

1. Основные понятия и определения САУ. Принципы управления и классификация САУ.
2. Основные задачи линейной теории автоматического управления и методы их решения.
3. Дифференциальные уравнения звеньев.
4. Линеаризация уравнений динамики звеньев.
5. Передаточные функции звеньев и временные характеристики звеньев.
6. Частотные характеристики звеньев.
7. Усилительное, интегрирующее и дифференцирующее звенья.
8. Апериодическое и форсирующее звенья.
9. Колебательное звено.
10. Особенности и физическая реализуемость звеньев.
11. Структурные схемы САУ и их преобразование.
12. Передаточные функции и дифференциальные уравнения систем.
13. Частотные характеристики систем.
14. Общее описание процессов в непрерывных САУ.
15. Аналитические методы вычисления процессов и непрерывных САУ.
16. Компьютерный расчет переходных процессов и непрерывных САУ.
17. Понятие устойчивости непрерывных САУ.
18. Алгебраические критерии устойчивости непрерывных САУ.
19. Принцип аргумента. Критерий устойчивости Михайлова для непрерывных САУ.
20. Критерии устойчивости Найквиста.
21. Построение областей устойчивости.
22. Анализ устойчивости систем с запаздыванием.
23. Понятие точности непрерывных систем.
24. Установившиеся ошибки при типовых воздействиях.
25. Ошибки непрерывных САУ при произвольном входном воздействии.
26. Ошибки непрерывных САУ при гармоническом воздействии.
27. Корневые оценки качества переходных процессов непрерывных систем.
28. Интегральные оценки качества непрерывных систем.
29. Частотные оценки качества непрерывных систем.
30. Нормальная форма уравнений состояния непрерывных САУ.
31. Каноническая форма уравнений состояния непрерывных САУ.

32. Переход от нормальной формы к канонической для непрерывных САУ.
33. Передаточная матрица и весовая матрица непрерывной системы.
34. Управляемость и наблюдаемость непрерывных САУ.
35. Последовательная, параллельная и встречно-параллельная коррекция непрерывных САУ.
36. Коррекция по внешним воздействиям. |,
37. Синтез непрерывных САУ на основе ЛЧХ.
38. Синтез САУ с запаздыванием.
39. Модальный метод синтеза САУ.
40. Основные понятия и классификация дискретных САУ
41. Решетчатые функции, конечные разности, суммы, разностные уравнения дискретных систем.
42. Дискретное преобразование Лапласа и его свойства.
43. Передаточные функции и схемы моделирования дискретных систем.
44. Представление данных в импульсной системе.
45. Частотные свойства дискретного преобразования.
46. Восстановление данных.
47. Передаточные функции разомкнутых и замкнутых ИСАУ.
48. Переходные процессы в ИСАУ.
49. Частотные характеристики ИСАУ.
50. Условие устойчивости дискретных систем.
51. Билинейное преобразование.
52. Критерий Гурвица и Рауса-Гурвица для анализа устойчивости ИСАУ.
53. Критерий Найквиста для анализа устойчивости ИСАУ.
54. Точность ИСАУ.
55. Уравнения состояния и схемы моделирования дискретных систем.
56. Решение уравнений состояния ИСАУ.
57. Основные формы уравнений состояния ИСАУ.
58. Управляемость и наблюдаемость дискретных систем.
59. Замена при синтезе дискретной системы эквивалентной непрерывной системой.
60. Синтез импульсных систем методом w -преобразования.

1. Основные понятия и определения САУ. Принципы управления и классификация САУ.

Основными частями САУ являются *объект управления* (ОУ – устройство, в котором протекает процесс, подлежащий управлению) и *устройство управления* (УУ).

Координаты u_1, \dots, u_r , которыми в ОУ необходимо управлять - *управляемые (регулируемые) координаты* (выходные величины). Требуемый режим функционирования ОУ нарушается из-за воздействия на него возмущений. Сигналы f_1, \dots, f_r , действующие на объект возмущения – *возмущающие воздействия (возмущения)*. Группа величин u_1, \dots, u_m – *управляющие воздействия*, с помощью которых можно изменять выходные координаты. Координаты u_i, f_i, y_i можно объединить в соответствующие вектора (управления, возмущения, выхода) U, F, Y . На УУ также могут действовать некоторые возмущения, характеризуемые вектором G . Роль УУ – переработка информации, содержащейся в сигналах V и G , и в соответствии с некоторым алгоритмом – выработка управляющих сигналов U .

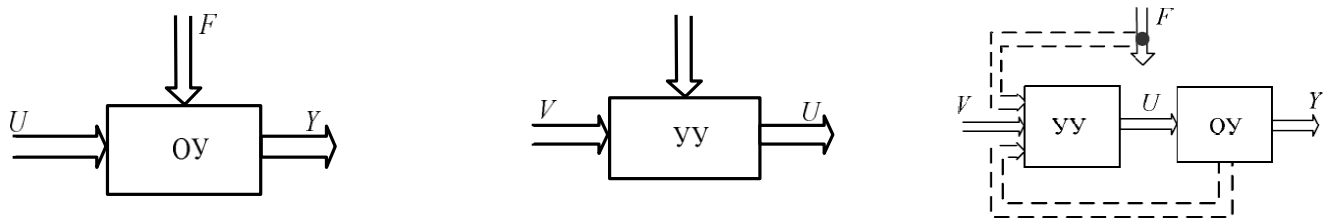
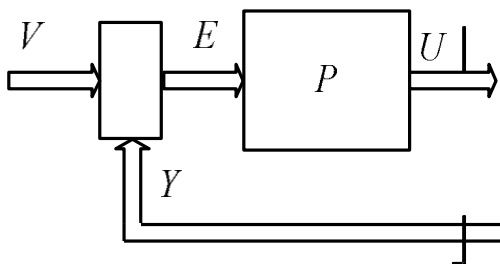


Рис. 1.1 Схематичные изображения ОУ, УУ и САУ (совокупность ОУ и УУ).

Штриховыми линиями показана возможность передачи информации об ОУ и о величинах возмущения на УУ.

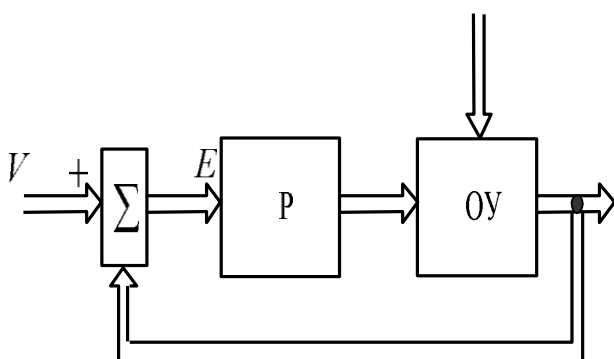


Место разветвления сигналов (на рисунках обозначено жирной точкой) – *узел*.

В большинстве случаев УУ структурно можно разделить на *устройство сравнения* (Σ) и *регулятор* (P) (рис. слева). В соответствии с рисунком алгоритм устройства сравнения: $E=V-Y$. Сигнал E,

характеризующий отклонение выходного сигнала Y от входного V – *сигнал ошибки*.

При таком представлении УУ система, построенная по принципу ОС имеет вид:



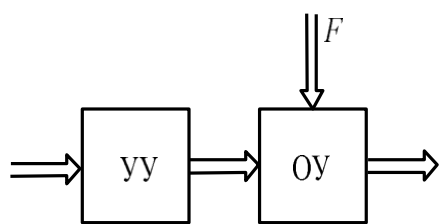
Канал передачи сигнала Y с выхода ОУ на вход системы – *главная ОС*.

Если $E=V-Y$, ОС отрицательная, если

Y $E=V+Y$ – положительная.

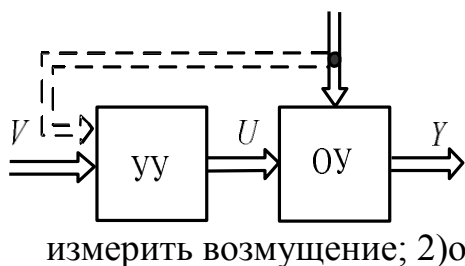
*/*начиная с определения узла и до принципов можно писать после принципа ОС (в конспекте так и написано)*/*

В основу функционирования САУ положены 3 основных принципа управления.



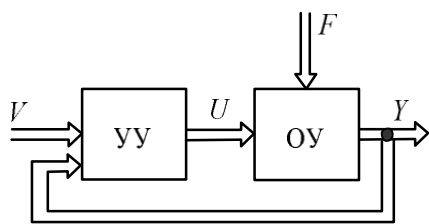
формировании алгоритма управления и ОУ строго исполняет предписанный алгоритм.

Принцип разомкнутого управления (на рис. слева). УУ формирует сигнал управления без учета информации о возмущениях и о результатах управления. Этот простейший принцип применим только в том случае, если возмущения определены и учтены на предварительной стадии при формировании алгоритма управления и ОУ строго исполняет предписанный алгоритм.



измерить возмущение; 2) отсутствие информации о результатах управления.

Принцип компенсации (управление по возмущению) (рис. слева). В этом случае вся информация о действующих возмущениях непрерывно поступает на УУ и учитывается при выработке алгоритма управления. Недостатки: 1) техническая сложность, а иногда невозможность измерить возмущение; 2) отсутствие информации о результатах управления.



выхода. В этом случае алгоритм управления непрерывно учитывает результаты управления.

Принцип ОС (управление по отклонению) (рис. слева). В системе существует канал передачи информации о результатах управления – канал ОС. При этом косвенно через ОУ учитывается и влияние возмущений на вектор

Системы с *комбинированным* управлением – использующие 2й и 3й принципы одновременно.

Классификацию САУ осуществляют в зависимости от признаков, в качестве которых могут быть принципы работы, алгоритмы функционирования, структуры систем и др.

По виду алгоритмов функционирования:

-системы стабилизации ($V = \text{const}$) (системы стабилизации скорости вращения и частоты);

-системы программного управления (вход V изменяется по заданной программе) (САУ промышленного робота, работающая в режиме обработки заданных движений);

-следающие системы (закон изменения V известен заранее) (радиолокационные следающие системы измерения координат движущегося объекта);

С развитием практики и ТАУ появляются новые классы систем:

-системы с поиском экстремума показателя качества;

-системы оптимального управления;

-адаптивные системы (делятся на самонастраивающиеся и самоорганизующиеся);

По виду законов управления. Закон управления – зависимость входного сигнала регулятора U от сигнала ошибки E . Примем U и E скалярными величинами, тогда в общем случае закон управления имеет вид $u = f(e, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, \int edt, \int \int edtdt, \dots)$.

Простейшими случаями этого соотношения являются:

-пропорциональный закон (П-закон): $u = Ke$;

-интегральный закон (И-закон): $u = \frac{K}{T} \int e dt$;

-пропорционально-интегральный закон (ПИ-закон): $u = K[e + \frac{1}{T} \int edt]$;

-пропорционал.-интеграл.-дифференциальн. (ПИД-закон): $u = K[e + \frac{1}{T_1} \int edt + T_2 \frac{de}{dt}]$;

По количеству управляемых координат:

-одномерные ($p=1$);

-многомерные(многосвязные) ($p \geq 2$);

По характеру протекающих процессов:

-непрерывные(все сигналы непрерывны во времени);

-импульсные(хотя бы один сигнал квантован во времени);

-релейные(хотя бы один сигнал квантован по уровню);

-цифровые(одновременное квантование сигнала по уровню и времени);

Релейные, импульсные и цифровые системы составляют класс *дискретных САУ*.

По зависимости выходных сигналов отдельных элементов от входных:

-линейные;

-нелинейные;

По виду параметров, характеризующих отдельные элементы и устройства:

-с сосредоточенными (распределенными параметрами);

-стационарные(все параметры постоянны по времени);

-нестационарные(параметры изменяются во времени);

-с детерминированными параметрами(закон изменения параметров известен);

-со случайными параметрами(заданы их вероятностные характеристики);

-с неопределенными параметрами(например задается только область их изменения);

2. Основные задачи линейной ТАУ и методы их решения.

Цель системы управления – соответствие её назначению и удовлетворение заданным показателям качества.

Основные задачи: //через «-» снизу будут описаны методы решения

А) математическое описание звеньев систем(изучение статических и динамических свойств различных элементов и устройств);

- дифференциальные уравнения для непрерывных систем;
- разностные уравнения для дискретных систем;
- передаточные функции, временные и частотные характеристики;

Б) математические описания систем;

- структурные схемы систем;
- правила их преобразования;
- основные динамические характеристики;

В) процессы в системах управления;

-из-за наличия в системе начальных условий и внешнего воздействия, при этом изучаются свободное и вынужденное движение, переходная и установившаяся составляющие, что очень важно для оценки устойчивости и точности системы;

Устойчивость СУ – основополагающая задача ТАУ. При изучении устойчивости рассматриваются достаточные и необходимые условия устойчивости и разных критериев. Устойчивость системы в установившемся режиме связана с определением установившихся ошибок при действии типовых и произвольных воздействий.

Г) оценка качества системы переходных режимов;

Д) коррекция СУ;

- необходимость придания системе заданных свойств;

Е) создание, развитие методов анализа и синтеза САУ.

3. Дифференциальные уравнения звеньев.

Звенье – соединенные в определенной последовательности элементы и устройства, из которых состоит САУ.

Линейная непрерывная стационарная система с сосредоточенными параметрами – система, которая в целом так же, как и отдельные звенья, описывается ЛОДУ с постоянными коэффициентами.

Если x_1 – входной сигнал, а x_2 – выходной (сигналы интерпретируются как функции текущего времени t) то, звено в общем случае описывается ДУ следующего вида:

$$a_0 x_2^{(n)} + a_1 x_2^{(n-1)} + \dots + a_n x_2 = b_0 x_1^{(m)} + b_1 x_1^{(m-1)} + \dots + b_m x_1,$$

где $x^{(i)} = \frac{d^i x(t)}{dt^i}$; $a_i, b_i = const$.

Коэффициенты a_i, b_i зависят от конструктивных параметров звена. Порядок ДУ n так же будет определять порядок звена, как правило $n \leq 2$.

Для математического описания процессов в звене следует задавать начальные условия.

Уравнение звеньев в стандартной форме:

$$a_n \left[\frac{a_0}{a_n} x_2^{(n)} + \frac{a_1}{a_n} x_2^{(n-1)} + \dots + x_2 \right] = b_m \left[\frac{b_0}{b_m} x_1^{(m)} + \frac{b_1}{b_m} x_1^{(m-1)} + \dots + x_1 \right] \quad (1)$$

пусть $K = \frac{b_m}{a_n}$; $T_n^n = \frac{a_0}{a_n}$; $T_n^{n-1} = \frac{a_1}{a_n}$; $\tau_m^m = \frac{b_0}{b_m}$; $\tau_m^{m-1} = \frac{b_1}{b_m}$, тогда уравнение (1):

$$T_n^n x_2^{(n)} + T_n^{n-1} x_2^{(n-1)} + \dots + x_2 = K \left[\tau_m^m x_1^{(m)} + \tau_m^{m-1} x_1^{(m-1)} + \dots + x_1 \right] \quad (2)$$

Так же уравнения (2) и (1) можно записать в операторном (символическом) виде,

вводя дифференциальный оператор $p = \frac{d}{dt}$ такой, что $p^i x(t) = \frac{d^i x(t)}{dt^i}$, тогда уравнение

(1) примет вид: $[a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n] x_2(t) = [b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m] x_1(t)$, обозначив левую скобку $A(p)$, а правую $B(p)$ получим $A(p)x_2(t) = B(p)x_1(t) \quad (3)$.

По виду ДУ (1) звенья делятся на:

- позиционные ($a_n \neq 0, b_m \neq 0$);
- дифференцирующие ($a_n \neq 0, b_m = 0$);
- интегрирующие ($a_n = 0, b_m \neq 0$);

Уравнения в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv \\ y = Cx + Dv \end{cases}$$

D – матрица обхода, в реальных системах $D=0$

A – диагональная матрица Фробениуса

4. Линеаризация уравнений динамики звеньев.

Реальные устройства САУ обычно нелинейны. *Линеаризация* – операция замены нелинейных САУ линейными. Наиболее распространённый – способ, базирующийся на разложении в ряд Тейлора.

Пусть звено САУ описывается $\dot{x} = f(x_1, x_2)$ (1), где x_1 – входной, x_2 – выходной сигналы.

Рассмотрим установившийся режим работы звена когда на входе действует постоянный сигнал $x_1^* = const$, а на выходе $x_2^* = const$. Связь установившихся значений сигналов x_1 и x_2 задается уравнением установившегося режима $f(x_1, x_2) = 0$

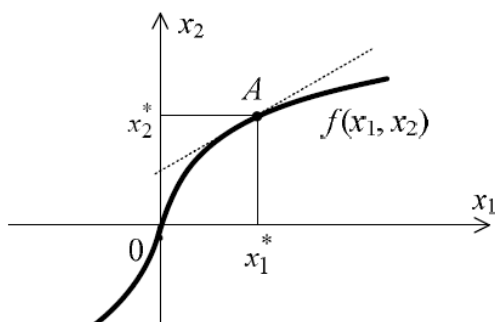
Отклонения от установившегося режима $\Delta x_2 = x_2 - x_2^*$, $\Delta x_1 = x_1 - x_1^*$.

Разложим (1) в ряд Тейлора относительно координат x_1^* и x_2^* :

$$\dot{x} = f(x_1^*, x_2^*) + a_1(x_2 - x_2^*) + b_1(x_1 - x_1^*) + \frac{a_2}{2!}(x_2 - x_2^*)^2 + \frac{b_2}{2!}(x_1 - x_1^*)^2 + \dots,$$

где

$$a_1 = \left. \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*}, b_1 = \left. \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*}$$



Учитывая, что $f(x_1^*, x_2^*) = 0$ и $\Delta \dot{x}_2 = \dot{x}_2$, и пренебрегая величинами второго и большего порядков малости, получим

$$\Delta \dot{x}_2 = a_1 \Delta x_2 + b_1 \Delta x_1 \quad (2) -$$

линеаризованное уравнение.

Уравнение (2) – уравнение касательной к исходной кривой в точке линеаризации (A).

Особенности линеаризации:

-возможна, если исходная нелинейная функция в точке разложения является аналитической (дифференцируема бесконечное число раз).

-коэффициенты a_1 и b_1 зависят от координат точки линеаризации.

-линеаризованное уравнение тем ближе к исходному, чем меньше отклонение переменных.

5. Передаточная функция и временные характеристики звеньев.

Если в ДУ звена $a_0x_2^{(n)} + a_1x_2^{(n-1)} + \dots + a_nx_2 = b_0x_1^{(m)} + x_1^{(m-1)} + \dots + b_mx_1$ положить начальные условия нулевыми, и подвергнуть его прямому преобразованию Лапласа, получим:
 $[a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n]x_2(s) = [b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m]x_1(s)$,
откуда $W(s) = \frac{x_2(s)}{x_1(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}$ - передаточная функция звена – отношение изображения выходного сигнала к изображению входного при нулевых начальных условиях. Если взять ДУ в операторной форме ($A(p)x_2(t) = B(p)x_1(t)$) и заменить p на s , то $W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$.

Передаточная функция звена записывается в виде $W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}$,

где

$$\begin{aligned} N(s) &= \tau_m^m s^m + \tau_{m-1}^{m-1} s^{m-1} + \dots + 1; L(s) \\ &= T_n^n s^n + T_{n-1}^{n-1} s^{n-1} + \dots + 1 \end{aligned}$$

$L(s)$ – характеристический полином звена, $L(\lambda)=0$ – характеристическое уравнение.

Временные характеристики:

Весовая (импульсная) функция $w(t)$ звена, формально определяется как обратное преобразование Лапласа от передаточной функции: $w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$.

Импульсная функция – реакция звена при подаче на вход дельта-функции.

