Соотношение вида **F(x,y,y',…,y(n))**=0 связывающее независимую переменную $_x$,независимую перемненную **y(x)**, и ее производные **y'**…, называется обыкновенным дифференциальным уравнением.
Y=y(x) – обыкновенное.
Z(x,y) - уравнение в частных производных.
Порядком ДУ называется наивысший порядок произведения искомой функции входящей в это уравнение.
Решением ДУ порядка n на интервале **(a,b)** называется функция **y=y(x)** заданная на интервале **(a,b)** вместе со своими производными до n-го порядка включительно, который при подстановке в это уравнение обращает его в тождество на интервале **(a,b).**
F(x, y, …) ==0, если **y=y(x)** определено неявно, т.е. **ф(x,y)=0**, то такое решение является интегралом ДУ.
Процесс нахождения решения называется интегрированием этого ДУ. График решения называется интегральной кривой ДУ.

Вопрос 1: ДУ первого порядка. Общее решение. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
F(x, y, y')=0;
Y'=f(x,y) - это ДУ 1го пор-ка в норм. форме. (разрешенный относительно производной) И это уравнение устанавливает связь (зависимость) между координатами точки *(x; y)* и угловым коэффициентом *y'* касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно ДУ *y'= f(x,y)* дает совокупность направлений (поле направлений) на плоскости *Oxy*. Таково геом. истолкование ДУ 1го порядка.
Решение *y'=f(x,y)* удовлетворяющее данным условиям (напр. $y|_{x=1}=1$) называется задачей Коши, или начальной задачей.
<u>Теорема</u>(о существовании и единственности решения задачи Коши):
Если функция *f(x,y)* **(1)** и ее частная производная непрерывны в некоторой области *D*, которая которая содержит произвольную точку $M_0(x_0,y_0)$, то существует единственная функция *y=φ(x)* являющаяся решением задачи Коши и удовлетворяющая начальному условию.
<u>Замечание:</u> эта теорема носит локальный характер. Она гарантирует единственность решения *y=ф(x)* уравнения **(1)** только в достаточно малой окрестности .
<u>Общим решением</u> ДУ **(1)** называется функция *y=ф(x,c)* зависящих от переменной x и одной произвольной постоянной *c* такое что:
1)функция *ф(x;c)* является решением ДУ при каждом фиксированном значении *c*.
2)каково бы ни было начальное условие, можно найти такое значение постоянной $c=c_0$, что функция $y=ф(x;c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.
<u>Частным решением</u> ДУ 1го порядка называется любая функция $y=ф(x, c_0)$, полученная из общего решения *y=ф(x,c)* при конкретном значении постоянной $c=c_0$.
Решение ДУ *y=ψ(x,y)* называется <u>особым</u>, если в каждой его точке нарушается свойство единственности, т.е. существует и другое решение ур-я **(1).**

Вопрос 2: **ДУ 1го порядка с разделяющимися переменными, однородные ДУ**.

Наиболее простым ДУ является уравнение с разделенными переменными:

$P(x)*dx+Q(y)*dy=0$ **(1)** проинтегрировав почленно получаем $\int P(x)dx+\int Q(y)dy=c$

Более общий вид описывают уравнения с разделяющимися переменными:

$P1(x)*Q1(y)*dx+P2(x)*Q2(y)*dy=0$

Такое уравнение легко сводится к **(1)** путем почленного деления на $Q1(y)*P2(x)\neq 0$ получаем:

$\frac{P1(x)}{P2(x)}\cdot dx+\frac{Q2(y)}{Q1(y)}\cdot dy=0$ и соответственно интегрируем по частям.

Замечания: **1)** при проведении почленного деления ДУ на $Q1(y)*P2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить $Q1(y)*P2(x)=0$ и получить из него особые решения.

2) $y'=f1(x)*f2(y)$ так же сводится к таким уравнениям. Надо положить $y'=dy/dx$.

3) $y'=f(ax+by+c)$; $u=ax+by+c$; диф-ем по x, получаем: $\frac{du}{dx}=a+b\cdot\frac{dy}{dx}$; $\frac{du}{dx}=a+b\cdot f(u)$;

$\frac{du}{a+b\cdot f(u)}=dx$; интегрируем и получаем общий интеграл исходного уравнения.

Однородные ДУ.

Ф-я $f(x,y)$ называется однородной ф-ей n-го порядка, если $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$

ДУ наз. Однородным, если ф-я $f(x,y)$ есть однородная ф-я нулевого порядка.

Однородное ДУ можно писать в виде $y'=\phi(y/x)$ **(2).**

Если $f(x,y)$ однородная ф-я нулевого порядка, то $f(x,y)=f(tx,ty)$, положим $t=1/x$;

$F(x,y)=f(x/x;y/x)=f(1;y/x)=\phi(y/x)$; осуществляем замену переменных: $y/x=u$ **(3)**; и подставив $y=ux$ и $y'=u'x+u$ в уравнение **(2)** получаем $u'x+u=\phi(u)$ или $x*du/dx=\phi(u)-u$, т.е. уравнение с разделяющимися переменными. Найдя его общее решение заменим u на y/x.

Однородное ДУ часто задается в форме $P(x,y)*dx+Q(x,y)*dy=0$ ДУ будет однородным если P и Q однородные ф-и одинакового порядка. Подстановка **(3)** преобразует это уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Вопрос 3: Линейные ДУ 1-го порядка, метод Бернулли, метод Лагранжа(метод вариации произвольной постоянной). Уравнение Бернулли.

Линейные ДУ: $y'+p(x)*y=g(x)$;

Метод Бернулли: $y=u*v$; $y'=u'v+uv'$; подставляем: $u'v+uv'+p(x)uv=g(x)$; $u'v+u(v'+p(x)v)=g(x)$ **(1)**; положим $v'+p(x)v=0$, выражаем $v e^{-\int p(x)dx}=$ подставляем в**(1)** $u'*e^{-\int p(x)dx}=g(x)$;

$du=g(x)*e^{\int p(x)dx}$; $u=\int g(x)*e^{\int p(x)dx}+c$;

$y=u*v=(\int g(x)*e^{\int p(x)dx}+c)*e^{-\int p(x)dx}$.

Метод Лагранжа.

Решаем $y'+p(x)*y=0$ **(2)** с помощью разделяющихся переменных получаем $y=c*e^{-\int p(x)dx}$; **(3)** положим $c=c(x)$; от всего этого находим производную y' и подставляем в исходное уравнение **(2)**. Получаем: $c'(x)*e^{-\int p(x)dx}=g(x)$; $c(x)=\int g(x)*e^{\int p(x)dx}+c$; подставим в **(3)** и получим $y=(\int g(x)*e^{\int p(x)dx}+c)*e^{-\int p(x)dx}$. Та же формула была получена методом Бернулли.

Уравнение Бернулли. $y'+p(x)*y=g(x)*y^n$; $n\neq 0;1$; $n\in R$; **(4)** если n=0 – линейное; если n=1 – однородное с разделяющимися переменными.

Разделим **(4)** на $y^n\neq 0$; получим $y^{-n}*y'+p(x)*y^{-n+1}=g(x)$; обозначим $y^{-n+1}=z$; $z'=(1-n)*y^{-n}*y'$; отсюда $y^{-n}*y'=z'/(1-n)$; тогда $z'/(1-n)+p(x)*z=g(x)$ – линейное относительно z.

Вопрос 4: ДУ в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Уравнение M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 **(1)** называется уравнением в полных дифференциалах, если левая его часть есть полный диф-ал некоторой ф-и u(x,y), т.е. M(x,y)dx + N(x,y)dy =du(x,y). du(x,y)=0, а u(x,y)=c (2). Необходимое и достаточное условие для того, чтоб исходное выражение являлось полным дифференциалом: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (3);

((необходимость доказывается через повторное взятие частных производных: P=δu/δx; Q=δu/δy(4) Достаточность: интегрированием 1го по x, затем дифференцирование по y, прировнять к Q, выразить свободный член и найти его, и подставить в интегрированое.))

Функцию u можно найти по формуле $u(x,y)=\int\limits_{M_0^\frown M} M(x,y)dx+N(x,y)dy$.

Т.о. для решения выр-я вида (1) сначала проверяем выполнение (3) затем решаем(4) - находим u(x,y). решение записываем виде (2).

<u>Интегрирующим множителем</u> $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется такая функция $g(x,y)$, после умножения на которую дифференциальное уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах. Если функции M и N в уравнении имеют непрерывные частные производные и не обращаются в ноль одновременно, то интегрирующий множитель существует.

Вопрос 4б: ДУ Лагранжа и Клеро.

<u>Уравнением Лагранжа</u> называется дифференциальное уравнение, линейное относительно *x* и *y*, коэффициенты которого являются функциями от *y'*. $P(y')x+Q(y')y+R(y')=0$

Для нахождения общего решение применяется подстановка *p = y'*.

$$y=xf(p)+\varphi(p),\quad f(p)=-\frac{P(y')}{Q(y')},\quad \varphi(p)=-\frac{R(y')}{Q(y')}.$$

Дифференцируя это уравнение,с учетом того, что $dy=pdx$, получаем:

$$pdx=f(p)dx+xf'(p)dp+\varphi'(p)dp.$$

Если решение этого (линейного относительно *x*) уравнения есть $x=F(p,C)$, то общее решение уравнения Лагранжа может быть записано в виде: $\begin{cases} x=F(p,C) \\ y=xf(p)+\varphi(p)=F(p,C)f(p)+\varphi(p) \end{cases}$ -особое решение.

<u>Уравнением Клеро</u> называется уравнение первой степени (т.е. линейное) относительно функции и аргумента вида: $y=xy'+\varphi(y')$.

Вообще говоря, уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа.

С учетом замены $y'=p$, уравнение принимает вид: $y=xp+\varphi(p)$.

$$y'=p+x\frac{dp}{dx}+\varphi'(p)\frac{dp}{dx};\quad p=p+x\frac{dp}{dx}+\varphi'(p)\frac{dp}{dx};\quad [x+\varphi'(p)]\frac{dp}{dx}=0;$$

Это уравнение имеет два возможных решения: $dp=0$ или $x+\varphi'(p)=0$.

В первом случае: $p=c;\quad y=cx+\varphi(c)$

Видно, что общий интеграл уравнения Клеро представляет собой семейство прямых линий.Во втором случае решение в параметрической форме выражается системой уравнений: $\begin{cases} y=xp+\varphi(p) \\ x+\varphi'(p)=0 \end{cases}$ Исключая параметр *p*, получаем второе решение F(x, y) = 0. Это решение не содержит произвольной постоянной и не получено из общего решения, следовательно, не является частным решением. Это решение будет являться особым интегралом.

Вопрос5: ДУ **высших порядков, допускающие понижения порядка**.

Дифференциальным уравнением порядка *n* называется уравнение вида:

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ некоторые: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Решение удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ Нахождение решения удовл. начальным условиям , называется решением задачи Коши**.**

Теорема Коши**.** (Теорема о существовании и единственности задачи Коши). *Если функция (n-1) –й переменных вида* $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *в некоторой области D (n-1)- мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по* $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ *, то какова бы не была точка (* $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ *) в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$*, определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0*, удовлетворяющее начальным условиям .*

Частным решением уравнения на интервале (***a***, ***b***) (конечном или бесконечном) называется любая ***n*** раз дифференцируемая функция $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$, удовлетворяющая этому уравнению, т.е. обращающая уравнение на этом интервале в тождество.

Общим решением (общим интегралом) уравнения называется такое соотношение $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \dots, \boldsymbol{C}_n) = 0$, что:

1. Любое решение $\boldsymbol{y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)}$ этого соотношения относительно ***y*** (для набора постоянных $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, …, $\boldsymbol{C}_n$ из некоторой области ***n***-мерного пространства) является частным решением уравнения ;

2. Любое частное решение уравнения может быть получено из общего решения $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2, \dots, \boldsymbol{C}_n) = 0$ при некотором наборе постоянных $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, …, $\boldsymbol{C}_n$.

Уравнения, допускающие понижение порядка:

1Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int dx \int dx \dots \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n;$$

2.Порядок уравнения вида $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^{(k)}, \boldsymbol{y}^{(k+1)}, \boldsymbol{y}^{(k+2)}, \dots, \boldsymbol{y}^{(n)}) = 0$, не содержащего функции $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ и ***k*** - 1 младшую производную этой функции в явном виде, может быть понижен ровно на ***k*** единиц введением новой неизвестной функции $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}^{(k)}(\boldsymbol{x})$. Тогда $\boldsymbol{z' = y^{(k+1)}, z'' = y^{(k+2)}}, \dots, \boldsymbol{z}^{(n-k)} = \boldsymbol{y}^{(n)}(\boldsymbol{x})$, и относительно $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$ уравнение примет вид $\boldsymbol{F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0}$, т.е. будет уравнением ***n*** - ***k***-го порядка. После нахождения $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$ последовательным интегрированием решается уравнение $\boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$.

3. Порядок уравнения $\boldsymbol{F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0}$, может быть понижен. Для этого вводится новая функциональная зависимость $\boldsymbol{y'}$ от ***y***: $\boldsymbol{y' = p(y)}$.

$$\boldsymbol{y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(p(y(x)))}{dx} = \frac{d(p(y))}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'(y) \cdot y'(x) = p'(y) \cdot p(y) = p' \cdot p}$$

$$\boldsymbol{y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d(p'(y) \cdot p(y))}{dx} = \frac{d(p'(y))}{dx} p(y) + p'(y) \frac{d(p(y))}{dx} = \left(\frac{d(p'(y))}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right) p(y) +}$$

$$\boldsymbol{+ p'(y) \frac{dp(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p''(y) \cdot p(y) \cdot p(y) + p'(y) \cdot p'(y) \cdot p(y) = p''(y) \cdot (p(y))^2 + (p'(y))^2 \cdot p(y) =}$$

$$\boldsymbol{= p'' p^2 + p'^2 p.}$$

получим $\boldsymbol{F(y, p, pp') = 0}$. После нахождения $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{C}_1)$ решается уравнение $\boldsymbol{y' = p(y, C_1)}$, решение которого $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2)$ будет общим решением исх. уравнения.

Вопрос 6: ЛОДУ n-го порядка, свойства решений.

Дифференциальное уравнение порядка n вида

$y^{(n)}(x) + p_1(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)\, y'(x) + p_n(x)\, y(x) = f(x),$ (1)

где коэффициенты уравнения $p_i(x)(i = 1, 2, ..., n)$ и правая часть $f(x)$ – заданные функции, а $y(x)$ – неизвестная функция, называется <u>линейным</u>.

Линейное уравнение (1) называется <u>однородным</u>, если $f(x)=0$, и <u>неоднородным</u> в противном случае.

<u>Теорема 1</u>

Если в линейном дифференциальном уравнении (1) все коэффициенты $p_i(x)$ ($i = 1, 2, ..., n$) и правая часть $f(x)$ непрерывны в интервале (a, b), то при любом $x_0 \hat{I}$ (a, b) существует единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$y(x_0) = y_0, \quad y¢(x_0) = y_{01}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0(n-1).}$ (2)

Обозначим левую часть уравнения (1) через $L_n[y(x)]$, тогда это уравнение можно записать в виде $L_n[y(x)] = f(x)$ (3); а в случае однородного уравнения $L_n[y(x)] = 0$ (4)

$L_n[y(x)]$ называется <u>линейным дифференциальным оператором</u> (ЛДО) и задает однозначное соответствие между множеством n раз дифференцируемых функций и множеством непрерывных функций в случае, если ЛДУ удовлетворяет теореме 1.

Название «линейный» обусловлено тем, что $L_n[y(x)]$ удовлетворяет двум свойствам:

1) $L_n[y(x)+h(x)] = L_n[y(x)] + L_n[h(x)],$

2) $L_n[c\, y(x)] = c\, L_n[y(x)]$ (c- const).

