением касательных к фазовой траектории. Дугу АВ с некоторым приближением можно принять за отрезок фазовой траектории. Далее от точки В аналогичным способом проводят дугу к соседней изоклине в точку С и т. д. В результате фазовая траектория представляется, как совокупность дуг окружностей разных радиусов.

*Методы численного интегрирования.* С широким внедрением ЭВМ становятся доступны методы численного интегрирования дифференциальных уравнений. Одним из таких методов является метод Рунге-Кутты, суть которого заключается в итерационном пошаговом нахождении приращений переменных  $x$  и  $y$  при заданном малом приращении времени  $\Delta t$ .

Метод прост и удобен. Именно он и использован в программе данной лабораторной работы для построения фазовых траекторий и зависимостей  $x(t)$  и  $y(t)$ .

*Неособые и особые точки.* Если для точки  $(x,y)$  правая часть уравнения (6.3.), т.е.  $Q(x,y)/P(x,y)$ , определяющая угол наклона касательной, есть функция однозначная, то через данную точку под указанным углом проходит только одна фазовая траектория. Такие точки фазовой плоскости называются *неособыми*. Точки, для которых сказанное несправедливо, называются *особыми*. В них  $Q(x,y)/P(x,y)=0/0$ , т.е.  $dx/dt=P(x,y)=0$  и  $dy/dt=Q(x,y)=0$ . Скорость и ускорение здесь равны нулю, значит, точки являются состояниями равновесия. Направление касательной в них неопределено, поэтому через них проходят интегральные кривые под разными наклонами, что физически означает возможность перехода в состояние равновесия и выхода из него разными путями.

Состояния равновесия и соответствующие им особые точки могут быть *устойчивыми и неустойчивыми*. Состояние считается устойчивым, если любые достаточно малые отклонения от него со временем затухают. Состояние неустойчиво, если хотя бы одно из этих отклонений нарастает. Тип особой точки определяют по характеру движения системы в ее окрестности. Классификация типов особых точек будет сделана ниже.

*Предельные циклы.* Важным видом фазовых траекторий являются изолированные замкнутые траектории, не проходящие через особые точки, называемые предельными циклами. Движение по предельному циклу соответствует периодическим (не обязательно гармоническим !) колебаниям, когда

$$x(t) = x(t + T) \text{ и } y(t) = y(t + T), \quad \text{где } T \text{ - период колебаний.}$$

Различают три типа предельных циклов: *устойчивые, неустойчивые и полуустойчивые.*

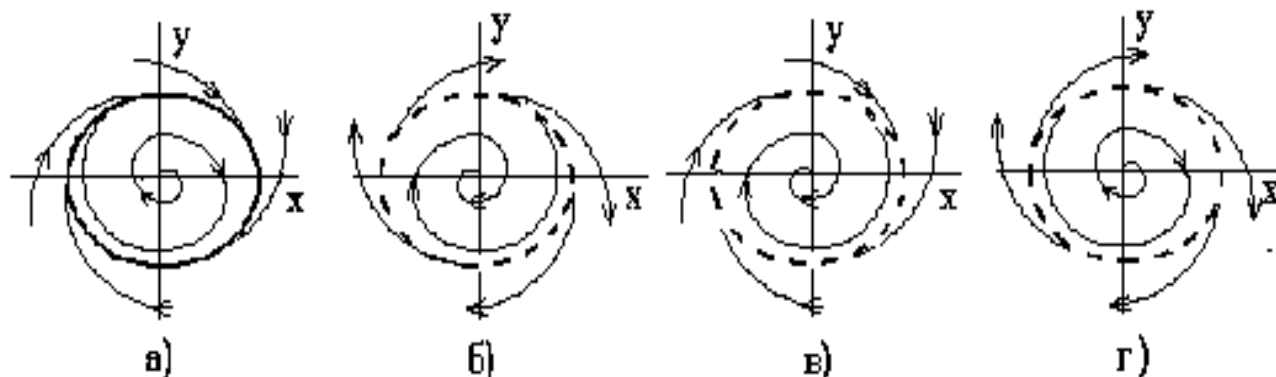


Рис.6. 5

Устойчивым называют предельный цикл (рис.6.5,а), на который "накручиваются" все близлежащие фазовые траектории. Любая изображающая точка, находящаяся вблизи устойчивого цикла, со временем переходит на него.

Неустойчивым называется цикл (рис.6. 5,б), с которого фазовые траектории "скручиваются". Изображающая точка, сошедшая с неустойчивого цикла, удаляется от него.

Полуустойчивыми называются циклы, на которые снаружи траектории накручиваются (или скручиваются) , а изнутри скручиваются (или накручиваются) (рис.6. 5,в и 6.5,г).

На практике движение по неустойчивым и полуустойчивым циклам нереализуемо, т.к. любая флуктуация уводит систему от периодического движения по циклу. Устойчивые циклы физически реализуемы, движению по ним соответствуют периодические колебания, называемые *автоколебаниями*. Их совершают так называемые *автоколебательные системы* (генераторы колебаний).

Познакомимся с фазовой плоскостью и характером движений некоторых линейных и нелинейных систем.

### 6.1.2. Линейный осциллятор

Дифференциальное уравнение свободных колебаний линейной системы с одной степенью свободы имеет вид

$$d^2x/dt^2 + E dx/dt + C x = 0. \quad (6.5.)$$

Такое уравнение описывает электрический колебательный контур, маятник при малых амплитудах колебаний и др. системы. Коэффициенты  $E$  и  $C$  определяют соответственно затухание системы и ее реактивные свойства.

Для линейного осциллятора согласно (6.2.) и (6.3.) уравнением интегральных кривых будет

$$dy/dx = - (Ey + Cx)/y, \quad (6.6.)$$

а уравнением изоклин

$$y = - Cx / (k + E). \quad (6.7.)$$

Как видно, изоклины являются прямыми, проходящими через начало координат, с углом, определяемым коэффициентом  $k$ .

Характер движения системы и типы особых точек зависят от значений коэффициентов  $E$  и  $C$  и их взаимной комбинации, как показано на  $EC$ -плоскости (рис.6. 6) и в табл. 6.1.

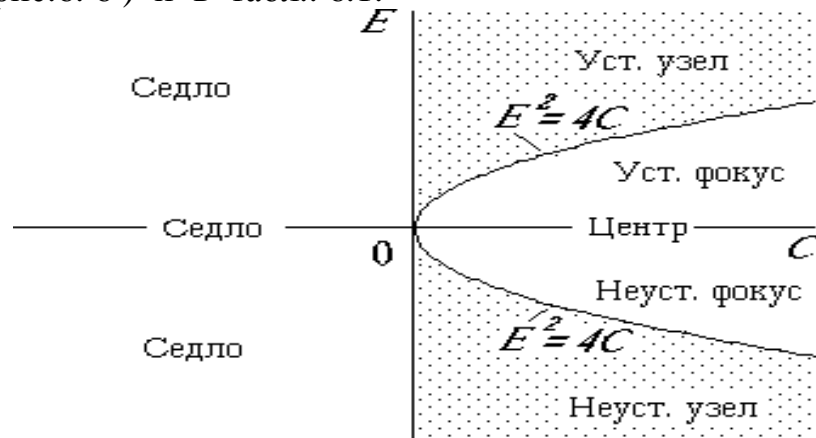


Рис.6. 6

Табл.6.1.

$E = 0$	$ E  <  E_{кр} $	$ E  =  E_{кр} $	$ E  >  E_{кр} $	
				$E > 0$
Центр	Уст. фокус	Устойчивый узел		
				$E < 0$
Центр	Неуст. фокус	Неустойчивый узел		

Рассмотрим случаи, когда  $C > 0$  (правая полуплоскость) на рис.6. 6.

При  $E = 0$  система совершает незатухающие гармонические колебания. Уравнение (6.6.) в данном случае допускает прямое интегрирование и дает

$$C x^2 + y^2 = R^2,$$

где  $R$  - константа интегрирования, физически означающая амплитуду колебаний. Фазовые траектории образуют семейство концентрических эллипсов (при  $C = 1$  - окружностей) с особой точкой типа *центр* в начале координат. За период колебаний изображающая точка делает полный оборот по своему эллипсу, не сходя с него, т.е. совершаются колебания с постоянной амплитудой. Фазовые траектории здесь, хотя и замкнуты, но *не являются циклами*.

При  $|E| < E_{кр}$  движение носит колебательный характер, затухающий или нарастающий в зависимости от знака  $E$ . Фазовые траектории имеют вид скручивающихся или раскручивающихся спиралей с особой точкой типа *устойчивый или неустойчивый фокус* в начале координат.

Значению  $|E| = E_{кр}$  соответствует переходу в область апериодических колебаний. Критерием перехода является тот факт, что среди изоклин появляются такие, которые сами являются интегральными кривыми, т.е. для них совместно выполняются

$$k = y/x \quad \text{и} \quad k = -(Ey + Cx)/y,$$

откуда следует уравнение для  $k$ :

$$k^2 + Ek + C = 0,$$

имеющее решение

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2}E \pm \frac{1}{2}\sqrt{E^2 - 4C}. \quad (6.8)$$

Вещественные значения  $k$  получаются, если величина под корнем положительная, что и определяет

$$E_{кр} = + 2\sqrt{C}. \quad (6.9)$$

Если  $|E| = |E_{кр}|$  (граница раздела апериодической и колебательной областей), то среди интегральных кривых имеется только одна, которая является одновременно и изоклиной:

$$y = kx = -0.5 E_{кр} x = \pm \sqrt{C} x, \quad (+ \text{ для } E < 0, \quad - \text{ для } E > 0).$$

В апериодических областях, где  $|E| > |E_{кр}|$ , таких кривых две:

$$y = k_{1,2} x.$$

В этом вам предстоит убедиться при выполнении работы.

Движение при  $|E| > |E_{кр}|$  носит характер апериодически затухающий или нарастающий. Особая точка называется *узлом*, соответственно устойчивым при  $E > 0$  и неустойчивым при  $E < 0$ .

Вид фазовых траекторий и типы особых точек при  $C > 0$  показаны в табл. 1.

Системы, для которых в уравнении (6.5.) коэффициент  $C < 0$ , обладают упругой отталкивающей силой. На рис.6.6 им соответствует левая полу-

плоскость. Примером такой системы является маятник вблизи верхнего неустойчивого положения равновесия. Начало координат на фазовой плоскости является неустойчивой особой точкой типа *седло*.

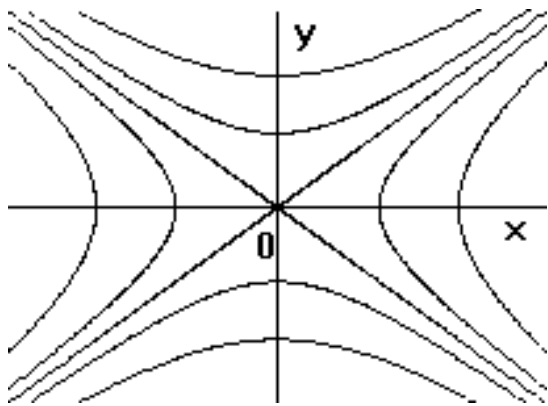


Рис.6. 7

Фазовый портрет показан на рис.6.7.