Переходная функция звена $h(t)$ – реакция звена на единичное ступенчатое воздействие.

$$L\{1(t)\} = \frac{1}{s}, \text{ тогда } w(t) = \frac{dh(t)}{dt}; h(t) = L^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}; h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau$$

6. Частотные характеристики звеньев.

Частотные характеристики определяют динамические свойства звеньев при воздействии на них гармонических сигналов. Частотные характеристики получаются из передаточной функции при $s=j\omega$. $W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-j\omega t} dt$. Т.е. $W(j\omega)$ - прямое преобразование Фурье от $w(t)$.

Комплексная функция $W(j\omega)$ частоты ω – АФЧХ звена

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} - \text{АЧХ}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} - \text{ФЧХ}$$

$U(\omega)$ – вещественная частотная характеристика, $V(\omega)$ – мнимая.

$$W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)}; A(j\omega) = K \frac{|N(j\omega)|}{|L(j\omega)|}; \varphi(\omega) = \arg N(j\omega) - \arg L(j\omega).$$

Если на вход звена с передаточной функцией $W(s)$ подать сигнал $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$, то в установившемся режиме выходной сигнал: $x_{2y}(t) = A_1 |W(j\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \arg W(j\omega_1))$, т.е. той же частоты, но измененных амплитуды и фазы.

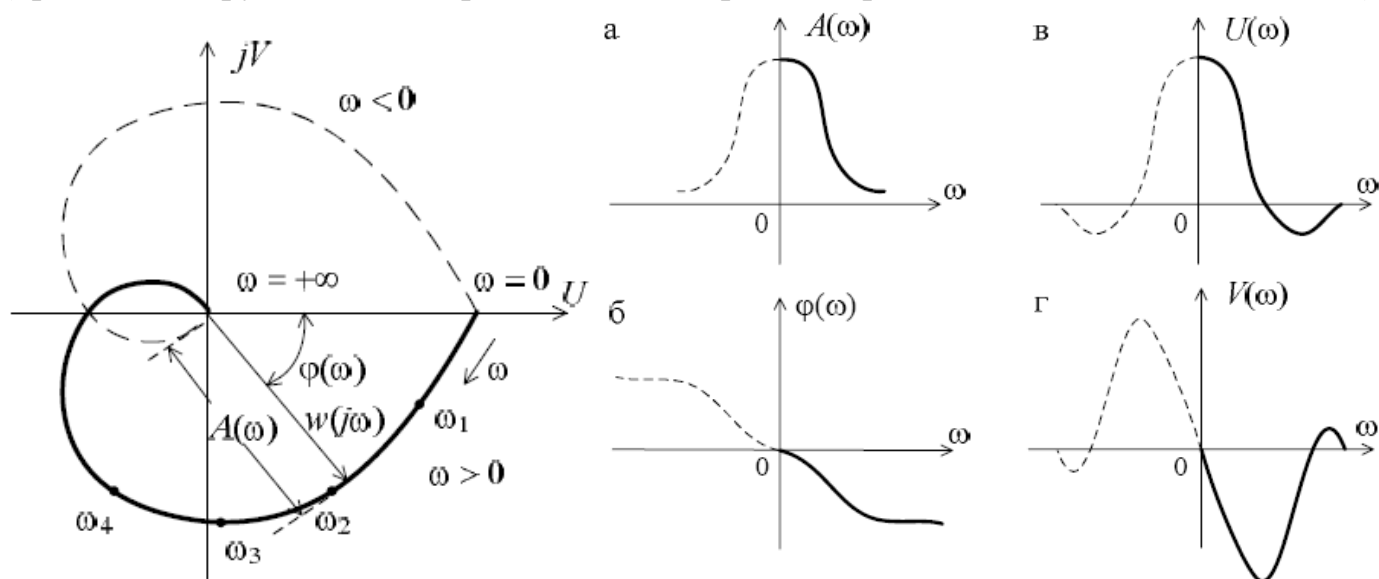
Т.о. АЧХ показывает изменение амплитуды, а ФЧХ – изменение фазы.

Частотные характеристики обладают следующими свойствами:

$$U(-\omega) = U(\omega); A(-\omega) = A(\omega) - \text{чётные характеристики}$$

$$V(-\omega) = -V(\omega); \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) - \text{нечётные характеристики}$$

В силу этого АФЧХ строится на комплексно плоскости, при изменении ω от 0 до ∞ (при $\omega < 0$, вторую часть достраивают симметрично первой относительно оси абсцисс).



На практике часто применяются ЛАЧХ и ЛФЧХ. // [Б] – изменение уровня мощности сигнала на декаду.

7. Усилительное, интегрирующее и дифференцирующее звенья.

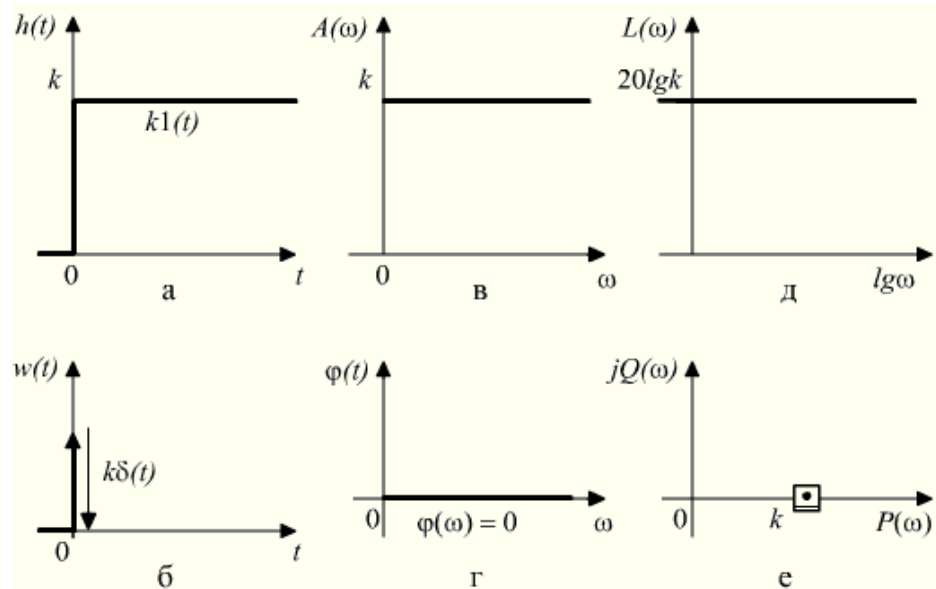
Идеальное усилительное звено:

Уравнение: $x_2(t) = Kx_1(t)$;

Передаточная функция: $W(s) = K$;

Частотные характеристики: $W(j\omega) = K$; $A(\omega) = K$; $\varphi(\omega) = 0$; $L(\omega) = 20\lg K$;

Временные характеристики: $w(t) = K\delta(t)$; $h(t) = K1(t)$;



/*на е) графике вместо $jQ(\omega)$ и $P(\omega)$ Лукьянец писал jV и U соответственно. Так же вместо квадрата с кружком просто стрелочка.*/

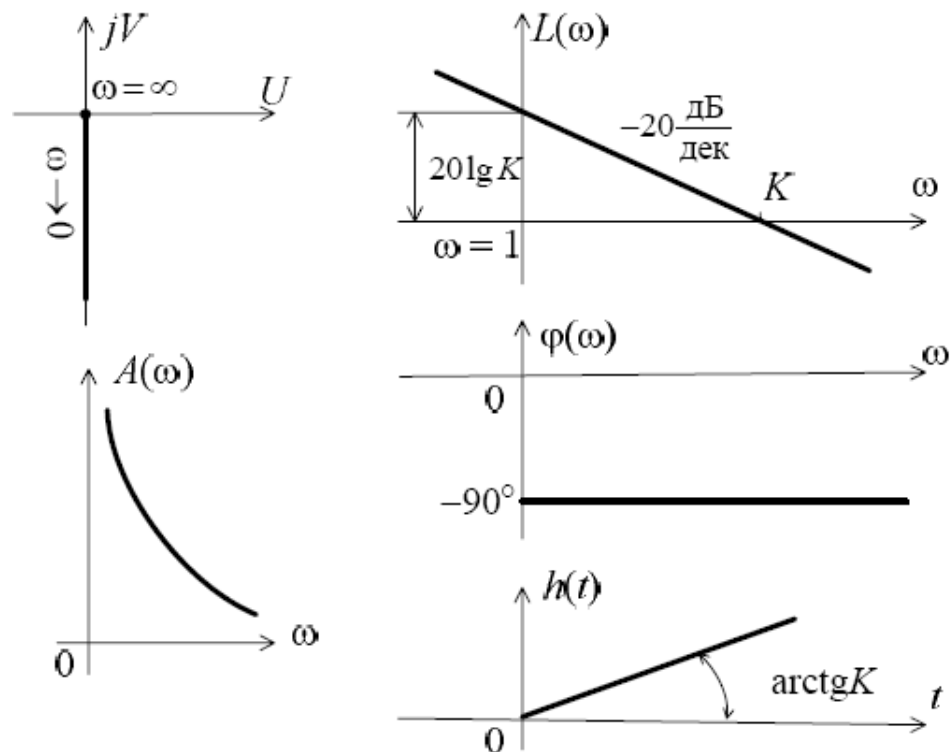
Идеальное интегрирующее звено:

Уравнение: $x_2 = K \int x_1(t) dt$;

Передаточная функция: $W(s) = \frac{K}{s}$;

Частотные хар-ки: $W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$; $A(\omega) = \frac{K}{\omega}$; $\varphi(\omega) = -90^\circ$; $L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\omega$;

Временные характеристики: $w(t) = K1(t)$; $h(t) = Kt$;



/*график $w(t)$ будет точно такой же как и $h(t)$ для идеального усилительного звена*/

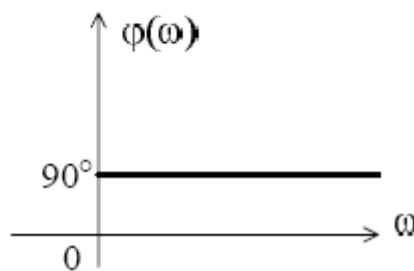
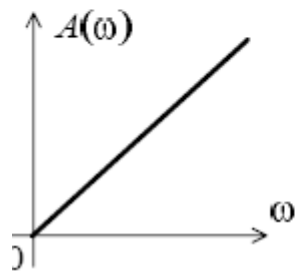
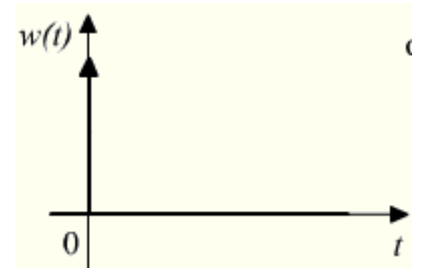
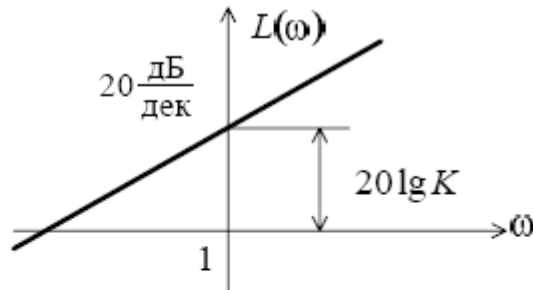
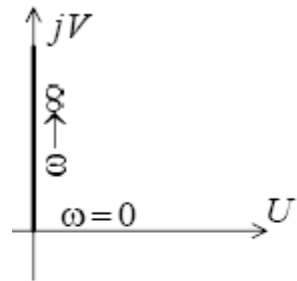
Идеальное дифференцирующее звено:

ДУ: $x_2(t) = Kp x_1(t)$;

Передаточная функция: $W(s) = Ks$;

Частотные хар-ки: $W(j\omega) = Kj\omega$; $A(\omega) = K\omega$; $\varphi(\omega) = 90^\circ$; $L(\omega) = 20\lg K + 20\lg\omega$;

Временные характеристики: $w(t) = K\delta^{(1)}(t)$; $h(t) = K\delta(t)$;



/*график $h(t)$ такой же как и $w(t)$ для идеального усилительного звена. В графике $w(t)$ для данного случая не уверен.* /

8. Апериодическое и форсирующее звенья.

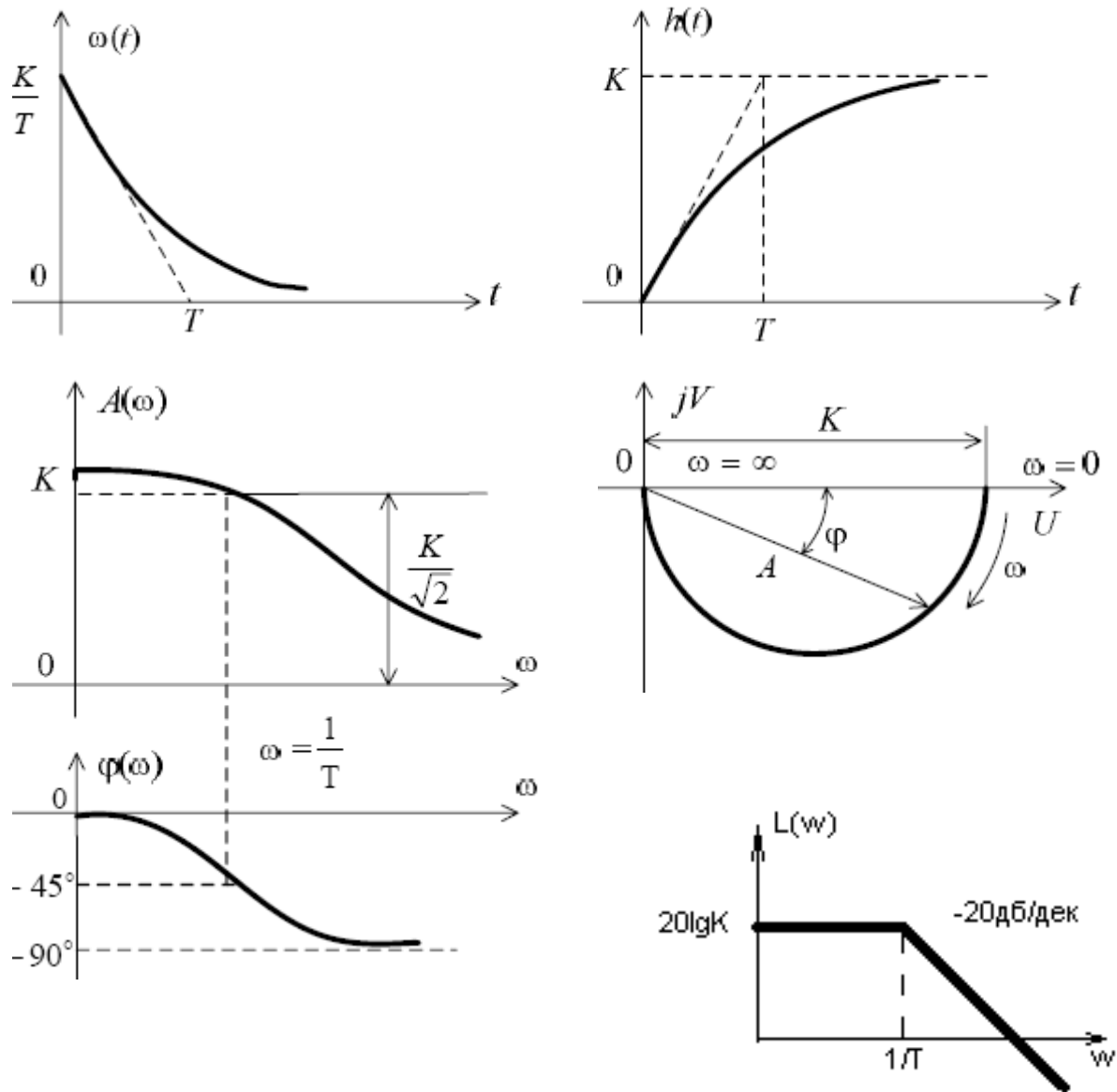
Апериодическое звено 1го порядка:

$$\text{ДУ: } (Tp + 1)x_2(t) = Kx_1(t);$$

$$\text{Передаточная функция: } W(s) = \frac{K}{Ts+1};$$

$$\text{Частотные хар-ки: } W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega+1}; A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}; \varphi(\omega) = -\arctg T\omega; L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1};$$

$$\text{Временные характеристики: } w(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{t}{T}}; h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



Апериодическое звено 2го порядка:

Частный случай колебательного звена. Состоит из 2х апериодических звеньев 1го порядка ($\xi=1$). Корни вещественные и отрицательные.

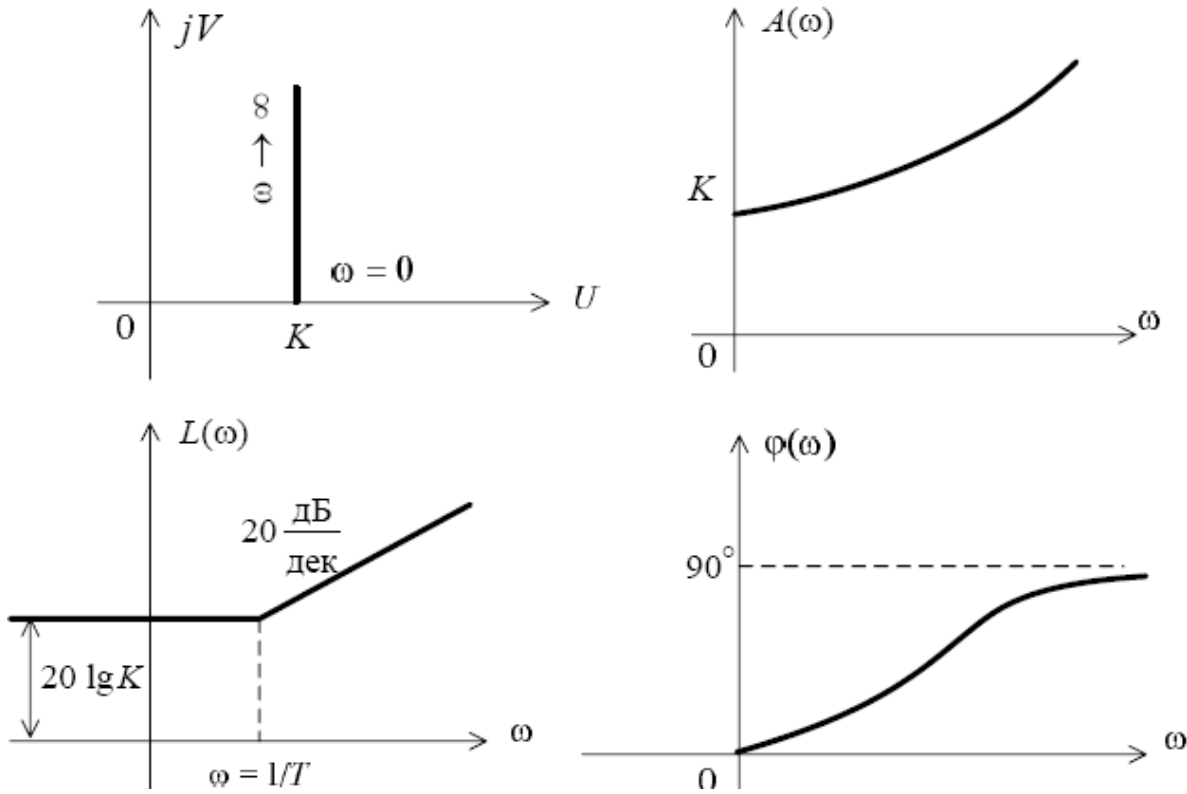
Форсирующее звено 1го порядка:

ДУ: $x_2(t) = K(Tp + 1)x_1(t)$;