Свойства решений ЛОДУ:

1)y(x)==0 – решение;

2)если y –решение, то c*y – решение;

3)если y1,y2 – решения, то y1+y2 – решение =>если y1,y2,…yn – решения, то их линейная комбинация также является решением. (c1y1+c2y2+…)

Вопрос 7: Линейно зависимые и линейно независимые системы функций.

<u>Определитель Вронского</u>**.** Пусть $y_1,\ldots,y_n$ - функции, имеющие все производные до $(n-1)$-го порядка включительно. *Определителем Вронского* $W=W(x)$ функций $y_1,\ldots,y_n$ называется величина $W=\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ (3).

<u>Определение.</u> Пусть $y_1,\ldots,y_m$ определены ны интервале $(a;b)$. Мы назовем их *линейно зависимыми*, если существуют постоянные $c_1,\ldots,c_m$, не все равные 0, такие, что для всех $x\in(a;b)$ $c_1y_1+\ldots+c_my_m=0$ (4).

Функции, линейная комбинация которых =0, называются *линейно независимыми*. Линейная независимость означает, что из равенства (4) следует, что $c_1=c_2=\ldots=c_m=0$.

<u>Теорема 5</u>**.** Если $y_1,\ldots,y_n$ - линейно зависимы и имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно, то $W(x)\equiv 0,\ x\in(a;b)$.

<u>Доказательство.</u> По условию, существуют не все равные 0 числа $c_1,\ldots,c_n$ такие, что на $(a;b)$ выполняется тождество $c_1y_1+\ldots+c_ny_n\equiv 0$ (5). Взяв производную от обеих частей, получим: $c_1y_1'+\ldots+c_ny_n'\equiv 0$ (6). Аналогично, $c_1y_1''+\ldots+c_ny_n''\equiv 0$, (7)

…

$c_1y_1^{(n-1)}+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}\equiv 0$ (8).

Рассмотрим произвольное $x\in(a;b)$. Равенства (5) – (8) можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $c_1,\ldots,c_n$. Поскольку эта система имеет нетривиальное решение $c_1,\ldots,c_n$ (это означает, что не все $c_1,\ldots,c_n$ равны 0), ее определитель $W(x)$ должен быть равен 0, т.е. $W(x)\equiv 0,\ x\in(a;b)$.

Обратная теорема в общем случае неверна. Рассмотрим, например, функции $y_1=\begin{cases} x^2, x\ge 0 \\ 0, x<0 \end{cases}$, $y_2=\begin{cases} 0, x\ge 0 \\ x^2, x<0 \end{cases}$, для которых $y_1'=\begin{cases} 2x, x\ge 0 \\ 0, x<0 \end{cases}$, $y_2'=\begin{cases} 0, x\ge 0 \\ 2x, x<0 \end{cases}$ и их определитель Вронского $y_1'=\begin{cases} 2x, x\ge 0 \\ 0, x<0 \end{cases}$, $y_2'=\begin{cases} 0, x\ge 0 \\ 2x, x<0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'=\begin{cases} x^2\cdot 0-0\cdot 2x, x\ge 0 \\ 0\cdot 2x-x^2\cdot 0, x<0 \end{cases}$ тождественно равен 0.

Однако если $c_1y_1+c_2y_2\equiv 0$, то при любом $x>0$ получаем $c_1x^2=0$, откуда $c_1=0$, а при любом $x<0$ получаем $c_2x^2=0$, откуда $c_2=0$. Поэтому функции y_1 и y_2 линейно независимы.

<u>Теорема 6</u>**.** Если $y_1,\ldots,y_n$ являются решением уравнения (2) и в некоторой точке $x_0\in(a;b)$ $W(x_0)=0$, то $y_1,\ldots,y_n$ линейно зависимы на $(a;b)$ (и, следовательно, $W(x)\equiv 0,\ x\in(a;b)$).

Вопрос 8: **ЛОДУ n-го порядка. Фундаментальная система решений (ФСР), структура общего решения.** (см воп 6)

ФСР:

Определение. Любые n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ного порядка называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Теорема 7. Решения $y_1,\ldots,y_n$ уравнения (2) образуют фундаментальную систему решений этого уравнения тогда и только тогда, когда их определитель Вронского $W(x)$ отличен от 0 хотя бы в одной точке $x_0 \in (a;b)$.

Теорема 9. Пусть $y_1,\ldots,y_n$ - фундаментальная система решений уравнения (2). Тогда для любого решения y этого уравнения существуют постоянные $c_1,\ldots,c_n$ такие, что $y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$.

Замечание. Теоремы 8 и 9 означают, что размерность векторного пространства решений уравнения (2) равна n, а любая фундаментальная система решений представляет собой базис этого пространства.

$y = c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$ - общее решение ЛОДУ. С – произвольные постоянные.

Вопрос 9: **ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение, структура общего решения.**

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ или, короче, $L(y) = 0$ будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$.

Т.к. $y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}; \quad \ldots \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то $L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n)$.

. При этом многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n$ называется характеристическим многочленом дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы $L(e^{kx}) = 0$; т.е. $e^{kx} F(k) = 0$.

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется характеристическим уравнением. Как и любое алгебраическое уравнение степени n, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет n корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов k характеристическое уравнение может иметь либо n различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx};

б) каждому действительному корню кратности m ставится в соответствие m решений:

$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{kx}$.

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения:

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Вопрос 10: ЛНДУ n-го порядка. Структура общего решения, метод Лагранжа(метод вариации произвольных постоянных.

ЛНДУ: $y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x),$

где $y = y(x)$ — неизвестная функция, $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_{n-1}(x)$, $a_n(x)$, $f(x)$ — известные, непрерывные.

Выражение $y(x)= c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + ... + c_n\, y_n(x) + y_ч(x)$

называется *общим решением* линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.

Теорема 14.5.9.2 о наложении решений. Если $\boldsymbol{y}_{1,чн}(\boldsymbol{x})$ - частное решение неоднородного уравнения $\boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_{2,чн}(\boldsymbol{x})$ - частное решение неоднородного уравнения $\boldsymbol{L_n}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$, то функция $y(x) = \alpha_1 y_{1,чн}(x) + \alpha_2 y_{2,чн}(x)$ является частным решением неоднородного уравнения $L_n(y) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$

Метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных) решения неоднородного уравнения. этот метод работает, если известна фундаментальная система решений линейного уравнения

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x); \qquad (29)$$

Пусть $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$ - ФСР соответствующего однородного уравнения

$$y'' + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0; \qquad (30)$$

$\boldsymbol{y}_{оо}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1\, \boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2\, \boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$ - общее решение однородного уравнения (30). предполагая, что постоянные $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$ - не постоянные, а функции, зависящие от $\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{x}$

$$y'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) = \left[C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)\right] + \left[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\right] \qquad (31)$$

.. Для того, чтобы в выражении для второй производной $y''(x)$ не участвовали вторые производные функций $\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{x})$, положим $C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$;

$$y''(x) = \left[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\right]' = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Подставляем выражения для $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ и её производных в уравнение (29):

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) + p_1(x)\left[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\right] + p_2(x)\left[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\right] = f(x).$$

Преобразуем:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)\left[y_1''(x) + p_1y_1'(x) + p_2y_1(x)\right] + C_2(x)\left[y_2''(x) + p_1y_2'(x) + p_2y_2(x)\right] = f(x).$$

Выражения в квадратных скобках раны нулю, так как функции $\boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$ - решения однородного уравнения (30), поэтому окончательно

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).; \qquad (32)$$

Уравнения (31),(32) дают замкнутую систему для функций $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x); \end{cases} \qquad (33)$$

система имеет единственное решение $C_1'(x)$, $C_2'(x)$. Находя это решения, получим $\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{x})$, а значит, и общее решение неоднородного уравнения (29) $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1\, \boldsymbol{y}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}_2\, \boldsymbol{y}_2(\boldsymbol{x})$.

Вопрос 11:**Линейные неоднородные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Структура частного и общего решения**.

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \qquad (51.10)$$

Для уравнений с постоянными коэффициентами (51.10) существует более простой способ нахождения y^*, если правая часть $f(x)$ уравнения (51.10) имеет так называемый «специальный вид»:

I. $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$

или

II. $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x)$.

Суть метода, называемого *методом неопределенных коэффициентов*, состоит в следующем: по виду правой части $f(x)$ уравнения (51.10) записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в уравнение (51.10) и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Случай 1. Правая часть (51.10) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $P_n(x)$ — многочлен степени n. Уравнение (51.10) запишется в виде

$$\boxed{y'' + p \cdot y' + q \cdot y = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}.} \qquad (51.11)$$

В этом случае частное решение y^* ищем в виде:

$$\boxed{y^* = x^r \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x},} \qquad (51.12)$$

где r — число, равное кратности α как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ (т.е. r — число, показывающее, сколько

β — действительные числа. Уравнение (51.10) запишется в виде

$$\boxed{y'' + py' + qy = e^{\alpha x} \cdot \big(P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x\big).} \qquad (51.14)$$

Можно показать, что в этом случае частное решение y^* уравнения (51.14) следует искать в виде

$$\boxed{y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot \big(M_l(x) \cdot \cos\beta x + N_l(x) \cdot \sin\beta x\big),} \qquad (51.15)$$

где r — число, равное кратности $\alpha + \beta i$ как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, $M_l(x)$ и $N_l(x)$ — многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, l — наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т. е. $l = \max(n, m)$.

Замечания.

1. После подстановки функции (51.15) в (51.14) приравнивают многочлены, стоящие перед одноименными тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнения.

2. Форма (51.15) сохраняется и в случаях, когда $P_n(x) \equiv 0$ или $Q_m(x) \equiv 0$.

3. Если правая часть уравнения (51.10) есть сумма функций вида I или II, то для нахождения y^* следует использовать теорему 51.2 о наложении решений.

Вопрос 12: **Нормальные системы ДУ 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши, Метод исключения**. Определение. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется нормальной системой дифференциальных уравнений.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1)$$

Теорема. (Теорема Коши). Если в некоторой области (n-1) –мерного пространства функции $f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, … $f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, \dots, y_n$, то для любой точки $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ этой области существует единственное решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, … $y_n = \varphi_n(x)$ системы дифференциальных уравнений вида (1), определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальным условиям $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$.

Задача Коши: найти решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям.

Определение. Общим решением системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, … $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

13.Числовые ряды. Сумма ряда, необходимый признак сходимости, ряд геометрической прогрессии.

Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости ряда.

Если существует конечный предел $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то его называют суммой ряда и говорят, что ряд сходится.

Геометрическая прогрессия: $S_n=\dfrac{a-aq^n}{1-q}$;

Если $|q|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-q}$;

Если $|q|>1$ ряд расходится;

Если $q=1$ $S_n=na$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, то есть ряд расходится;

Если $q=-1$ ряд расходится.

Теорема1: Если сходится ряд, получившийся из данного ряда отбрасыванием нескольких его членов, то сходится и сам данный ряд. Обратно, если сходится данный ряд, то сходится и ряд, получившийся из данного отбрасыванием нескольких членов.

Теорема2: Если ряд $a_1+a_2+\cdots$ сходится и его сумма равна S, то ряд $ca_1+ca_2+\cdots$, где с – какое-либо фиксированное число, также сходится и его сумма равна cS.

Теорема3: Если ряды $a_1+a_2+\ldots$ и $b_1+b_2+\cdots$ сходятся и их суммы соответственно равны Sa и Sb, то ряды $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots$ и $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots$ тоже сходятся и их суммы соответственно равны Sa+Sb и Sa-Sb.

Необходимый признак сходимости ряда:

Если ряд сходится, то его n-ый член стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Доказательство: Пусть ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\cdots$ сходится, то есть имеет место равенство $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Но тогда имеет место также равенство $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=S$, так как при $n\to\infty$ и $n-1\to\infty$.

Вычитая почленно из первого равенства второе получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n-\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}=0$ или $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$, но $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$, что и требовалось доказать.

14.Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, признаки сравнения, предельные признаки Даламбера, Коши, интегральный признак Коши.

Признаки сравнения. Признак Даламбера. Обычный признак сравнения.

Пусть имеем два ряда с положительными членами

$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ (1) и $v_1+v_2+v_3+...+v_n+...$ (2), для которых выполняется условие: $u_n \le v_n$. Тогда из сходимости ряда 2 следует сходимость ряда 1;

из расходимости ряда 1 следует расходимость ряда 2.

Предельный признак сравнения.

Имеем два ряда $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ (1) и $v_1+v_2+v_3+...+v_n+...$ (2).

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Если L существует, то оба ряда сходятся одновременно.

Пусть ряд 2 сходится, тогда по обычному признаку сравнения сходится и ряд 1.

Имеем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$:

1) $p>1$ ряд сходится

2) $p\le 1$ ряд расходится.

Признак Даламбера.

Если в ряду с положительными членами $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ отношение (n + 1)-го члена к n-му при $n\to\infty$ имеет конечный предел l, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то

ряд сходится в случае $l<1$;

ряд расходится в случае $l>1$;

3) в случае $l=1$ ответа о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.

Радикальный признак Коши. ???

Если для ряда с положительными членами $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$ величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел l при $n\to\infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то в случае $l<1$ ряд сходится; в случае $l>1$ ряд расходится; 3) в случае $l=1$ ответа о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.

Доказательство:

Пусть $l<1$. Рассмотрим число q, удовлетворяющее соотношению $l<q<1$. Начиная с некоторого номера n=N будет иметь место соотношение $\left|\sqrt[n]{u_n}-l\right|<q-l$. Отсюда следует, что $\sqrt[n]{u_n}<q$ или $u_n<q^n$ для всех $n\ge N$. Рассмотрим теперь два ряда: $u_1+u_2+u_3+...+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+...$ (1) и $q^N+q^{N+1}+q^{N+2}+...$ (2). Ряд 2 сходится, так как его члены образуют убывающую геометрическую прогрессию. Члены ряда 1, начиная с u_N, меньше членов ряда 2. Следовательно, ряд 1 сходится.

Пусть $l>1$. Тогда, начиная с некоторого номера n=N будем иметь $\sqrt[n]{u_n}<q$ или $u_n>1$. Но если все члены рассматриваемого ряда, начиная с u_N, больше 1, то ряд расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Интегральный признак Коши.

Пусть члены ряда $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ положительны и не возрастают, то есть $u_1 \geq u_2 \geq ...$ и пусть f(x) – такая непрерывная не возрастающая функция, что $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, $f(1) = u_1$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и исходный ряд;

если указанный интеграл расходится, то расходится и исходный ряд.

Доказательство:

1) Предположим, что интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то есть имеет конечное значение. Так как $\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx$, то $S_n < S_{n+1} < \int_1^{\infty} f(x)dx + u_1$, то есть частичная сумма Sn остается ограниченной при всех значениях n. Но при увеличении n она возрастает, так как все члены u_n положительны. Следовательно, Sn при $n \to \infty$ имеет конечный придел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то есть ряд сходится.

2) Предположим далее, что $\int_1^{\infty} f(x)dx = \infty$. Это значит, что $\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{\infty} f(x)dx$ неограниченно возрастает при возрастании n. Но тогда Sn также неограниченно возрастает при возрастании n, то есть ряд расходится.

15. Знакочередующиеся числовые ряды. Достаточный признак сходимости Лейбница

Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.

Теорема Лейбница: Если в знакочередующемся ряду $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$, где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ положительны, члены таковы, что $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Доказательство: Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда. $S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m})$ По условию 1 выражение в каждой скобке положительно. Следовательно, сумма S_{2m} положительна и возрастает с возрастанием m.

Запишем теперь эту же сумму так: $S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}$ По условию 1 каждая из скобок положительна. Поэтому в результате вычитания этих скобок из u_1 мы получим число, меньшее u_1. Таким образом, мы установили, что S_{2m} при возрастании m возрастает и ограничена сверху. Отсюда следует, что S_{2m} имеет предел S

$\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, причем $0 < S < u_1$. Однако сходимость еще не доказана. Мы доказали только, что последовательность четных частичных сумм имеет пределом число S. Докажем теперь, что нечетные частичные суммы также стремятся к пределу S. Рассмотрим для этого сумму $n = 2m+1$ первых членов исходного ряда. $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Так как по условию 2 теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2m+1} = 0$, то следовательно $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} + \lim\limits_{m\to\infty} u_{2m+1} = \lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$ Тем самым мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при четном n, так и при нечетном. Следовательно, исходный ряд сходится.