Из уравнения (6.8) видно, что при  $C < 0$  и любом  $E$  имеются две изоклины - интегральные прямые, проходящие через начало координат. Все другие траектории через начало координат не проходят. Таким образом, единственный путь перехода в состояние равновесия - это движение по данным траекториям. Для достижения равновесия теоретически требуется бесконечное время, т.к. по мере приближения к равнове-

сию скорость стремится к нулю. Практически оказывается, что равновесие недостижимо, т.к. за бесконечное время движения наверняка флуктуации собьют систему с данной траектории на одну из соседних, которая уже не проходит через начало координат и по которой система навсегда уйдет от состояния равновесия.

### 6.1.3. Маятник

Маятник (рис.6.8) обычно рассматривают, как пример линейного осциллятора. Однако это верно лишь при малых амплитудах колебаний. При больших амплитудах маятник ведет себя как типично нелинейная система.

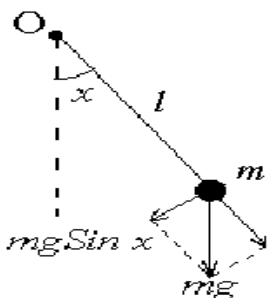


Рис.6. 8

Уравнение движения маятника имеет вид :

$$m d^2 s / dt^2 + h ds / dt + m g \sin x = 0 ,$$

где  $x$  - угловое отклонение от положения равновесия,  $s = l x$  - отклонение по дуге,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $h$  - коэффициент трения,  $l$  - длина .

Переходя к угловой координате, получим

$$d^2 x / dt^2 + E dx / dt + C \sin x = 0 , \quad (6.10)$$

где  $E = h l / m$ ,  $C = g / l$ .

Характерной особенностью маятника является то, что он может совершать вращательные движения, когда физически одному и тому же

отклонению соответствуют координаты  $x = 2\pi n$ , где  $n = 0, +1, +2, \dots$ . Благодаря этому фазовым пространством маятника является цилиндрическая поверхность. Удобнее, однако, использовать развертку цилиндра, т.е. перейти на плоскость.

Маятник имеет два положения равновесия: нижнее - устойчивое ( $x = 0, +2\pi, +4\pi, \dots$ ), верхнее - неустойчивое ( $x = +\pi, +3\pi, \dots$ ). При малых отклонениях от устойчивого равновесия, когда  $x \gg \sin x$ , уравнение (6.10) переходит в уравнение линейного осциллятора (6.5.), поэтому точкам ( $x = 2\pi n, y = 0$ ) на фазовой плоскости маятника будут соответствовать особые точки типа центр, фокус или узел в зависимости от затухания  $E$  (рис.6. 9 и 10).

Если перенести начало отсчета по  $x$  в верхнее положение неустойчивого равновесия, т.е. перейти к координате  $x_\pi = x + (6.2.n+1)\pi$ , то уравнение (6.10) переходит в

$$d^2x_\pi/dt^2 + E dx_\pi/dt - C \sin x_\pi = 0. \quad (6.11)$$

При малых отклонениях  $\sin x_\pi \gg x_\pi$ , отсюда получаем уравнение линейного осциллятора с отталкивающей силой

$$d^2x_\pi/dt^2 + E dx_\pi/dt - C x_\pi = 0,$$

для которого, как было показано выше, особой точкой является седло. Таким образом, устойчивые и неустойчивые особые точки на оси  $x$  чередуются. Изоклины для маятника на основании (6.3.) представляют семейство синусоид:

$$y = - \frac{C}{k + E} \sin x. \quad (6.12)$$

Проведенный анализ позволяет представить вид фазовых траекторий маятника.

Для маятника без затухания ( $E = 0$ ) на фазовом портрете характерно наличие замкнутых и незамкнутых траекторий (см. рис.6. 9).

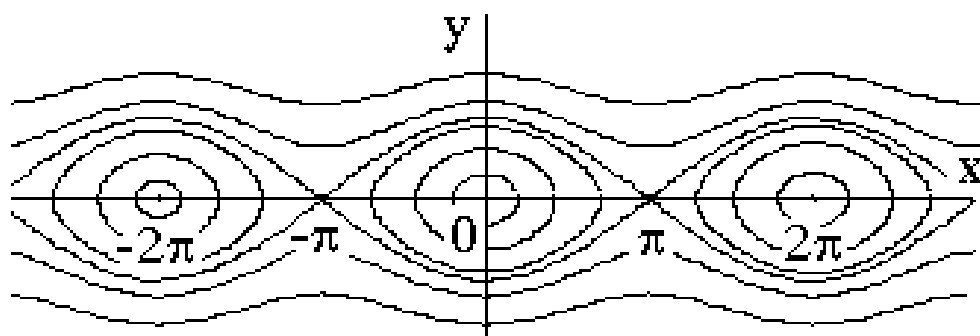


Рис.6. 9

Замкнутым траекториям вблизи точек  $x = 2\pi n$  соответствуют незатухающие колебания возле нижнего положения равновесия. Незамкнутым, так называемым "убегающим" траекториям, соответствует вращение маятника. Замкнутые и незамкнутые траектории разделяют сепаратриссы - траектории, проходящие через седла. Движение по сепаратриссам физически нереализуемо в силу причин, о которых было сказано в конце предыдущего раздела.

Фазовый портрет маятника с затуханием ( $E > 0$ ) имеет более сложный вид (см. рис.6. 10).

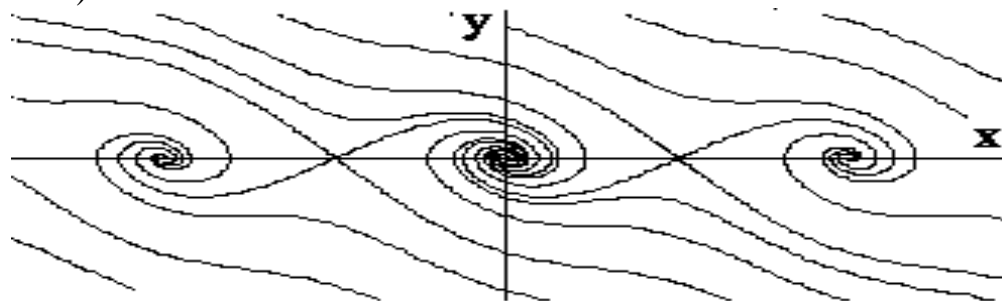


Рис.6. 10

Теперь (при  $E > 0$ ) особые точки типа центр переходят в устойчивые фокусы или узлы, и все траектории становятся незамкнутыми. Любая из них, где бы она ни начиналась, заканчивается в одной из устойчивых особых точек. Однако перед тем, как "уйти" в нее, она может совершить несколько проходов над седлами, т.е. до того, как колебания затухнут, маятник может совершить несколько вращений.

Период колебаний маятника, как всякой нелинейной системы, зависит от амплитуды колебаний. При малой амплитуде эта зависимость несущественна. При амплитуде, стремящейся к  $\pi$ , период  $T \rightarrow \infty$ . Действительно, вы из собственного опыта знаете что, чем выше раскачиваются качели, тем на большее время происходит их зависание в верхней точке.

Попробуйте самостоятельно изобразить фазовый портрет маятника с отрицательным затуханием ( $E < 0$ ). Выполняя экспериментальную часть работы, вы проверите, верно ли это сделали.

#### 6.1.4. Автоколебательные системы

Автоколебательными называют нелинейные системы, способные совершать незатухающие периодические колебания за счет какихлибо источников энергии. Примером являются транзисторные или ламповые генераторы электрических колебаний. Их поведение при определенных допущениях описывается обобщенным уравнением Ван-дер-Поля :



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + E (1 + A x^2 + B x^4) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (6.13)$$

которое является частным случаем уравнения (6.1) при

$$F(x,y) = F(x) = E (1 + A x^2 + B x^4) \quad (6.14)$$

и

$$F(x,y) = 1.$$

Значения коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $E$  определяются физическими свойствами системы, в частности, добротностью колебательного контура, крутизной характеристики усилительного элемента, положением рабочей точки, величиной обратной связи. Важную роль играет коэффициент  $E$ , называемый *параметром нелинейности*. От него зависят форма колебаний и скорость переходных процессов. При  $E \ll 1$  форма колебаний близка к гармонической, а их установление происходит медленно. При  $E \gg 1$  колебания резко негармонические, быстро устанавливающиеся.

Изоклины фазовых траекторий уравнения (6.14) согласно (6.3.) описываются уравнением

$$y = -x / (k + F(x))$$

и имеют вид достаточно сложных кривых, проходящих через начало координат. Вы сможете убедиться в этом, выполняя лабораторную работу.

Для фазового портрета автоколебательных систем существенно наличие устойчивых, неустойчивых и полуустойчивых циклов. Характер движения

системы зависит от присутствия этих циклов и их взаимного расположения. Последнее полностью определяется поведением функции  $F(x)$ , играющей роль коэффициента затухания системы.

В зависимости от знака  $F(x)$  вся фазовая плоскость подразделяется на *декрементные* и *инкрементные* области (полосы). В декрементных областях, где  $F(x) > 0$ , движение сопровождается рассеянием энергии. В инкрементных областях, где  $F(x) < 0$ , движение сопровождается поступлением энергии. Автоколебания совершаются по устойчивым предельным циклам, и при автоколебаниях выполняется нулевой баланс энергий. Поэтому устойчивые циклы непременно должны располагаться частично в инкрементных, а частично в декрементных областях. Таким образом, необходимым, но недостаточным условием автоколебаний является наличие на фазовой плоскости декрементных и инкрементных областей. Переход от одной области к другой происходит там, где  $F(x)$  меняет знак, т.е. при тех  $x$ , где

$$F(x) = 0. \quad (6.15)$$

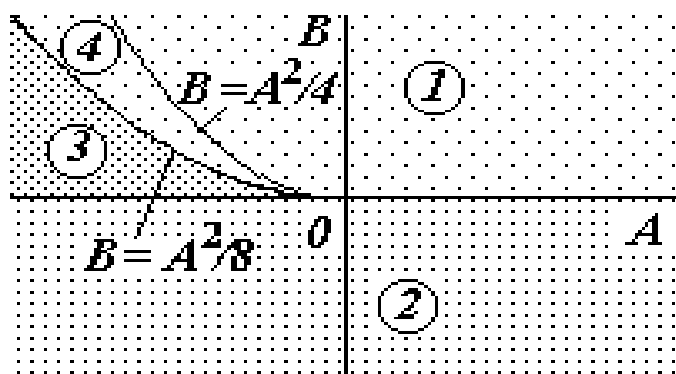


Рис.6. 11

Рассмотрим, как ведет себя  $F(x)$  при различных сочетаниях коэффициентов  $A$  и  $B$  в уравнении (6.14). Анализ показывает, что  $AB$ -плоскость разделяется на четыре области линиями  $B=0$ ,  $A^2/4$  и  $B=A^2/8$ , как показано на рис.6. 11.

**Область 1.** Здесь  $F(x)$  всюду сохраняет знак, уравнение (6.15) не имеет решений. Поведение  $F(x)$  показано на рис.6.12.