Передаточная функция: $W(s) = K(Ts + 1)$;

Частотные характеристики: $W(j\omega) = K(Tj\omega + 1)$; $A(\omega) = K\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$; $\varphi(\omega) = \text{arctg}T\omega$; $L(\omega) = 20\lg K + 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$;

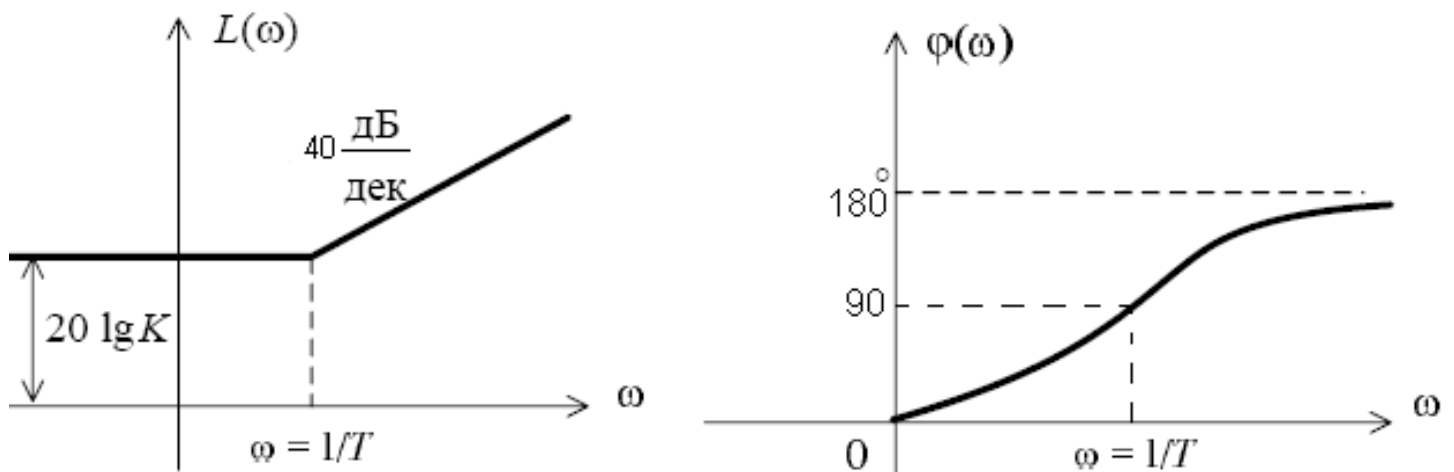
Временные характеристики: $h(t) = K[T\delta(t) + 1[t]]$; $w(t) = K[T\delta^{(1)}(t) + \delta(t)]$;



Форсирующее звено 2го порядка:

ДУ: $x_2(t) = K(T^2p^2 + 2K\xi Tp + 1)x_1(t)$;

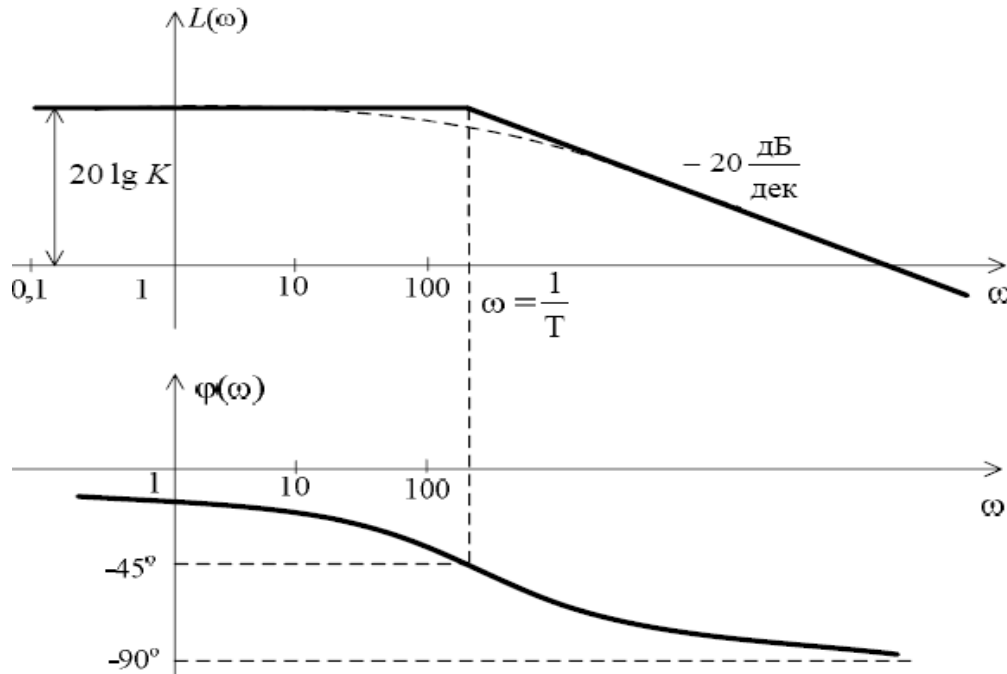
Передаточная функция: $W(s) = (T^2s^2 + 2K\xi Ts + 1)$ при условии $0 \leq \xi < 1$. При $\xi \geq 1$ это звено можно представить как произведение 2х форсирующих звеньев 1го порядка.



9. Колебательное звено.

ДУ: $(T^2 p^2 + T p + 1)x_2(t) = K x_1(t)$, полагаем, что $T_1 < 2T_2$, тогда корни характеристического уравнения $T^2 \lambda^2 + T \lambda + 1 = 0$ будут комплексными.

Передаточная функция: $W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$, где $T = T_2$, $\xi = \frac{T_1}{T_2}$, $0 < \xi < 1$



Частотные и временные характеристики звена имеют следующий вид:

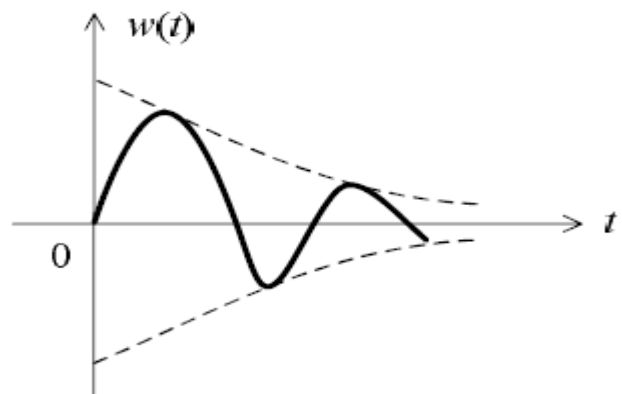
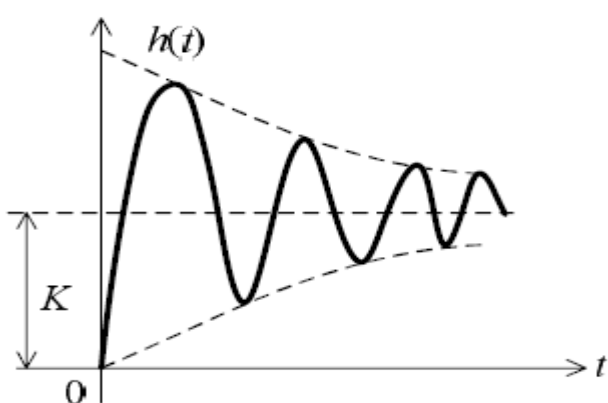
$$W(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1}; A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}};$$

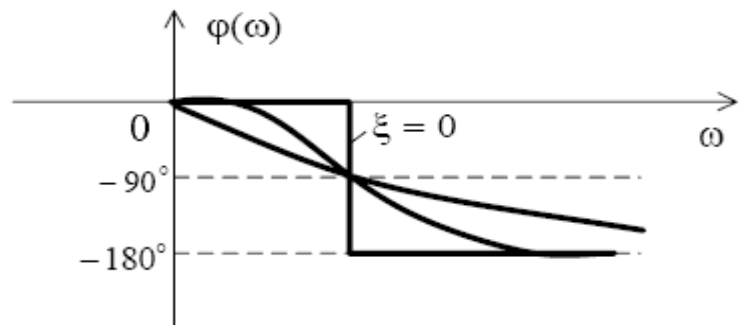
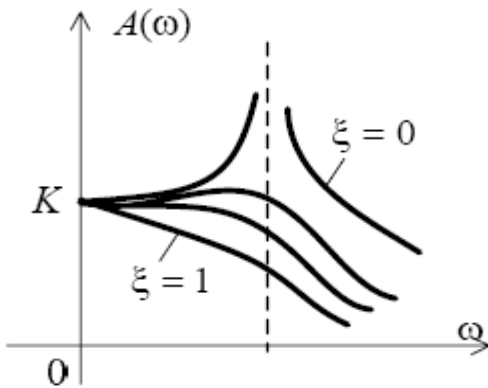
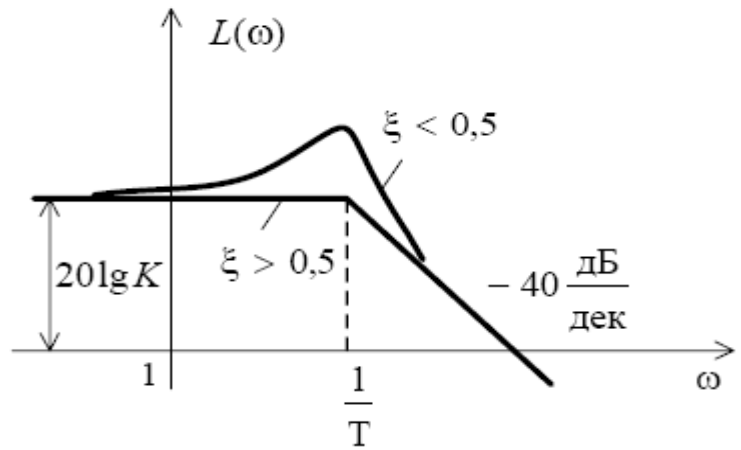
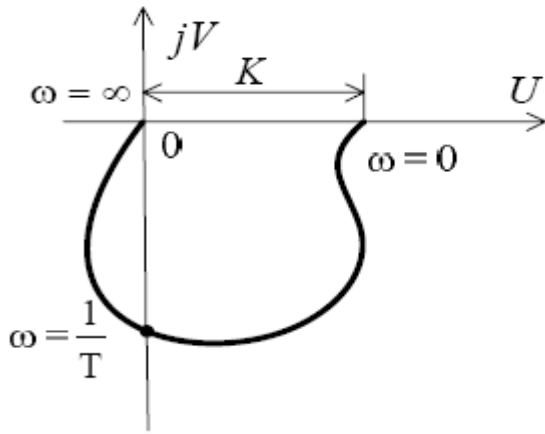
$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctg \frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}, & \omega \leq \frac{1}{T} \\ -180^\circ - \arctg \frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}, & \omega \geq \frac{1}{T} \end{cases}$$

Временные характеристики: $w(t) = \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$;

$h(t) = K \left[1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right]$, где $\alpha = \frac{\xi}{T}$; $\beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$; $\varphi = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$.





/* $A(\omega) \leq K$ для любого ω , если $0.707 < \zeta < 1$, при $\zeta < 0.707$ на графике $A(\omega)$ появляется «горб», который уходит в бесконечность при $\zeta \rightarrow 0$. Величина ζ – параметр затухания. Чем меньше ζ , тем медленнее затухает колебательная составляющая в выражениях $w(t)$ и $h(t)$. Асимптотическая ЛАЧХ в виде ломаной может быть получена только при $\zeta = 1$ и имеет следующий вид $L(\omega) = 20\lg K - 20\lg(1 + T^2\omega^2)$ */

Частные случаи колебательного звена:

-консервативное звено при $\zeta = 0$, имеет передаточную функцию $W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 1}$.

-апериодическое звено 2го порядка, при $\zeta \geq 1$, передаточная функция :

$$W(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}; T_{1,2} = \frac{T}{\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

10. Особенности и физическая реализуемость звеньев.

Звено имеет передаточную функцию $W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}$, если нули и полюса передаточной функции имеют действительные части, отрицательные или равные нулю (лежат в левой полуплоскости) то это звено *минимально-фазового типа*. При наличии хотя бы одного нуля или полюса с положительной вещественной частью (в правой полуплоскости) – звено *неминимально-фазового типа*.

Звено минимально-фазового типа:

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}; A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}; \varphi(\omega) = -\arctg T\omega$$

Звено неминимально-фазового сдвига:

$$W(s) = \frac{K}{Ts - 1}; A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}; \varphi(\omega) = -180^\circ - \arctg T\omega$$

Т.о. при одинаковых АЧХ неминимально-фазовое звено имеет больший по модулю фазовый сдвиг.

Свойство физической реализуемости:

АЧХ с увеличением частоты должна уменьшаться и стремиться к нулю, а фазовые сдвиги на высоких частотах должны быть отрицательны. Пусть полином числителя $KN(s)$ передаточной функции $W(s)$ имеет порядок m , а полином знаменателя $L(s)$ – порядок n Тогда для минимально-фазового сдвига звена

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)} \right| = \begin{cases} 0, m < n \\ const, m = n \\ \infty, m > n \end{cases}; \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = m \frac{\pi}{2} - n \frac{\pi}{2} =$$

$$\begin{cases} < 0, m < n \\ = 0, m = n. \\ > 0, m > n \end{cases}$$

Звено является физически реализуемым если $n < m$.

11. Структурные схемы САУ и их преобразование.

Структурная схема – графическое представление САУ. Выделяют:

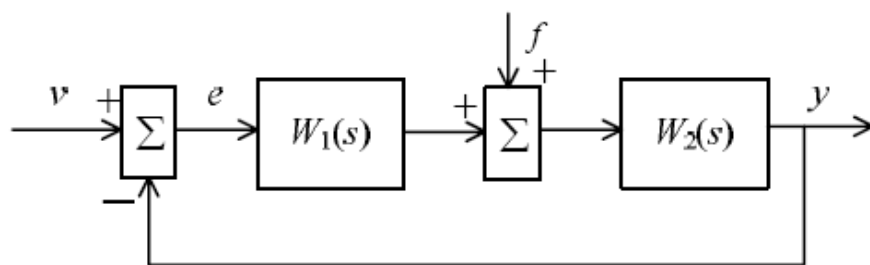
-конструктивные схемы – блок является законченным техническим устройством (двигатель, тахогенератор, и др.).

-функциональные схемы – блок представляет собой один или несколько элементов(преобразования сбора информации и т.п.).

-алгоритмические структурные схемы (используются при математическом описании систем) – составной частью схемы является звено системы.

Характеристикой звена является его математическое описание в виде ДУ, передаточной функции (наиболее часто) или другой характеристики

Структурные преобразования – преобразование структурной схемы (объединение или разбиение звеньев). Структурная схема стандартной САУ (на рис. снизу)

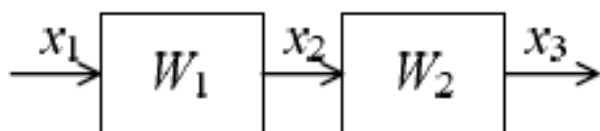


$W_2(s)$ – передаточная функция ОУ, $W_1(s)$ – передаточная функция регулятора, v – входной сигнал, f – возмущающий, e – сигнал рассогласования.

Единичная ОС в такой САУ – главная ОС.

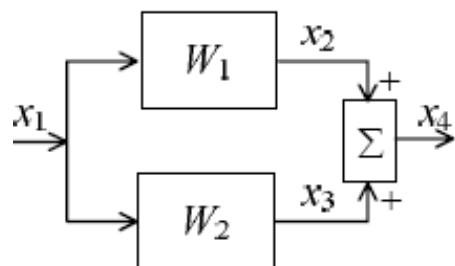
Существует 3 основных вида объединения звеньев:

-последовательное $x_3(s) = W_1(s)W_2(s)x_1(s)$; $W(s) = \frac{x_3(s)}{x_1(s)} = W_1(s)W_2(s)$;



$$W(s) = \prod_i W_i(s)$$

-параллельное: $x_3(s) = (W_1(s) + W_2(s))x_1(s)$; $W(s) = \frac{x_4(s)}{x_1(s)} = W_1(s) + W_2(s)$;

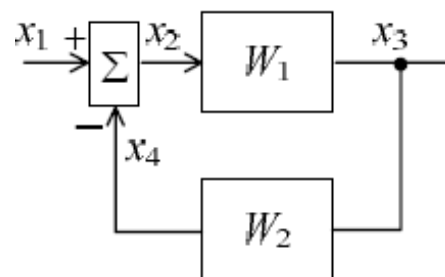


$$W(s) = \sum_i W_i(s)$$

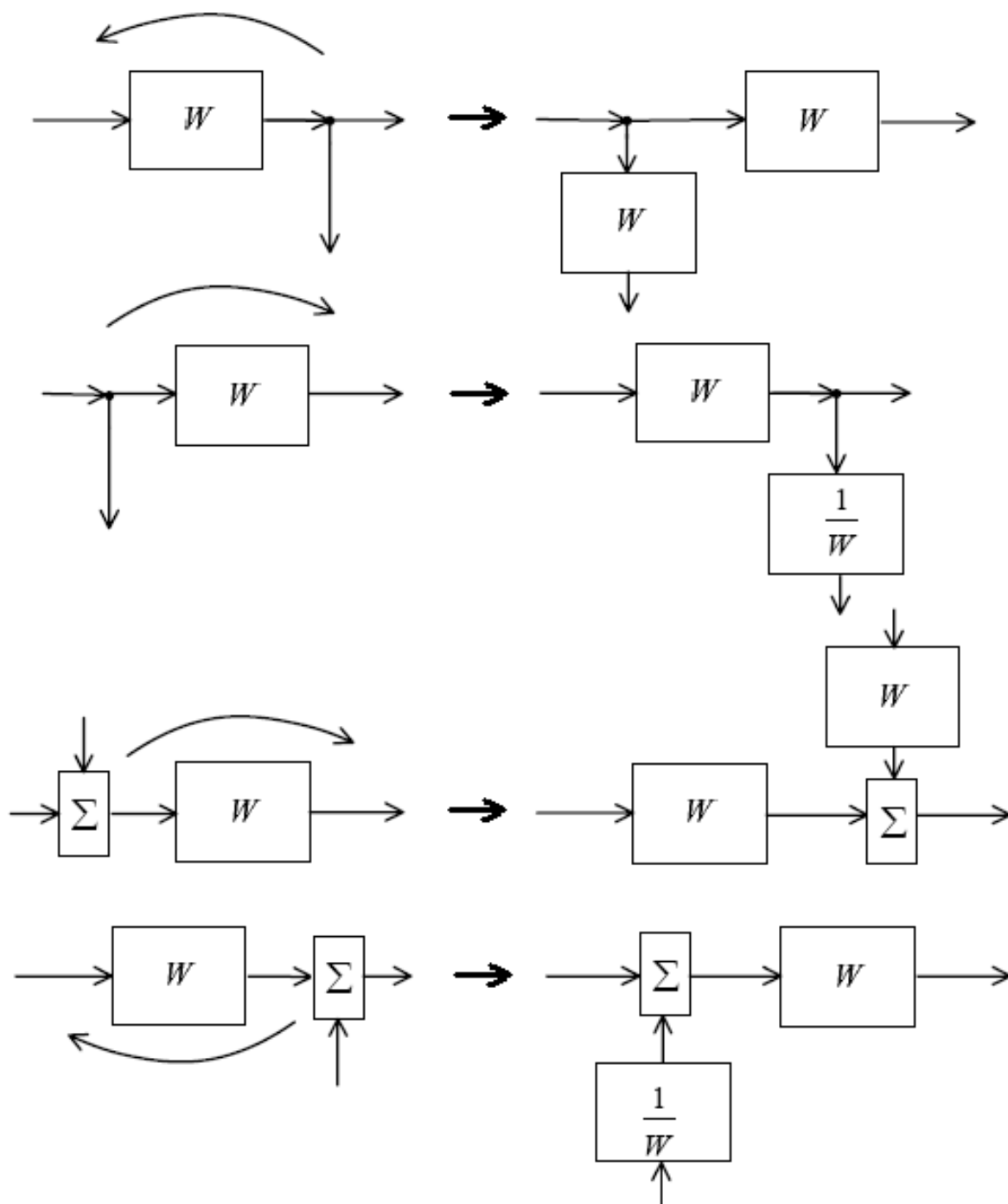
-с помощью ОС: $x_3(s) = W_1(s)x_2(s)$; $W(s) = \frac{x_3(s)}{x_1(s)} =$

$$\frac{W_1(s)}{1+W_1(s)W_2(s)}$$

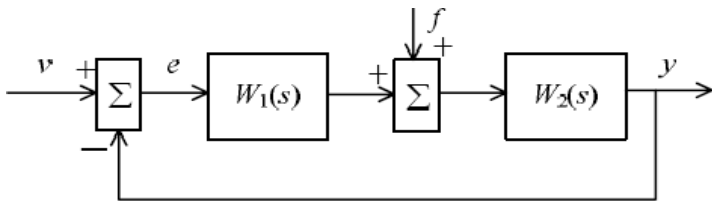
; если ОС единичная, то $W(s) = \frac{W_1(s)}{1+W_1(s)}$



При структурных преобразованиях приходится переносить отдельные узлы и сумматоры из одних участков схемы в другие. Передаточная функция схемы до и после переноса должна быть неизменной.