! Теорема Лейбница справедлива, если условия выполняются с некоторого N.

16. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся числовых рядов

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Теорема1. Если знакопеременный ряд $u_1 + u_2 \ldots + u_n + \ldots$ таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$ сходится, то и данный знакопеременный ряд также сходится.

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Если же знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов расходится, то данный ряд называется условно или не абсолютно сходящимся рядом.

17.Функциональные ряды, сходимость, область сходимости функционального ряда.

Ряд называется **функциональным**, если его члены являются функциями от x.
Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называют **областью сходимости этого ряда**.

18. Равномерная сходимость функциональных рядов. Достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

Функциональный ряд называется **равномерно сходящимся** на отрезке [a; b], если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n \geq N$ будет выполняться неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для любого x их отрезка [a; b].

Признак Вейерштрассе.

Пусть есть функциональный ряд. Если для него справедливо неравенство $|u_n(x)| \leq a_n$ и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ при $a_n \geq 0$сходится в некоторой области D, то в этой области ряд сходится равномерно.

19.Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

Непрерывность суммы.
В области равномерной сходимости сумма ряда $S(x)$ есть ф-я непрерывная.

Следствие: если функциональный ряд в некоторой области $Д$ сходится равномерно то в этой области возможен предельный переход: $\lim\limits_{x \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x)$.

В области равной сходимости функциональных рядов их можно почленно интегрировать.

$\forall CD$

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt .$$

Равномерносходящиеся ряды в области равной сходимости можно почленно дифффериенцировать.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) .$$

20. Степенные ряды. Область сходимости, радиус сходимости, интервал сходимости. Свойства степениых рядов.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ - постоянные числа, называемые коэффициентами ряда.

Теорема Абеля.

Если степенной ряд сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком x, для которого $|x| < |x_0|$.

Если ряд расходится при некотором значении x_0, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_0^{'}|$.

Доказательство: Так как по предположению числовой ряд $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n + ...$ сходится, то его общий член $a_nx_0^2 \to 0$ при $n \to \infty$, а это значит, что существует такое положительное число М, что все члены ряда по абсолютной величине меньше М.

Перепишем ряд в виде $a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n + ...$и рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов:

$|a_0| + |a_1x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ... + |a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + ...$Члены этого ряда меньше соответствующих членов ряда $M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + ... + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + ...$

При $|x| < |x_0|$ последний ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ и, следовательно, сходится.

Теперь нетрудно доказать и вторую часть теоремы: пусть в некоторой точке x_0 ряд расходится. Тогда он будет расходиться в любой точке x, удовлетворяющей условию $|x| > |x_0^{'}|$. Действительно, если бы в какой-либо точке x-, удовлетворяющей этому условию, ряд сходился, то в силу только что доказанной первой части теоремы он должен был бы сходиться и в точке x_0, так как $|x_0^{'}| < |x|$. Но это противоречит условию, что в точке x_0 ряд расходится. Следовательно, ряд расходится и в точке х. Теорема полностью доказана.

Интервалом сходимости степенного ряда является такой интервал от –R до R, что для всякой точки x, лежащей внутри этого интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится. Число R называют **радиусом сходимости** степенного ряда.

Основные свойства степенных рядов.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad (1)$$

Если $R \neq 0$ ряда (1), то на (-*R;R*) сумма этого рода S – есть ф-я непрерывная.

Док – во:

Возмем $x \in (-R;R)$, тогда $\exists q > 0 : |x| < q < R$, тогда для [-*q;q*]∈(-*R;R*) по теореме Абеля ряд (1) сходится равномерно. Т. к. *x* выбирали произвольно, то ∀*x*∈(-*R;R*) *S* – функция непрерывная.

На интервале сходимости (-*R;R*) операции почленного дифферинцирования и почленного интегрирования не изменяют радиус сходимости.

Док-во.

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (2)$$

$$R_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n a_n}{(n+1)a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$$

$[x_0; x] \in (-R;R)$

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\left(a_n t^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_{x_0}^{x} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tfrac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x_0^{n+1}}{n+1};$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x_0}{n+1}$ - сходится, т. к. – « - $< \left|a_n x_0^{n+1}\right|$

$$R_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n (n+2)}{a_{n+1}(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\right| = R$$

Если *R*≠0, то ∀*x*∈(-*R;R*) ряд (1) можно почленно дифферинцировать.

Следствие: степенной ряд можно почленно дифферинцировать сколько угодно раз, при этом *R* не изменится.

Степенные ряды в (-*R;R*) можно почленно интегрировать.

21. Ряды Тейлора и Маклорена, Достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора

Ряд Тейлора. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.

Пусть ф-я $f(x)$ является бесконечно дифферienцируемой, тогда этой ф-и можно поставить в соответствие ряд

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$+\ldots\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (4)$$

Когда $x_0\neq 0$, то $f(x)\approx f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n+\ldots$ (5)

В интервале сходимости ($-R;R$) сумма этого ряда $S(x)$, но не всегда $f(x)=S(x)$.

Если ряд сходится, то его можно представить в виде $S_n(x)+r_n(x)$ $P_n(x)+R_n(x)$ и $S_n(x)=P_n(x)$, значит $r_n(x)=R_n(x)$ иначе не равны.

Необходимым и достаточным условием сходимости ряда (4) к $f(x)$ является условие

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \quad (6)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$C=x_0+\Theta(x-x_0) \qquad 0<\Theta<1$$

$R_n(x)=\Theta\left((x-x_0)^n\right)$ - форма Пеано.

Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.

Если все производные ограничены одной и той же константой, то ряд Тейлора сходится к ф – и по x.

$$\left|a^{(n)}(x_0)\right|<M$$

$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{n+1}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leq M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}\ M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^{(n+1)}}{(n+1)!}$ - сходится по признаку Даламбера.

У сходящегося общий член ряда $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$, отсюда следует, что $\lim_{n\to\infty}\left|R_n(x)\right|=0$.

Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема и

$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$ Является ли этот ряд рядом Тейлора?

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+na_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=2a_2+6a_3(x-x_0)+12a_4(x-x_0)^2+\ldots+n(n+1)\cdot\cdot a_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n.$$

Пусть $x=x_0$, тогда $f(x_0)=a_0$, $f'(x_0)=a_1$,

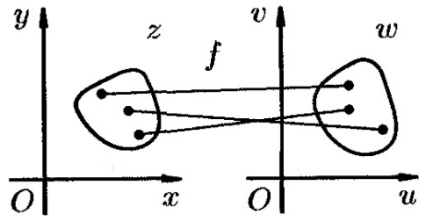
$2a_2=f''(x_0)$ или $a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Rightarrow$

$f(x)$ – ряд **Тейлора**.

22. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Основные понятия

Пусть даны два множества *D* и *E,* элементами которых являются комплексные числа. Числа $z = x + iy$ множества *D* будем изображать точками комплексной плоскости *z*, а числа $w = u + iv$ множества *E* — точками комплексной плоскости *w*



Если каждому числу (точке) *z* € *D* по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число (точка) w € E, то говорят, что на множестве определена *однозначная функция комплексного переменного* $w = f(z)$, отображающая множество *D* в множество E

Если каждому *z* €*D* соответствует несколько значений *w*, то функция $w = f(z)$ называется *многозначной.*

Функцию $w = f(z)$ можно записать в виде

$u + iv = f(x + iy)$, т.е. $f(x + iy) = u(x; y) + iv(x; y)$,

где

$u = u\{x] y) = Ref(z)$ *(действ часть)*, $v = v(x; y) = Imf(z)$ *(мнимая часть)*, $(x; y)$ € *D.*

Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, исключая, может быть, саму точку z_0. Под ***δ-окрестностью точки*** z_0 комплексной плоскости понимают внутренность круга радиуса δ с центром в точке z_0.

Число w_0 называется ***пределом функции*** $w = f(z)$ ***в точке*** z_0 (или при $z \to z_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Это определение коротко можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon) \Longleftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Из определения следует, что если предел w_0 существует, то существуют и пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x; y) = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x; y) = v_0.$$

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке $z = z_0$ и в некоторой ее окрестности. Функция $w = f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Определение непрерывности можно сформулировать и так: функция $f(x)$ непрерывна в точке z_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta f(z) = 0.$$

Функция $f(z)$ непрерывна в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Модуль непрерывной функции комплексного переменного обладает теми же свойствами, что и непрерывная функция действительного переменного (см. теорема 43.1).

23. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитические функции.

Условия Коши-Римана

Теорема 74.1. Если функция $w = u(x;y) + iv(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки $z = x + iy$, причем в этой точке действительные функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции $w = f(z)$ в точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{74.5}$$

С учетом условий Эйлера–Даламбера (74.5) производную дифференцируемой функции $f(z)$ можно находить по формулам

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \\ f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{74.6}$$

Правила дифференцирования функций действительного переменного справедливы и для функций комплексного переменного, дифференцируемых в точке z. Это означает, что если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ дифференцируемы в некоторой точке z комплексной плоскости, то верно следующее:

1. $\big(f_1(z) \pm f_2(z)\big)' = f_1'(z) \pm f_2'(z)$,

2. $\big(f_1(z) \cdot f_2(z)\big)' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z)$,

3. $\left(\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right)' = \dfrac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)} \quad (f_2(z) \neq 0)$.

4. Если $\varphi(z)$ дифференцируема в точке z, а $f(w)$ дифференцируема в точке $w = \varphi(z)$, то $\big(f(\varphi(z))\big)' = f_\varphi'(\varphi) \cdot \varphi_z'(z)$.

5. Если в некоторой точке z функция $f(z)$ дифференцируема и существует функция $f^{-1}(w)$, дифференцируемая в точке $w = f(z)$, причем $\big(f^{-1}(w)\big)' \neq 0$, то $f'(z) = \dfrac{1}{\big(f^{-1}(w)\big)'}$, где $f^{-1}(w)$ — функция, обратная функции $f(z)$.

Аналитические функции:

Фундаментальным понятием в теории функций комплексного переменного является понятие аналитической функции.

Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической*** (голоморфной) ***в точке*** z, если она дифференцируема (выполнены условия Эйлера–Даламбера) в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется ***аналитической в области*** D, если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Как видно из этого определения, условие аналитичности ***в точке*** не совпадает с условием дифференцируемости функции в этой же точке (первое условие — более сильное).

Дифференцирование функции комплексного переменного:

Точки плоскости z, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются ***правильными*** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются ***особыми*** точками этой функции.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в точке z. Тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$. Отсюда следует, что $\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Тогда приращение функции можно записать так: $\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha \Delta z$. Если $f'(z) \neq 0$, то первое слагаемое $f'(z)\Delta z$ является при $\Delta z \to 0$ бесконечно малой того же порядка, что и Δz; второе слагаемое $\alpha \Delta z$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz. Следовательно, первое слагаемое составляет главную часть приращения функции $w = f(z)$.

Дифференциалом dw аналитической функции $w = f(z)$ в точке z называется главная часть ее приращения, т. е. $dw = f'(z)\Delta z$, или $dw = f'(z)dz$ (так как при $w = z$ будет $dz = z'\Delta z = \Delta z$). Отсюда следует, что $f'(z) = \frac{dw}{dz}$, т. е. производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание. Если функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ аналитична в некоторой области D, то функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа ($\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$, см. п. 72.2).

❑ Действительно, дифференцируя первое из равенств Эйлера–Даламбера по y, а второе по x, получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

откуда $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. ■

Функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ являются *гармоническими функциями.*

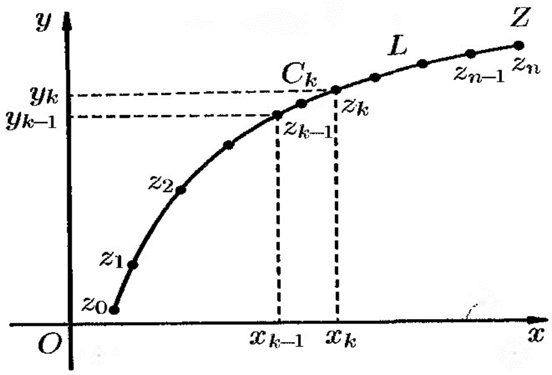
24. Интеграл от функции комплексного переменного. Свойства интеграла. Интегральная теорема Коши (в 25).

Пусть в каждой точке некоторой гладкой кривой L с началом в точке z_0 и концом в точке Z определена непрерывная функция $f(z)$.

Разобьем кривую L на n частей (элементарных дуг) в направлении от z_0 к z точками $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ (см. рис. 287).

В каждой «элементарной дуге» $\widehat{z_{k-1}z_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ выберем произвольную точку C_k и составим интегральную сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Предел такой интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшей из элементарных дуг, если он существует, называется



интегралом от функции $f(z)$ ***по кривой*** (***по контуру***) L и обозначается символом $\int\limits_L f(z)\,dz$. Таким образом,

$$\boxed{\int\limits_L f(z)\,dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k.} \qquad (75.1)$$

Покажем, что если L — гладкая кривая, а $f(z)$ — непрерывная и однозначная функция, то интеграл (75.1) существует.

Действительно, пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, $z = x + iy$, $C_k = \widehat{x}_k + i\widehat{y}_k$. Тогда

$$f(C_k) = u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k) + iv(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k),$$
$$\Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\big(u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k) + iv(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\big)\cdot(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\big(u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta x_k - v(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta y_k\big) + i\sum_{k=1}^{n}\big(v(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta x_k + u(\widehat{x}_k;\widehat{y}_k)\Delta y_k\big).$$

Обе суммы, находящиеся в правой части последнего равенства, являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов (см. п. 56.1).

При сделанных предположениях о кривой L и функции $f(z)$ пределы этих сумм существуют. Поэтому после перехода к пределу (в последнем равенстве) при $\max|\Delta z_k| \to 0$ получим:

$$\boxed{\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L u\,dx - v\,dy + i\int\limits_L v\,dx + u\,dy.} \qquad (75.2)$$

Формула (75.2) показывает, что вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных.

Формулу (75.2) можно записать в удобном для запоминания виде:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u+iv)(dx+i\,dy). \tag{75.3}$$

Если $x=x(t), y=y(t)$, где $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ — параметрические уравнения кривой L, то $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ называют ***комплексным параметрическим уравнением*** кривой L; формула (75.3) преобразуется в формулу

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt. \tag{75.4}$$

Действительно, считая $z(t)$ непрерывной и дифференцируемой функцией, получаем

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{t_1}^{t_2} (u+iv)(x'_t+iy'_t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt.$$

Приведем основные *свойства* интеграла от функции комплексного переменного.

1. $\int_L dz = z - z_0$.

2. $\int_L \big(f_1(z) \pm f_2(z)\big)\,dz = \int_L f_1(z)\,dz \pm \int_L f_2(z)\,dz$.

3. $\int_L af(z)\,dz = a\int_L f(z)\,dz$, a — комплексное число.

4. $\int_L f(z)\,dz = -\int_{L^-} f(z)\,dz$, т. е. при перемене направления пути интегрирования интеграл изменяет свой знак на противоположный (в других обозначениях кривой: $\int_{AB} = -\int_{BA}$).

5. $\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz$, где $L=L_1+L_2$, т. е. интеграл по всему пути L равен сумме интегралов по его частям L_1 и L_2.

6. *Оценка модуля интеграла.* Если $|f(z)| \leqslant M$ во всех точках кривой L, то $\left|\int_L f(z)\,dz\right| \leqslant Ml$, где l — длина кривой L.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(C_k)\Delta z_k| \leqslant M\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \leqslant Ml,$$

где $\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ — длина ломан $z_0z_1z_2\ldots z_n$ вписанной в кривую L.