Вся фазовая плоскость либо декрементна (при  $E > 0$ ), либо инкрементна (при  $E < 0$ ). Фазовые траектории скручиваются или раскручиваются. Предельных циклов нет, автоколебания невозможны. Начало координат является устойчивой или неустойчивой особой точкой типа узел или фокус в зависимости от знака и величины  $E$  аналогично, как для линейного осциллятора.

**Область 2.** Здесь ( $A \geq 0, B < 0$ ) и ( $A < 0, B \leq 0$ ). Поведение  $F(x)$  показано на рис.6. 13.\*

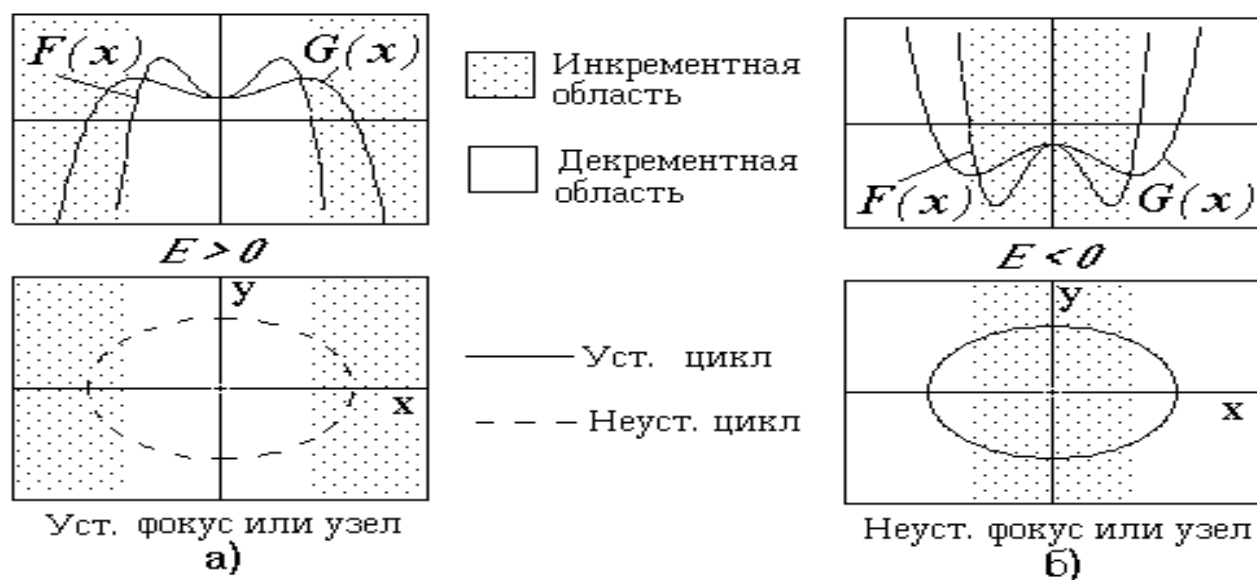


Рис.6.13

Уравнение (6.15) дает два действительных корня  $x_{1,2}$ , определяющих наличие одной декрементной или одной инкрементной области, и отсюда одного устойчивого или неустойчивого предельного цикла.

При  $E < 0$  (рис.6. 13,б) имеем устойчивый цикл и неустойчивую особую точку. Все траектории выглядят как спирали, вливающиеся в предельный цикл (см. рис.6. 5,а) . Это значит, что где бы ни находилась система в начальный момент, со временем она обязательно перейдет на устойчивый цикл, т.е. в режим стационарных автоколебаний (рис.6.14).

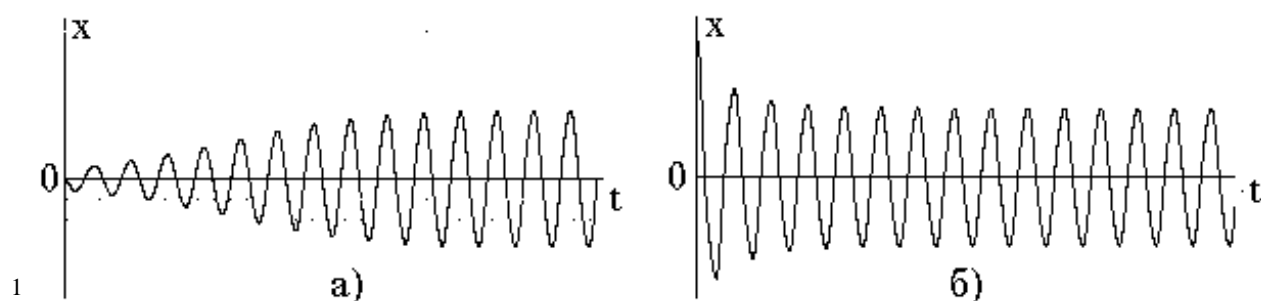


Рис.6. 14

Система с фазовым портретом такого типа называется автоколебательной системой с *мягким самовозбуждением*, или просто "*мягкой*" системой. Физически ей соответствует генератор, у которого рабочая точка расположена на линейном участке вольтамперной характеристики, и обратная связь больше критической.

Как указывалось, величина  $E$  влияет на форму колебаний, форму предельного цикла и скорость установления процесса. При  $E \gg 1$  колебания приобретают релаксационный характер (рис.6.15), и предельный цикл сильно отличается от окружности.

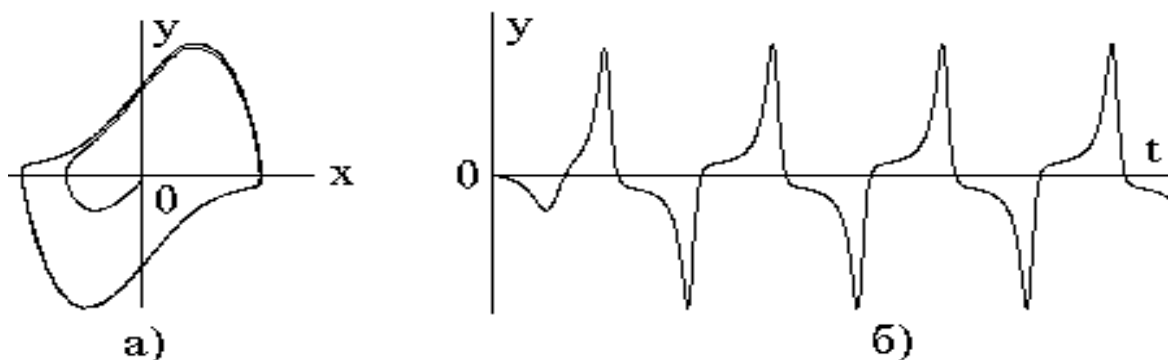


Рис.6. 15

При  $E > 0$  имеем декрементную полосу, устойчивую особую точку и неустойчивый цикл (см . рис.6.13,а). Колебания здесь либо затухают до нуля, либо неограниченно нарастают. Автоколебания невозможны.

---

\* На рис. 6.13 и далее на рис. 6.16 и 6.17 фазовые траектории не показаны. Чтобы не загромождать изображение, показаны только циклы.

Для того чтобы определить радиусы  $R_{st}$ ,  $R_{un}$  и  $R_{sm}$  устойчивых, неустойчивых и полустойчивых предельных циклов, необходимо дополнительное исследование. Пользуясь методами нелинейной теории колебаний, можно показать, что при относительно небольших параметрах нелинейности ( $E \ll 1$ ), когда колебания близки к гармоническим, радиусы предельных циклов определяются как корни уравнения

$$G(x) = E \left( 1 + \frac{1}{4} A x^2 + \frac{1}{8} B x^4 \right) = 0, \quad (6.16)$$

т.е. являются точками пересечения кривой  $G(x)$  с осью  $x$ . Для рассматриваемой области 2, где  $B < 0$ , они равны

$$R_{st,us} = \sqrt{-\frac{A}{B} \pm \sqrt{\frac{A^2}{B^2} - 8 \frac{1}{B}}}. \quad (6.17)$$

Зависимости  $G(x)$  показаны на рис.6. 12 и 13.

*Область 3.* Здесь  $A < 0$  и  $0 < B < A^2/8$ . Кривые  $F(x)$  и  $G(x)$  имеют по четыре точки пересечения с осью  $x$  (рис.6.16). Благодаря этому на фазовой плоскости имеются по две декрементных и инкрементных полосы и по два цикла: устойчивый и неустойчивый.

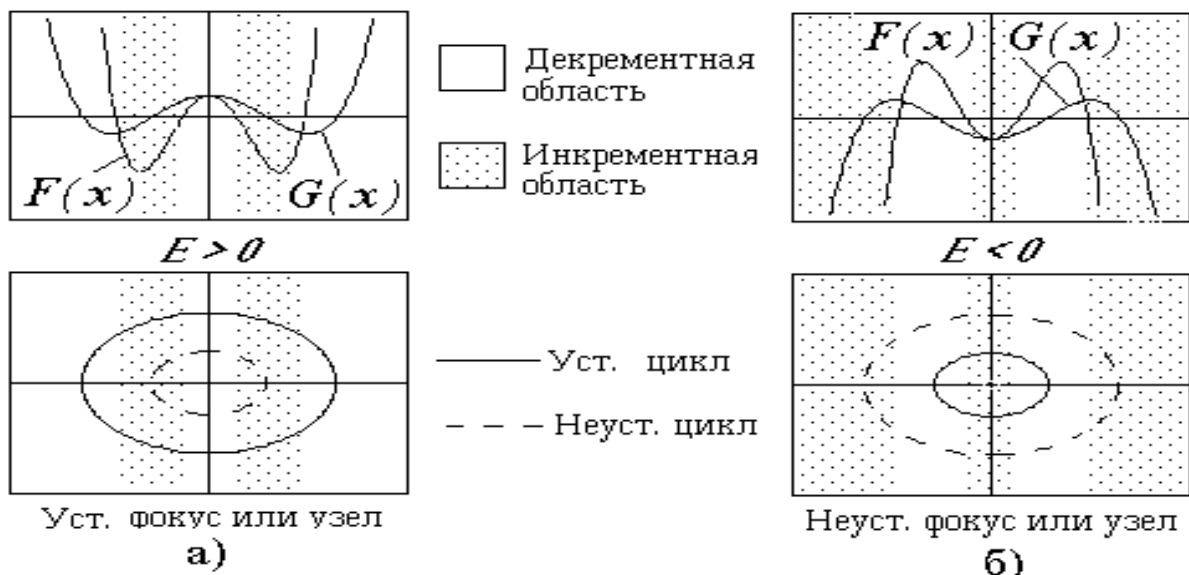


Рис.6. 16

Радиусы  $R_{st}$  и  $R_{un}$  устойчивых и неустойчивых циклов определяются как корни уравнения (6.16):

$$R_{st,un} = \sqrt{-\frac{A}{B} + \text{SGN}(E) \sqrt{\frac{A^2}{B^2} - 8 \frac{1}{B}}}, \quad (6.18)$$

где  $\text{SGN}(E)$  - знаковая функция параметра нелинейности. Пусть  $E > 0$  (рис.6. 16,а). Тогда  $R_{un} < R_{st}$ , т.е. внутренний цикл неустойчивый, а наружный

устойчивый. Особая точка - устойчивый фокус или узел. Траектории внутри неустойчивого цикла стремятся к особой точке (состоянию равновесия), колебания затухают (см. рис.6. 5,б). Между циклами траектории раскручиваются, вливаясь в устойчивый цикл. Вне устойчивого цикла траектории скручиваются, переходя на устойчивый цикл. Движение по устойчивому циклу - автоколебания. Таким образом, система является автоколебательной. Однако ее самовозбуждение, т.е. самопроизвольный выход из состояния равновесия на устойчивый цикл, невозможно. Для того чтобы перевести систему на устойчивый цикл, ее следует "вытолкнуть" за пределы неустойчивого цикла. Автоколебательные системы такого типа называются системами с жестким возбуждением, или просто "жесткими". Примерами жестких систем являются часы - ходики, транзисторный генератор при выборе рабочей точки у нижнего сгиба характеристики и др.