12. Передаточные функции и дифференциальные уравнения систем.



Обозначим произведение $W_1(s)$ и $W_2(s)$ через $W(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы, (ГОС – разомкнута, $f=0$) $W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}$ (1);

Если характеристическое уравнение системы $L(\lambda)=0$ не содержит нулевых корней, то САУ статическая. При наличии нулевых корней передаточную функцию можно представить в виде $W(s) = \frac{KN(s)}{s^\nu L_0(s)}$ (2), где $L_0(\lambda)=0$ не содержит нулевых корней, ν – количество нулевых корней уравнения $L(\lambda)=0$. САУ с передаточной функцией (2) – астатическая САУ с астатизмом ν -го порядка. (1) является частным случаем (2).

Для замкнутых САУ (ГОС замкнута, $f \neq 0$):

$$Y(s) = W_2(s)[F(s) + W_1(s)E(s)]; E(s) = V(s) - Y(s) \quad (3)$$

Из (3): $\frac{W(s)}{1+W(s)} = \Phi(s); \frac{W_2(s)}{1+W(s)} = \Phi_f(s); \frac{1}{1+W(s)} = \Phi_e(s)$ (4)

$\Phi(s)$ – главная передаточная функция замкнутой системы

$\Phi_f(s)$ – передаточная функция замкнутой системы по возмущению

$\Phi_e(s)$ – передаточная функция замкнутой системы по ошибке

тогда $Y(s) = \Phi(s)V(s) + \Phi_f(s)F(s)$ (5); $E(s) = \Phi_e(s)V(s) + \Phi_f(s)F(s)$ (6)

Если $W(s)$ представлена в виде (1), то $\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}; \Phi_e(s) = \frac{L(s)}{D(s)}; \Phi_f(s) = \frac{R(s)}{D(s)}$ (7),

где $D(s) = L(s) + KN(s); R(s) = L(s)W_2(s)$, $D(s)$ – характеристический полином замкнутой САУ, $D(\lambda)=0$ характеристическое уравнение замкнутой САУ.

Если в уравнении (5) сделать подстановку выражений (7) получим

$D(s)Y(s) = KN(s)V(s) + R(s)F(s)$, перейдя к оригиналам ($s \rightarrow p$) получим ДУ замкнутой САУ: $D(p)y(t) = KN(p)v(t) + R(p)f(t)$. Порядок ДУ будем называть порядком САУ.

Полученное ДУ описывает поведение системы в динамическом режиме, частным случаем которого является статический (установившийся) режим. Полагая $y, f,$

$v = const$ (тогда их производные равны нулю, что соответствует $p = 0$ в полиномах D, N, R) получим уравнение статического режима: $D(0)y = KN(0)v + R(0)f$.

$N(0)=1, D(0)=K$ – астатическая САУ, $D(0)=K+1$ – статическая САУ.

Для астатических САУ ($\nu \neq 0$) $y = v + \frac{R(0)}{K}$

Для статических САУ ($\nu = 0$) $y = \frac{K}{K+1}v + \frac{R(0)}{K}f$

Значение величины $R(0)$ зависит от вида передаточных функций $W_1(s), W_2(s)$.

//Временные характеристики замкнутых САУ (в вопросах нету, но пусть будут)

$$h_3(t) = L^{-1}\{\Phi(s)/s\}, \varphi_3(t) = \omega_3(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\}$$

13. Частотные характеристики систем.

Для разомкнутых САУ:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) - \text{АФЧХ, где}$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| - \text{АЧХ; } \varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} - \text{ФЧХ;}$$

$U(\omega), V(\omega)$ - соответственно вещественная и мнимая ЧХ; $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ - ЛАЧХ.

Пусть $W(s) = \frac{KN(s)}{s^\nu L_0(s)}$ и степень полинома числителя меньше знаменателя ($m < n$), тогда:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(\omega) = \begin{cases} K, \nu = 0 \\ \infty, \nu \geq 1 \end{cases}; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, \nu = 0 \\ -\nu \frac{\pi}{2}, \nu \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -(n - m) \frac{\pi}{2}, \quad \text{при любых } \nu;$$

При этом годограф $W(j\omega)$ на комплексной плоскости при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к началу координат, при $\omega = 0$ для статической системы он начинается на действительной оси на расстоянии K от начала координат, а для астатических при $\omega \rightarrow 0$ уходит в бесконечность в третьем квадранте при $\nu = 1$, во втором – при $\nu = 2$, в первом – при $\nu = 3$, и т.д. по часовой стрелке.

Если передаточная функция разомкнутой САУ представлена в виде $W(s) = \prod_i W_i(s)$, то $A(\omega) = \prod_i A_i(\omega)$, $\varphi(\omega) = \sum_i \varphi_i(\omega)$, $L(\omega) = \sum_i L_i(\omega)$

Если $W(s) = \sum_i W_i(s)$,

$$\text{то } A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \quad L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

Для замкнутых САУ:

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega);$$

$$A_3(\omega) = |\Phi(j\omega)| - \text{АЧХ, } P(\omega) = \text{Re} \Phi(j\omega) - \text{вещественная ЧХ}$$

Для физически реализуемых систем $\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_3(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = 0$

$$A_3(0) = P(0) = \begin{cases} 1, \nu \geq 1 \\ \frac{K}{1+K}, \nu = 0 \end{cases}$$

Связь между ЧХ разомкнутой и замкнутой САУ:

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)},$$

$$\Phi(j\omega) = A_3(\omega)e^{j\varphi_3(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega); \quad W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega);$$

$$\varphi_3(\omega) = \arg \Phi(j\omega) = \varphi(\omega) - \arg[W(j\omega) + 1] = \arctg \frac{\sin \varphi(\omega)}{A(\omega) + \cos \varphi(\omega)}$$

$$A_3(\omega) = \frac{A(\omega)}{\sqrt{A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega) + 1}}$$

14. Общее описание процессов в непрерывных САУ.

Динамические процессы в САУ во временной области описываются в виде ДУ:

$D(p)y(t) = KN(p)v(t) + R(p)f(t)$ (1); в области изображений: $Y(s) = \Phi(s)V(s) + \Phi_f(s)F(s)$ (2).

$y(t)$ - решение ДУ. Составляющая выходного сигнала, обусловленную ненулевыми начальными условиями переменной $y(t)$ и ее производных – свободная составляющая $y_c(t)$; составляющие, обусловленные сигналами $v(t)$ и $f(t)$ – вынужденные ($y_{v\delta}(t)$ и $y_{f\delta}(t)$ соответственно), тогда

$$y(t) = y_c(t) + y_{\delta}(t) = y_c(t) + y_{v\delta}(t) + y_{f\delta}(t);$$

$y_c(t)$ – общее решение ДУ без правой части (однородного уравнения), а $y_{\delta}(t)$ – частным решением ДУ с правой частью (неоднородного уравнения).

Общее решение однородного уравнения в случае различных корней характеристического уравнения $D(\lambda) = 0$ определяется выражением $y_c(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$, где C_i – произвольные постоянные, определяемые через начальные условия.

Если $D(\lambda) = 0$ имеет один кратный корень λ_1 кратности r , а остальные $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ – простые, то общее решение: $y_c(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} + \dots + C_r t^{r-1} e^{\lambda_1 t} + C_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$. В случае нескольких кратных корней в свободной составляющей будут появляться аналогичные группы слагаемых, соответствующие каждому кратному корню.

Для вычисления вынужденной составляющей воспользуемся $\varphi(t) = L^{-1}\{\Phi(s)\}$ (по управляющему сигналу) $\varphi_f(t) = L^{-1}\{\Phi_f(s)\}$ (по возмущению), тогда переходя в (2) к оригиналам: $y_{\delta}(t) = y_{v\delta}(t) + y_{f\delta}(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau)v(\tau)d\tau + \int_0^t \varphi_f(t-\tau)f(\tau)d\tau$ (3)

Т.о. полное решение ДУ: $y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} + \int_0^t \varphi(t-\tau)v(\tau)d\tau + \int_0^t \varphi_f(t-\tau)f(\tau)d\tau$ (4), в случае нулевых начальных условий все $C_i = 0$ и (4) превращается в (3).

Наиболее часто сигнал управления $v(t)$ (то же самое и для возмущения $f(t)$) задают в виде типового сигнала следующего вида:

- $v(t) = \delta(t)$ – дельта функция;

- $v(t) = v_0 I[t]$ – ступенчатая функция амплитуды v_0 (скачок по положению);

- $v(t) = v_1 t$ – скачок по скорости;

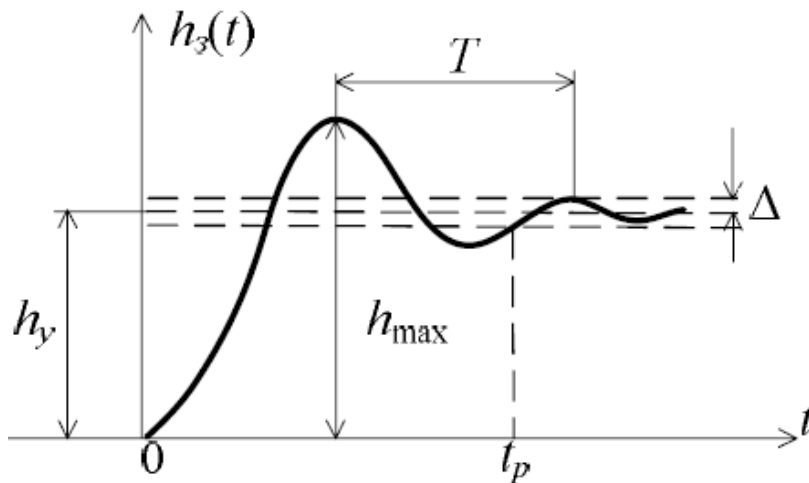
$-v(t)=v_2t^2$ – скачок по ускорению;

$-v(t)=v_0+v_1t+v_2t^2+\dots+v_kt^k$ – полиномиальное воздействие;

$-v(t)=A_0\sin\omega t$ – гармоническое воздействие;

$-v(t)=A_0e^{j\omega t}$ – гармоническое воздействие в комплексной форме;

На рисунке представлен наиболее распространенный вид переходной функции $h(t)$:



h_y – установившееся значение выходной координаты.

Для оценки качества регулирования вводят следующие показатели качества:

t_p – время регулирования

(переходного процесса) - время, после которого величина $|h(t)-h_y|<\Delta$, где обычно $\Delta=5\%$ от h_y ;

$\sigma=[(h_{max}-h_y)/h_y]\cdot 100\%$ - перерегулирование в процентах (обычно лежит в пределах от 0 до 30%);

ω – частота колебаний переходного процесса;

$n_{кол}$ число колебаний за время переходного процесса (обычно 1-2, иногда 3-4).

Наиболее важные показатели t_p и σ .

По виду функции $h_s(t)$ процессы делятся на три категории (рис. снизу):

монотонные (1),

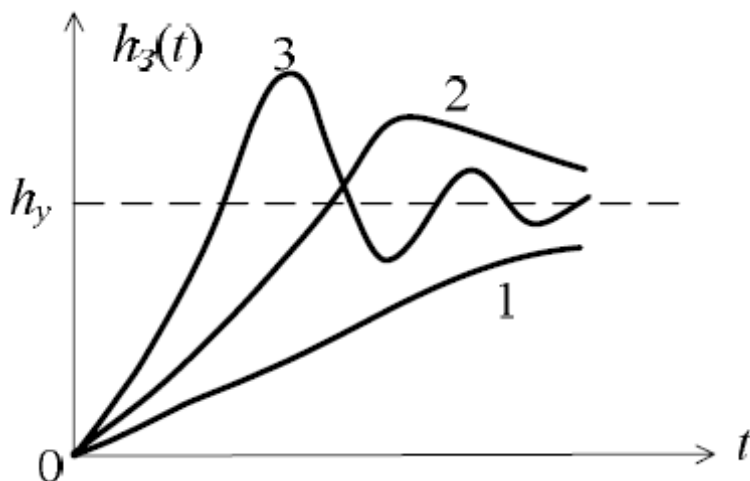
апериодические (2) и

колебательные (3).

у монотонных процессов знак производной $h^{(1)}(t)$ не

изменяется, у апериодических – только 1 раз, у колебательных –

бесконечное число раз.



15. Аналитические методы вычисления процессов

Аналитические методы вычисления выходного сигнала замкнутой системы базируются на известных методиках решения дифференциальных уравнений. Решение (4.1) классическими методами во временной области приводит к соотношению (4.7). Зная $\varphi(t)$, $\varphi_f(t)$, внешние воздействия $v(t)$, $f(t)$ и интегрируя (4.7), можно вычислить реакцию системы $y(t)$. Такой подход редко используется в практике теории управления, а выражение (4.7) в большей степени применяется в теоретических выкладках.

На практике решение уравнения (4.1) чаще всего осуществляют с помощью операционного исчисления на базе преобразования Лапласа, т. е. за основу принимают выражение (4.2).

Рассмотрим методику вычисления реакции системы на внешнее воздействие $v(t)$ при нулевых начальных условиях координаты $y(t)$ и ее производных. В этом случае связь изображений входа и выхода будет иметь вид

$$Y(s) = \Phi(s)V(s), \quad (4.8)$$

где в общем случае $\Phi(s) = KN(s)/D(s)$, $N(s)$ и $D(s)$ – полиномы степени m и n соответственно.

Вычисление составляющей $f_{fb}(t)$, обусловленной возмущением $f(t)$, будет аналогичным с использованием передаточной функции $\Phi_f(s)$.

В (4.8) изображение $V(s)$ для большинства типовых воздействий представляет собой дробно-рациональную функцию, т. е. также является отношением некоторых полиномов относительно s . Таким образом, изображение $Y(s)$ в этом случае будет иметь следующий вид: $Y(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}V(s) = \frac{M(s)}{Q(s)}$, где степень полинома $M(s)$ меньше степени полинома $Q(s)$, которую обозначим через r и в общем случае $r > n$.

Вычисление оригинала $y(t)$ по его изображению осуществляется по формулам разложения Хевисайда. Если полюса изображения $Y(s)$, являющиеся корнями уравнения $Q(\lambda) = 0$, которые обозначим $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, являются различными, то оригинал $y(t)$ определяется выражением

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \frac{M(\lambda_i)}{Q'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}, \quad (4.9)$$

где $Q'(\lambda_i) = \left. \frac{d}{ds} Q(s) \right|_{s=\lambda_i}$, $M(\lambda_i) = M(s) \Big|_{s=\lambda_i}$.

В случае кратных полюсов для вычисления оригинала $y(t)$ используется выражение на основе вычетов [6].

Если входной сигнал $v(t) = 1[t]$, то $V(s) = \frac{1}{s}$, а изображение реакции системы в соответствии с (4.8) примет такой вид: $Y(s) = \frac{KN(s)}{sD(s)}$.

Реакция системы в этом случае будет не чем иным, как переходной функ-

цией замкнутой системы $h_3(t)$, которая как частный случай (4.9) будет вычисляться по выражению

$$h_3(t) = \frac{KN(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{KN(\lambda_i)}{\lambda_i D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}, \quad (4.10)$$

где λ_i – различные корни характеристического уравнения замкнутой системы.

Следует отметить, что случай кратных корней при исследовании систем управления встречается сравнительно редко.

В (4.10) $KN(0)/D(0)$ характеризует так называемую *установившуюся составляющую*, а $\sum_{i=1}^n (\cdot)$ – *переходную составляющую*. И в общем случае в (4.9)

для произвольного процесса $y(t)$ можно всегда выделить две составляющие: установившуюся $y_y(t)$ и переходную $y_n(t)$. Частным случаем установившейся составляющей является случай, соответствующий $y_y = \text{const}$, которую будем называть *статической составляющей*. Для асимптотически устойчивых систем (это понятие будем рассматривать в разд. 5) всегда $\lim_{t \rightarrow \infty} y_n(t) = 0$ и при больших значениях t реакция системы $y(t) = y_y(t)$.

Отметим, что так как в (4.10) $\frac{KN(\lambda_i)}{\lambda_i D'(\lambda_i)}$ – это постоянные величины, то структура переходной составляющей $y_n(t)$ идентична структуре свободной составляющей $y_c(t)$ (4.4).

Реакция системы $y(t)$ на входной сигнал $v(t)$ при нулевых начальных условиях определяется выражением $y(t) = \int_0^t \varphi(t - \tau) v(\tau) d\tau$.

Для вычисления установившейся составляющей можно воспользоваться выражением [1]:

$$y_y(t) = \int_{-\infty}^t \varphi(t - \tau) v(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \varphi(\tau) v(t - \tau) d\tau. \quad (4.11)$$

При гармоническом входном сигнале для вычисления установившейся составляющей можно использовать частотные характеристики системы. Пусть на входе системы $v(t) = A_0 \sin \omega_0 t$, тогда установившееся значение выходного сигнала будет также гармоническим сигналом и может быть вычислено по выражению

$$y_y(t) = A_0 |\Phi(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)), \quad (4.12)$$

где $|\Phi(j\omega_0)|$ – значение АЧХ, а $\varphi(\omega_0) = \arg \Phi(j\omega_0)$ – значение ФЧХ замкнутой системы при $\omega = \omega_0$.

16. Моделирование переходных процессов на ПЭВМ

С помощью известной системы математических расчетов Matlab, в которую встроен специальный пакет для исследования систем автоматического управления – Control System Toolbox, можно по передаточной функции системы построить необходимые графики временных характеристик. В Matlab также можно представить эквивалентную модель системы в среде Simulink и исследовать ее характеристики в этом приложении.

Рассмотрим применение описанных возможностей работы в Matlab на примере системы, структурная схема которой задана в виде последовательного соединения двух апериодических звеньев с параметрами: $K_1 = 2$; $K_2 = 50$; $T_1 = T_2 = 0,1$ с (рис. 4.3).

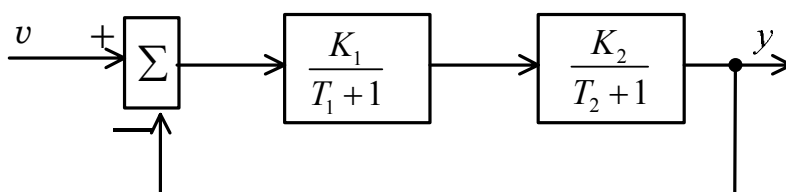


Рис. 4.3

Для этой системы построим график переходной функции $h_3(t)$ двумя способами.