Теорема 75.1 (Коши). Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от этой функции по любому замкнутому контуру L, лежащему в области D, равен нулю, т. е. $\oint\limits_L f(z)dz = 0$.

Следствие 75.1. Если $f(z)$ — аналитическая функция в односвязной области D, то интеграл от нее не зависит от формы пути интегрирования, а зависит лишь от начальной точки z_0 и конечной точки z пути интегрирования.

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) - F(z_0).$$

25. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши. Теорема о нрон людной аналитической функции.

Теорема 75.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области $\overline{D}$ и L — граница области D. Тогда имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz, \tag{75.5}$$

где $z_0 \in D$ — любая точка внутри области D, а интегрирование по контуру L производится в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки).

Интеграл, находящийся в правой части равенства (75.5), называется ***интегралом Коши***, а сама эта формула называется ***интегральной формулой Коши***.

Формула Коши (75.5) является одной из важнейших в теории функций комплексного переменного. Она позволяет находить значения аналитической функции $f(z)$ в любой точке z_0, лежащей внутри области D через ее значения на границе этой области.

Теорема 75.3. Для всякой дифференцируемой в точке z_0 функции $f(z)$ существуют производные всех порядков, причем n-я производная имеет вид:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz. \tag{75.7}$$

Теорема 75.4. В окрестности каждой точки z_0, где существует производная $f'(z_0)$, функция $f(z)$ может быть представлена сходящимся рядом:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots \tag{75.8}$$

Производная анал. функции также является анал. функцией.

26. Числовые ряды в комплексной области. Исследование на сходимость.

$$\text{Ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{76.1}$$

членами которого являются комплексные числа, называется ***числовым рядом*** (в комплексной области). Ряд (76.1) с комплексными членами $u_n = a_n + ib_n$ можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots + (a_n + ib_n) + \ldots,$$

где a_n и b_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ — действительные числа.

Сумма $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + ib_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + i\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ первых n членов ряда (76.1) называется n-й *частичной суммой ряда.*

Если существует конечный предел S последовательности частичных сумм S_n ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + i \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, то ряд (76.1) называется *сходящимся*, а S — суммой ряда; если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд (76.1) называется *расходящимся.*

Очевидно, что ряд (76.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad (76.2) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$$

При этом $S = S_1 + iS_2$, где S_1 — сумма ряда (76.2), а S_2 — сумма ряда (76.3). Это означает, что исследование сходимости ряда с комплексными членами сводится к исследованию сходимости рядов (76.2) и (76.3) с действительными членами.

имеет производную в точке $x = 0$, а производная этой функции $\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ при $x = 0$ не существует).

Ряд (75.8) называется ***рядом Тейлора*** функции $f(z)$ в точке z_0.

Ряд Тейлора дифференцируемой в точке z_0 функции существует и сходится к самой функции. Ряд же Тейлора для действительной функции $f(x)$ может сходиться к другой функции или быть расходящимся.

Замечание. Формула n-й производной функции $f(z)$ может быть получена из формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \tag{75.9}$$

(в формуле (75.5) заменено z на ξ, z_0 на z) путем последовательного дифференцирования равенства (75.9) по z:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\limits_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi. \tag{75.10}$$

Формулы (75.5) и (75.7) можно использовать для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

Пример 75.3. Вычислить $\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4}$, где а) L — окружность $|z| = 1$, б) L — окружность $|z - i| = 2$.

○ Решение: а) функция $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ является аналитической в области $|z| \leqslant 1$. В силу теоремы Коши имеем $\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4} = 0$.

б) На рисунке 294 представлена область, ограниченная контуром интегрирования.

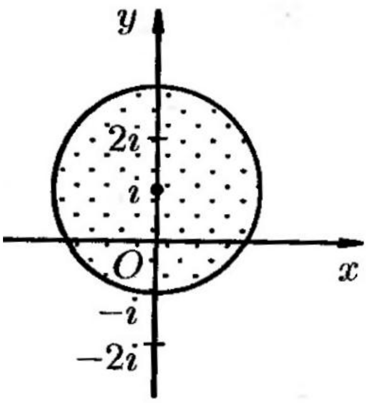


Рис. 294

В этой области $|z - i| \leqslant 2$ находится точка $z = 2i$, в которой знаменатель подынтегральной функции равен нулю. Перепишем интеграл в виде $\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4} = \oint\limits_L \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}\, dz$.

Функция $f(z) = \frac{1}{z+2i}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши (75.5), находим:

$$\oint\limits_L \frac{dz}{z^2+4} = 2\pi i \left(\frac{1}{z+2i} \right) \Big|_{z=2i} = 2\pi i \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$ ●

Пример 75.4. Вычислить $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz$.

○ Решение: Внутри круга и на его границе $|z| = 1$ функция $f(z) = \cos z$ аналитична. Поэтому, в силу формулы (75.7), имеем

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}\, dz = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{(z-0)^{2+1}}\, dz =$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)'' \Big|_{z=0} = \pi i(-\cos z) \Big|_{z=0} = -\pi i.$$ ●

Ряд Тейлора

Теорема 76.4. Всякая аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ может быть единственным образом разложена в этом круге в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{76.7}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{76.8}$$

где l_r — произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри круга.

Степенной ряд (76.7) называется *рядом Тейлора* для функции $f(z)$ в рассматриваемом круге.

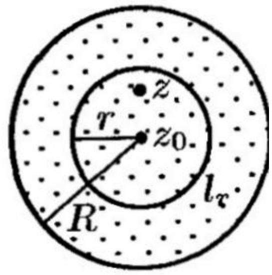


Рис. 295

❑ Возьмем произвольную точку z внутри данного круга и проведем окружность с центром в точке z_0 и радиусом $r < R$ так, чтобы точка z находилась внутри круга $|z - z_0| < r$ (см. рис. 295).

Приведем разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена):

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots,$$

$$(1 + z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} z^3 + \ldots$$

Первые три разложения справедливы во всех точках комплексной плоскости, последние два — в круге $|z| < 1$.

Заменив z на iz в разложении функции e^z, получим:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right),$$

т. е. формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$.

27. Степенные ряды в комплексной области. Ряды Тейлора, Маклорена.

Степенным рядом в комплексной области называют ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{76.5}$$

где c_n — комплексные числа (*коэффициенты ряда*), $z = x + iy$ — комплексная переменная.

Рассматривают также и степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{76.6}$$

который называют рядом по степеням разности $z - z_0$, z_0 — комплексное число. Подстановкой $z - z_0 = t$ ряд (76.6) сводится к ряду (76.5).

Ряд (76.5) при одних значениях аргумента z может сходиться, при других — расходиться.

Совокупность всех значений z, при которых ряд (76.5) сходится, называется ***областью сходимости*** этого ряда.

Основной теоремой теории степенных рядов является теорема Абеля, устанавливающая область сходимости степенного ряда.

Теорема 76.3 (Абель). Если степенной ряд (76.5) сходится при $z = z_0 \neq 0$ (в точке z_0), то он абсолютно сходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| < |z_0|$.

Следствие 76.1. Если ряд (76.5) расходится при $z = z_0$, то он расходится при всех значениях z, удовлетворяющих условию $|z| > |z_0|$ (т. е. вне круга радиуса $|z_0|$ с центром в начале координат).

Из теоремы Абеля следует существование числа $R = |z_0|$ такого, что при всех значениях z, удовлетворяющих неравенству $|z| < R$, степенной ряд (76.5) абсолютно сходится. Неравенству $|z| < R$ удовлетворяют точки комплексной области, лежащие внутри круга радиуса R с центром в точке $z = 0$.

Величина $|z_0| = R$ называется ***радиусом сходимости*** ряда (76.5), а круг $|z_0| < R$ — ***кругом сходимости*** ряда. В круге $|z_0| < R$ ряд (76.5) сходится, вне этого круга — расходится; на окружности $|z_0| = R$ могут располагаться как точки сходимости, так и точки расходимости ряда.

Принято считать, что $R = 0$, когда ряд (76.5) сходится в одной точке $z = 0$; $R = \infty$, когда ряд сходится на всей комплексной плоскости. Кругом сходимости ряда (76.6) является круг $|z - z_0| < R$ с центром в точке $z = z_0$.

Радиус сходимости ряда (76.5) можно вычислить по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$ (или $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$), получаемой после применения признака Даламбера (или Коши) к ряду из модулей его членов исходного ряда.

Приведем (без доказательств) некоторые *свойства* степенного ряда.

1. Сумма степенного ряда внутри круга его сходимости есть аналитическая функция.

2. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать любое число раз. Полученный при этом ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

28. Ряд Лорана (для аналитической функции).

Ряд Лорана — двусторонне бесконечный степенной ряд по целым степеням (z − a), то есть ряд вида
Этот ряд понимается как сумма двух рядов:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$$

— положительная часть ряда Лорана (иногда называется правильной) и

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$$

— отрицательная часть ряда Лорана (иногда называется главной).

При этом ряд Лорана считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся его правильная и главная части.

Свойства

- Если внутренность области сходимости ряда Лорана непуста, то она представляет собой круговое кольцо
  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R < \infty\}$
- Во всех точках своего кольца сходимости *D* ряд Лорана сходится абсолютно;
- Как и для степенных рядов, поведение ряда Лорана в точках граничных окружностей кольца сходимости может быть самым разнообразным;
- На любом компактном подмножестве $K \subset D$ ряд сходится равномерно;
- Сумма ряда Лорана в *D* есть аналитическая функция *f(z);*
- Ряд Лорана можно дифференцировать и интегрировать в *D* почленно;
- Разложение в ряд Лорана единственно, то есть если суммы двух рядов Лорана совпадают в *D*, то совпадают и все коэффициенты этих рядов.
- Коэффициенты an ряда Лорана определяются через его сумму *f(z)* формулами
  $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

где $\gamma(t) = \rho e^t$, , $t \in [0, 2\pi]$ $r < \rho < R$ — любая окружность с центром a, расположенная внутри кольца сходимости.

Теорема Лорана - любая однозначная аналитическая функция *f(z)* в кольце $D = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R < \infty\}$ представима в *D* сходящимся рядом Лорана.
В частности, в проколотой окрестности $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z+b-a| < R < \infty\}$ изолированной особой точки *a* однозначная аналитическая функция *f(z)* представима рядом Лорана, который служит основным инструментом исследования её поведения в окрестности изолированной особой точки.

Тип особой точки определяется главной частью ряда Лорана в кольце с центром в этой точке:

- Устранимая особая точка — главная часть ряда Лорана равна 0.
- Полюс — главная часть содержит конечное число ненулевых членов.
- Существенно особая точка — главная часть содержит бесконечное число ненулевых членов.

29. Нули и изолированные особые точки функции комплексного переменного.

Точка z_0, принадлежащая области комплексных чисел, называется **изолированной особой точкой** функции f(z), если $\exists \delta > 0$ такая, что *f*(z) является однозначной аналитической функцией в $0 < |z - z_0| < \delta$ (в самой точке аналитичность *f*(z) нарушается).
Изолированная особая точка z_0 функции *f*(z) называется:

- устранимой особой точкой, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ существует и конечен;
- полюсом, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
- существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Для того чтобы особая точка функции f(z) была ее **устранимой особой точкой**, необходимо и достаточно, чтобы в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки отсутствовала главная часть. Это означает, что если z_0 - устранимая особая точка,

то ряд Лорана функции f(z) имеет вид: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r$ (1)
для z_0 - конечной точки, принадлежащей области комплексных чисел.

Для того чтобы особая точка функции была **полюсом**, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции в окрестности этой точки содержала конечное число членов.

Ряд Лорана функции f(z) в случае z_0-полюс имеет вид:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} C_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < r \qquad (2)$$

если z_0 принадлежит области комплексных чисел.

Номер старшего члена главной части ряда Лорана функции в ее разложении в окрестности полюса называется **порядком полюса**.
Так, точка z_0 является полюсом порядка n функции f(z), если в разложении (2) , Ck = 0 при k < -n.

Для того чтобы особая точка функции была ее существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции в окрестности этой точки содержала бесконечное число членов. Ряд Лорана функции f(z) в случае z_0 - существенно

особой точки имеет вид: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r$ (3)
если z_0 принадлежит области комплексных чисел.

30. Вычет функции комплексного переменного. Основная теорема о вычетах (теорема Коши).

Вычетом функции f(z) в изолированной особой точке z_0 (точка принадлежит области комплексных чисел) называется интеграл вида: $\frac{1}{2i\pi}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz,$
где γ - контур, принадлежащий окрестности точки z0 и охватывающий ее. Обход контура - положительный, т.е. область ограниченная им и принадлежащая окрестности z_0 при обходе расположена слева: обход против часовой стрелки.

Обозначается вычет $\underset{z_0}{res}\, f(z), \quad \underset{z_0}{res}\, f(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz.$

Вычет функции в конечной изолированной особой точке равен коэффициенту C_{-1} при первой отрицательной степени в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки, т.е. при $1/(z-z_0)$ для z_0, принадлежащей области комплексных чисел: $\underset{z_0}{res}\, f(z) = C_{-1}.$

Основная теорема о вычетах: Если *f* аналитична в некоторой замкнутой односвязной области $\overline{G} \subset \mathbb{C}$, за вычетом конечного числа особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, из которых ни одна не принадлежит граничному контуру ∂G, то справедлива следующая формула:

$$\int\limits_{\partial G} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{1}^{n} \mathrm{res}_{z=a_k} f(z)$$

, где — вычет *f* в точке a_k.
Для использования теоремы в вычислении вещественных интегралов нужно продолжить интегрируемую функцию на комплексную плоскость и найти ее вычеты, что обычно довольно просто сделать. После этого нужно замкнуть контур интегрирования, добавив к вещественному отрезку полуокружность, лежащую в верхней или нижней комплексной полуплоскости. После этого интеграл по этому контуру можно вычислить, использую основную теорему о вычетах. Зачастую интеграл по полуокружности можно устремить к 0, выбрав ее правильным образом, после чего контурный интеграл станет равен вещественному.

Пример

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^2+1}\,dx$$

Интеграл возникает в теории вероятностей при расчете характеристической функции распределения Коши и не поддается вычислению обычными методами. Вычислим его через интеграл по контуру C, указанному на рисунке (a > 1). Интеграл равен

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = \int\limits_{C} \frac{e^{itz}}{z^2+1}\,dz.$$

Так как e^{itz} — целая функция (нет сингулярностей на комплексной плоскости), то функция имеет сингулярности лишь в точках, где $z^2 + 1 = 0$. Т.к. $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$, это возможно лишь при z = i или z = − i. В пределах контура лежит лишь одна из этих точек.

$$\frac{e^{itz}}{z^2+1} = \frac{e^{itz}}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) = \frac{e^{itz}}{2i(z-i)} - \frac{e^{itz}}{2i(z+i)},$$

Вычет f(z) в z = i равен…..

31. Вычисление вычетов. Приложение вычетов для вычисления интегралов.

Правильные или устранимые особые точки. Очевидно, если $z = z_0$ есть правильная или устранимая особая точка функции $f(z)$, то $\operatorname{Res} f(z_0) = 0$ (в разложении Лорана (76.11) в этих случаях отсутствует главная часть, поэтому $c_{-1} = 0$).

Полюс. Пусть точка z_0 является простым полюсом функции $f(z)$. Тогда ряд Лорана для функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \dfrac{c_{-1}}{z-z_0}$. Отсюда $(z-z_0)f(z) = c_{-1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0$

Поэтому, переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).} \tag{77.3}$$

Замечание. Формуле (77.3) для вычисления вычета функции $f(z)$ в простом полюсе можно придать другой вид, если функция $f(z)$ является частным двух функций, аналитических в окрестностях точки z_0.