Если  $E < 0$  (рис.6.16,б), то согласно (6.18)  $R_{st} < R_{un}$ , т.е. внутренний цикл устойчивый, а наружный - неустойчивый. Особая точка - неустойчивый фокус или узел. Траектории, если они начинаются внутри неустойчивого цикла, переходят на устойчивый цикл. Система способна совершать автоколебания с мягким характером самовозбуждения. Если же забросить систему за пределы неустойчивого цикла, то она будет удаляться от него и на устойчивый цикл никогда не попадет.

Интересно проследить за динамикой изменения радиусов циклов при изменении коэффициентов  $A$  и  $B$ . На нижней границе области 3, где  $B=0$ , радиус внутреннего цикла равен нулю, т.е. остается только один внешний цикл. При приближении к верхней границе области 3, т.е. к линии  $B = A^2/8$ , радиус внутреннего цикла растет, циклы сближаются, и на границе области они сливаются в один полуустойчивый цикл с радиусом

$$R_{sm} = \sqrt{-A/B} = \sqrt{-8/A}$$

Эта ситуация показана на рис.6.17.

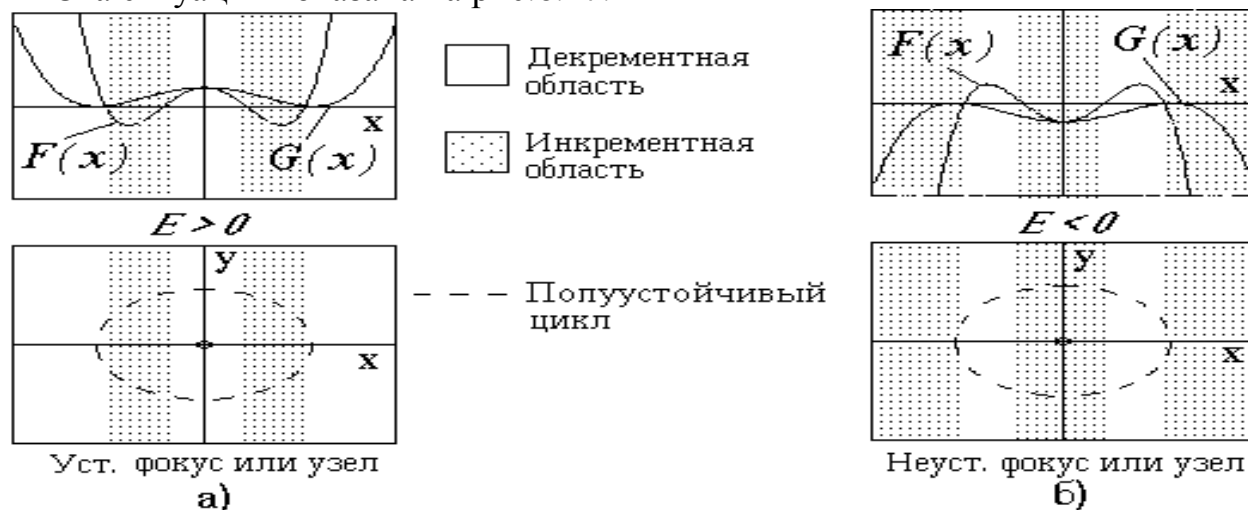


Рис.6. 17

Все фазовые траектории в зависимости от знака  $E$  скручиваются или раскручиваются, асимптотически приближаясь к полуустойчивому циклу и также асимптотически удаляясь от него (см. рис.6.5в,г). Устойчивое движение по этому циклу невозможно.

*Область 4.* ( $A < 0, A^2/8 < B \leq A^2/4$ ). В этой области нет предельных циклов, хотя фазовая плоскость и подразделяется на заметно суженные декрементные и инкрементные полосы, подобно рис.6. 17. Особая точка - устойчивый или неустойчивый узел или фокус. Фазовые траектории такие же, как в области 1.

*Выводы.* Система, описываемая уравнением (6.14), ведет себя, как мягкая автоколебательная, если  $E < 0$ , и коэффициенты  $A$  и  $B$  располагаются в областях 2 и 3  $AB$ -плоскости, как жесткая автоколебательная, если  $E > 0$ , и коэффициенты  $A$  и  $B$  находятся в области 3  $AB$ -плоскости.

## Раздел 7. Автогенераторы гармонических колебаний

### 7.1. Общие свойства автоколебательных систем

В природе широко распространены особого вида периодические движения, называемые *автоколебаниями*, отличительными чертами которых являются их относительная устойчивость по отношению к внешним воздействиям, а также независимость от начальных условий и способа возбуждения. Примерами являются пульсации звезд, биологические ритмы (биение сердца), различные звуки (скрипы, голоса птиц и животных), движения технических механизмов (часов, двигателя внутреннего сгорания), электрические колебания (переменные токи) и т.д. Системы, способные совершать автоколебания, называются *автоколебательными*.

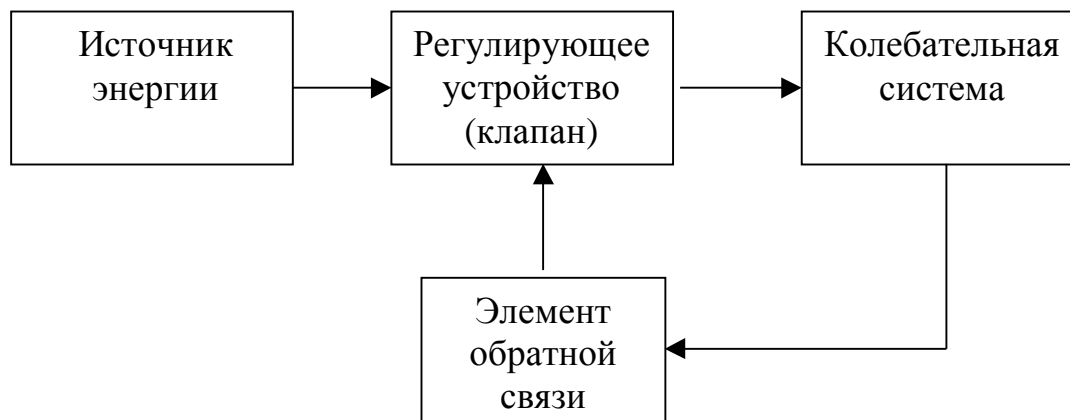


Рис 7.1. Структурная схема автоколебательной системы.

Любая автоколебательная система обязательно содержит следующие составные части (рис 7.1):

- неколебательный источник энергии (электрическая батарея, нагретый пар, поднятая гиря, заведенная пружина и т.п.);
- колебательную систему, т.е. устройство, совершающее периодические движения, сопровождаемые расходом энергии (маятник часов, колебательный контур электрического генератора, поршень с маховиком паровой машины и т.д.);
- клапанный механизм или устройство, регулирующее поступление энергии в колебательную систему (золотник в паровой машине, лампа или транзистор в электрическом генераторе);
- элемент обратной связи между колебательной системой и регулирующим устройством, управляющий работой последнего.

Не всегда, впрочем, указанные составные части выделяются явно.

С энергетической точки зрения автоколебания возможны, если энергия потерь за период колебания  $W_+$  будет компенсироваться энергией  $W_-$ , отбираемой за то же время от источника энергии

$$W_+ = W_- \quad (7.1.)$$

Если  $W_+ > W_-$ , то колебания затухают, при  $W_+ < W_-$  - колебания нарастают.

На фазовой плоскости автоколебаниям соответствуют замкнутые фазовые траектории, называемые *устойчивыми предельными циклами*.

В линейных системах, где параметры не зависят от амплитуды колебаний, энергии  $W_+$  и  $W_-$  пропорциональны квадрату амплитуды колебаний  $A$ , поэтому зависимости  $W_{\pm}$  от  $A^2$  выражаются прямыми. Для нелинейных систем эти зависимости получаются более сложными и определяются характером нелинейности. Основываясь на этих положениях, отметим некоторые важные свойства автоколебательных систем.

Как правило, колебательная система, где идет расход энергии в процессе колебаний, в автоколебательных системах является линейной, поэтому зависимость  $W_+$  от  $A^2$  представляется прямой. Предположим, что и механизм поступления энергии  $W_-$  также линейный, так что система будет линейной в целом. В этом случае (рис 7.2 а) условие баланса  $W_+ = W_-$  выполняется только для нулевой амплитуды, а при  $A > 0$  будет либо  $W_+ > W_-$ , либо  $W_+ < W_-$ . Колебания в системе могут быть либо затухающими, либо нарастающими, которым на фазовой плоскости будут соответствовать скручивающиеся и раскручивающиеся спирали (рис 7.2 б,в) с устойчивой или неустойчивой особой точкой в начале координат. Замкнутых предельных циклов нет, следовательно, автоколебания в системе невозможны. Отсюда вытекает принципиально важный вывод: *автоколебательная система не может быть линейной*.

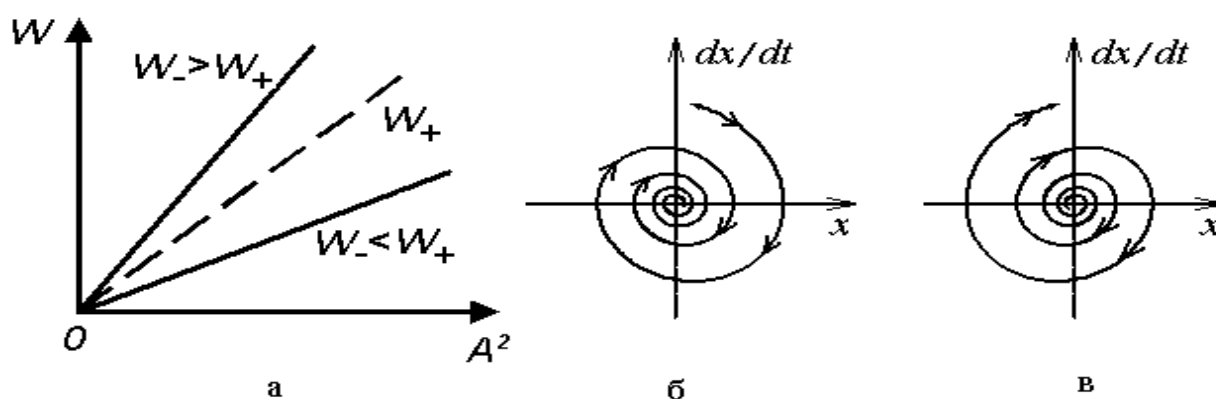


Рис 7. 2. Энергетические соотношения и фазовые портреты для линейных систем



Рассмотрим случаи, когда механизм поступления энергии  $W_-$  нелинейный, что делает нелинейной всю систему. Типичные случаи нелинейных зависимостей  $W_-$  от  $A^2$  представлены на рис 7. 3, 4 и 5. В точках пересечения кривых выполняется условие баланса  $W_+ = W_-$ .