1. При использовании операторов пакета Control System Toolbox запишем в командном окне следующую программу:

```
K1 = 2; K2 = 50; T1 = 0,1; T2 = 0,1;  
w = tf([K1*K2], [T1*T2 (T1+T2) 1]);  
w1 = feedback(w, 1);  
step(w1)
```

В первой строке происходит определение параметров системы и присвоение им численных значений.

Если передаточную функцию разомкнутой системы представить в виде отношения полиномов по степеням s :

$$W(s) = \frac{K_1 K_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{K_1 K_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1},$$

то удобно использовать оператор *tf*, который позволяет записывать передаточные функции путем формирования векторов коэффициентов числителя и знаменателя так, как это представлено во второй строке программы.

В третьей строке оператор *feedback* замыкает систему с единичным коэффициентом усиления в цепи обратной связи.

Оператор *step* позволяет построить переходной процесс системы при подаче на ее вход единичной ступенчатой функции $v(t) = 1(t)$.

График переходного процесса, полученный в результате выполнения программы, представлен на рис. 4.4.

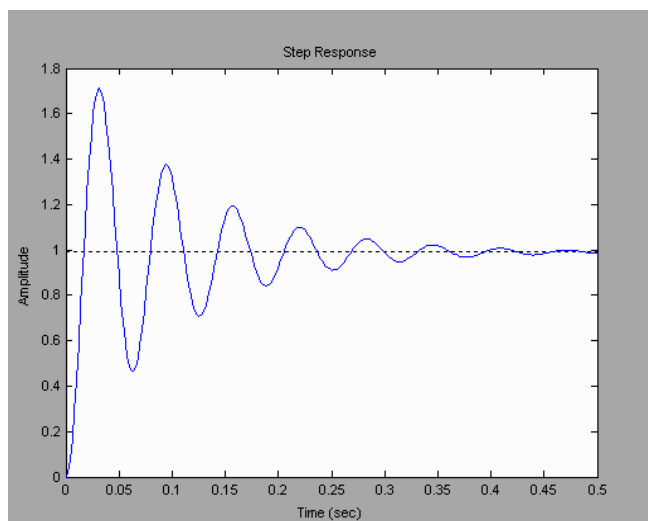


Рис. 4.4

2. Представим модель системы в среде Simulink, как показано на рис. 4.5, используя стандартные блоки из библиотеки ее приложения.

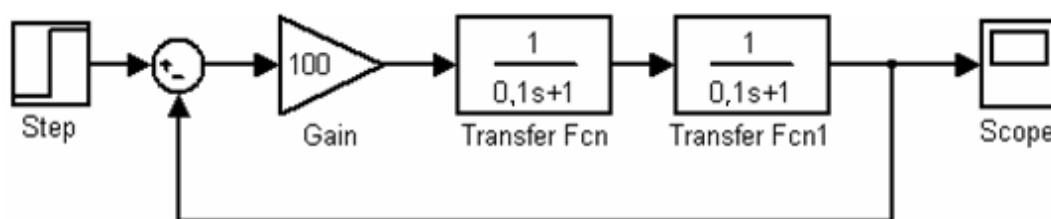


Рис. 4.5

При моделировании получим на экране виртуального осциллографа (**Scope**) график переходного процесса (рис. 4.6), который совпадает с приведенным на рис. 4.4.

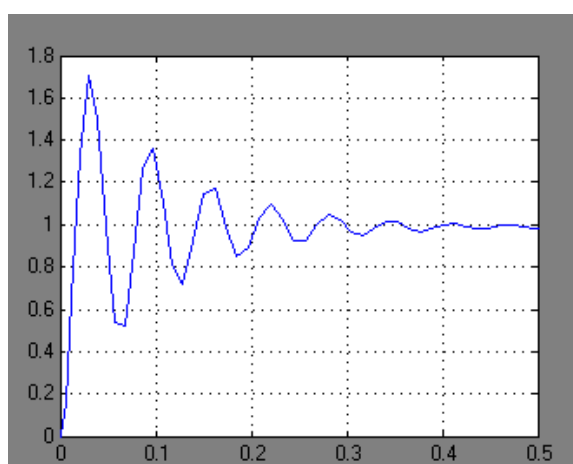


Рис. 4.6

Аналогичным образом могут быть построены и другие характеристики системы. Более подробно основы работы в системе Matlab рассматриваются в [8].

17. Понятие устойчивости линейных систем

Общие определения устойчивости процессов, справедливые как для линейных, так и для нелинейных систем, будут даны во второй части конспекта лекций. Здесь отметим, что свойство устойчивости или неустойчивости заданного процесса, протекающего в системе, рассматривается по отношению к другим процессам той же системы, отличающимся от заданного за счет изменений начальных условий. Величинами, отклоняющими процесс от заданного, являются возмущения начальных условий.

Для случая линейной системы динамические процессы в ней описываются линейным дифференциальным уравнением:

$$D(p)y(t) = KN(p)v(t) + R(p)f(t), \quad (5.1)$$

общее решение которого определяется выражением (4.3): $y(t) = y_c(t) + y_g(t)$.

Изменение начальных условий влияет только на поведение свободной составляющей и не влияет на $y_g(t)$, откуда следует, что устойчивость будет определяться поведением свободной составляющей. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = 0$, то процессы в линейной системе будем называть *асимптотически устойчивыми*, при $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = \infty$ — *неустойчивыми* и, если при любом $t > 0$ свободная составляющая ограничена, то процессы будут просто *устойчивы*. Если одно из указанных свойств присуще какому-либо процессу, то для линейной системы оно будет справедливо для всех процессов. Поэтому принято говорить об асимптотической устойчивости, неустойчивости или просто устойчивости линейной системы. В последнем случае еще говорят, что линейная система находится на *границе устойчивости* или является *нейтральной*.

Структура свободной составляющей имеет вид (4.4) или (4.5).

Из (4.4), (4.5) следует, что поведение свободной составляющей во времени не зависит от величин c_i и соответственно от начальных условий, а полностью определяется видом корней λ_i .

В комплексной плоскости корней корни интерпретируются как соответствующие точки. Если корень λ лежит слева от мнимой оси, т. е. $\operatorname{Re} \lambda < 0$, будем называть его *левым корнем*, если $\operatorname{Re} \lambda > 0$ — *правым*.

Пусть $\lambda_1 = -\alpha + j\beta$, $\alpha > 0$ — левый корень, тогда составляющая $c_1 e^{\lambda_1 t} = c_1 e^{-\alpha t} [\cos \beta t + j \sin \beta t]$ в (4.4) при $t \rightarrow \infty$ будет затухать и стремиться к 0, а в случае правого корня $\lambda_1 = \alpha + j\beta$ — наоборот возрастет до бесконечности. Таким образом, при различных корнях характеристического уравнения, если все корни левые, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = 0$, что соответствует факту асимптотической

устойчивости системы. Если хотя бы один корень правый $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} y_c(t) = \infty$ и система будет неустойчива. Если для всех различных корней справедливо соотношение $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, то в свободной составляющей появятся слагаемые, которые будут либо постоянными (нулевой корень), либо будут изменяться по гармоническому закону (чисто мнимые корни) и составляющая $y_c(t)$ будет ограничена, что соответствует нейтральной системе.

В случае кратного корня λ_1 , если $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 + c_2 t + \dots + c_r t^{r-1}) e^{\lambda_1 t} = 0$, так как при любом $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ функция $e^{\lambda_1 t}$ затухает быстрее, чем возрастает функция в скобках. Если же $\operatorname{Re} \lambda_1 = 0$, то это утверждение не правомерно.

Таким образом, необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости линейной системы, описываемой уравнением (5.1), является выполнение соотношения $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$. Система будет просто устойчива, если $\forall \operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ и среди корней, лежащих на мнимой оси, нет кратных. Система будет неустойчива, если имеется хотя бы один корень, для которого $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, или хотя бы один кратный корень, лежащий на мнимой оси.

Суждение об устойчивости можно сделать, найдя корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.2)$$

Эту задачу можно упростить, так как фактически нам достаточно знать лишь расположение корней в плоскости корней относительно мнимой оси, которую называют *границей устойчивости*. Выделяют три типа границы устойчивости: *апериодического* типа, которая характеризуется нулевым корнем характеристического уравнения, *колебательного* типа, что соответствует наличию пары чисто мнимых корней, и границу, соответствующую бесконечно удаленному корню ($\lambda = \infty, a_0 = 0$ (5.2)). Если все корни уравнения (5.2) лежат слева от мнимой оси, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$, то характеристический полином $D(\lambda)$ будем называть *полиномом Гурвица*, или *гурвицевым полиномом*.

Определение расположения корней уравнения (5.2) относительно мнимой оси без их непосредственного вычисления производят на основе критериев устойчивости, которые делятся на две группы: алгебраические и частотные.

18. Алгебраические критерии устойчивости

К алгебраическим критериям устойчивости относят те, которые позволяют судить об устойчивости системы по коэффициентам уравнения (5.2). Необходимым условием устойчивости линейной системы (5.1) является положительность коэффициентов характеристического уравнения (5.2), т. е.

$$\forall a_i > 0, i = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

Докажем этот критерий. Пусть уравнение (5.2) имеет n – корней $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, тогда полином $D(\lambda)$ можно по теореме Безу представить в виде $D(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_n)$. Если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, \dots, n$, то произведение n сомножителей $(\lambda - \lambda_i)$ всегда даст полином n -й степени с положительными коэффициентами и с учетом $a_0 > 0$ получим (5.3).

Критерий является лишь необходимым, т. е. если среди a_i есть отрицательные коэффициенты, то система неустойчива; если все a_i положительны, то система может быть как устойчивой, так и неустойчивой. В этом последнем случае требуется дальнейшее исследование.

Рассмотрим критерий, дающий необходимые и достаточные условия устойчивости, предложенные немецким ученым А. Гурвицем в 1895 году. Предварительно из коэффициентов уравнения (5.2) сформируем матрицу Гурвица

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Алгоритм ее формирования следующий. Сначала по главной диагонали слева направо выписываем коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n . Далее столбцы вверх от главной диагонали дополняются коэффициентами с возрастающими индексами, а вниз – с убывающими индексами. Коэффициенты с индексами больше n и меньше нуля заменяются нулями. Последний столбец матрицы имеет все нулевые коэффициенты, кроме последнего a_n . Обозначим через Δ_i главные определители матрицы Гурвица, которые выделены в (5.4) штриховыми линиями: $\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, где Δ_n – определитель матрицы Гурвица.

Критерий Гурвица. Необходимым и достаточным условием устойчивости линейной системы является при $a_0 > 0$ положительность всех определителей Гурвица

$$a_0 > 0, \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (5.5)$$

Для систем до 4-го порядка включительно, раскрывая определители Гурвица, можно получить следующие необходимые и достаточные условия устойчивости:

$$n = 1, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0; \quad (5.6)$$

$$n = 2, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0; \quad (5.7)$$

$$n = 3, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \quad (5.8)$$

$$n = 4, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \\ a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4 > 0. \quad (5.9)$$

Из (5.6), (5.7) следует, что для системы первого и второго порядка необходимые условия совпадают с необходимыми и достаточными, а при $n = 3$ и 4 , кроме необходимых условий, следует соблюдать дополнительное неравенство. При $n = 5$ и 6 появляются два дополнительных неравенства, при $n = 7$ и 8 – три и т. д. При аналитических исследованиях критерий Гурвица наиболее удобен для систем, порядок которых $n \leq 4$.

С помощью критерия Гурвица можно определить границы устойчивости. Если a_0 и все определители Гурвица Δ_i , кроме последнего, больше нуля, то нарушение условий устойчивости будет при $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} = 0$, откуда при $a_n = 0$ получаем границу устойчивости апериодического типа (появляется один нулевой корень), а при $\Delta_{n-1} = 0$ границу устойчивости колебательного типа (появляются два комплексно-сопряженных корня). При этом все остальные корни являются левыми. Граница устойчивости, соответствующая бесконечному корню, будет $a_0 = 0$.

Одним из частных случаев критерия Гурвица является критерий Льенара-Шипара (1914), по которому для устойчивости системы необходимо и достаточно выполнение следующих неравенств:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \dots, a_n > 0, \dots \quad \Delta_1 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0, \dots$$

или
$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \dots, a_n > 0, \dots \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \Delta_6 > 0, \dots,$$

т. е. при соблюдении необходимых условий устойчивости требуется положительность четных или нечетных определителей Гурвица.

Вторым распространенным алгебраическим критерием устойчивости, дающим необходимые и достаточные условия устойчивости, является критерий Рауса-Гурвица. Этот критерий более удобен при анализе устойчивости с помощью ПЭВМ.

На первом этапе составляется таблица Рауса, элементы которой образуются из коэффициентов характеристического полинома замкнутой системы $D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$, в которой $a_n \neq 0$.

Таблица Рауса выглядит так:

$$\begin{array}{c|cccc}
n & a_0 & a_2 & a_4 & \\
s^n & a_1 & a_3 & a_5 & \\
s^n & c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\
s^{n-3} & c_{41} & c_{42} & c_{43} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & c_{n1} & & & \\
s^0 & c_{n+1,1} & & &
\end{array} \quad (5.10)$$

Первые две строки состоят из коэффициентов $D(s)$.

Коэффициенты последующих строк вычисляются так:

$$\begin{aligned}
C_{31} &= -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad C_{32} = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}; \quad \dots \\
C_{41} &= -\frac{1}{c_{31}} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix}; \quad C_{42} = -\frac{1}{c_{31}} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ c_{31} & c_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots
\end{aligned} \quad (5.11)$$

и т. д.

Левый столбец записывается для наглядности.

По критерию Рауса–Гурвица система устойчива, если при $a_0 > 0$ положительны все элементы первого столбца таблицы ($a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $c_{31} > 0$, $c_{41} > 0, \dots$).

Число правых корней в случае неустойчивой САУ равно числу перемен знака элементов первого столбца. Если элемент какой-то строки первого столбца равен нулю, то САУ либо неустойчива, либо находится на границе устойчивости [6].

19. Критерий устойчивости Михайлова

Этот критерий относится к группе частотных и был предложен в 1938г. А. Михайловым. Он базируется на известном в теории функции комплексного переменного принципе аргумента. Характеристический полином замкнутой системы представим в виде $D(s) = a_0(s - \lambda_1)...(s - \lambda_n)$, где λ_i – корни уравнения $D(\lambda) = 0$.

Сделаем замену $s = j\omega$, тогда $D(j\omega) = a_0(j\omega - \lambda_1)...(j\omega - \lambda_n)$. Приращение аргумента вектора $j\omega - \lambda_i$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до ∞ будет равно π для левого корня и $-\pi$ для правого корня (рис. 5.1). Приращение аргумента вектора $D(j\omega)$, имеющего l правых и $n-l$ левых корней, будет равно $\Delta \arg D(j\omega) = (n-l)\pi - l\pi = (n-2l)\pi$, а при изменении ω от 0 до ∞ – в 2 раза

меньше, т. е. $\Delta \arg D(j\omega) = (n-2l) \frac{\pi}{2}$.

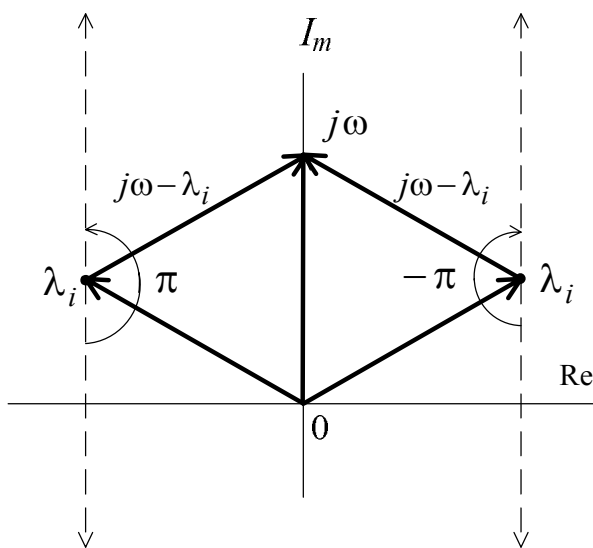


Рис. 5.1

Из последнего выражения следует, что для устойчивой САУ $l = 0$ и

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad (5.12)$$

Полином $D(s)$ после замены $s = j\omega$ представляет собой комплексное число, действительная и мнимая части которого зависят от частоты ω :

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega),$$

где $X(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots,$

$$Y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots$$

Изменяя ω от нуля до ∞ , на комплексной плоскости строится годограф, который называется *кривой Михайлова*. При $\omega = 0$ он всегда будет находиться на действительной оси в точке $X = a_n$, а при $\omega = \infty$ значения X и Y равны ∞ или $-\infty$, т. е. годограф будет уходить в бесконечность в каком-либо квадранте комплексной плоскости.

Критерий Михайлова. Для устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы приращение аргумента функции $D(j\omega)$ при изменении ω от нуля до ∞ равнялось $n \frac{\pi}{2}$, что означает последовательное прохождение кривой Михайлова n квадрантов против часовой стрелки в комплексной плоскости.

Обычно критерий Михайлова применяется после проверки необходимого условия устойчивости (5.3).

На рис. 5.2 представлен ряд кривых Михайлова для систем различного порядка.

Кривые 1, 2 соответствуют устойчивым системам при $n = 3, 4$ соответ-

ственно, кривая 3 – неустойчивой системе при $n = 4$, так как нарушена последовательность прохождения квадратов комплексной плоскости.

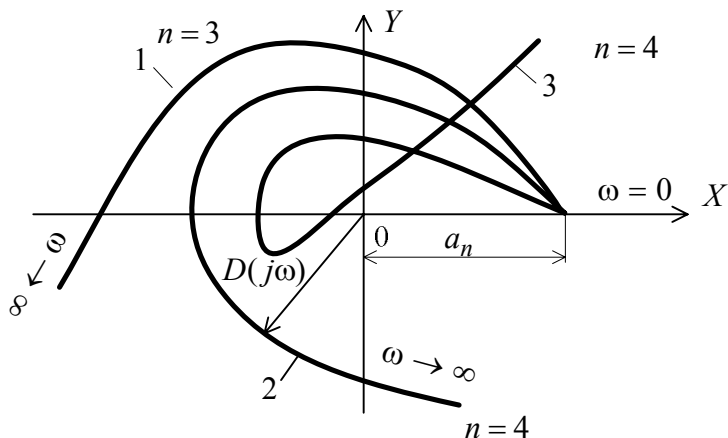


Рис. 5.2

Рассмотрим определение с помощью кривой Михайлова границ устойчивости. Система будет находиться на границе устойчивости, если чисто мнимая величина $\lambda = j\omega_0$ будет являться корнем уравнения $D(j\omega_0) = 0$, что означает $D(j\omega_0) = 0$, т. е. кривая Михайлова должна проходить через начало координат. При $\omega_0 = 0$ имеем апериодическую границу, при $\omega_0 \neq 0$ – колеба-

тельную, $\omega_0 = \infty$ соответствует бесконечному корню. При этом следует проверить, чтобы все остальные корни были левыми. Такую проверку можно осуществить, исследуя соответствующий график кривой Михайлова в точке пересечения начала координат. Если малые деформации кривой приводят к устойчивой системе, то это соответствует границе устойчивости.

На рис. 5.3 представлены два годографа, проходящие через начало координат.