Пусть $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{g(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, а $g(z)$ имеет простой нуль при $z = z_0$ (т. е. $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$). Тогда, применяя формулу (77.3), имеем: $\operatorname{Res} f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\dfrac{\varphi(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\varphi(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \dfrac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}$, т. е.

$$\boxed{\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi(z)}{g(z)}; z_0\right) = \frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}.} \tag{77.4}$$

Пусть точка z_0 является полюсом m-го порядка функции $f(z)$. Тогда лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \dfrac{c_{-1}}{z-z_0} + \dfrac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \ldots + \dfrac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$. Отсюда

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+m} + c_{-m} + c_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1}.$$

Дифференцируя последнее равенство $(m-1)$ раз, получим:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big((z-z_0)^m f(z)\big) =$$
$$= (m-1)!c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+m)(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+2)(z-z_0)^{n+1}.$$

Переходя здесь к пределу при $z \to z_0$, получаем

$$\boxed{\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\big((z-z_0)^m f(z)\big).} \tag{77.5}$$

Существенно особая точка. Если точка z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для вычисления вычета функции в этой точке определяется коэфф с-1 при разложении в ряд лорана

32. Ортогональные системы функции. Основная тригонометрическая система. Обобщенный ряд Фурье.

Ортогональная система функций, система функций {(j$_n$ (x)}, n = 1, 2,..., ортогональных с весом r (x) на отрезке [a, b], т. е. таких, что $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx = 0$

Тригонометрическая система {1, cos(nx), sin(nx)}; n = 1, 2,..., - Ортогональная система функций с весом 1 на отрезке [-p, p].

$$\int_{-p}^{p} 1\cos(nx)dx = \sin(nx)/n = 0;$$

$$\int_{-p}^{p} 1\sin(nx)dx = -\cos(nx)/n = 0;$$

Если каждая функция j (x) из Ортогональная система функций такова, что $\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\rho(x)dx \equiv N_n = 1$ (условие нормированности), то такая система функций называется **нормированной**. Любую Ортогональная система функций можно нормировать, умножив j (x) на число $1/\sqrt{N_n}$ - нормирующий множитель.

Обобщенный ряд Фурье

Произвольный сигнал s(t) может быть представлен рядом $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(t)\cdot C_n$ где C_n – коэффициенты, зависящие от вида s(t), а u_n – n-я функция выбранного базиса $\{u_n(t)\}$, причем базисные функции на интервале ортогональности должны обладать свойствами:

а) ортогональности $\int_a^b u_n(t)u_k(t)dt = 0$, при $n \neq k$, [a,b] – интервал ортогональности.

б) конечности энергии: $\int_a^b u_n^2(t)dt \neq 0$. Величина этой энергии называется квадратом нормы: $\int_a^b u_n^2(t)dt = \|u(t)_n\|^2$

Коэффициенты обобщенного ряда Фурье определяются по формуле:

$$C_n = \frac{1}{\|u(t)_n\|^2}\int_a^b s(t)u_n(t)dt$$

Если набор базисных функций содержит комплексные функции, то свойства отображаются таким образом: $\int_a^b u_n(t)u_k^*(t)dt = 0$ - для $n \neq k$; здесь $u_k^*(t)$ - функция, комплексно сопряженная u_k(t); , а комплексные коэффициенты ряда определяются соотношением: $\dot{C}_n = \frac{1}{\|u(t)_n\|^2}\int_a^b s(t)u_n^+(t)dt$

33. Тригонометрический ряд Фурье. Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье (условия Дирихле)

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in L_2([-\pi, \pi])$ называют функциональный ряд вида:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

Числа a_0, a_n и b_n ($n = 1, 2, \ldots$) называются коэффициентами Фурье функции f. Формулы для них можно объяснить следующим образом. Предположим, мы хотим представить функцию $f \in L_2([0, 2\pi])$ в виде ряда (1), и нам надо определить неизвестные коэффициенты a_0, a_n и b_n. Если умножить правую часть (1) на cos(kx) и проинтегрировать по промежутку $[-\pi,\pi]$, благодаря ортогональности в правой части все слагаемые обратятся в нуль, кроме одного. Из полученного равенства легко выражается коэффициент a_k. Аналогично для b_k

Ряд (1) сходится к функции f в пространстве $L_2([-\pi,\pi])$. Иными словами, если обозначить через $S_k(x)$ частичные суммы ряда (1):

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

то их среднеквадратичное отклонение от функции f будет стремиться к нулю:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_k(x))^2 dx = 0$$

Несмотря на среднеквадратичную сходимость, ряд Фурье функции, вообще говоря, не обязан сходиться к ней поточечно.

Теорема. (Теорема Дирихле) Если функция f(x) имеет период 2p и на отрезке [-p;p] непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода, и отрезок [-p;p] можно разбить на конечное число отрезков так, что внутри каждого из них функция f(x) монотонна, то ряд Фурье для функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности функции f(x) его сумма равна f(x), а в точках разрыва его сумма равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, т.е. среднему арифметическому предельных значений слева и справа. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).

Функция f(x), для которой выполняются условия теоремы Дирихле называется **кусочно – монотонной** на отрезке [-p;p].

Теорема. Если функция f(x) имеет период 2p, кроме того, f(x) и ее производная f'(x) – непрерывные функции на отрезке [-p;p] или имеют конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке, то ряд Фурье функции f(x) сходится при всех значениях x, причем в точках непрерывности его сумма равна f(x), а в точках разрыва она равна $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. При этом ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, который принадлежит интервалу непрерывности функции f(x).

Функция, удовлетворяющая условиям этой теоремы, называется кусочно – гладкой на отрезке [-p;p].

34. Разложение в ряд Фурье периодических, четных, нечетных функций.

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных ф-ций на интервале $(-\pi;\pi)$**.**

1. Пусть ф-ция f(x) – **четная**, т. е. f(-x)=f(x).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \begin{vmatrix} x=-t \\ f(-t)=f(t) \\ dx=-dt \end{vmatrix} =$$

$$= -\int_{\pi}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

Значит:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

Ряд Фурье для четных ф-ций – ряд только по косинусам

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

2. Пусть ф-ция f(x) – **нечетная**, т. е. f(-x)=-f(x).

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = \begin{vmatrix} x=-t \\ f(-t)=-f(t) \\ dx=-dt \end{vmatrix} =$$

$$= -\int_{\pi}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{0}^{\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Значит:

$$a_0 = 0;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Ряд Фурье для четных ф-ций – ряд только по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Разложение в ряд Фурье функций, заданных на интервале [-l; l]. ?????
Пусть f(x) есть периодическая функция с периодом 2l, вообще говоря, отличным от 2π. Разложим ее в ряд Фурье.

Сделаем замену переменной по формуле: $x = \frac{l \cdot t}{\pi}$.

Тогда функция $f\left(\frac{1}{\pi}t\right)$ будет периодической функцией от t с периодом 2π. Ее можно разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \le x \le \pi$:

$f\left(\frac{1}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot \cos kt + b_k \cdot \sin kt)$, где $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\pi}t\right)dt.$ $a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\pi}t\right) \cdot \cos ktdt;$

$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\pi}t\right) \cdot \sin ktdt.$

Возвратимся теперь к старой переменной x:

$$x = \frac{1}{\pi}t; \quad t = x\frac{\pi}{l}; \quad dt = \frac{\pi}{l}dx.$$

Тогда будем иметь:

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{\pi kx}{l}dx;$$

$$b_k = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin\frac{\pi kx}{l}dx.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cdot \cos\frac{k\pi}{l}x + b_k \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x\right).$$

Разложение в ряд Фурье непереод. ф-ций.
Пусть ф-ция f(x) непереодич., заданная на [a,b].
Вместо функции f(x) рассматривают ф-цию $f_1(x)$ с периодом 2l, причем [a,b]$\in[-l,l]$ и на [a, b] ф-ция $f_1(x)$ совпадает с функцией f(x).
Поскольку функция $f_1(x)$ периодическая то ее разлагают в ряд Фурье.
Рассмотрим один важный случай: пусть функция f(x) задана на интервале (0, l) . Ее надо доопределить на интервале (-l , 0). Можно доопределить четным образом. В этом случае мы получаем ряд Фурье только по косинусам.
Можно доопределить нечетным образом. Получим ряд Фурье только по синусам.

35. Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье.

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$; $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$; $\sin z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$; $\cos nx = ...$; $\sin nx = ...$;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + b_n i}{2}e^{-inx} =$$

$| \frac{a_0}{2} = C_0; \frac{a_n - ib_n}{2} = C_{-n}; \frac{a_n + ib_n}{2} = C_n |= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_{-n}e^{inx} + C_n e^{-inx})$ интеграл Ф. В комплексной формуле при ($l \to \infty$): $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\lambda t}dt)d\lambda$

36. Интеграл Фурье.

Пусть ф-ция f(x) представлена на отрезке (-l;l)

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l})$, где

$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt$

$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt$; $l\to+\infty$;

f(x) абсолютно интегрируема на $(-\infty;+\infty)$, тогда $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=Q$

$$f(x)=\frac{1}{l^2}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}(\sum_{n=1}^{\infty}(\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi nt}{l}dt)\cos\frac{\pi nx}{l}++\sum_{n=1}^{\infty}(\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi nt}{l}dt)\sin\frac{\pi nt}{l})=$$

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)*(\cos\frac{\pi nt}{l}\cos\frac{\pi nx}{l}+\sin\frac{\pi nt}{l}\sin\frac{\pi nx}{l})dt=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(x-t)dt$$

$\frac{\pi}{l}=\lambda;\frac{\pi_2}{l}=\lambda_2;...;\frac{\pi_n}{l}=\lambda_n;\Delta\lambda=\frac{\pi}{l}$;Ф-ция , стоящая в правой части явл. Ф-цией от переменных λ_i. Устремим $l\to\infty\;|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt|\le\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}|f(t)|dt\le\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt\le\frac{Q}{2l}\to0$. Можно показать что если ф-ция f(x) кусочно-монотонная и ограничена, то тогда $\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(x-t)dt$ превращается в следующее (при $l\to\infty$) $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)dt)d\lambda$-интеграл Фурье.

вычисление интегралов вычетами

1 Интегралы вида $I=\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi$, где $R(u,v)$ - рациональная функция, а функция $g(\varphi)=R(\cos\varphi,\sin\varphi)$ непрерывна на отрезке $[0,2\pi]$, сводится к интегралом по единичной окружности от функций комплексного переменного.

Пусть $z=e^{i\varphi}$. Тогда с помощью формул Эйлера: $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ получим

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i},\ \cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\ \text{или}\ \sin\varphi=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i},\ \cos\varphi=\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \quad (1)$$

Отсюда $dz=e^{i\varphi}\cdot id\varphi$ или $d\varphi=-i\frac{dz}{z}=\frac{1}{i}\cdot\frac{dz}{z}$.

При изменении φ от 0 до 2π переменная z пробегает окружность $|z|=1$, поэтому $I=\frac{1}{i}\int\tilde{R}(z)dz$ (где $\tilde{R}(z)=\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$. Так как рациональная функция $\tilde{R}(z)\neq\infty$ на окружности $|z|=1$, то существует такое $r>1$, что в круге $|z|<r$ функция $\tilde{R}(z)$ определена и аналитична всюду за исключением быть может конечного числа изолированных особых точек, находящихся в круге $|z|<1$. Взяв в качестве контура C окружность $|z|=1$ и применяя теорему 1, получим

$$I=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k}\tilde{R}(z), \quad (2)$$

где $a_1,a_2,...,a_k$ - полюсы функции $\tilde{R}(z)$, лежащие в круге $|z|<1$.

Таким образом, алгоритм вычисления интеграла $I=\int\limits_0^{2\pi}R(\cos\varphi,\sin\varphi)d\varphi$ таков:

1) надо доказать, что функция $R(\cos\varphi,\sin\varphi)$ рациональна относительно $\cos\varphi$ или $\sin\varphi$ и непрерывна на $[0;2\pi]$;

2) делаем замену $z=e^{i\varphi}$ при которой отрезок $[0;2\pi]$ переводится в множество $M=\{z\in C\,|\,|z|=1\}$, $\sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, $\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $d\varphi=\frac{dz}{iz}$ и $I=\frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}\tilde{R}(z)dz$;

3) проверяем условие теоремы 1. Для этого находим изолированные особые точки $z_1,z_2,...,z_k$ функции $\tilde{R}(z)$ принадлежащие множеству $\{z\in C\,|\,|z|<1\}$. Теперь функция $\tilde{R}(z)$ аналитична на замкнутом множестве $\{z\in C\,|\,|z|\le 1\}=\overline{G}$ ограниченном окружностью $|z|=1$ за исключением точек $z_1,z_2,...,z_k$;

4) вычисляем I ориентируясь на следующие возможные случаи:

а) $\tilde{R}(z)=P(z)$ многочлен относительно z. Так как изолированных особых точек нет, то $I=0$;

б) $\tilde{R}(z)=\frac{a}{z-z_0}+P(z)$ ($P(z)$ - многочлен). Тогда точка $z=z_0$ простой полюс функции $\tilde{R}(z)$ и $\operatorname*{Res}_{z=z_0}\tilde{R}(z)=a$ (по определению вычета), поэтому $I=2\pi i\cdot\frac{a}{i}=2\pi a$;

в) $\tilde{R}(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ причем $\psi(z_0)=0,\ \varphi(z_0),\ \psi'(z_0)\neq 0$. Тогда по правилу 2 $\operatorname*{Res}_{z=z_0}\tilde{R}(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$ и по формуле (2) $I=2\pi\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$;

г) $\tilde{R}(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ - многочлены.

Особые точки $z_1,...,z_k$ ищутся среди корней (нулей) многочлена $Q(z)$. Точки $z_1,...,z_k$ могут быть только полюсами (простыми или порядка m). Вычет функции $\tilde{R}(z)$ точек $z_1,z_2,...,z_k$ находят по правилу 2 или по правилу 3. Тогда $I=2\pi i\sum_{n=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=z_n}\tilde{R}(z)$.

2 *При вычислении некоторых типов несобственных интегралов будем использовать следующие две леммы Жордана.*

Лемма 1. Пусть функция $f(z)$ является непрерывной в области $D=\{z\in C\,\|z|\ge R_0,\ \operatorname{Im}z\ge 0\}$ при некотором $R_0>0$ и $\lim\limits_{R\to\infty}R\cdot M(R)=0$, где $M(R)=\max\limits_{z\in C_R}|f(z)|$, $C_R=\{z\in C\,\|z|=R,\ \operatorname{Im}z\ge 0\}$. Тогда $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}f(z)dz=0$.

Лемма 2. Пусть $m>0$ и для функции $f(z)$ выполнены условия:

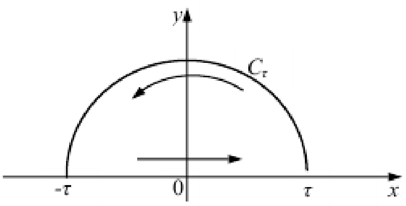
1) $f(z)$ непрерывна в области D для некоторого $R_0>0$;
2) $\lim\limits_{R\to\infty}M(R)=0$.

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}f(z)e^{imz}dz=0$.

2 *Интегралы первого типа*.

Интеграл вида $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$, где $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ - рациональная функция, причем многочлен $Q(x)$ не обращается в нуль на действительной оси и его степень, по крайней мере, на две единицы больше степени полинома $P(x)$, назовем интегралом первого типа. В силу условий наложенных выше на $R(x)$, выполняется неравенство $|R(x)|\le\frac{c}{1+x^2}$ с некоторой константой C>0 и поэтому интеграл I сходится.

Выведем формулу для вычисления этого интеграла с помощью вычетов. Для этого рассмотрим замкнутый контур K_τ, состоящий из полуокружности $C_\tau=\{z\in C\,\|z|=\tau,\ \operatorname{Im}z\ge 0\}$ и отрезка $[-\tau,\tau]$ действительной оси (см. рисунок 1).