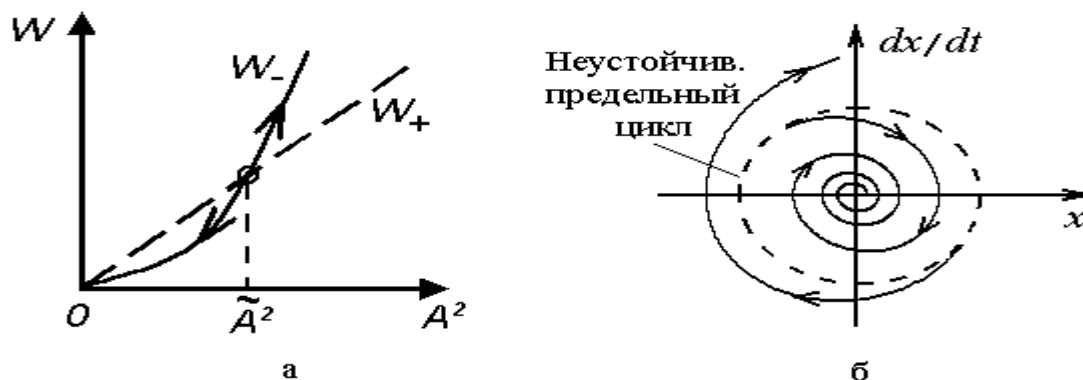


Рис 7. 3. Неустойчивый энергетический баланс в нелинейной системе.

В случае, показанном на рис 7.3а, состояние баланса неустойчиво, т.к. достаточно амплитуде стать меньше,  $\tilde{A}$  как будет выполняться условие  $W_+ > W_-$ , и колебания начнут затухать. Если же амплитуда станет больше  $\tilde{A}$ , то будет  $W_- > W_+$ , и колебания будут нарастать. На фазовой плоскости (рис 7.3б) точке  $\tilde{A}$  соответствует неустойчивый предельный цикл, отмеченный пунктиром. Фазовые траектории с него «сходят» как внутрь, так и наружу. Начало координат – устойчивая особая точка. Устойчивых предельных циклов нет, автоколебания в системе невозможны.

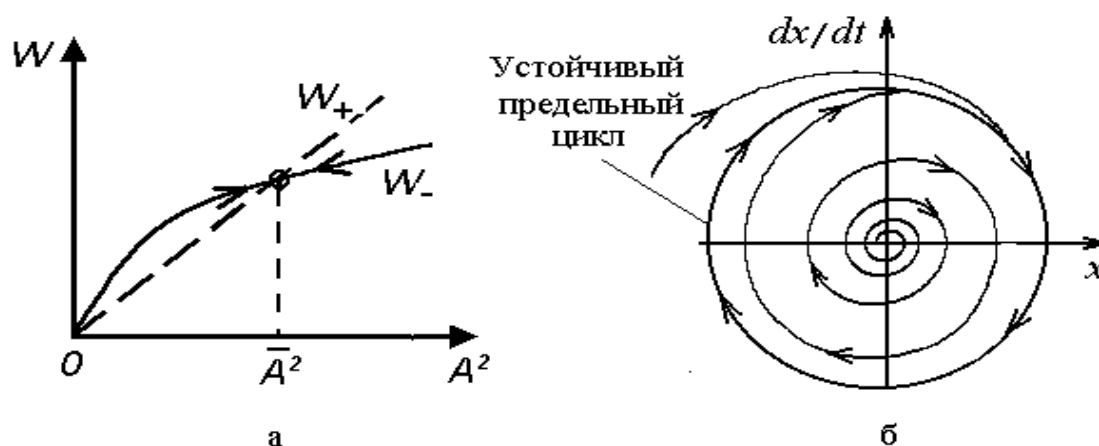


Рис 7.4. Энергетический баланс и фазовый портрет «мягкой» автоколебательной системы.

В случае, показанном на рис 7.4а, состояние баланса  $W_+ = W_-$  является устойчивым. В самом деле, ведь если амплитуда  $A$  станет больше  $\bar{A}$ , то оказывается  $W_+ > W_-$ , и это приводит к уменьшению  $A$  до  $\bar{A}$ . Если же  $A$  станет

меньше  $\bar{A}$ , то будет  $W_+ < W_-$ , и тогда амплитуда колебаний увеличится до  $\bar{A}$ . Благодаря этому в системе устанавливаются автоколебания с постоянной амплитудой  $\bar{A}$ . Фазовая плоскость (рис 7. 4б) содержит устойчивый предельный цикл, на который «накручиваются» фазовые траектории изнутри и снаружи, а в начале координат располагается неустойчивая особая точка. В таких системах возможно так называемое «мягкое» самовозбуждение, т.е. возникновение колебаний без внешнего воздействия, когда колебания начинаются с весьма малых амплитуд флуктуационного происхождения и нарастают до стационарного значения.

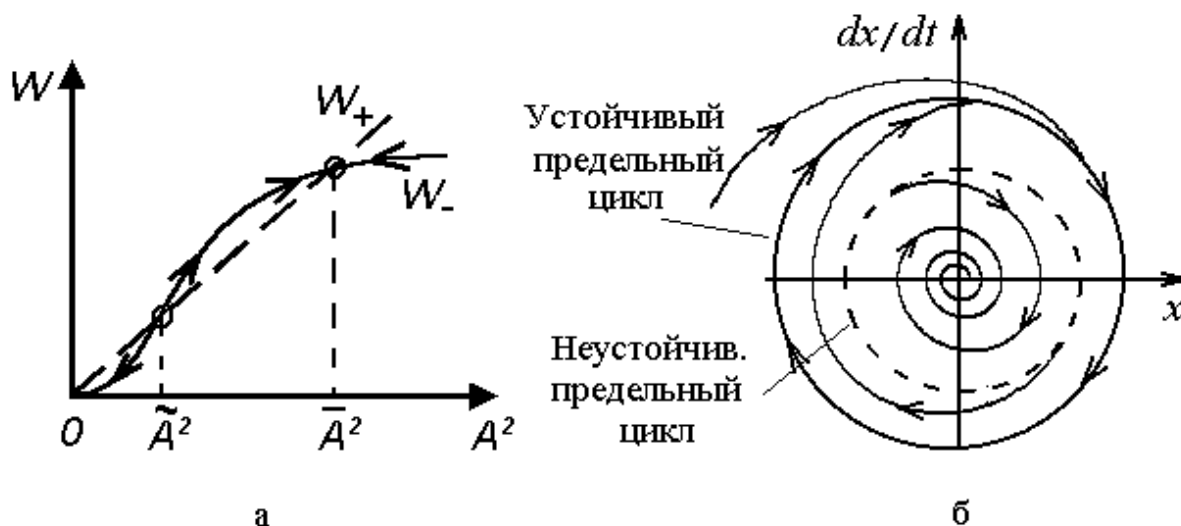


Рис 7.5. Энергетические соотношения и фазовый портрет «жесткой» автоколебательной системы .

На рис 7.5а представлена характеристика с двумя точками пересечения линий  $W_-$  и  $W_+$ , причем зависимость вблизи  $\tilde{A}$  соответствует случаю рис 7.3а, а вблизи  $\bar{A}$  - случаю рис 7.4а. На фазовой плоскости (рис 7. 5б) этим амплитудам соответствуют вложенные циклы: неустойчивый внутренний и устойчивый наружный. Особая точка в начале координат устойчивая. Самовозбуждение в такой системе невозможно, т.к. флуктуационные колебания оказываются внутри неустойчивого цикла и затухают. Для возбуждения автоколебаний системе нужно вывести за пределы неустойчивого цикла, придав ей начальную амплитуду  $A > \tilde{A}$ , после чего амплитуда будет изменяться, стремясь к  $\bar{A}$ .

Системы такого типа, которые требуют некоторого внешнего толчка для возбуждения автоколебаний, называются системами с «жестким» возбуждением. Примером «жесткой» системы служат часы-ходики.

## 7.2. LC-автогенератор

Типичным примером автоколебательной системы является транзисторный генератор с колебательным LC-контуром и индуктивной обратной связью. Некоторые варианты его схем приведены на рис 7.6. На схемах в LC-контуре показано сопротивление  $R$ , отображающее активные потери. Оно может быть подключено к контуру параллельно (рис 7.6а,в) или последовательно (рис 7.6б,г). Переменные составляющие напряжений на базе и коллекторе обозначены через  $U$  и  $V$ . Благодаря индуктивной связи между цепями базы и коллектора

$$U = b \cdot V \quad (7.2)$$

где

$$b = M / L$$

есть коэффициент передачи цепи обратной связи.

Эквивалентное сопротивление колебательного контура равно

$$Z(j\omega) = \frac{Z_{рез}}{1 + jxQ} = Z(\omega)e^{jf_k}, \quad (7.3)$$

где

$$\begin{cases} Z(\omega) = Z_{рез} / \sqrt{1 + (xQ)^2}, & (a) \\ f_k = -\arctg xQ, & (б) \end{cases} \quad (7.4)$$

$Z_{рез}$  - активное сопротивление контура на резонансной частоте,

$$\omega_0 = 1 / \sqrt{LC},$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{- относительная расстройка,}$$

$$Q = \omega_0 t \quad \text{- добротность,}$$

$t$  - постоянная времени контура.