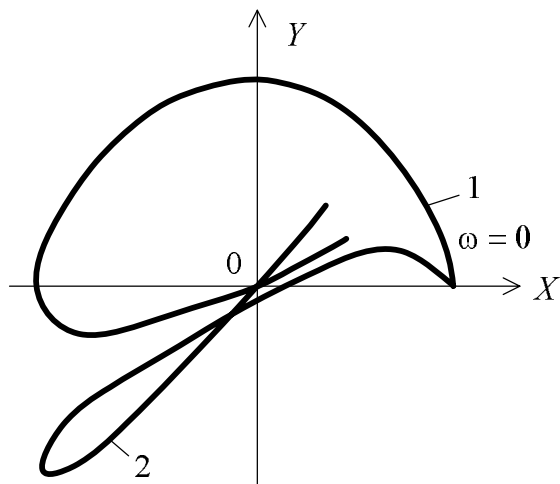


Рис. 5.3

Для кривой 1 малые деформации ее в начале координат приведут к устойчивой системе, что соответствует границе устойчивости, а для кривой 2 система при малых деформациях графика все равно будет неустойчивой.

Пример 5.4. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид $W(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$. Характеристический полином замкнутой системы будет $Ts^2 + s + K$ и соответственно $D(j\omega) = [K - T\omega^2] + j\omega$.

При любом $K > 0$, $T > 0$ кривая Михайлова при $\omega = 0$ будет начинаться на действительной оси в точке с координатами $(K, j0)$ и всегда проходить последовательно первый и второй квадранты комплексной области, так как мнимая часть $D(j\omega)$ всегда положительна, а действительная с ростом W меняет знак с плюса на минус.

Система при любых $K > 0$, $T > 0$ всегда устойчива, что совпадает с результатом примера 5.1.

20. Критерий устойчивости Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста — это также частотный критерий, предложенный в 1932 г. Найквистом. Он позволяет судить об устойчивости разомкнутой системы управления по виду АФЧХ разомкнутой системы.

Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы в виде $W(s) = \frac{KN(s)}{L(s)}$, где $L(s)$ — полином степени n ; $N(s)$ — полином степени m , $m < n$.

Тогда ее АФЧХ будет $W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)}$. Составим вспомогательную функцию

$$W_1(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{L(j\omega) + KN(j\omega)}{L(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{L(j\omega)},$$

где $D(s)$ — характеристический

полином замкнутой системы, степень которого будет n .

Предположим, что характеристическое уравнение разомкнутой системы $L(\lambda) = 0$ имеет l правых корней и $(n-l)$ левых корней. Тогда приращение аргумента функции $L(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ будет $(n-2l)\pi$. Если система устойчива в замкнутом состоянии, то характеристическое уравнение замкнутой системы $D(\lambda) = 0$ имеет n левых корней и приращение аргумента $D(j\omega)$ будет равно $n\pi$. Найдем приращение аргумента функции $W_1(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ , которое будет в этом случае равно

$$\Delta \arg W_1(j\omega) = \Delta \arg D(j\omega) - \Delta \arg L(j\omega) = 2l\pi. \quad (5.13)$$

$-\infty \leq \omega \leq \infty$ $-\infty \leq \omega \leq \infty$ $-\infty \leq \omega \leq \infty$

В случае, если передаточная функция $W(s)$ соответствует статической системе (соответствие астатической системе рассмотрим ниже), то при $m < n$ АФЧХ $W(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ всегда образует замкнутую кривую. Соответственно $W_1(j\omega)$ в комплексной плоскости также всегда образует замкнутую кривую. Таким образом, условие (5.13) для замкнутой кривой $W_1(j\omega)$ соответствует тому, что вектор $W_1(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ должен в положительном направлении обойти (охватить) начало координат l раз. Из связи $W_1(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ для АФЧХ $W(j\omega)$ это соответствует охвату точки с координатами $(-1, j0)$ на комплексной плоскости l раз годографом $W(j\omega)$. На основании изложенного сформулируем критерий.

Критерий Найквиста. Если разомкнутая система автоматического управления имеет l правых корней, то для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ охватывала точку $(-1, j0)$ на комплексной плоскости в положительном направлении l раз.

Частный случай критерия Найквиста относится к системе, устойчивой в разомкнутом состоянии ($l = 0$). При этом годограф $W(j\omega)$ не должен охватывать точку $(-1, j0)$.

Так как при $\omega < 0$ график $W(j\omega)$ является зеркальным отображением относительно действительной оси графика при $\omega > 0$, то обычно достаточно построить $W(j\omega)$ для $\omega > 0$. При этом в формулировке критерия полагают охват точки $(-1, j0)$ $\frac{l}{2}$ раз.

На рис. 5.4, а, б представлены графики $W_1(j\omega)$, $W(j\omega)$ в предположении $l = 2$ для случая устойчивой в замкнутом состоянии системы.

Из изложенного следует, что при корректном применении критерия устойчивости Найквиста следует сначала исследовать устойчивость разомкнутой системы и знать число правых корней ее характеристического уравнения. На практике обычно это нетрудно сделать по виду передаточной функции $W(s)$ если она представлена в виде произведения передаточных функций отдельных звеньев.

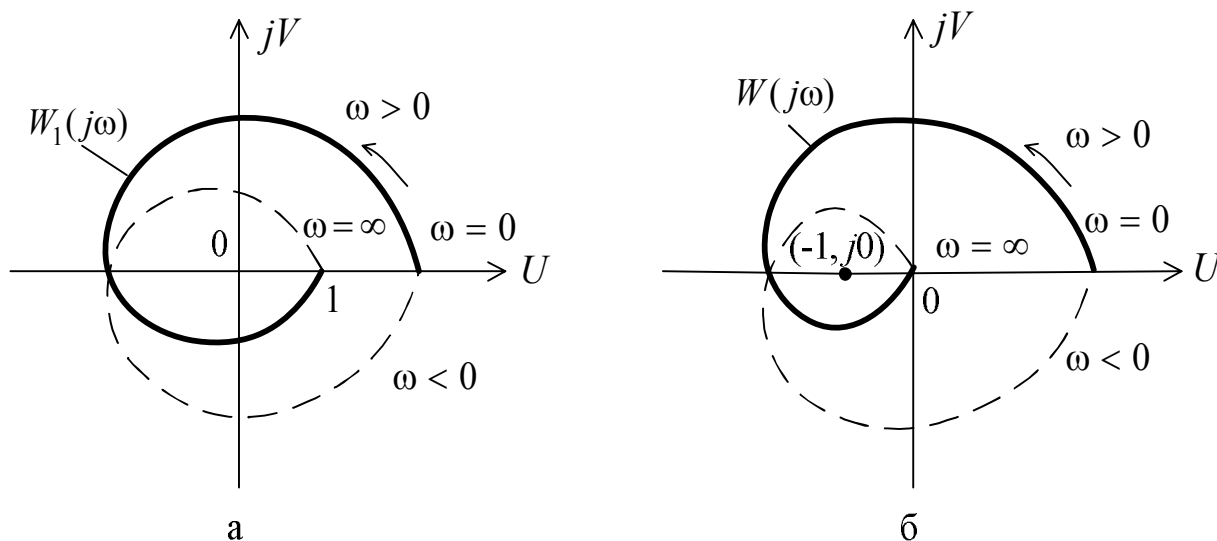


Рис. 5.4

В случае астатической системы формулировка критерия Найквиста сохраняется, однако при этом возникает проблема понятия охвата и неохвата точки $(-1, j0)$, так как при $\omega \rightarrow 0$ годограф $W(j\omega)$ уходит в бесконечность и кривая $W(j\omega)$ не является замкнутой. В этом случае АФЧХ дополняется дугой бесконечного радиуса по часовой стрелке и после этого проверяется выполнение условия критерия Найквиста. Изображенная на рис. 5.5 система устойчива.

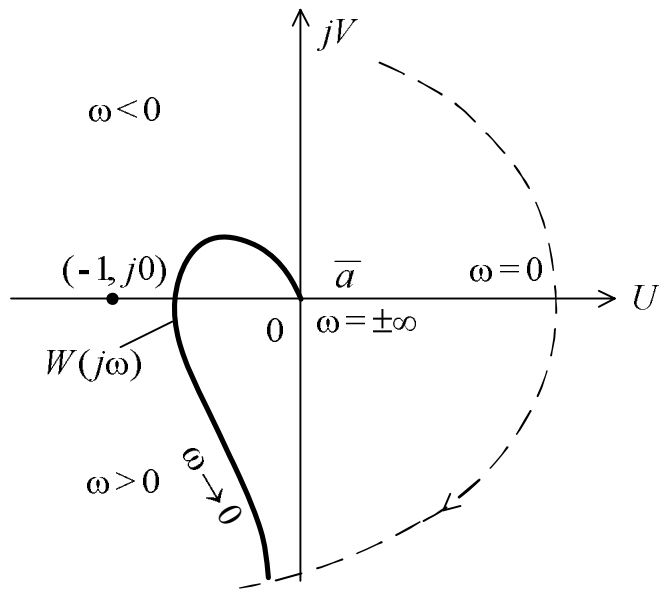


Рис. 5.5

Для нормального функционирования система управления должна обладать и некоторыми запасами устойчивости, т. е. при изменении параметров системы в процессе работы свойство устойчивости должно сохраняться.

Вполне очевидно, что чем дальше находится кривая $W(j\omega)$ от точки $(-1, j0)$, тем система будет находиться дальше от границы устойчивости. Числовые величины, характеризующие это свойство, носят название *запасов устойчивости* и могут быть введены различными способами.

На рис. 5.6 представлена АФЧХ разомкнутой системы для устойчивой замкнутой системы.

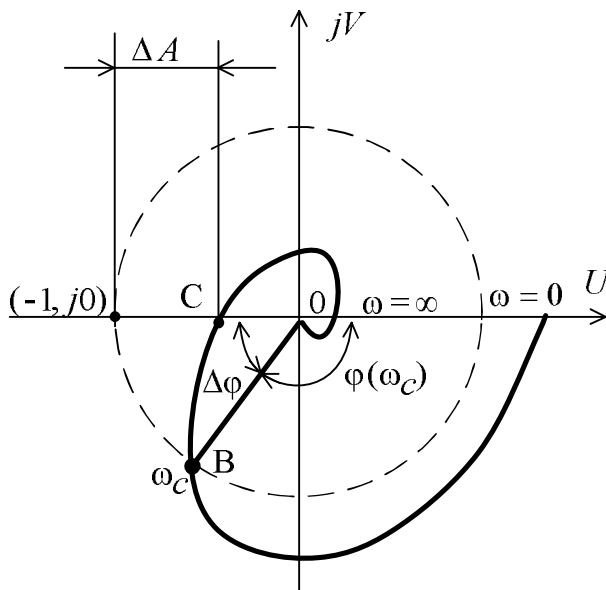


Рис. 5.6

Запас устойчивости по фазе определяется как величина угла $\Delta\varphi = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|$, где $\varphi(\omega_c)$ значение фазы при $\omega = \omega_c$, а частота среза ω_c – это значение частоты, при которой $A(\omega_c) = 1$. Из рис. 5.6 видно, что точка B получается пересечением $W(j\omega)$ и окружности единичного радиуса (штриховая линия).

Запас устойчивости по амплитуде ΔA – это величина отрезка оси абсцисс между критической точкой $(-1, j0)$ и точкой C пересечения $W(j\omega)$ с осью абсцисс (там, где $\varphi(\omega) = -180^\circ$).

Очевидно, в данном случае величина ΔA всегда меньше единицы.

Если характеристика $W(j\omega)$ имеет более сложные очертания (так называемая *клювообразная характеристика* представлена на рис. 5.7), то запас по амплитуде характеризуют двумя числами $\Delta A_1, \Delta A_2$, а запас по фазе $\Delta\varphi$ определяется обычным образом.

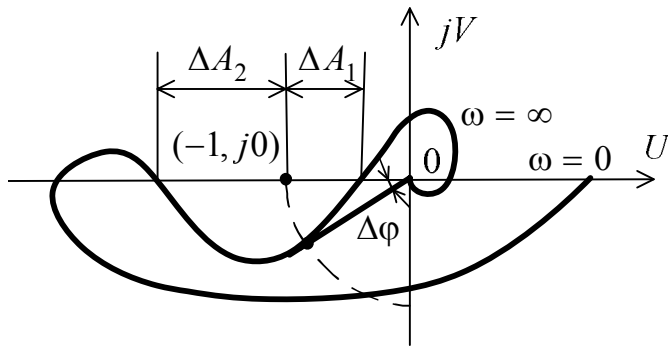


Рис. 5.7

Рассмотрим интерпретацию критерия Найквиста в логарифмической области. Для простоты рассмотрим систему, устойчивую в разомкнутом состоянии, для которой АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ не должна охватывать точку $(-1, j0)$. Очевидно, «опасным» с точки зрения устойчивости является отрезок действительной оси $(-\infty, -1)$,

когда фазовая характеристика равна $-\pi$, -3π и т.д. При этом модуль $A(\omega) > 1$. Пересечение же отрезка действительной оси $(-1, 0)$ годографом $W(j\omega)$ безопасно с точки зрения устойчивости. Если перейти к логарифмическим частотным характеристикам $L(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, то характеристики, приведенные на рис. 5.7, будут соответствовать логарифмическим характеристикам, изображенным на рис. 5.8.

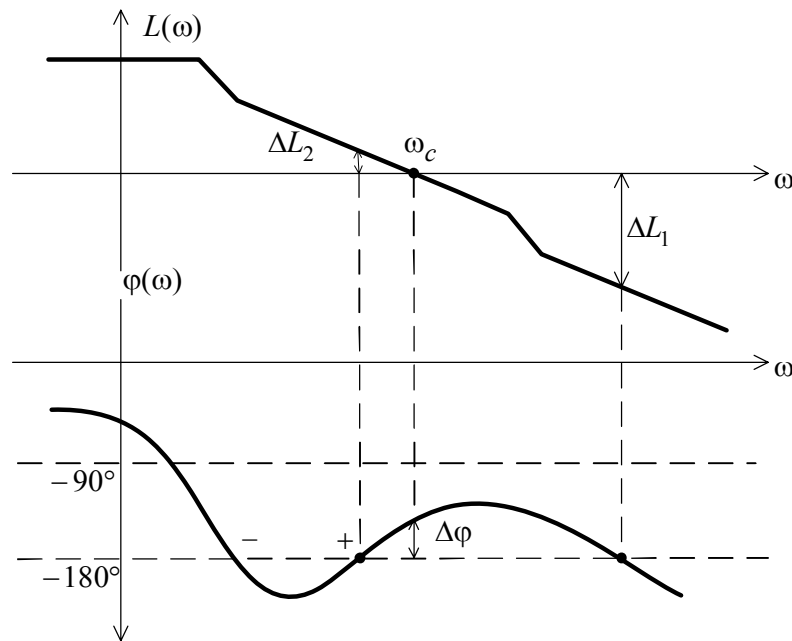


Рис. 5.8

В общем случае критерий Найквиста применительно к логарифмическим характеристикам формулируется так: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы разность между числом положительных и отрицательных переходов логарифмической фазовой частотной характеристикой $\varphi(\omega)$ разомкнутой системы прямых $\pm \pi(2i + 1)$, $i = 0, 1, \dots$ во всех областях,

$L(\omega) > 0$ была равна $\frac{l}{2}$ (l – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы).

Отметим, что $L(\omega) > 0$ обычно до частоты среза системы ω_c . Если система устойчива в разомкнутом состоянии, то $l = 0$.

При использовании логарифмических характеристик также вводят запасы устойчивости, показанные на рис. 5.8. При ω_c запас устойчивости по фазе определяется как $\Delta\varphi = 180^\circ - |\varphi(\omega_c)|$, а запас устойчивости по модулю характеризуется величинами отрезков ΔL_1 , ΔL_2 , выраженными в децибелах. В случае обычных, не клювообразных, характеристик $W(j\omega)$ запас устойчивости по модулю характеризуется одной величиной ΔL , определяемой на критической частоте ω_{kn} , соответствующей $\varphi(\omega_{kp}) = -180^\circ$.

На практике величина запасов устойчивости по фазе и модулю обычно колеблется в пределах $30^\circ \dots 60^\circ$ и $(6 \dots 20)$ дБ. Величина $(6 \dots 20)$ дБ соответствует усилению в $(2 \dots 10)$ раз.

Рассмотрим, как в общих чертах влияют параметры и вид АФЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$ на устойчивость. Если $W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)}$, то очевидно,

что величина коэффициента усиления не влияет на вид фазовой частотной характеристики. Модуль $W(j\omega)$ пропорционален величине K . Таким образом, увеличение (уменьшение) величины K будет пропорционально увеличивать (уменьшать) $A(\omega)$, не изменяя фазового угла годографа вектора $W(j\omega)$ в комплексной плоскости. Кривая $W(j\omega)$ (см. рис. 5.6) будет пропорционально расширяться или сжиматься и с увеличением K наступит момент, когда $W(j\omega)$ охватит точку $(-1, j0)$ и система станет неустойчивой. Это следует и по ЛАЧХ (см. рис. 5.8). Увеличение K поднимает характеристику $L(\omega)$, приводит к смещению ω_c вправо по оси абсцисс и в конечном счете к потере устойчивости.

В случае клювообразных характеристик (см. рис. 5.7, 5.8) возможна потеря устойчивости и при уменьшении общего коэффициента усиления. Увеличение порядка астатизма системы также отрицательно сказывается на устойчивости, так как приводит к увеличению отрицательных фазовых сдвигов.

21. Построение областей устойчивости

Устойчивость замкнутой системы зависит от корней характеристического уравнения

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.14)$$

Пусть при определенных значениях коэффициентов все корни уравнения (5.14) будут левыми. Изменяя коэффициенты a_i , будем получать то или иное расположение корней на комплексной плоскости. Совокупность всех значений коэффициентов a_i , для которых все корни уравнения (5.14) являются левыми, образует *область устойчивости системы* в пространстве коэффициентов характеристического уравнения.

Так как коэффициенты уравнения (5.14) являются функциями параметров системы (коэффициентов усиления, постоянных времени и т.п.), то аналогично можно говорить об областях устойчивости в пространстве параметров системы.

Обычно такие области строятся при изменении одного или двух параметров системы, так как при большем числе параметров геометрическая интерпретация областей теряет наглядность.

Вполне очевидно, что для построения областей устойчивости достаточно найти только лишь ее границу и показать, что хотя бы для одной из внутренних точек области все корни будут являться левыми.

Границы устойчивости могут быть найдены с помощью любого критерия (Гурвица, Михайлова). Так, в примере 5.3 с помощью критерия Гурвица найдены границы области устойчивости в пространстве трех параметров от $K = 0$ до $K = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$.

Однако для выделения областей устойчивости разработан специальный *метод D – разбиения*, предложенный Ю. Неймарком. Рассмотрим этот метод.

Корень уравнения (5.14) попадает на мнимую ось (границу устойчивости в плоскости корней), если $\lambda = j\omega$ является решением уравнения (5.14), т. е. выполняется равенство

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (5.15)$$

Если ω задано ($\omega = 0$ соответствует нулевому корню), то (5.15) можно рассматривать как уравнение относительно искомым коэффициентов a_i , при которых один корень находится на границе устойчивости. Изменяя ω от $-\infty$ до ∞ в пространстве коэффициентов a_i , получим некоторую поверхность, соответствующую границе устойчивости (попаданию корня уравнения (5.15) на мнимую ось). Эта поверхность разобьет все пространство коэффициентов на области с определенным расположением левых и правых корней, которые обозначим $D(n)$, $D(n-1)$, ..., $D(0)$. Область $D(n)$ соответствует n корням в правой полуплоскости, $D(n-1)$ – $(n-1)$ – корню в правой полуплоскости и т.д. Область $D(0)$ соответствует n корням в левой полуплоскости, т. е. области

устойчивости. При пересечении границы, определяемой уравнением (5.15), происходит переход корня из левой полуплоскости в правую или наоборот.