Направление обхода контура K_τ показано на рисунке 1. Рассмотрим функцию комплексной переменной $R(z)$ и пусть $z_1,z_2,...,z_n$ - полюсы этой функции, лежащие в верхней полуплоскости. Число τ возьмем настолько большим, чтобы все точки $z_1,z_2,...,z_n$ оказались внутри K_τ. Так как $Q(x)\neq 0$ на действительной оси, то существует область G, содержащая замкнутую верхнюю полуплоскость $\{z\in C\,|I_m z\ge 0\}$ и такая, что функция $R(z)$ аналитична в G за исключением только лишь точек $z_1,z_2,...,z_n$. Область G, контур K_τ и функция $R(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому

$$\oint\limits_{K_\tau}R(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}R(z)$$

или

$$\int\limits_{-\tau}^{\tau}R(x)dx+\int\limits_{C_R}R(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}R(z).$$

В последнем равенстве перейдем к пределу при $\tau\to\infty$. Заметим, что при этом его правая часть не меняется, а в левой части $\int\limits_{C_R}R(z)dz\to 0$ по первой лемме Жордана, а интеграл $\int\limits_{-\tau}^{\tau}R(x)dx\to\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$. Таким образом, получили формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}R(z), \quad (3)$$

Таким образом, алгоритм решения несобственных интегралов первого типа таков:

1) показываем, что знаменатель $Q(x)$ не обращается в нуль на действительной оси и что его степень по крайней мере на две единицы больше степени многочлена $P(x)$;

2) переходим к функции комплексной переменной $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$;

3) находим комплексные корни многочлена $Q(z)$, которые являются полюсами функции $R(z)$;

4) из найденных полюсов функции $R(z)$ выбираем только те, которые лежат в верхней полуплоскости, например, $z_1,z_2,...,z_n$;

5) по правилам (2) или (3) вычисляем вычеты $\operatorname*{Res}_{z=z_k}R(z),\ k=\overline{1,n}$;

6) по формуле (3) вычисляем интеграл.

Интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx$ назовем интегралами второго типа, если $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - рациональная функция, причем $Q(x)$ не имеет действительных корней и степень $Q(x)$ по крайней мере на единицу больше степени $P(x)$. Покажем, что при этих условиях оба интеграла сходятся. Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty} R(x)=0$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx=\frac{1}{\alpha}R(x)\cos\alpha x\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R'(x)\cos\alpha x dx=-\frac{1}{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R'(x)\cos\alpha x dx$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R'(x)\cos\alpha x dx$ сходится абсолютно, так как у функции $R'(x)$ степень числителя по крайней мере на две единицы меньше степени знаменателя. Отсюда следует сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx$. Аналогично доказываем сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx$. Интегрируя вспомогательную функцию $f(z)=R(z)e^{i\alpha z}$ по контуру K_τ (см. рисунок 1) в силу теоремы 1, получим

$\int\limits_{-\tau}^{\tau} R(x)e^{i\alpha x}dx+\int\limits_{C_\tau} R(z)e^{i\alpha z}dz=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\limits_{z=z_k} f(z)$, где τ настолько велико, что все полюсы $R(z)$ лежат внутри K_τ. Переходя к пределу при $\tau\to\infty$ и замечая, что по второй лемме Жордана $\int\limits_{C_\tau} R(z)e^{i\alpha z}dz\to 0$ приходим к равенству

П.3 Четное и нечетное периодическое продолжение функции

Если $f(x)$ задана на $[0;l]$, то ее можно, продолжить периодически с периодом $T=2l$. При этом продолжение на $[-l,0)$ может быть или четным или нечетным и , соответственно, ряд будет содержать или косинусы , или синусы.

Рассмотрим оба случая.

а) Разложение по косинусам:

1) Строится вспомогательная функция, включающая четное продолжение на $[-l;0]$: $f^*(x)=\begin{cases} f(-x), x\in[-l;0]\\ f(x), x\in[0;l]\end{cases}$, далее необходимо следовать алгоритму п.1, т.е. построение периодического продолжения $\varphi(x)$ с периодом $T=2l$.

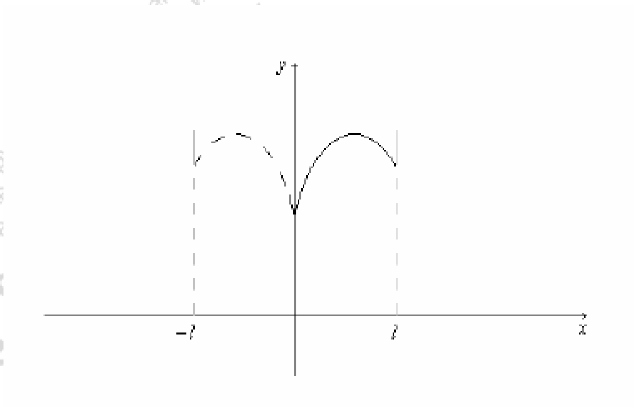


Рис.17

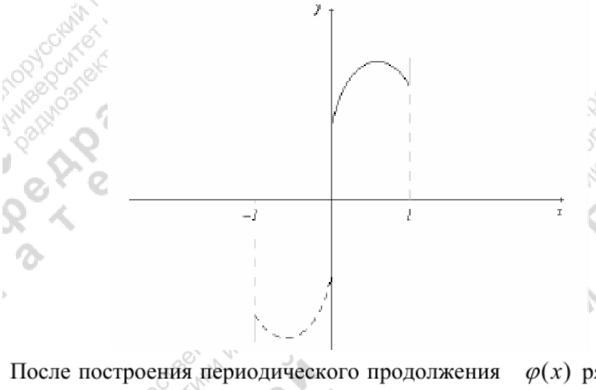
В этом случае ряд Фурье для $f(x)$ на [0,l] содержит лишь косинусы

$$\varphi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l},\quad a_0=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx$$

б) Разложение по синусам:

Чтобы разложить функцию $f(x)$ только по синусам , нужно продолжить ее нечетным образом, т.е. отобразить симметрично относительно начала координат ее график , а затем продолжить на всю числовую ось.:

т.е. $f^*(x)=\begin{cases} -f(-x)\forall x\in[-l;0]\\ f(x), x\in[0;l]\end{cases}$ - нечетное продолжение.



После построения периодического продолжения $\varphi(x)$ ряд Фурье имеет вид $\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{\pi nx}{l}$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(z)e^{i\alpha z}dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Приравняв действительные и мнимые части, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\alpha x dx=\operatorname{Re}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Res}_{z=z_k}\left(R(z)e^{i\alpha z}\right)\right]\qquad(4)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\alpha x dx=\operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Res}_{z=z_k}\left(R(z)e^{i\alpha z}\right)\right]\qquad(4')$$

где $z_1, z_2, \ldots z_k$ полюсы функции $R(z)$, лежащие в верхней

Неравенство Бесселя

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Рассмотрим кусочно непрерывную функцию $f(x)$, заданную в интервале $[-\pi,\pi]$. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

В *неравенстве Бесселя* устанавливается, что

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$ сходится.

Равенство Парсеваля. Если $f(x)$ является квадратично интегрируемой функцией в интервале $[-\pi,\pi]$, так что выполняется соотношение

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx<\infty,$$

то неравенство Бесселя становится равенством. В этом случае справедлива *формула Парсеваля*:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

Формула Парсеваля в комплексной форме

Снова предположим, что $f(x)$ является квадратично интегрируемой функцией в интервале $[-\pi,\pi]$. Пусть c_n − ее комплексные коэффициенты Фурье, то есть

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},$$ где $$c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx.$$

Тогда *формула Парсеваля* записывается в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

Заметим, что *энергия* 2π-периодической волны $f(x)$ равна

$$E=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

Системой ДУ **называется совокупность ДУ, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.**

Нормальной системой линейных ДУ с действительными коэффициентами, называется система вида:

$$x_1' = f_{11}(t)y_1 + f_{12}(t)y_2 + \ldots + f_{1n}y_n + g_1(x)$$

$$x_2' = f_{21}(t)y_1 + f_{22}(t)y_2 + \ldots + f_{2n}y_n + g_2(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$x_n' = f_{n1}(t)y_1 + f_{n2}(t)y_2 + \ldots + f_{nn}y_n + g_n(x)$$

или более коротко

$$\dot{x} = F(t)x + g(t) \qquad (2)$$

где $F(t) = (f_{ij}(t))$ - действительная матрица, а $g(t) = \{g_1(t),\ldots,g_n(t)\}$ - действительный вектор, определенный при $a \le t \le b$.

Однородной системой линейных уравнений, соответствующей системе (2), называется система уравнений

$$\dot{x} = F(t)x \qquad (3)$$

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$\dot{x} = Ax$, где $x = (x_1,\ldots,x_n)$ - n-мерный вектор, A - постоянная квадратная матрица размера $n \times n$.

Основные свойства линейной системы дифференциальных уравнений

Теорема 1. Линейная комбинация решений однородной системы (3) также является решением этой системы.

Теорема 2. Разность любых двух решений неоднородной системы уравнений (2) есть решение однородной системы (3).

Сумма любого частного решения неоднородной системы (2) и решения соответствующей однородной системы (3) есть решение неоднородной системы (2).

Теорема 3. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - решения систем уравнений

$$\dot{x}_1 = F(t)x_1 + g_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = F(t)x_2 + g_2(t)$$

соответственно, то

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ - решение системы уравнений

$\dot{x} = F(t)x + g_1(t) + g_2(t)$.

Теорема 4. Пусть $x(t)$ ($a \le t \le b$) – решение системы уравнений (2), матрица $F(t)$ и вектор $g(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Пусть $\|F(t)\| \le F$ (где $\|F\|$ означает норму матрицы F: $\|F\| = \sup\limits_{|x|\le 1} |Fx|$) и $|g(t)| \le g$. Тогда для $\dot{x}(t)$ имеет место следующая оценка:

$$|x(t)| \le [|x(t_0) + g(b-a)|]e^{F|t-t_0|} \qquad (4)$$

В частности, для линейной однородной системы (3) имеем оценку ($g = 0$):

$$|x(t)| \le |x(t_0)|e^{F|t-t_0|} \qquad (5)$$

Теорема 5. Пусть матрица $F(t)$ системы (2) непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $t_0 \in [a,b]$. Тогда решение системы (2) однозначно определяется на отрезке $[a,b]$ условием

$$x(t_0) = x_0. \qquad (6)$$

Итак, из оценки (5) вытекает единственность решения задачи Коши для линейной системы (2) с непрерывной матрицей $F(t)$.

Следствие 1. Пусть матрица $F(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда $\|F(t)\| \le F$ и для решения $x(t)$ однородной системы (3) имеет место оценка

$$|x(t_0)|e^{-F|t-t_0|} \le |x(t)| \le |x(t_0)|e^{F|t-t_0|} \qquad (7)$$

Иначе говоря, рост функции $x(t)$ ограничен экспонентой.

Следствие 2. Решение $x(t)$ однородной линейной системы с непрерывной матрицей $F(t)$ тождественно равно нулю, если оно равно нулю в какой либо точке отрезка $[a,b]$.

Основные способы решения однородной линейной системы

Линейные системы можно интегрировать различными способами, например методом исключения, путем нахождения интегрируемых комбинаций и т. д.

Для интегрирования однородных линейных систем с постоянными коэффициентами применяется метод Эйлера, который будет рассмотрен ниже.

Понятие о фундаментальной системе решений однородной линейной системы

Определение 1. Решения $x_1(t),...,x_m(t)$ однородной системы (3) называются *линейно независимыми* на отрезке $[a,b]$, если в каждой точке $t\in[a,b]$ векторы $x_1(t),...,x_m(t)$ линейно независимы.

Пусть задана система n решений $x_1(t),...,x_n(t)$ однородной системы (3), определенных на $[a,b]$:

$$x_i=\{x_{i1}(t),...,x_{in}(t)\} \quad (i=1,...,n) \qquad (8)$$

Определение 2. Определитель

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & ... & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & ... & x_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & ... & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \qquad (9)$$

называется *определителем Вронского* системы решений $x_1(t),...,x_n(t)$.

Определение 3. Система из n решений однородной системы уравнений (3), линейно независимых на отрезке $[a,b]$ называется *фундаментальной.*

5. Построение общего решения однородной линейной системы по фундаментальной системе решений

Определение 4. Общим решением линейной системы уравнений (2) называется множество всех решений этой системы.

Теорема 8. Пусть $x_1(t),...,x_n(t)$ - фундаментальная система решений однородной системы уравнений (3), тогда формула

$$x(t)=C_1x_1(t)+...+C_nx_n(t) \qquad (15)$$

где $C_1,...,C_n$ - произвольные постоянные, дает общее решение этой системы. Множество всех решений однородной системы уравнений (3) образует n-мерное векторное пространство, базисом которого может служить любая фундаментальная система решений.

Построение фундаментальной системы решения однородной системы с постоянными коэффициентами методом Эйлера

Система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$\dot{x} = Ax$, (1.1)

где $x = (x_1, ..., x_n)$ - n-мерный вектор, A - постоянная квадратная матрица размера $n \times n$.

Метод Эйлера заключается в следующем. Решение системы (1.1) ищем в виде

$x = e^{\lambda t} a$, $a = (a_1, ..., a_n)$. (2.1)

Функция (2.1) является решением системы (1.1), если λ - собственное значение матрицы A, а $a = (a_1, ..., a_n)$ - собственный вектор этой матрицы, соответствующий числу λ. Если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы A попарно различны и $a_1, a_2, ..., a_n$ - соответствующие собственные векторы этой матрицы, то общее решение системы уравнений (1.1) определяется формулой

$x = C_1 e^{\lambda_1 t} a_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} a_2 + ... + C_n e^{\lambda_n t} a_n$,

где $C_1, ..., C_n$ - произвольные числа. Если для кратного собственного значения λ матрицы A имеется столько линейно независимых собственных векторов $a_1, a_2, ..., a_k$, какова его кратность, то ему соответствуют k линейно независимых решений исходной системы: $e^{\lambda t} a_1, e^{\lambda t} a_2, ..., e^{\lambda t} a_k$.

Если для собственного значения λ кратности k имеется только $m(m-k)$ линейно независимых собственных векторов, то решения, соответствующие λ, можно искать в виде произведения векторного многочлена степени $k-m$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$x = (a_0 + a_1 t + ... + a_{k-m} t^{k-m}) e^{\lambda t}$.

Чтобы найти векторы $a_0, a_1, ..., a_{k-m}$, надо подставить выражение (2.1) в систему (1). Приравняв коэффициенты в левой и правой частях системы, получим уравнения для нахождения векторов $a_0, a_1, ..., a_{k-m}$.

Если среди собственных чисел матрицы A имеются комплексные числа, то указанным выше методом строится соответствующее такому собственному числу решение системы (1.1) через комплексные функции. Чтобы выразить решение через действительные функции (в случае действительной матрицы A), надо воспользоваться тем, что вещественная и мнимая части комплексного решения, соответствующего собственному числу $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ($\beta \neq 0$), являются линейно независимыми решениями.

Сходимость рядов с неотрицательными членами

Если известно, что все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеют, начиная с некоторого номера, постоянный знак, то исследовать его сходимость проще, чем в общем случае. Это связано с простым критерием сходимости для таких рядов. Для простоты предположим, что все $a_n \geq 0$. Непрерывность функции в точке Если функция f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в самой точке x_0, то она называется **разрывной** функцией, а точка x_0 – точкой разрыва.

Теорема. (Критерий сходимости рядов с неотрицательными членами).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ сходится $\Leftrightarrow \exists C \ \forall N \ S_N = a_1 + \ldots + a_N \leq C$.

Доказательство.

$(\Rightarrow)$. Пусть $S_N \to S, \ N \to \infty$. Тогда $S_N \leq S$ при всех N.

$(\Leftarrow)$. Пусть $\forall N \ S_N < C$. Поскольку $S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geq S_N$, последовательность S_N возрастает и, по условию, ограничена. Следовательно, по теореме Вейерштрасса (см. 1-ый семестр), она имеет предел, то есть ряд сходится.

Простые следствия из этого критерия – очень полезные теоремы сравнения.