При последовательном включении сопротивления  $R$  в контур

$$Z_{рез} = L / RC, \quad t = L / R. \quad (7.5)$$

При параллельном подсоединении сопротивления

$$Z_{рез} = R, \quad t = RC. \quad (7.6)$$

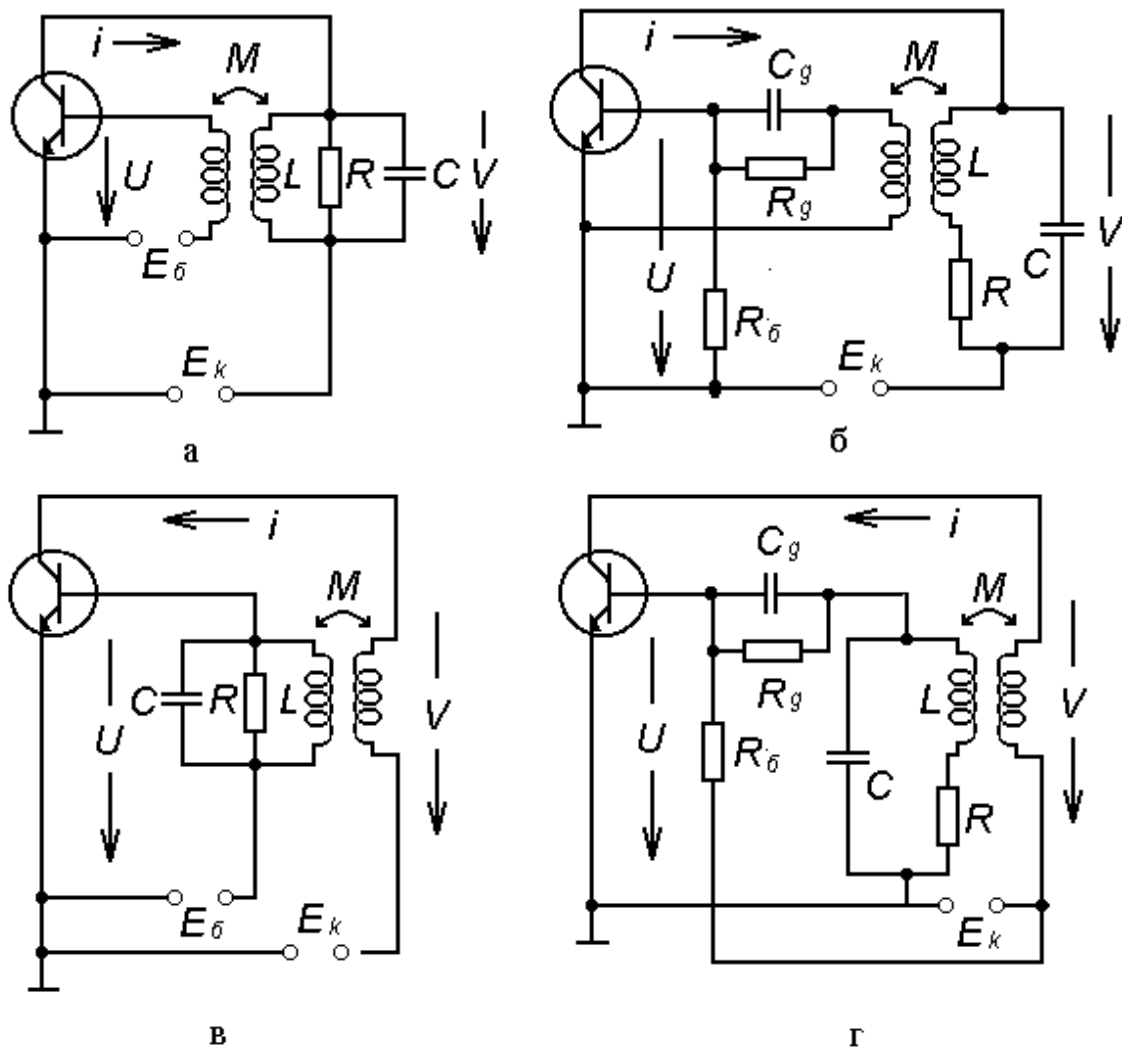


Рис 7. 6. Схемы транзисторных генераторов с контуром в цепи коллектора (а,б) и базы (в,г), с постоянным (а,в) и автоматическим (б,г) смещением на базе.

Дифференциальное уравнение генераторов, схемы которых показаны на рис 7.6, имеет вид, внешне совпадающий с уравнением свободных колебаний в контуре (без учета шунтирующего действия транзистора на колебательный контур)

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + d_{\text{экв}}(u) \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0, \quad (7.7)$$

однако в нем вместо затухания контура

$$d = 1/Q \quad (7.8)$$

стоит эквивалентное затухание

$$d_{\text{экв}}(u) = d(1 - b S(u) Z_{\text{рез}}), \quad (7.9)$$

зависящее от  $Z_{рез}$ , коэффициента обратной связи  $b$  и крутизны характеристики транзистора

$$S(u) = di / du. \quad (7.10)$$

Коэффициент  $d_{экв}$  в силу зависимости от  $u$  крутизны  $S(u)$  является функцией  $u$ , и поэтому уравнение (7.7) оказывается *нелинейным*, в отличие от линейного уравнения колебательного контура.

Если схему с контуром в цепи коллектора (рис 7.6а) перерисовать, как показано на рис 7.7а, то становится ясно, что автогенератор представляет собой не что иное как усилитель, охваченный обратной связью. Его структурную схему можно представить в виде двух каскадно включенных четырехполюсников (рис 7.7б), один из которых с коэффициентом передачи  $K(u)$  соответствует усилительному звену, а второй с коэффициентом передачи  $b$  - цепи обратной связи.

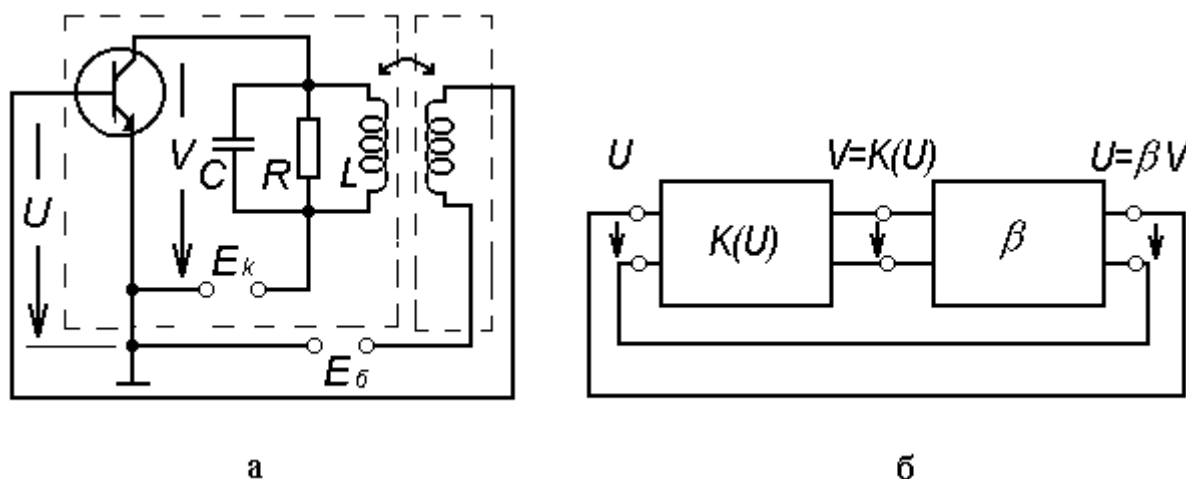


Рис 7.7. LC-генератор и его обобщенная структурная схема.

Коэффициент  $K(u)$  есть коэффициент усиления транзисторного резонансного усилителя, равный

$$K(u) = S(u)Z(j\omega). \quad (7.11)$$

Вблизи резонансной частоты  $\omega_0$  эквивалентное сопротивление колебательного контура примерно равно  $Z_{рез}$ , поэтому коэффициент усиления звена

$$K(u) = S(u) \cdot Z_{рез}. \quad (7.12)$$

С учетом (7.12) выражение (7.9) может быть представлено в виде

$$d_{экв}(u) = d(1 - K(u)b). \quad (7.13)$$

Таким образом, транзистор и обратная связь в  $(1 - K(u)b)$  раз изменяют собственное затухание колебательного контура. В зависимости от знака  $K(U)b$  коэффициент  $d_{эКВ}$  может оказаться либо положительным, либо отрицательным. Если  $K(u)b < 0$ , (отрицательная обратная связь), то  $d_{эКВ} > 0$ , и автоколебания в системе невозможны. Если  $K(u)b > 0$  (обратная связь положительная), то  $d_{эКВ} < d$ , и при определенной величине  $b$  коэффициент  $d_{эКВ}$  может стать отрицательным. В этом случае система теряет устойчивость и в ней возникают автоколебания.

Исследование свойств LC-генератора можно провести, анализируя решения уравнения (7.7). Задача эта сложная, так как общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений не существует. Для выяснения тех или иных конкретных вопросов используют различные приближенные методы.

### 7.3. Условия самовозбуждения. Линейная трактовка.

Определить условия, при которых в системе возникают автоколебания, нетрудно. Задача решается в линейном приближении. Предполагается, что поскольку в момент возникновения колебаний их амплитуда очень мала и работа происходит в пределах узкого начального участка вольтамперной характеристики (ВАХ) транзистора, нелинейностью которой можно пренебречь, то  $S(u)$  в (9) можно заменить на постоянную величину  $S_o$ , равную крутизне ВАХ в рабочей точке. Соответственно  $K(u)$  в формулах (7.12) и (7.13) заменяется на

$$K_o = S_o Z_{рез}. \quad (7.14)$$

При такой замене нелинейное уравнение (7.7) превращается в линейное, и к нему становятся применимы критерии устойчивости линейных систем. Так, например, согласно критерию Рауса-Гурвица система будет неустойчивой, если  $d_{эКВ} < 0$ , что соответствует условию

$$Kob > 1. \quad (7.15)$$

Такой же результат вытекает из критерия устойчивости Найквиста для обобщенной схемы рис 7. 7б. Физически (7.15) означает, что при обратной связи

$$b > b_{кр} = 1 / K_o. \quad (7.16)$$

происходит *самовозбуждение*. Из линейного приближения следует также, что частота колебаний при самовозбуждении, определяемая коэффициентом при последнем члене уравнения (9), будет равна  $W_o$ . И это все. Более полной информации о работе генератора линейная трактовка дать не может.

#### 7.4. Стационарный режим. Квазилинейный метод.

Работа генератора в установившемся режиме, когда амплитуда и частота автоколебаний неизменны, успешно описывается так называемым *квазилинейным* (как бы линейным) методом. Его основой является предположение, что система совершает гармонические или близкие к ним колебания с некоторой частотой  $\omega$ . Квазилинейный метод применим к нелинейным системам, содержащим узкополосное частотно-избирательное устройство (фильтр), благодаря фильтрующим свойствам которого система и совершает практически гармонические автоколебания.

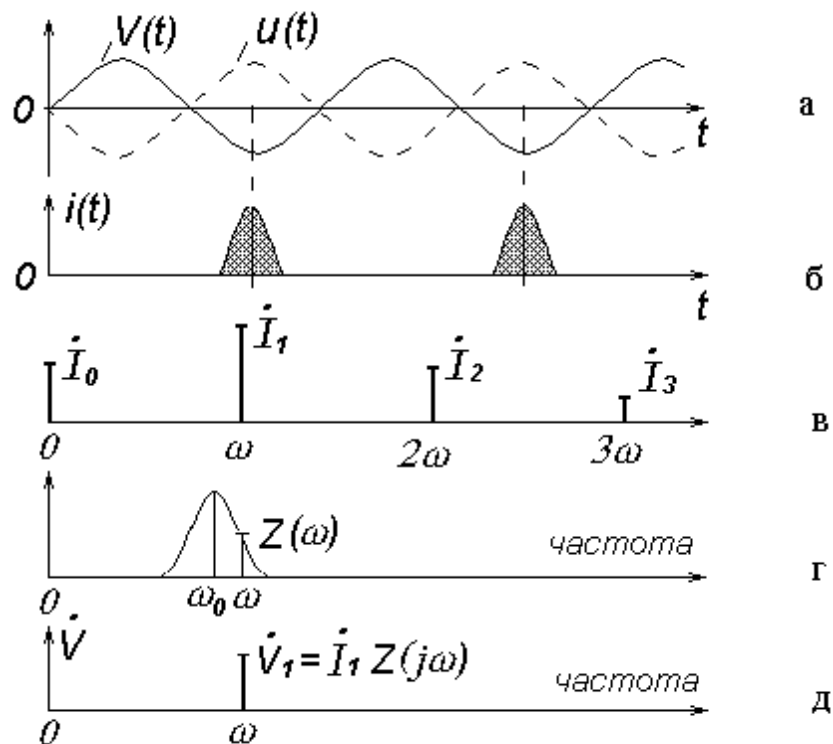


Рис 7.8. Временные и частотные зависимости для схем на рис 7.6.