Рассмотрим частный случай: D – разбиение по одному комплексному параметру. Пусть исследуемый параметр линейно входит в уравнение (5.14), которое в этом случае приводится к виду: $D(\lambda) = S(\lambda) + vN(\lambda) = 0$, а граница области D – разбиения определяется уравнением: $D(j\omega) = S(j\omega) + vN(j\omega) = 0$, откуда, полагая v – комплексной величиной и обозначая ее \bar{v} , получим
$$\bar{v} = \frac{S(j\omega)}{N(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega).$$

Границу D – разбиения в комплексной плоскости строим, изменяя ω от $-\infty$ до ∞ , которая будет представлять собой некоторую кривую. При изменении ω от $-\infty$ до 0 кривая будет зеркальным отображением относительно действительной оси кривой при $0 < \omega < \infty$.

При движении вдоль границы D – разбиения ее штрихуют слева, двигаясь при изменении ω от $-\infty$ до ∞ , что соответствует в плоскости корней движению вдоль мнимой оси снизу вверх так, что левая полуплоскость корней остается слева.

На рис. 5.9 изображена кривая D – разбиения в комплексной плоскости.

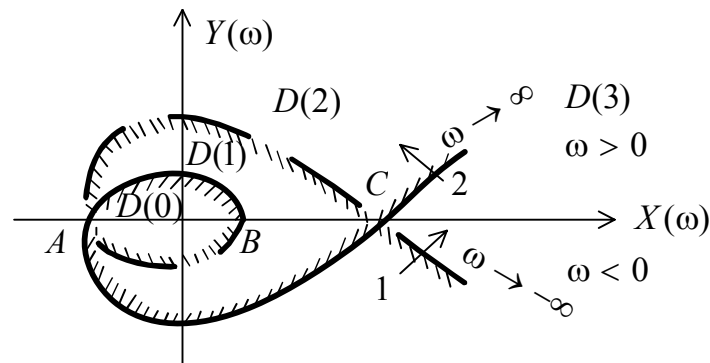
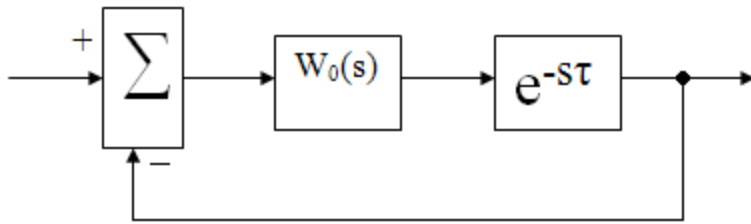


Рис. 5.9

Пересечение границы D – разбиения из заштрихованной стороны в незаштрихованную сторону (стрелка 1 на рис. 5.9) соответствует переходу одного корня из левой полуплоскости в правую. Стрелка 2 соответствует переходу правого корня в левую полуплоскость плоскости корней.

Обычно претендентом на область устойчивости является область, внутрь которой направлена штриховка, соответствующая наибольшему количеству левых корней. На рис. 5.9 это область, включающая отрезок АВ. Для проверки, является ли эта область областью устойчивости $D(0)$, берут любое значение исследуемого параметра \bar{v} из этой области, подставляют его в исходное характеристическое уравнение и с помощью любого критерия проверяют устойчивость. Так как на практике исследуемый параметр является действительным, то из полученной области устойчивости выделяют только действительные значения \bar{v} . Это будет отрезок АВ. На рис. 5.9 также показаны области $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$.

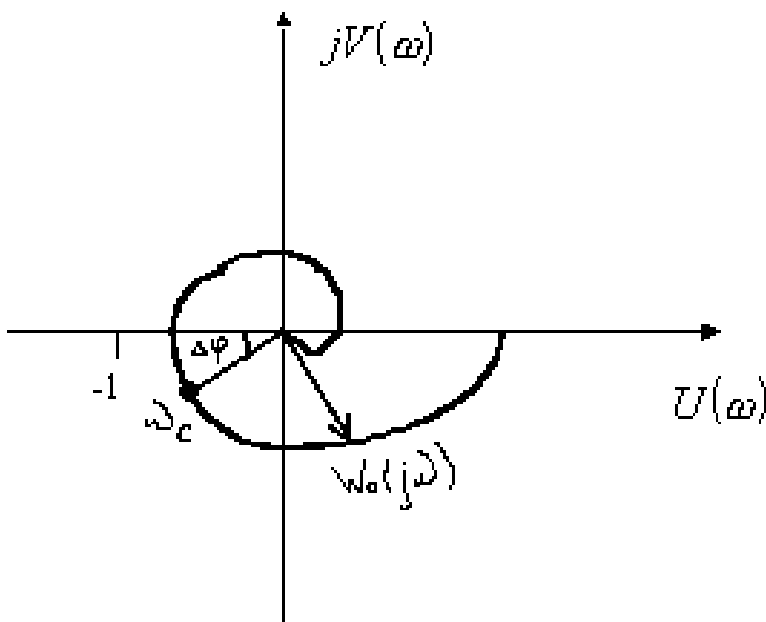
22. Анализ устойчивости систем с запаздыванием.



Передаточная функция разомкнутой САУ: $W_\tau(s) = W_0(s)e^{-s\tau}$, где $W_0(s)$ – передаточная функция скорректированной разомкнутой системы.

$D(s) = 1 + W_\tau(s) = 1 + W_0(s)e^{-s\tau}$, т.к. выражения содержат показательную степень, то для анализа устойчивости пригодны частотные методы (критерий Найквиста).

Сначала строят АФЧХ скорректированной разомкнутой САУ ($W_0(j\omega)$) с учетом запаздывания: $W_\tau(j\omega) = W_0(j\omega)e^{-j\omega\tau} = |W_0(j\omega)|e^{j(\varphi_0(\omega) - \omega\tau)}$
Графически это соответствует закручиванию АФЧХ вокруг начала координат.



При изменении частоты АФЧХ разомкнутой системы, закручиваясь вокруг начала координат приближается к критической точке $(-1; j0)$.

Факт попадания АФЧХ в критическую точку зависит от величины фазового сдвига, обусловленного величиной τ .

$$\tau_{гр} = \frac{\Delta\varphi}{\omega_c} - \text{чистое запаздывание.}$$

$$\tau < \tau_{гр}$$

Если АФЧХ имеет более сложные очертания (несколько частот ω_c), то анализируют области устойчивости и соответствующие граничные значения τ .

6. ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

23. Понятие точности. Постоянные ошибки

Обратимся к стандартной структуре системы автоматического управления, представленной на рис. 3.1. Основным назначением системы является как можно более точное воспроизведение управляющего сигнала. Естественно, что точность системы можно оценивать величиной разности управляющего сигнала

$v(t)$ и выхода $y(t)$, т. е. величиной ошибки $e(t) = v(t) - y(t)$. Очевидно, чем меньше величина $e(t)$ по модулю в каждый данный момент времени, тем система с большей точностью (меньшей ошибкой) воспроизводит управляющий сигнал. На практике интересуются не полной ошибкой системы $e(t)$, а так называемой *установившейся ошибкой* $e_y(t)$, которую определяют для достаточно больших моментов времени после затухания переходной составляющей.

Изображение ошибки в соответствии с рис. 3.1 можно записать в виде

$$E(s) = \Phi_e(s)V(s) - \Phi_f(s)F(s), \quad (6.1)$$

где $\Phi_f(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W(s)}$, $\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W(s)}$, $W(s) = W_1(s)W_2(s)$.

Из (6.1) следует, что ошибка системы будет определяться суммой двух составляющих: ошибкой системы от управляющего и ошибкой системы от возмущающего воздействий. В силу линейности системы методика вычисления каждой из этих составляющих будет однотипной, поэтому рассмотрим лишь методы вычисления ошибки системы от управляющего сигнала.

При определенных типах воздействий и определенной структуре системы установившаяся ошибка в системе будет постоянной и может быть вычислена на основании правил операционного исчисления по выражению

$$e_y = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_e(s)V(s). \quad (6.2)$$

24 Постоянные ошибки

Рассмотрим входные воздействия: $v(t) = v_0 1[t]$, $v(t) = v_1 t$, $v(t) = v_2 t^2$, $v(t) = v_0 + v_1 t + \dots + v_\nu t^\nu$, $v_i = \text{const}$, изображения которых будут соответственно равны: $V(s) = \frac{v_0}{s}$, $V(s) = \frac{v_1}{s^2}$, $V(s) = \frac{2v_2}{s^3}$, $V(s) = \frac{v_0}{s} + \frac{v_1}{s^2} + \dots + \frac{\nu! v_\nu}{s^{\nu+1}}$.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы $W(s) = \frac{KN(s)}{s^\nu L_0(s)}$, $\nu = 0, 1, \dots$

Если $\nu = 0$ (статическая система), $v(t) = v_0 1[t]$ то, подставляя в (6.2) $\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)}$ и $V(s) = \frac{v_0}{s}$, получим

$$e_y^0 = \frac{v_0}{1+K}. \quad (6.3)$$

Ошибку e_y^0 будем называть *статической ошибкой* системы.

При $\nu = 1$ (система с астатизмом первого порядка) вычислим ошибку при воздействиях $v(t) = v_0 1[t]$ и $v(t) = v_1 t$. Подставляя передаточную функцию $\Phi_e(s)$ и изображение входного сигнала в (6.2), получим соответственно для первого и второго типов входного сигнала

$$e_y^0 = 0, \quad e_y^1 = \frac{v_1}{K}, \quad (6.4)$$

где ошибку e_y^1 будем называть *ошибкой по скорости (скоростной ошибкой)*.

При $\nu = 2$ и входных сигналах $v(t) = v_0 1[t]$, $v(t) = v_1 t$, $v(t) = v_2 t^2$ соответственно получим следующие выражения ошибок:

$$e_y^0 = 0, \quad e_y^1 = 0, \quad e_y^2 = \frac{2v_2}{K}. \quad (6.5)$$

где e_y^2 – *ошибка системы по ускорению*.

При воздействии вида $v(t) = v_0 + v_1 t + \dots + v_\nu t^\nu$ для системы с астатизмом ν -го порядка получаем

$$e_y^0 = 0, \dots, e_y^{\nu-1} = 0, \quad e_y^\nu = \frac{\nu! v_\nu}{K}. \quad (6.6)$$

Из приведенных выражений следует, что ошибки в системе уменьшаются с ростом порядка астатизма системы и увеличением общего коэффициента усиления K .

25. Установившиеся ошибки при произвольном входном сигнале

Обозначим весовую функцию замкнутой системы по ошибке через

$\varphi_e(t) = L^{-1}\{\Phi_e(s)\}$. Тогда соотношению $E(s) = \Phi_e(s)V(s)$ во временной области

будет соответствовать свертка
$$e(t) = \int_0^t \varphi_e(t - \tau)v(\tau)d\tau.$$

Так как нас интересует установившаяся ошибка после затухания переходной составляющей, то отнесем нижний предел интегрирования, соответствующий моменту подачи входного сигнала, в $-\infty$. В этом случае получим выражение, справедливое для установившегося значения сигнала ошибки:

$$e_y(t) = \int_{-\infty}^t \varphi_e(t - \tau)v(\tau)d\tau$$

Заменив переменную интегрирования $t - \tau = \bar{\tau}$, получим

$$e_y(t) = \int_0^{\infty} \varphi_e(\bar{\tau})v(t - \bar{\tau})d\bar{\tau}. \quad (6.7)$$

Полагая функцию $v(t)$ аналитической, разложим ее в ряд Тейлора при $\bar{\tau} = 0$: $v(t - \bar{\tau}) = v(t) - \bar{\tau}v^{(1)}(t) + \frac{\bar{\tau}^2}{2!}v^{(2)}(t) + \dots + \frac{(-\bar{\tau})^i}{i!}v^{(i)}(t) + \dots$ и подставим полученный ряд в (6.7). В результате получим

$$e_y(t) = c_0v(t) + c_1v^{(1)}(t) + \dots + \frac{c_i}{i!}v^{(i)}(t) + \dots, \quad (6.8)$$

где коэффициенты c_i определяются выражением $c_i = \int_0^{\infty} (-\bar{\tau})^i \varphi_e(\bar{\tau})d\bar{\tau}$.

Так как передаточная функция замкнутой системы по ошибке есть прямое преобразование Лапласа от весовой функции $\Phi_e(s) = \int_0^{\infty} \varphi_e(\bar{\tau})e^{-s\bar{\tau}}d\bar{\tau}$, то очевидно соотношение

$$c_i = \left. \frac{d^i \Phi_e(s)}{ds^i} \right|_{s=0}. \quad (6.9)$$

Коэффициенты c_i носят название *коэффициентов ошибок* и характеризуют, с каким весом функция $v(t)$ и ее производные входят в общее выражение для установившейся ошибки (6.8). Если входной сигнал изменяется достаточно медленно, то в выражении (6.8) можно ограничиться конечным числом членов ряда.

Если $W(s) = \frac{KN(s)}{s^\nu L_0(s)}$, то $\Phi_e(s) = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s^\nu L_0(s)}{s^\nu L_0(s) + KN(s)}$. В статической системе $\nu = 0$ и $c_0 = \Phi_e(0) = \frac{1}{1+K}$, для системы с астатизмом первого порядка имеем $\Phi_e(s) = \frac{sL_0(s)}{KN(s) + sL_0(s)}$ и $c_0 = \Phi_e(0) = 0$, а

$$c_1 = \frac{d}{ds} \left[s \frac{L_0(s)}{KN(s) + sL_0(s)} \right] \Big|_{s=0} =$$

$$= \frac{L_0(s)}{KN(s) + sL_0(s)} \Big|_{s=0} + s \frac{d}{ds} \left[\frac{L_0(s)}{KN(s) + sL_0(s)} \right] \Big|_{s=0} = \frac{1}{K}.$$

Аналогично можно показать, что для астатической системы с астатизмом ν -го порядка $c_0 = c_1 = \dots = c_{\nu-1} = 0$, $c_\nu = \frac{1}{K}$.

Коэффициент c_0 называют коэффициентом статической ошибки, c_1 – коэффициентом скоростной ошибки, c_2 – коэффициентом ошибки по ускорению. Из (6.8) следует, что если $v(t) = v_0 = \text{const}$, то $e_y = c_0 v_0$, если $v(t) = v_1 t$, то $e_y = c_0 v_1 t + c_1 v_1$.

В общем случае формула (6.9) редко используется для вычисления c_i . На практике применяется другой способ. Разложим передаточную функцию $\Phi_e(s)$ в ряд Маклорена при $s = 0$:

$$\Phi_e(s) = \Phi_e(0) + \frac{d\Phi_e}{ds} \Big|_{s=0} \cdot s + \dots = c_0 + c_1 s + \frac{1}{2!} c_2 s^2 + \dots + \frac{1}{i!} c_i s^i + \dots \quad (6.10)$$

С другой стороны, так как $\Phi_e(s) = \frac{s^\nu L_0(s)}{KN(s) + s^\nu L_0(s)}$ есть отношение полиномов, то деля полином числителя на полином знаменателя, получим ряд

$$\Phi_e(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_i s^i + \dots \quad (6.11)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s в (6.10), (6.11), получим

$$c_i = i! \alpha_i. \quad (6.12)$$

Величина коэффициентов ошибок в конечном итоге определяет величину ошибки в системе. Из изложенного выше вновь следует, что величины c_i будут тем меньше, чем выше порядок астатизма системы и чем больше величина коэффициента усиления K разомкнутой системы.

26. Установившиеся ошибки при гармоническом воздействии

Если главная передаточная функция замкнутой системы имеет $\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}$, то при входном сигнале $v(t) = \sin \omega t$ выходной сигнал в установившемся режиме $y_y(t)$ будет определяться выражением

$$y_y(t) = A_3(\omega) \sin(\omega t + \varphi_3(\omega)), \quad (6.13)$$

где $A_3(\omega) = |\Phi(j\omega)|$, $\varphi_3(\omega) = \arg \Phi(j\omega)$.

Аналогично, зная $\Phi_e(s)$, можно найти закон изменения ошибки в установившемся режиме при гармоническом входном сигнале $v(t) = \sin \omega t$:

$$e_y(t) = |\Phi_e(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi_e(\omega)), \quad (6.14)$$

где $\varphi_e(\omega) = \arg \Phi_e(j\omega)$.

Выражения (6.13), (6.14) позволяют оценить ошибки воспроизведения гармонического сигнала в установившемся режиме. Из этих выражений следует, что, кроме ошибки воспроизведения амплитуды входного гармонического сигнала, существуют и постоянные фазовые ошибки, которые определяются видом фазочастотных характеристик замкнутой системы. Обычно при анализе точности систем управления их не рассматривают, ограничиваясь лишь анализом ошибок воспроизведения амплитуды.

Из (6.13), (6.14) можно получить ошибки воспроизведения амплитуды гармонического сигнала на заданной частоте, равные

$$\Delta_y = |1 - A_3(\omega)|, \quad (6.15)$$

$$\Delta_e = |\Phi_e(j\omega)|, \quad (6.16)$$

первая из которых характеризует разность между максимальными значениями амплитуды входного и выходного сигналов, а вторая – максимальную величину ошибки $e_y(t)$. Очевидно, всегда $\Delta_y \geq \Delta_e$. Так как $\Phi_e(j\omega) = 1 - \Phi(j\omega) = 1 - A_3(\omega)e^{j\varphi_3(\omega)}$ то $|\Phi_e(j\omega)| = \sqrt{1 - 2A_3(\omega)\cos\varphi_3(\omega) + A_3^2(\omega)}$. Если $\varphi_3 = 0$, то $|\Phi_e(j\omega)| = |1 - A_3(\omega)|$. Таким образом, при малых фазовых сдвигах на заданной частоте ω оценки (6.15) и (6.16) будут близки между собой. Это обычно выполняется в диапазоне низких частот.

На рис. 6.2 представлен типичный вид АЧХ замкнутой системы $A_3(\omega)$ для случая астатической системы, при этом $A_3(0) = 1$. В случае статической системы $A_3(0) = \frac{K}{K+1}$. На рисунке заштрихованная область соответствует величинам ошибок Δ_y .

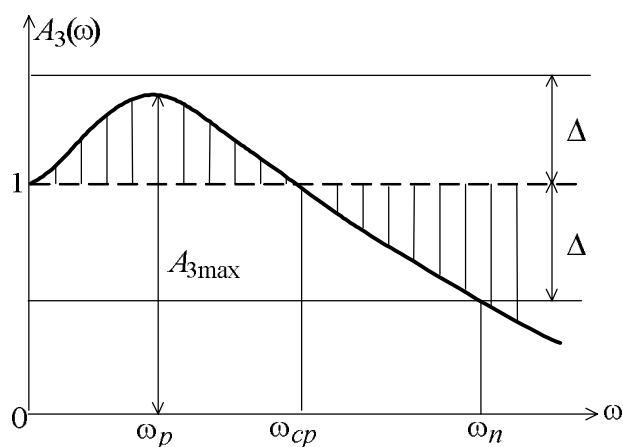


Рис. 6.2

Под *полосой пропускания* системы понимают диапазон частот $0 \leq \omega \leq \omega_n$, при котором ошибка Δ_y будет меньше некоторой заданной Δ , т. е. $\Delta_y < \Delta$. Иногда полосу пропускания определяют как диапазон частот $0 \leq \omega \leq \omega_n$, при котором выполняется условие $A_3(\omega_n) \leq 0,707 A_3(0)$.

Полоса пропускания является важной характеристикой системы. С одной стороны, чем шире полоса пропускания, тем с меньшими ошибками система воспроизводит управляющие сигналы. Однако, с другой стороны, увеличение ω_n приводит к тому, что система становится чувствительной к влиянию высокочастотных помех.