Теорема 1. Пусть для всех $n \ 0 \leq a_n \leq b_n$ и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится. Тогда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Очевидны неравенства $0 \leq S_N^{(a)} \leq S_N^{(b)}$. По условию $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится. Значит, по приведенному выше критерию, $\exists C : \forall N \ S_N^{(b)} \leq C$. Но тогда и $S_N^{(a)} \leq C$ и, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

Примечание 1. Эта теорема может быть сформулирована и так: Пусть для всех $n \ 0 \leq a_n \leq b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится, тогда расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Действительно, если бы этот ряд сходился, то первой теореме должен был бы сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Примечание 2. Теорема 1 справедлива и в случае, когда неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$ выполняется начиная с некоторого номера n_0.

Теорема 2. Пусть $a_n \geq 0, b_n > 0$ для всех n и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k > 0$. Тогда либо оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, либо они оба расходятся. (Т.е. не может быть так, что один из них сходится, а другой расходится).

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \ \forall n \geq n_0 \ \left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = \frac{k}{2}$.

Тогда $\exists n_0 : \ \forall n \geq n_0 \ -\frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} - k < \frac{k}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{k}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}k \ \Leftrightarrow$ (т.к. $b_n > 0$) $\frac{k}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} k b_n$ при $n \geq n_0$.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2} b_n$ (по примечанию 2 к теореме 1). Тогда, взяв $c = \frac{2}{k}$, получим, что и ряд $c \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2} b_n$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится.

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} k b_n$ и, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема доказана.

Пример применения теоремы 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \sin\frac{1}{2^n}\right)$ сходится, т.к. $\ln\left(1 + \sin\frac{1}{2^n}\right) \approx \sin\frac{1}{2^n} \approx \frac{1}{2^n}$ при $n \to \infty$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходится.

Теорема. (Признак сходимости Коши). Пусть $a_n \geq 0$ и при достаточно больших n $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Если же при $n \geq n_0$ $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то он расходится.

Доказательство. Неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ при $n \geq n_0$ равносильно неравенству $a_n \leq q^n$. Так как $0 \leq q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ – сходится. По теореме 1 из предыдущего параграфа ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Если же $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то и $a_n \geq 1$ и равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ невозможно. Т.о. необходимый признак сходимости не выполняется и ряд расходится.

В предельной форме эта теорема выглядит так:

Теорема. Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$. Тогда если $q<1$ – ряд сходится, $q>1$ – ряд расходится, $q=1$ – признак неприменим.

Доказательство. Пусть $q<1$. Выберем ε так, чтобы $q+\varepsilon<1$ (т.е. $\varepsilon<1-q$). Тогда при $n\ge n_0(\varepsilon)$ $\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<\varepsilon$, т.е. $\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon<1$. Применяя предыдущую теорему получаем, что ряд сходится.

Если же $q>1$, то выберем ε так, что $q-\varepsilon>1$ (т.е. $\varepsilon<q-1$).
Тогда $\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<\varepsilon\Rightarrow 1<q-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}$. Вновь по предыдущей теореме ряд расходится.

Теорема. (Признак сходимости Даламбера). Пусть при всех $n\ge n_0$ $0<a_{n+1}<qa_n$, где $q<1$. Тогда ряд сходится. Если же при $n\ge n_0$ $a_{n+1}\ge a_n$, то ряд расходится.

Доказательство. Из условий теоремы следует $0<a_n\le qa_{n-1}\le q^2a_{n-2}\le\ldots\le\,\le q^{n-n_0}a_{n_0}$. Иными словами, $a_n\le\dfrac{a_{n_0}}{q^{n_0}}\cdot q^n$ и по первой теореме сравнения ряд сходится.

Если $a_{n+1}\ge a_n$, то $a_n\not\to 0$ при $n\to\infty$ и ряд расходится.

В предельной форме этот признак выглядит так:

Теорема. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$, то при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ - расходится, а при $q=1$ признак неприменим.

Доказательство. При $q<1$ выбираем ε так, чтобы $q+\varepsilon<1$. Пусть n_0 выбрано так, чтобы при $n\ge n_0$ $\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}-q\right|<\varepsilon$, т.е. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon$ и $a_{n+1}<(q+\varepsilon)a_n$, $q+\varepsilon<1$. По предыдущей теореме ряд сходится. Если же $q>1$, то выберем ε так, что $q-\varepsilon<1$. Тогда при $n\ge n_0$ $a_{n+1}>(q-\varepsilon)a_n$ и ряд расходится.

Признаки Коши и Даламбера удобны, но слабоваты. Например, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$: $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}}\to 1$ при $n\to\infty$, $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n(n+1)}}=e^{\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{1}{n+1}\right)}\to 1$ при $n\to\infty$, т.е. признак Коши не применим. Признак Даламбера тем более неприменим, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$.

Однако мы знаем, что гармонический ряд расходится, а для второго ряда легко подсчитать частичную сумму: $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}=1-\frac{1}{N+1}$ и $S_N\to 1$ при $N\to\infty$. (Здесь использовано тождество $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$), т.е. ряд сходится.

Теорема. (признак Гаусса). Пусть $\delta>0$ и $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\underline{\underline{O}}\left(n^{-(1+\delta)}\right)$, $n\to\infty$.

Тогда: Если $\lambda>1$ - ряд сходится,

Если $\lambda<1$ - ряд расходится,

Если $\lambda=1$ и $\mu>1$ - ряд сходится,

Если $\lambda=1$ и $\mu\le 1$ - ряд расходится.

Эту теорему оставим **без доказательства.**

В применении к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ она дает: $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$, $\lambda=1,\mu=1$ - ряд расходится. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ имеем: $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=\frac{n+2}{n}=1+\frac{2}{n}$, $\lambda=1,\mu=2>1$ - ряд сходится.

Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка, то ее можно разложить в степенной ряд по **формуле Тейлора**:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n,$$

где R_n − *остаточный член* в форме Лагранжа определяется выражением

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!},\quad a<\xi<x.$$

Если приведенное разложение сходится в некотором интервале x, т.е. $\lim_{n\to\infty} R_n=0$, то оно называется *рядом Тейлора*, представляющим разложение функции $f(x)$ в точке a.

Если $a=0$, то такое разложение называется *рядом Маклорена*:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+R_n.$$

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \quad \operatorname{ch} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

$$\operatorname{sh} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена

1. $f(x)=e^x$. Для этой функции $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=e^0=1, n=1,2,\ldots$.

По формуле (3.2) составим ряд Маклорена данной функции:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots. \quad (3.3)$$

Найдем радиус сходимости ряда (3.3) по формуле (1.3):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty.$$

Следовательно, ряд (3.3) сходится при любом значении $x \in (-\infty; +\infty)$.

Все производные функции e^x на любом отрезке $[-a; a]$ ограничены, т. е.

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = e^x \le M = e^a, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Поэтому, согласно теореме 3.1, имеет место разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (3.4)$$

2. $f(x) = \sin x$. Для этой функции $f^{(n)}(x) = \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$, $f^{(n)}(0) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right)$, $n = 1, 2, \dots$.

Отсюда следует, что при $x = 0$ производные четного порядка равны нулю, а производные нечетного порядка чередуют знак с плюса на минус.

По формуле (3.2) составим ряд Маклорена:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots .$$

При любом фиксированном значении этот ряд сходится как знакочередующийся по признаку Лейбница. При этом

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = \left| \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right| \le 1 \quad \forall\, x \in (-\infty; +\infty).$$

Поэтому, согласно теореме 3.1, имеет место разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad (3.5)$$

3. $f(x) = \cos x$. Воспользуемся разложением (3.5) в ряд Маклорена функции $\sin x$ и свойством 2 о дифференцировании степенного ряда. Имеем

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n+1) \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \quad (3.6)$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$.

Поскольку при почленном дифференцировании интервал сходимости степенного ряда не изменяется, то разложение (3.6) имеет место при любом $x\in(-\infty;+\infty)$.

Приведем без доказательства разложения других элементарных функций в ряды Маклорена.

4. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$

$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\quad x\in(-1;1)$ – *биномиальный ряд* (α – любое действительное число).Если $\alpha=n$ – положительное целое число, то получаем *бином Ньютона*:

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}x^m+\ldots+x^n$$.

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ x\in(-1;1)$ – *логарифмический ряд*.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\ x\in(-1;1)$$.

5. Приложения степенных рядов

Приближенное значение функции вычисляют, заменяя ряд Маклорена этой функции конечным числом его членов.Приведем приближенные формулы для вычисления некоторых наиболее часто встречающихся функций при достаточно малых значениях *x*

:$\sin x\approx x$; $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$; $\operatorname{tg}x\approx x$; $(1\pm x)^n\approx 1\pm nx$;

$\ln(1\pm x)\approx\pm x$; $\sqrt[n]{1\pm x}\approx 1\pm\frac{x}{n}$.

Элементарные функции комплексной переменной.

1. Степенная функция $w = z^n$, n - натуральное. Определена, однозначна и аналитична на всей плоскости C. Действительно,
при $n = 1$ $w = x + iy$, $u = x$, $v = y$, $u'_x = 1 = v'_y$, $u'_y = 0 = -v'_x$, $w' = u'_x + iv'_x =$
1 (или, непосредственно, $w' = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$).
Далее, $w = z^n = z \cdot z \cdot z \cdot ... \cdot z$ дифференцируема как произведение дифференцируемых функций. Её производная $w' = n z^{n-1}$ отлична от нуля при $z \neq 0$, следовательно, отображение $w = z^n$ при $n > 1$ конформно в этих точках. (Углы с вершиной в точке $z = 0$ увеличиваются в n раз). Отображение неоднолистно при $n > 1$ на всей плоскости C; для его однолистности в некоторой области $D \in C$ необходимо, чтобы область помещалась в некоторый сектор раствора $< \frac{2\pi}{n}$.

2. Показательная функция $w = e^z$. Определим эту функцию предельным соотношением $e^z = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Докажем, что этот предел существует при $\forall\, z = x + iy \in C$: $1 + \frac{x + iy}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + i\frac{y}{n}$, модуль этого числа обозначим M_n: $M_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{1/2}$, аргумент - Φ_n: $\Phi_n = \operatorname{arctg} \frac{y/n}{1 + x/n}$ (при достаточно больших n дробь $1 + z/n$лежит в правой полуплоскости).

$$\exists \lim_{n \to \infty} M_n^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{n/2} = e^x; \quad \exists \lim_{n \to \infty} n\Phi_n = \lim_{n \to \infty} n \operatorname{arctg} \frac{y/n}{1 + x/n} = y,$$

следовательно, существует $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y)$. При мнимом $z = iy$ ($x = 0$) отсюда следует, что $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, теперь формула Эйлера окончательно доказана.

Кратко перечислим свойства этой функции.

1. Функция $w = e^z$ аналитична на всей плоскости C, и $(e^z)' = e^z$ (доказано в разделе **19.3.3. Примеры вычисления производных**).

2. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ (проверяется непосредственно).

3. Функция $w = e^z$ периодическая, с мнимым основным периодом $2\pi i$ ($e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$, $e^{z + 2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$).

Из этого свойства следует, что для однолистности отображения $w = e^z$ необходимо, чтобы область D не содержала пары точек, связанных соотношением $z_2 - z_1 = 2n\pi i$, такой областью является, например, полоса $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$, преобразуемая в плоскость C с выброшенной положительной полуосью.

3. Тригонометрические функции. Определим эти функции соотношениями $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Все свойства этих функций следуют из этого определения и свойств показательной функции. Эти функции периодичны с периодом 2π, первая из них четна, вторая - нечетна, для них сохраняются обычные формулы дифференцирования, например, $(\cos z)' = \dfrac{(e^{iz})' + (e^{-iz})'}{2} = \dfrac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = i\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$, сохраняются обычные тригонометрические соотношения ($\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ - проверяется непосредственно, $\cos z = \sin\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$, формулы сложения и т.д.)

4. Гиперболические функции. Эти функции определяются соотношениями $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$. Из определений следует связь тригонометрических и гиперболических функций:

$\operatorname{ch} z = \cos iz$, $\operatorname{sh} z = -i \cos iz$, $\cos z = \operatorname{ch} iz$, $\sin z = -i \operatorname{sh} iz$, $\operatorname{sh} iz = i \sin z$, $\sin iz = i \sin z$.

5. Функция $w = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$**.** Это n-значная функция (раздел **19.1.3**), все значений которой даются формулами $w = \sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\dfrac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.**Функция** $z^{\frac{m}{n}}$ определяется равенством $z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m$**.**

6. Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определяется при $z \neq 0$ как функция, обратная показательной: $w = \operatorname{Ln} z$, если $z = e^w$. Если $w = u + iv$, то последнее равенство означает, что $e^w = e^{u + iv} = e^u e^{iv} = z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$, откуда $e^u = |z| \Rightarrow u = \ln|z|$; $v = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi i$. Таким образом, $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ - функция многозначная (бесконечнозначная); её значение при $k = 0$ называется главным и обозначается $\ln z$: $= \ln|z| + i\arg z$. Так,$\ln(-5) = \ln|-5| + i\arg(-5) = \ln 5 + \pi i$, $\operatorname{Ln}(-5) = \operatorname{Ln}|-5| + i\arg(-5) + 2k\pi i = \ln 5 + i\pi(2k+1)$, где k - произвольное целое число.

7. Общая показательная a^z и **общая степенная z^a** (z, a - произвольные комплексные числа, z, $a \neq 0$, a = const) функции определяются соотношениями $a^z = e^{z \cdot \text{Ln}\, a}$, $z^a = e^{a \cdot \text{Ln}\, z}$,и,следовательно, бесконечнозначны.

8. Обратные тригонометрические и обратные гиперболические функции определяются так же, как и в действительном случае (w = Ar sh z, если sh $z = w$, например), и выражаются через Ln z. Найдём, например, Arc cos(2i). По определению, это такое число w, что cos w = 2i, или $\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} = 2i \Rightarrow e^{iw} - 4i + e^{-iw} = 0 \Rightarrow (t = e^{iw})\ t - 4i + \dfrac{1}{t} = 0 \Rightarrow t^2 - 4it + 1 = 0 \Rightarrow t = 2i \pm \sqrt{-4-1}$,

$t = 2i \pm \sqrt{5}i, \arg(2i + \sqrt{5}i) = \dfrac{\pi}{2}, \arg(2i - \sqrt{5}i) = -\dfrac{\pi}{2}$. Так как $iw = \text{Ln}\, t \Rightarrow w = \dfrac{1}{i}\text{Ln}\, t = -i\,\text{Ln}\, t$, получаем две серии значений: $w_1 = -i\,\text{Ln}(2i + \sqrt{5}i) = -i\left[\ln(2+\sqrt{5}) + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = \left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)\pi - i\ln(2+\sqrt{5})$,

$w_2 = -i\,\text{Ln}(2i - \sqrt{5}i) = -i\left[\ln(\sqrt{5}-2) + i\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] = \left(2k - \dfrac{1}{2}\right)\pi - i\ln(\sqrt{5}-2),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ряд Фурье по ортогональной системе функций.

Определение. Функции j(x) и y(x), определенные на отрезке [a, b], называются **ортогональными** на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$$

Определение. Последовательность функций $j_1(x)$, $j_2(x)$, …, jn(x), непрерывных на отрезке [a, b], называется **ортогональной системой функций** на этом отрезке, если все функции попарно ортогональны.

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0; \qquad i \neq j$$

Отметим, что ортогональность функций не подразумевает перпендикулярности графиков этих функций. **Определение.** Система функций называется **ортогональной и нормированной (ортонормированной)**, если $\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

Определение. Рядом Фурье по ортогональной системе функций $j_1(x)$, $j_2(x)$, …,jn(x) называется ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

коэффициенты которого определяются по формуле: $$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx},$$

где *f(x)* = $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ - сумма равномерно сходящегося на отрезке [a, b] ряда по ортогональной системе функций. *f(x)* – любая функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на отрезке [a, b].

В случае ортонормированной системы функций коэффициенты определяются:

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx$$

Интеграл Фурье.