В LC-генераторах роль фильтра выполняет колебательный контур, эквивалентное сопротивление которого быстро уменьшается при удалении от резонансной частоты  $\omega_0$  (рис 7. 8г).

Ток коллектора  $i(t)$ , питающий контур, имеет форму косинусоидальных импульсов с отсечкой (рис 7.8б) и представляется набором гармоник с комплексными амплитудами  $\dot{I}_m$  (рис 7. 8в):

$$i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \dot{I}_m e^{jm\omega t} \quad (7.16)$$

Напряжение  $V(t)$  на колебательном контуре, настроенном на частоту  $\omega_0$ , близкую к  $\omega$ , будет определяться в основном только первой гармоникой тока, поэтому

$$V(t) = Z(j\omega) \cdot i(t) \cong Z(j\omega_0) \cdot \dot{I}_1 e^{j\omega t} = \dot{V}_1 e^{j\omega t}, \quad (7.17)$$

а, следовательно, и

$$U(t) = bV(t) \cong b\dot{V}_1 e^{j\omega t} = \dot{U}_1 e^{j\omega t}. \quad (7.18)$$

Другими словами, результат получается таким, как если бы для тока вместо выражения (7.16) использовалось

$$i(t) \cong \dot{I}_1 e^{j\omega t}. \quad (7.19)$$

Тогда крутизну характеристики  $S(u)$  удастся выразить через комплексные амплитуды тока и напряжения

$$S(u) = \frac{di}{du} = \frac{d(\dot{I}_1 e^{j\omega t})}{d(\dot{U}_1 e^{j\omega t})} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}, \quad (7.20)$$

что позволяет ввести в рассмотрение так называемую *среднюю крутизну*  $S_{cp}$ , определяемую как

$$\dot{S}_{cp}(U_1) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = S_{cp}(U_1) e^{jf_s(\omega)}. \quad (7.21)$$

Фазовый сдвиг  $f_s(\omega)$ , обусловлен различными факторами, например, частотными свойствами транзистора, проявляющимися на достаточно высоких частотах, режимом питания и т.п. В обычной практике можно полагать  $f_s(\omega) = 0$ . Существенно, что в отличие от  $S(u)$  средняя крутизна зависит не от *мгновенных* значений тока и напряжения, а только от их комплексных *амплитуд*, что и является фактором, сводящим нелинейную задачу к линейной.

Используя среднюю крутизну, по аналогии с (7.12) можно ввести средний комплексный коэффициент передачи усилительного звена

$$\dot{K}_{cp}(U_1) = \dot{S}_{cp}(U_1) Z(j\omega) = K_{cp}(U_1) e^{jf_k(\omega)}, \quad (7.22)$$

где

$$f_k(\omega) = f_s(\omega) + f_z(\omega) \quad (7.23)$$

Достаточно общие результаты в квазилинейном методе можно получить, если считать, что и коэффициент передачи звена обратной связи также является комплексным:



$$\dot{b}(U_1, w) = b(U_1) e^{jf_b(w)}. \quad (7.24)$$

Тогда для обобщенной схемы генератора (рис 7.7б) условие стационарности режима колебаний записывается в виде

$$K_{cp}(U_1, w) \cdot \dot{b}(U_1, w) = 1, \quad (7.25)$$

откуда следуют два условия - для амплитуд и для фаз (с учетом (7.23)):

$$\begin{cases} K_{cp}(U_1) b(U_1) = 1, & (a) \\ f_s(w) + f_z(w) + f_b(w) = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots & (б) \end{cases} \quad (7.26)$$

С их помощью можно найти амплитуду и частоту автоколебаний.

Частота  $w$  определяется из фазового условия (7.26 б), согласно которому

$$-tg f_z(w) = tg(f_s(w) + f_b(w)).$$

С учетом (7.4 б) и того, что при

$$x = \frac{w}{w_o} - \frac{w_o}{w} \approx \frac{2(w - w_o)}{w_o},$$

получаем

$$w \approx w_o \left[ 1 + \frac{1}{2Q} tg(f_s + f_b) \right]. \quad (7.27)$$

Отсюда видно, что частота автоколебаний не равна резонансной частоте колебательного контура  $w_o$ , как это следовало из линейной трактовки, но зависит также от параметров цепи обратной связи, свойств усилительного элемента и добротности  $Q$ . Последняя определяет так называемую *фиксирующую* способность колебательного контура. Чем выше  $Q$  тем меньше влияние  $f_s$ ,  $f_b$  и других дестабилизирующих факторов, оказывающих влияние на работу генератора. Поэтому в высокостабильных генераторах используют высокодобротные колебательные контуры, например, кварцевые резонаторы, добротность которых измеряется тысячами единиц.

Условие (7.26а) позволяет определить амплитуду стационарных автоколебаний. Считая для простоты  $w = w_o$ , когда

$$K_{cp}(U_1) = S_{cp}(U_1) Z_{рез},$$

получим

$$S_{cp}(U_1) = \frac{1}{b(U_1)Z_{рез}}, \quad (7.27a)$$

либо

$$K_{cp}(U_1) = \frac{1}{b(U_1)}. \quad (7.27б)$$

Построив на одном графике в функции  $U_1$  кривые, соответствующие левым и правым частям этих уравнений, в точке их пересечения находим искомое значение  $U_1$ . Вид кривых для  $S_{cp}(U_1)$  и  $K_{cp}(U_1)$  зависит от режима работы генератора (мягкий или жесткий), что определяется положением рабочей точки на проходной ВАХ транзистора.

Различают два случая (рис. 7.9):

1. Рабочая точка на линейном участке (большие углы отсечки  $q > 90^\circ$ ),
2. Рабочая точка на нижнем сгибе или левее  $U_{отс}$  (углы отсечки  $q < 90^\circ$ ).

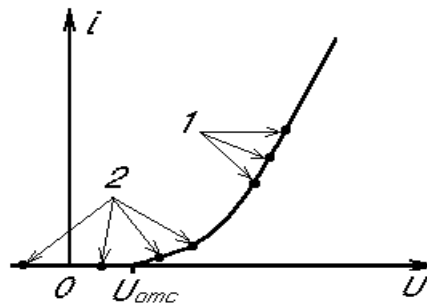


Рис 7. 9. Положение рабочей точки на ВАХ транзистора при мягком (7.1.) и жестком (7.2.) режимах работы.

В первом случае зависимость  $S_{cp}(U_1)$  выражается монотонно спадающей кривой (рис 7. 10а) . Аналогично ведет себя и  $K_{cp}(U_1)$  (рис 7. 10б).

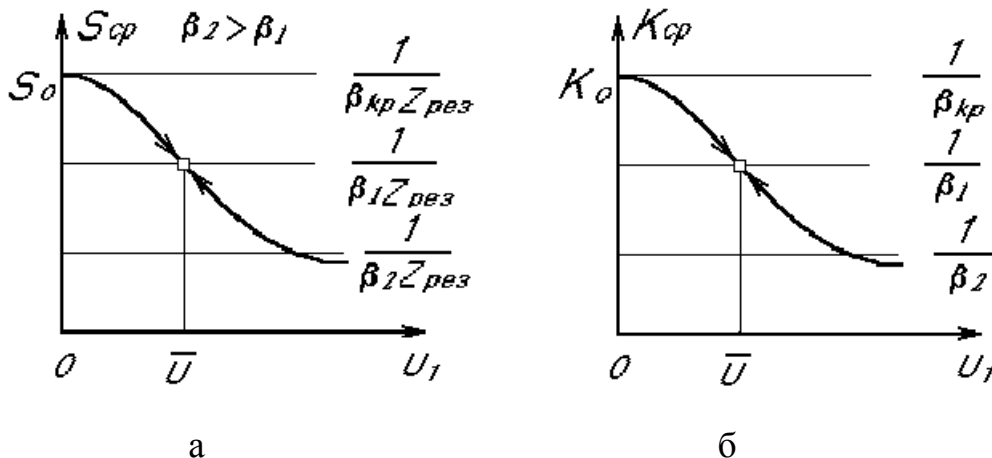


Рис 7. 10. Зависимости средних параметров для мягкого режима.

Во втором случае (рис 7. 11) кривые  $S_{cp}(U_1)$  и  $K_{cp}(U_1)$  имеют "горбообразный" характер

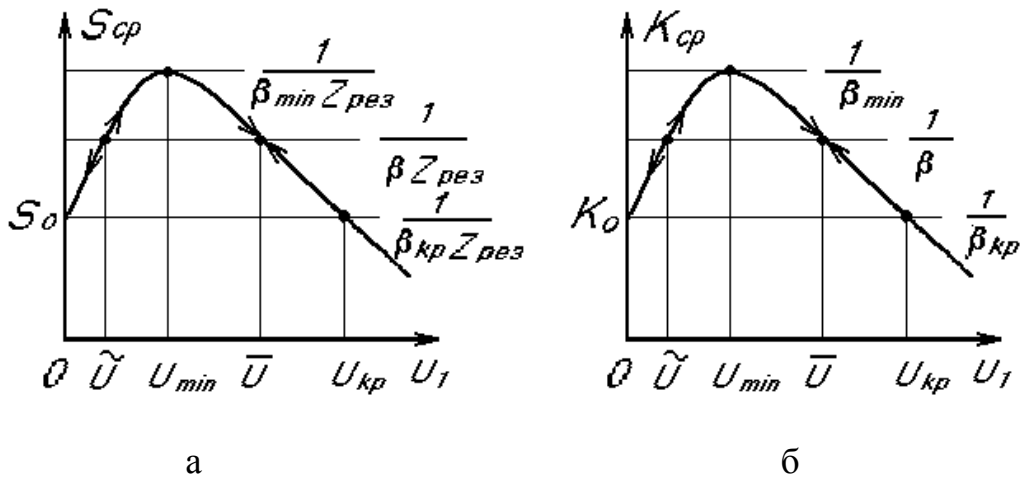


Рис 7. 11. Зависимости средних параметров для жесткого режима.

Если  $b$  от  $U_1$  не зависит, то правые части (7.2.7а) и (7.2.7б) суть горизонтальные линии, называемые линиями обратной связи, положение которых определяется величиной  $b$ . Их пересечение с  $S_{cp}(U_1)$  или  $K_{cp}(U_1)$  определяет амплитуды, для которых выполняется уравнение энергетического баланса.

Рис 7.10 соответствует мягкой системе, ее фазовый портрет изображен на рис 7.4б. Колебания с амплитудой  $\bar{U}$  устойчивые.

Рис 7.11 соответствует жесткой системе, ее фазовый портрет изображен на рис 7.5б. Из двух точек пересечения  $\bar{U}$  - устойчивая, а  $\tilde{U}$  - неустойчивая.