Пусть функция *f(x)* на каждом отрезке [-*l*,*l*], где *l* – любое число, кусочно – гладкая или кусочно – монотонная, кроме того, *f(x)* – абсолютно интегрируемая функция, т.е. сходится несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$

Тогда функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x+b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right)$

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}tdt,\quad n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi n}{l}tdt,\quad n=1,2,...$$

Если подставить коэффициенты в формулу для f(x), получим:

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}tdt\cos\frac{\pi n}{l}x+\int\limits_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi n}{l}tdt\sin\frac{\pi n}{l}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt$$

Переходя к пределу при *l*®¥, можно доказать, что $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)dt=0$ и $f(x)=\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt$

Обозначим $u_n=\frac{\pi n}{l};\quad \Delta u_n=u_{n+1}-u_n=\frac{\pi}{l};\qquad \frac{1}{l}=\frac{\Delta u_n}{\pi};$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{l\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Delta u_n\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cos u_n(t-x)dt$$

При *l*®¥ Du_n ®0.

Можно доказать, что предел суммы, стоящий в правой части равенства равен интегралу

$\int\limits_{0}^{\infty}du\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(t-x)dt$ Тогда $f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}du\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(t-x)dt$ **- двойной интеграл Фурье.**

$$f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}\left[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux\right]du$$

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos utdt$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin utdt$$

Окончательно получаем:

- представление функции f(x) **интегралом Фурье**

Двойной интеграл Фурье для функции f(x) можно представить в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dt$$

Преобразование Фурье.

Определение. Если *f(x)* – любая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на каждом отрезке, то функция

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iux}dx$$

называется **преобразованием Фурье функции *f(x)*.**

Функция *F(u)* называется также **спектральной характеристикой функции *f(x)*.**

Если f(x) – функция, представимая интегралом Фурье, то можно записать:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{iux}du$$

Это равенство называется **обратным преобразованием Фурье**

Интегралы $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos uxdx$ и $F(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin uxdx$ называются соответственно **косинус - преобразование Фурье и синус – преобразование Фурье.**

Косинус – преобразование Фурье будет преобразованием Фурье для четных функций, синус – преобразование – для нечетных.

Полнота тригонометрической системы

733. Полнота тригонометрической системы. *Если непрерывная в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *функция* $f(x)$ *имеет коэффициенты Фурье, все равные нулю, то и сама функция сводится тождественно к нулю.* Действительно, в этом случае, как ясно из равенства (6), при всех x будет

$$\int_0^x f(x)\,dx = 0, \tag{8}$$

откуда, дифференцируя по x, именно ввиду непрерывности подынтегральной функции [**305**, 12°] и получим тождественно

$$f(x) = 0.$$

Иными словами, *кроме функции, тождественно равной нулю, не существует непрерывной функции, которая в промежутке* $[-\pi, \pi]$* *была бы ортогональна* [**679**] *ко всем функциям тригонометрической системы*

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots \tag{9}$$

Этот именно факт и выражают, говоря, что *тригонометрическая система полна — в классе непрерывных функций.*

Если две непрерывные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют одни и те же коэффициенты Фурье, то они необходимо тождественны, ибо их разность $f_1(x) - f_2(x)$ будет иметь коэффициенты Фурье, сплошь равные нулю. Таким образом, *непрерывная функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье.* Это лишь другая формулировка свойства полноты тригонометрической системы.

Если обратиться к рассмотрению и разрывных функций, то положение вещей может оказаться другим. Функция, которая, скажем, лишь в конечном числе точек отлична от нуля, уже не равна нулю «тождественно», но в то же время, очевидно, будет ортогональна к любой из функций (9), как, впрочем, и ко всякой интегрируемой (в собственном или несобственном смысле) функции. Можно представить себе функции, отличные от нуля даже в бесконечном множестве точек и все же обладающие последним свойством. Такова, например, функция $f(x)$ [ср. **70**, 8), **300**, 1)], равная $\frac{1}{q}$, если x есть несократимая дробь вида $\pm\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} < \pi\right)$, а в прочих точках промежутка $[-\pi, \pi]$ равная 0.

Однако функция, которая в рассматриваемом промежутке ортогональна ко всякой вообще интегрируемой функции, не отличается «существенно» от нуля; мы будем называть такую функцию *эквивалентной нулю.*

Теперь можно доказать, что *абсолютно интегрируемая в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *функция* $f(x)$, *коэффициенты Фурье которой все равны нулю, необходимо эквивалентна нулю.*

Действительно, если $g(x)$—произвольная функция, интегрируемая в собственном смысле, то, в силу **579**, 1°,

$$(R)\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx=(S)\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dF(x),$$

где $F(x)=\int_{0}^{x} f(x)\,dx$. При сделанных предположениях $F(x)=0$ [см. (8)], так что $f(x)$ ортогональна к $g(x)$.

Отсюда легко перейти к случаю, когда $g(x)$ интегрируема в несобственном смысле. Пусть, например, точка π будет ее единственной особой точкой. Тогда, полагая $g^*(x)=g(x)$ в $[-\pi, \pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$ и $g^*(x)=0$ в $(\pi-\varepsilon, \pi]$, по доказанному будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi-\varepsilon} f\cdot g\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g^*\,dx=0.$$

Остается лишь перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$.

Расширяя несколько понятие «полноты», можно утверждать теперь, что *тригонометрическая система* (9) *полна в классе абсолютно интегрируемых функций*. Смысл этого таков: *кроме функций, эквивалентных нулю, не существует абсолютно интегрируемой функции, которая в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *была бы ортогональна ко всем функциям* (9).

Наконец, если две абсолютно интегрируемые функции имеют одни и те же коэффициенты Фурье, то их разность эквивалентна нулю. Если не считать такие функции «существенно» различными, то в некотором смысле можно сказать и здесь, что *абсолютно интегрируемая функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье*.

Замечание. Все сказанное сохраняет свою силу и порознь для систем

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x, \ldots,\ \cos nx, \ldots$$

или

$$\sin x,\ \sin 2x, \ldots,\ \sin nx, \ldots,$$

но лишь в промежутке $[0, \pi]$.

43. Тригонометрические ряды Фурье для периодических функций. Признак сходимости тригонометрического ряда Фурье (теорема Дирихле).

Определение 1.2. Пусть f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тригонометрический ряд с коэффициентами a_k, b_k, определенными формулами (1.2), называется *(тригонометрическим) рядом Фурье* функции f, а коэффициенты a_k, b_k — *коэффициентами ряда Фурье* функции f.

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \qquad (1.3)$$

понимая под такой записью, что функции f поставлен в соответствие ее ряд Фурье.

Лемму 1.1 можно переформулировать так: *равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

В курсе математического анализа вы познакомились с понятием функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ и работали с его важным частным случаем -- степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.В этой главе мы рассмотрим другой очень важный (в том числе и для физических приложений) частный случай функциональных рядов -- тригонометрический ряд, который будем записывать в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (1)$$

где a_n и b_n -- вещественные числа.

Начнем с вопроса о том можно ли данную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представить в виде тригонометрического ряда, т.е. можно ли найти коэффициенты a_n и b_n такие, что для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \qquad (2)$$

Сумма ряда, стоящего справа в формуле (2), есть, очевидно, 2π-периодическая функция. Значит, разлагать в тригонометрический ряд можно только 2π периодические функции *f*. Кроме того ясно, что если две периодические функции совпадают на промежутке, длина которого равна периоду, то они совпадают всюду. Поэтому равенство (2) нам достаточно проверить на некотором промежутке длины 2π, например, $[-\pi, \pi]$.

Чтобы продвинуться далее, обратимся к следующим наводящим соображениям. [Наводящие соображения отличаются от доказательства тем, что при их выполнении не следят за соблюдением формальных условий законности совершаемых действий.]

Предположим, что равенство (2) имеет место для всех $x \in [-\pi, \pi]$, а функция $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ и коэффициенты a_n, b_n таковы, что все совершаемые действия законны. Найдем формулы для вычисления a_n, b_n.

Чтобы найти a_0, проинтегрируем равенство (2) почленно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx \right].$$

Однако для $n>0$ справедливы равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \tag{3}$$

Поэтому все члены под знаком суммы будут нулями и мы получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{4}$$

Для того чтобы найти a_m при $m>0$, умножим обе части равенства (2) на $\cos mx$ и проинтегрируем почленно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx \right].$$

Первый член справа исчезнет ввиду (3), а в соответствии с известными формулами тригонометрии мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\, dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n \neq m; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2mx]\, dx = \pi, & \text{если} \quad n = m. \end{cases}$$

Таким образом, обращаются в нуль все интегралы под знаком суммы, кроме того, при котором множителем стоит именно коэффициент a_m. Отсюда этот коэффициент и определяется:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx, \quad m = 1, 2, \ldots. \qquad (5)$$

Аналогично, умножая разложение (2) на $\sin mx$ и затем интегрируя почленно, получим формулу для коэффициента при синусе:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx\, dx, \quad m = 1, 2, \ldots. \qquad (6)$$

Формулы (4) - (6) часто называют формулами Эйлера -- Фурье ; вычисленные по этим формулам коэффициенты называются коэффициентами Фурье функции *f*, а составленный с их помощью ряд (1) -- рядом Фурье функции *f*.

Обратим внимание, что постоянная $a_0/2$ в (1) пишется в таком виде, чтобы придать единообразие формулам (4) и (5).

Вышеприведенные наводящие соображения показывают, что поиски тригонометрического разложения данной функции целесообразно начать с изучения ее ряда Фурье, откладывая на потом строгое изучение вопроса о том, для каких функций этот ряд сходится и притом -- именно к данной функции. Пока же это не сделано, функции *f* сопоставляют ее формальный ряд Фурье (что обычно записывают в виде)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

про который известно, что его коэффициенты вычислены по функции *f* по формулам Эйлера -- Фурье (4) - (6), но ничего не утверждается о его сходимости и тем более -- о его сходимости к данной функции.

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \ldots + a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{s}$$

называется **тригонометрическим рядом**. При этом числа $a_0, a_n, b_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ называются **коэффициентами тригонометрического ряда**.

Тригонометрический ряд также записывают в виде $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$.

Коэффициенты, определяемые по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\, dx$$

,называются **коэффициентами Фурье** функции $f(x)$, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называется **рядом Фурье** функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется **кусочно-монотонной** на отрезке $[a, b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на интервалы $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$ так, что на каждом из этих интервалов функция монотонна, то есть либо невозрастающая, либо неубывающая.

Теорема. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π является кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках. Сумма полученного ряда равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции. В точках разрыва функции $f(x)$ сумма ряда равняется среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева.

47. Преобразование Фурье.

<u>Определение.</u> Если *f(x)* – любая абсолютно интегрируемая на всей числовой оси функция, непрерывная или имеющая конечное число точек разрыва первого рода на каждом отрезке, то функция

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

называется **преобразованием Фурье функции *f(x)*.**

Функция *F(u)* называется также **спектральной характеристикой функции *f(x)*.**

Если f(x) – функция, представимая интегралом Фурье, то можно записать:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} du$$

Это равенство называется **обратным преобразованием Фурье**

Интегралы $F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos uxdx$ и $F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin uxdx$

называются соответственно **косинус - преобразование Фурье и синус – преобразование Фурье.**

Косинус – преобразование Фурье будет преобразованием Фурье для четных функций, синус – преобразование – для нечетных.

Преобразование Фурье применяется в функциональном анализе, гармоническом анализе, операционном исчислении, теории линейных систем и др.

46. Интеграл Фурье.

Пусть функция *f(x)* на каждом отрезке [-*l*,*l*], где *l* – любое число, кусочно – гладкая или кусочно – монотонная, кроме того, *f(x)* – абсолютно интегрируемая функция, т.е. сходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$

Тогда функция *f(x)* разлагается в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right) \qquad \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\,dt, \quad n = 0,1,2,... \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\,dt, \quad n = 1,2,... \end{aligned}$$

Если подставить коэффициенты в формулу для f(x), получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\,dt\cos\frac{\pi n}{l}x + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\,dt\sin\frac{\pi n}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, можно доказать, что $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)dt = 0$ и

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)dt$$

Обозначим $u_n = \frac{\pi n}{l}; \quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}; \qquad \frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi};$

При $l \to \infty$ $\Delta u_n \to 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta u_n \int_{-l}^{l} f(t)\cos u_n(t-x)dt$$

Можно доказать, что предел суммы, стоящий в правой части равенства равен интегралу

$$\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)dt$$

Тогда $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)dt$ - **двойной интеграл Фурье.**

Окончательно получаем:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty}\left[a(u)\cos ux + b(u)\sin ux\right]du$$

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt$$

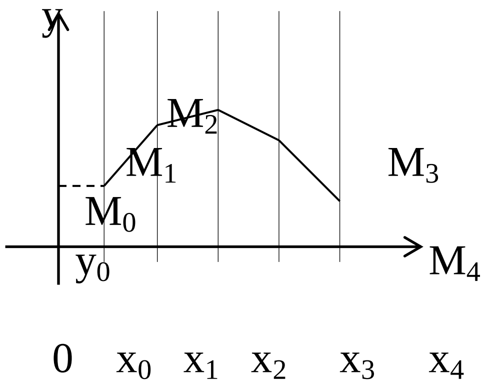
- представление функции f(x) **интегралом Фурье**.

7.Метод Эйлера. Изоклин. Последовательных приб.

(Леонард Эйлер (1707 – 1783) швейцарский математик)

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек x_0, x_1, x_2, …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке

$$tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0).$$

Заменив на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Производя аналогичную операцию для отрезка $[x_1, x_2]$, получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется **ломаной Эйлера**.

Можно записать общую формулу вычислений:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

Метод изоклин.

Уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

определяет в каждой точке (x, y), где существует функция $f(x, y)$, значение y', т. е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в этой точке.

Если в каждой точке области D задано значение некоторой величины, то говорят, что в области D задано поле этой величины. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) определяет поле направлений.

Тройка чисел $(x; y; y')$ определяет направление прямой, проходящей через точку (x, y). Совокупность отрезков этих прямых дает геометрическую картину поля направлений.

Задача интегрирования дифференциального уравнения (1) может быть теперь истолкована так: найти такую кривую, чтобы касательная к ней в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке.

Задача построения интегральной кривой часто решается введением *изоклин*. *Изоклиной* называется геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым имеют одно и тоже направление. Семейство изоклин дифференциального уравнения (1) определяется уравнением

$$f(x, y) = k, \tag{2}$$

где k — параметр. Придавая параметру k близкие числовые значения, получаем достаточно густую сеть изоклин, с помощью которых можно приближенно построить интегральные кривые дифференциального уравнения (1).

Замечание 1. Нулевая изоклина $f(x, y) = 0$ дает уравнение линий, на которых могут находиться точки максимума и минимума интегральных кривых.

Для большей точности построения интегральных кривых находят также геометрическое место точек перегиба. Для этого находят y'' в силу уравнения (1):

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} \tag{3}$$

и приравнивают ее нулю. Линия, определяемая уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

и есть возможное геометрическое место точек перегиба.

Метод послд прибл.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Метод последовательных приближений состоит в том, что решение y(x) получают как педел последовательности функций $y\ (x)$, которые находятся по рекуррентной формуле $$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx$$. Доказано, что если правая часть f(x,y) в некотором замкнутом прямоугольнике $R\{|x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ удовлетворяет условию Липшица по y: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|, N = const$, то независимо от выбора начальной функции последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся на некотором отрезке $[x_0, x_0 + h]$ к решению задачи. Если f(x,y) непрерывна в прямоугольнике R, то оценка погрешности приближенного решения $y_n(x)$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ дается неравенством

$$\epsilon_n = |y(x) - y_n(x)| \leqslant MN^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$, где $M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$, а число h определяется из условия $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. В качестве начального приближения $y\ (x)$ можно взять любую функцию, достаточно близкую к точному решению. Иногда , например, выгодно в качестве $y_0(x)$ брать приближенное решение уравнения , полученное в виде частичной суммы степенного ряда.