Можно проанализировать поведение автогенератора в функции величины обратной связи, используя кривые средних параметров и следя за точкой их пересечения с линией обратной связи,

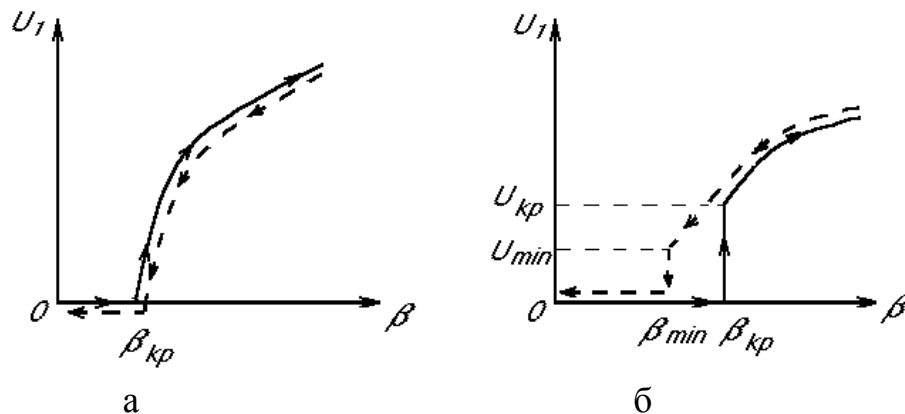


Рис 7.12. Зависимости амплитуды автоколебаний от величины обратной связи для мягкого (а) и жесткого (б) режимов.

В мягком режиме (рис 7. 10), если  $b < b_{кр}$ , то прямая обратной связи лежит выше кривой  $S_{cp}$ , и поэтому автоколебания невозможны. При  $b = b_{кр}$  автоколебания возникают, и с дальнейшим ростом  $b$  их амплитуда  $U_1 = \bar{U}$  плавно растет (рис 7. 12а). С уменьшением  $b$  картина повторяется в обратном порядке.

В жестком режиме (рис 7.11б и рис 7.12б) самовозбуждение не наступает до тех пор, пока связь не достигает  $b_{кр}$ . При этом амплитуда скачком увеличивается до  $U_1 = U_{кр}$ , и далее растет с ростом  $b$ . При обратном движении колебания не срываются вплоть до значения  $b = b_{min} < b_{кр}$ , когда их амплитуда уменьшается до  $U_{min}$ .

В области связи  $b_{min} < b < b_{кр}$  колебания самопроизвольно не возникают, однако если принудительно «забросить» систему за неустойчивую точку  $\bar{U}$ , то она перейдет в режим стационарных колебаний с амплитудой  $\bar{U}$ .

Мягкий режим предпочтителен с точки зрения легкости возбуждения автоколебаний, однако он характеризуется относительно невысоким к.п.д., так как работа ведется с углами отсечки  $q > 90^\circ$ . В жестком режиме  $q < 90^\circ$ , и можно получить высокий к.п.д., но следует принимать специальные меры для возбуждения системы, что неудобно.

В этом смысле представляют интерес схемы с автоматическим смещением (рис 7. 6 б,г), у которых в отсутствие колебаний рабочая точка лежит в линейной части характеристик 7.тики, и поэтому генератор возбуждается как мягкая система. По мере увеличения амплитуды колебаний за счет импульсов тока базы конденсатор  $C_g$  в цепи автоматического смещения заряжается, и рабочая точка перемещается к нижнему сгибу характеристик 7.тики, так что установившийся режим оказывается жестким, угол отсечки получается малым, а к.п.д. большим.

Проведенное рассмотрение показывает, что квазилинейный метод прост и достаточно информативен, в силу чего он является основным инженерным методом расчета автогенераторов.

## 7.5. Переходной режим. Импульсная работа

Исследование процесса установления колебаний, т.е. перехода от момента самовозбуждения к стационарному состоянию, наиболее сложная задача. Для ее решения, как правило, приходится применять специальные методы решения. Одним из них является *метод медленно меняющихся амплитуд*, который, как и квазилинейный метод, применим к системам, совершающим колебания, близкие к гармоническим. В таких системах процесс установления колебаний про-

исходит относительно медленно, т.е. за время одного периода колебаний амплитуда меняется незначительно. Поэтому решение можно искать в виде

$$U(t) = U_1(t) \cos wt . \quad (7.28)$$

Подставляя (7.28) в уравнение (7.7), учитывая условие медленности изменения  $U_1(t)$

$$\frac{dU_1(t)/dt}{U(t)} \ll \frac{w}{2p} , \quad (7.29)$$

и пренебрегая высшими гармониками, можно найти частоту автоколебаний

$$w = w_o \quad (7.30)$$

и закон изменения амплитуды

$$U_1(t) = \frac{\bar{U}}{\sqrt{1 - B \cdot e^{-|d|t}}} \quad (7.31)$$

В (7.31)  $B = [\bar{U}/U_1(0)]^2 - 1$  - постоянная, определяемая начальными условиями. Скорость переходного процесса зависит от параметра  $d$ , равного

$$d = (1 - K_0 b) / t . \quad (7.32)$$

Как было показано выше, условием самовозбуждения является  $K_0 b > 1$ , т.е.  $d < 0$ . Чем больше значение  $K_0 b$ , тем больше  $|d|$ , быстрее затухает экспоненциальный член под радикалом в (7.31), и. быстрее амплитуда  $U_1(t)$  стремится к своему стационарному значению  $\bar{U}$ . В зависимости от постоянной  $B$  амплитуда  $U_1(0)$  в начальный момент времени может быть меньше, больше либо равна  $\bar{U}$  (рис 7. 13).

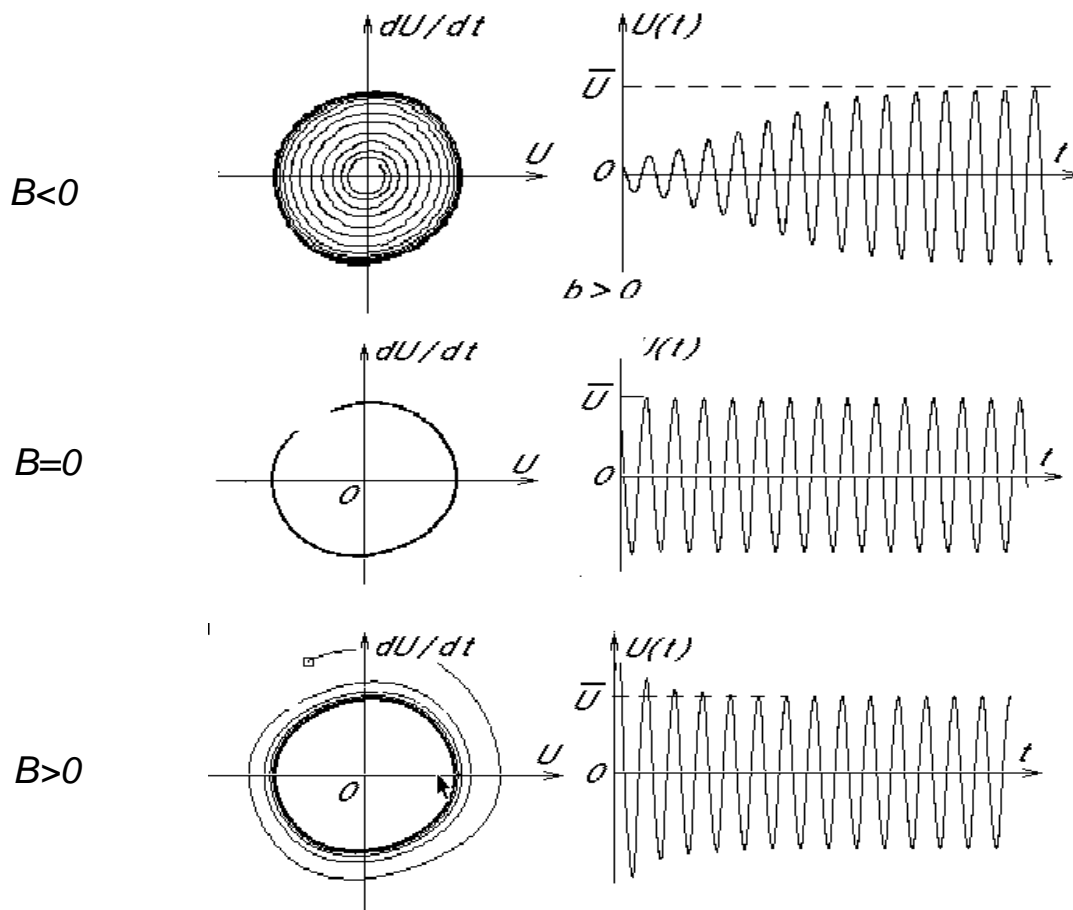


Рис 7. 13. Установление автоколебаний при различных начальных условиях.

Чем ближе параметр  $K_0 b$  к единице, т.е. к порогу возбуждения, тем медленнее идет процесс установления колебаний.

Учет переходных процессов обязателен при импульсной работе генератора, например, когда напряжение питания  $E_k(t)$  имеет форму прямоугольных

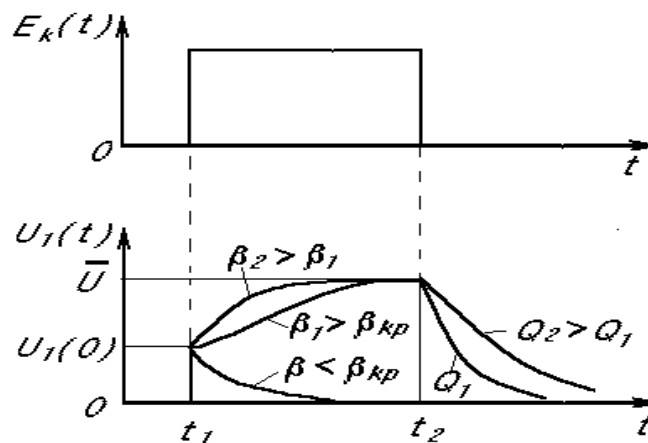


Рис 7. 14. Искажения переднего фронта импульса в зависимости от коэффициента обратной связи и заднего фронта в зависимости от добротности контура.

импульсов (рис 7.14). Огибающая высокочастотного импульса  $U_1(t)$  не повторяет форму напряжения  $E_k(t)$ . Форма и длительность переднего фронта генерируемого импульса обусловлены переходным процессом установления автоколебаний и при заданном коэффициенте усиления  $K_0$  они зависят от коэффициента обратной связи  $b$ . Форма и длительность заднего фронта, когда автоколебания сорваны и в контуре происходят свободные затухающие колебания, определяются добротностью контура.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: М.: Радио и связь, 1986.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: М.: Высшая школа, 1986.
3. Радиотехнические цепи и сигналы. Под ред. Самойло К.А.: М.: Радио и связь, 1982.
4. Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Введение в теорию сигналов и цепей: М.: Связь, 1975.
5. Андреев В.С. Теория нелинейных электрических цепей: М.: Связь, 1982.

### Дополнительна

1. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. В 2-х ч: Пер. с англ.- М.: Мир, 1982.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники: М.: Радио и связь, 1989.
3. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры: Соврадио, 1980.
4. Прикладные математические методы анализа в радиотехнике. Под ред. Обрезкова Г.В.: М.: Высшая школа, 1985.
5. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника: Соврадио, 1982.
6. Надольский А.Н. Теоретические основы радиотехники: Минск: БГУИР, 2005.