Из выражения (6.16) можно получить приближенные оценки величины ошибки Δ_e . Так как $\Phi_e(j\omega) = \frac{1}{1+W(j\omega)}$, то для статической системы $W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{L(j\omega)}$ и при достаточно низких частотах можно полагать $N(j\omega) \approx 1$, $L(j\omega) \approx 1$, $W(j\omega) \approx K$, откуда имеем

$$\Delta_e \cong \frac{1}{1+K}. \quad (6.17)$$

Для астатической системы $W(j\omega) = \frac{KN(j\omega)}{(j\omega)^v L_0(j\omega)}$ и при низких частотах

$W(j\omega) \cong \frac{K}{(j\omega)^v}$, откуда получим

$$\Delta_e \cong \frac{\omega^v}{\sqrt{\omega^{2v} + K^2}}. \quad (6.18)$$

Если выполняется условие $K \gg \omega$, то формула (6.18) принимает вид

$$\Delta_e \cong \frac{\omega^v}{K}. \quad (6.19)$$

Из (6.17) – (6.19) видно, что ошибка системы обратно пропорциональна коэффициенту усиления разомкнутой системы.

Итак, для повышения точности САУ следует увеличивать коэффициент усиления разомкнутой системы либо увеличивать порядок астатизма. Однако это будет приводить в общем случае к ухудшению устойчивости. Таким образом, требования к точности системы и ее устойчивости являются противоречивыми.

27. Корневые оценки качества

Переходная функция замкнутой системы как реакция системы на единичный скачок по положению вычисляется в соответствии с выражением (4.11), в котором второе слагаемое в виде суммы определяет переходную составляющую

$$h_n(t) = \sum_{i=1}^n \frac{KN(\lambda_i)}{\lambda_i D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}, \quad (7.1)$$

а λ_i – различные корни характеристического уравнения замкнутой системы $D(\lambda) = 0$.

Если $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} h_n(t) = 0$, т. е. с течением времени переходная составляющая затухает.

В выражении (7.1) перейдем к модулям в левой и правой частях:

$$|h_n(t)| \leq \sum_{i=1}^n c_i |e^{\lambda_i t}|, \quad (7.2)$$

где $c_i = \left| \frac{KN(\lambda_i)}{\lambda_i D'(\lambda_i)} \right|$.

Обозначим расстояние от мнимой оси до ближайших действительного корня (рис. 7.1, а) или пары комплексно-сопряженных корней (рис. 7.1, б) на плоскости корней λ через η .

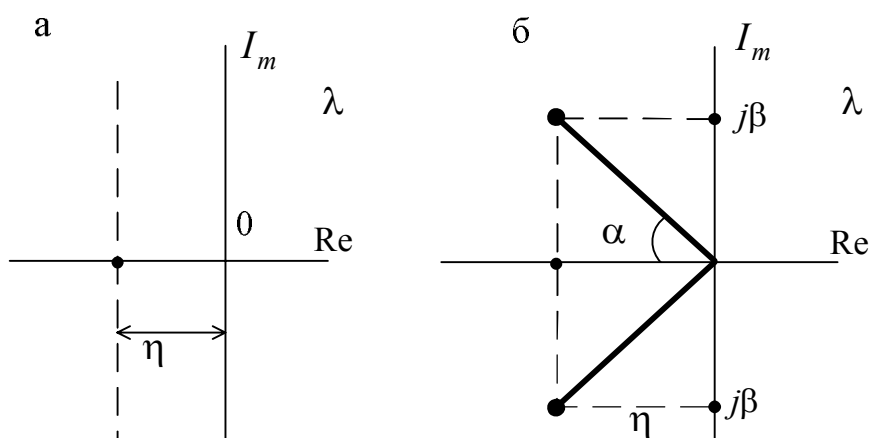


Рис. 7.1

Величину η будем называть *степенью устойчивости*. Очевидно, что $\eta = \min |\operatorname{Re} \lambda_i|$. Так как $|e^{\lambda_i t}| = |e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)t} e^{j(\operatorname{Im} \lambda_i)t}| = |e^{(\operatorname{Re} \lambda_i)t}|$, то для любого множителя $|e^{\lambda_i t}|$ в (7.2) будет справедлива оценка $|e^{\lambda_i t}| < e^{-\eta t}$. Таким образом, (7.2) равносильно выражению

$$|h_n(t)| \leq M e^{-\eta t}, \text{ а } M = \sum_{i=1}^n c_i. \quad (7.3)$$

Из (7.3) следует, что переходная составляющая $h_n(t)$ затухает быстрее,

чем экспонента с показателем $-\eta$. Если принять время регулирования t_p как время, начиная с которого $h_n(t)$ войдет в 5% трубку от некоторого начального значения, то из (7.3) получим $Me^{-\eta t_p} = 0,05M$, откуда

$$t_p \leq \frac{\ln 0,05}{-\eta} \cong \frac{3}{\eta}. \quad (7.4)$$

Выражение (7.4) и соответственно величина η характеризуют предельное быстродействие системы, поэтому иногда величину η называют еще *мерой быстродействия* системы.

Из рассмотренного выше следует, что доминирующее влияние на характер переходного процесса оказывают ближайšie к мнимой оси корни. Если ближайшими являются комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = -\eta \pm j\beta$, то наряду со степенью устойчивости вводят в рассмотрение *колебательность системы* (колебательность переходного процесса) $\mu = \frac{|\beta|}{|\eta|}$. Парe комплексно-сопряженных корней в (7.1) соответствует составляющая

$$c_1 e^{(-\eta + j\beta)t} + c_2 e^{(-\eta - j\beta)t} = A e^{-\eta t} \sin(\beta t + \varphi), \quad (7.5)$$

где c_1, c_2 – комплексно-сопряженные величины; A, φ – действительные величины.

Составляющая (7.5) носит колебательный характер. Период колебания определяется величиной $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Уменьшение амплитуды в (7.5) за период T

будет равно $A e^{-\eta \left(t + \frac{2\pi}{\beta}\right)} = A e^{-\eta t} \cdot e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$, т. е. определяться величиной $e^{-\frac{2\pi}{\mu}}$.

Перерегулирование в % может быть оценено по формуле:

$$\sigma = 100 e^{-\frac{\pi}{\mu}} = 100 e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg} \alpha}}. \quad (7.6)$$

С увеличением μ увеличивается число колебаний за время регулирования и возрастает перерегулирование. Величина μ носит чаще качественный характер и является оценкой переходного процесса сверху, поэтому в действительности переходной процесс может иметь лучшие показатели.

Характер переходного процесса в значительной степени зависит от корней λ_i характеристического уравнения, т. е. от полюсов передаточной функции

$\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)}$ замкнутой системы. Однако на величину амплитуды переходных составляющих будут влиять и нули передаточной функции. Пусть полином $N(s)$ имеет m нулей s_i , тогда $N(s) = (s - s_1) \dots (s - s_m)$ и выражение (7.1)

примет вид $h_n(t) = \sum_{i=1}^n \frac{K(\lambda_i - s_1) \dots (\lambda_i - s_m)}{\lambda_i D'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t}$.

Очевидно, если какой-то полюс λ_i будет близок (или в идеальном случае равен) нулю передаточной функции, то составляющая, соответствующая корню λ_i , будет мала по амплитуде (или равна нулю).

Впервые корневые оценки качества переходных процессов для систем третьего порядка были предложены в работе И. А. Вышнеградского (1876), положившей начало развитию теории автоматического управления.

Характеристическое уравнение системы третьего порядка $D(\lambda) = a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$ путем замены переменной приводится к виду

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (7.7)$$

где $q = \lambda \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}$, $A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2 a_3}}$, $B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0 a_3^2}}$.

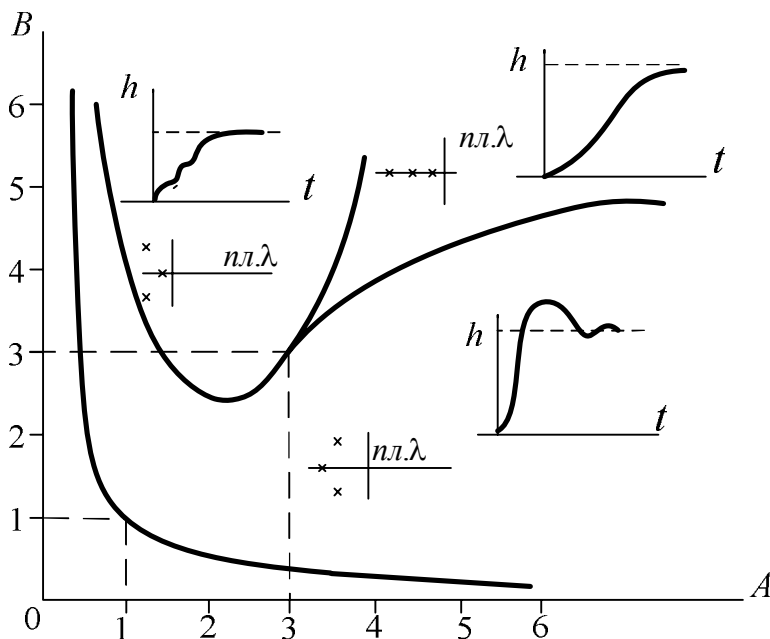
Коэффициенты A, B – параметры Вышнеградского – являются комбинацией коэффициентов a_i и в конечном итоге зависят от реальных параметров системы. Условие асимптотической устойчивости для уравнения (7.7) несложно получить с помощью критерия Гурвица, оно имеет вид $AB > 1$. В области устойчивости, ограниченной гиперболой $AB = 1$ в плоскости параметров A, B , нанесем кривые, разделяющие область устойчивости на области с одинаковым расположением корней характеристического уравнения (7.7).

На рис. 7.2 представлена диаграмма Вышнеградского, где для каждой области показано расположение корней и вид переходного процесса.

Таким образом, выбирая из диаграммы требуемый вид переходного процесса, можно найти необходимые значения параметров A, B или a_i .

В заключение отметим ряд простых случаев, когда получены оценки степени устойчивости η и соответственно быстродействия системы. Рассмотрим систему управления стандартной структуры, изображенной на рис. 3.1. Пусть передаточная функция объекта управления $W_2(s)$ имеет вид:

$$W_2(s) = \frac{K_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_r s + 1)}, \text{ где } T_1 > T_2 > \dots > T_r.$$



Передаточную функцию $W_1(s)$ будем рассматривать как передаточную функцию регулятора (управляющего устройства). Рассмотрим три случая закона управления: интегральный $W_1(s) = \frac{K_1}{s}$, пропорциональный $W_1(s) = K_1$, пропорционально-интегральный $W_1(s) = K_0 + \frac{K_1}{s}$. Быстродействие объекта управления может быть охарактеризовано величиной $\frac{1}{T_1}$. Доказано, что для интегрального закона управления быстродействие замкнутой системы, характеризуемое величиной степени устойчивости η , не будет превосходить быстродействия объекта, т. е. $\eta < \frac{1}{T_1}$.

Для пропорционального и пропорционально-интегрального законов управления быстродействие замкнутой системы управления может превосходить быстродействие объекта управления, но будет ограничено неравенством $\eta < \frac{1}{T_2}$.

Приведенный частный результат распространяется на более общий случай: астатические системы уступают по быстродействию системам статическим.

28. Интегральные оценки качества

Интегральные оценки качества являются интегралами по времени от некоторых функций координат системы (выходной координаты, сигнала ошибки) и оценивают одним числом как величину отклонения, так и время регулирования. В качестве исследуемого процесса обычно выбирается разность между установившимся процессом в системе и самой координатой. Рассмотрим замкнутую систему управления стандартной структуры, на вход которой поступает единичный ступенчатый сигнал $v(t) = 1[t]$. Тогда реакция системы будет представлять собой переходную функцию

$h(t)$, которая в соответствии с (4.10)

определяется выражением $h(t) = h_y + h_n(t)$, где $h_y = \frac{KN(0)}{D(0)} = \Phi(0)$ – установившаяся составляющая; $h_n(t)$ – переходная составляющая, характеризующая переходной процесс.

Введем отклонение $\Delta h(t) = h_y - h(t)$ процесса $h(t)$ от его установившегося значения. Очевидно, что $\Delta h(t) = -h_n(t)$.

Простейшими интегральными оценками качества являются следующие:

$$I_0 = \int_0^{\infty} \Delta h(t) dt, \quad (7.8)$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} |\Delta h(t)| dt, \quad (7.9)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \Delta h^2(t) dt. \quad (7.10)$$

Оценка I_0 носит название *линейной интегральной оценки*, I_1 – *абсолютной интегральной* и I_2 – *квадратичной интегральной оценки*.

Значение интегралов будет конечной величиной только в том случае, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [-h_n(t)] = 0$, т. е. только для асимптотически устойчивых систем.

Поясним физический смысл оценок (7.8) – (7.10), для чего обратимся к рис. 7.3. Для $h(t)$, соответствующих кривым 1, 2, 3 (см. рис. 4.2), построены графики отклонения $\Delta h(t)$ (на рис. 7.3 соответственно кривые 1, 2, 3).

Величина I_0 для кривой 1 есть величина площади, ограниченной этой

кривой и координатными осями.

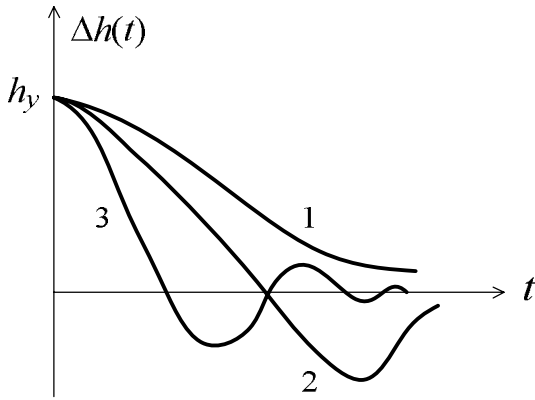


Рис. 7.3

Очевидно, чем меньше I_0 , тем меньше текущие отклонения $h(t)$ от установившегося значения и тем меньше будет время регулирования в системе. В идеальном случае, если $I_0 = 0$, то время регулирования будет равно нулю. Для кривых 2, 3 в силу того, что они меняют свой знак, оценка I_0 неприменима, так как величина интеграла может оказаться очень малой (даже равной нулю), но процессы будут затухать

медленно. Поэтому линейные интегральные оценки можно применять, если заведомо известно, что переходная составляющая имеет монотонный характер.

Для колебательных процессов обычно применяются оценки I_1 , I_2 , которые имеют аналогичный смысл: чем меньше величина I , тем меньше время регулирования и меньше отклонения координаты системы от установившегося процесса.

Любые интегральные оценки носят качественный и сравнительный характер, т. е. по величине I нельзя определить, например, время регулирования или перерегулирование в системе. Но если для двух вариантов проектируемой системы окажется, что $I' < I''$, то считается, что качественные показатели первой системы лучше, чем второй.

Наиболее просто вычисляются интегральные оценки I_0 и I_2 . Пусть передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{KN(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (7.11)$$

Найдем изображение отклонения $\Delta h(t) = h_y - h(t)$ с учетом того, что $L\{h(t)\} = \Phi(s)/s$, $h_y = \Phi(0) = \text{const}$ и $\{h_y\} = \Phi(0)/s$:

$$\Delta H(s) = L\{\Delta h(t)\} = \frac{\Phi(0) - \Phi(s)}{s}. \quad (7.12)$$

Так как $I_0 = \int_0^{\infty} \Delta h(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \Delta h(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta H(s)$, то с учетом (7.11)

имеем

$$\begin{aligned} I_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m (a_0 s^n + \dots + a_n) - a_n (b_0 s^m + \dots + b_m)}{s a_n (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)} = \\ &= \frac{s [b_m (a_0 s^{n-1} + \dots + a_{n-1}) - a_n (b_0 s^{m-1} + \dots + b_{m-1})]}{s a_n (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)} = \frac{b_m a_{n-1} - a_n b_{m-1}}{a_n^2}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Квадратичная интегральная оценка I_2 может быть определена на основе формулы Парсеваля (или Релея).

В частности, для астатических систем

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi_e(j\omega)|^2}{\omega^2} d\omega. \quad (7.14)$$

Изображение отклонения $\Delta H(s)$ всегда можно представить как отношение двух полиномов

$$\Delta H(s) = \frac{1}{s} [\Phi(0) - \Phi(s)] = \frac{\beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \dots + \beta_m}{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n}. \quad (7.15)$$

При этом оценка I_2 может быть аналитически вычислена при $m < n$ через коэффициенты α_i, β_i (7.15). Выражение для вычисления I_2 имеет достаточно сложный вид и здесь не приводится. Для наиболее распространенного случая $m = n - 1$ приведем несколько конечных выражений для вычисления I_2 :

$$\begin{aligned} n = 1, \quad I_2 &= \frac{\beta_0^2}{2\alpha_0\alpha_1}; \quad n = 2, \quad I_2 = \frac{\beta_1^2\alpha_0 + \beta_0^2\alpha_2}{2\alpha_0\alpha_1\alpha_2}; \\ n = 3, \quad I_2 &= \frac{\beta_0^2\alpha_2\alpha_3 + (\beta_1^2 - 2\beta_0\beta_2)\alpha_0\alpha_3 + \beta_2^2\alpha_0\alpha_1}{2\alpha_0\alpha_3(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Наряду с оценками I_0, I_2 употребляются и более сложные интегральные оценки, учитывавшие не только само отклонение $\Delta h(t)$, но и его производные.

При использовании интегральных оценок можно выделить два направления: анализ системы – получение оценки для заданной системы и синтез системы – минимизация оценки по каким-либо параметрам.

29. Частотные оценки качества

Частотные оценки качества базируются на связи частотных и временных характеристик системы управления, в частности, на связи переходной функции замкнутой системы $h_3(t)$ и вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ (4.13). Из (4.13) можно получить две категории оценок, одна из которых строго обоснована и математически доказана, а другая получена на основе построения большого числа переходных процессов для различных $P(\omega)$ и осреднения полученных результатов.

Рассмотрим первую группу оценок.

1. Начальное значение $P(0)$ и конечное значение $P(\omega)$ связаны с конечным значением $h_3(\infty)$ и начальным $h_3(0)$ соотношениями

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_3(t) = h_{3y} = P(0), \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = h_3(0). \quad (7.17)$$

Эти свойства фактически являются следствием теорем о конечном и начальном значениях оригинала в преобразовании Лапласа. Так как для астатических систем $P(0) = |\Phi(j0)| = 1$, а для статических $P(0) = |\Phi(j0)| = \frac{K}{1+K}$, то

$$h_{3y} = P(0) = \begin{cases} 1 & \text{для астатических систем,} \\ \frac{K}{1+K} & \text{для статических систем.} \end{cases}$$

2. Сжатию характеристики $P(\omega)$ по оси ω соответствует пропорциональное растяжение характеристики $h_3(t)$ по оси t . Это свойство является следствием из свойств преобразования Фурье об изменении масштаба по оси ординат. Приведенное свойство дает важную сравнительную оценку переходных процессов в системах: более пологим характеристикам $P(\omega)$ (более растянутым вдоль оси ω) соответствуют более быстро протекающие переходные процессы, а более крутым или сжатым вдоль оси ω – замедленные процессы. Соответственно следует ожидать, что для первого случая время регулирования t_p будет меньше, чем для второго.

3. Достаточным условием того, чтобы перерегулирование σ в системе не превышало 18%, является выполнение соотношений

$$P(\omega) \geq 0, \quad \frac{dP(\omega)}{d\omega} \leq 0, \quad (7.18)$$

т. е. $P(\omega)$ является невозрастающей положительной функцией частоты.

4. Достаточным условием монотонности переходного процесса, т. е. $\sigma = 0\%$, является выполнение соотношений

$$P(\omega) \geq 0, \quad \frac{dP(\omega)}{d\omega} < 0. \quad (7.19)$$

На рис. 7.4, а представлены две вещественные частотные характеристики, из которых для первой $\sigma = 0\%$, а для второй – $\sigma = 18\%$.

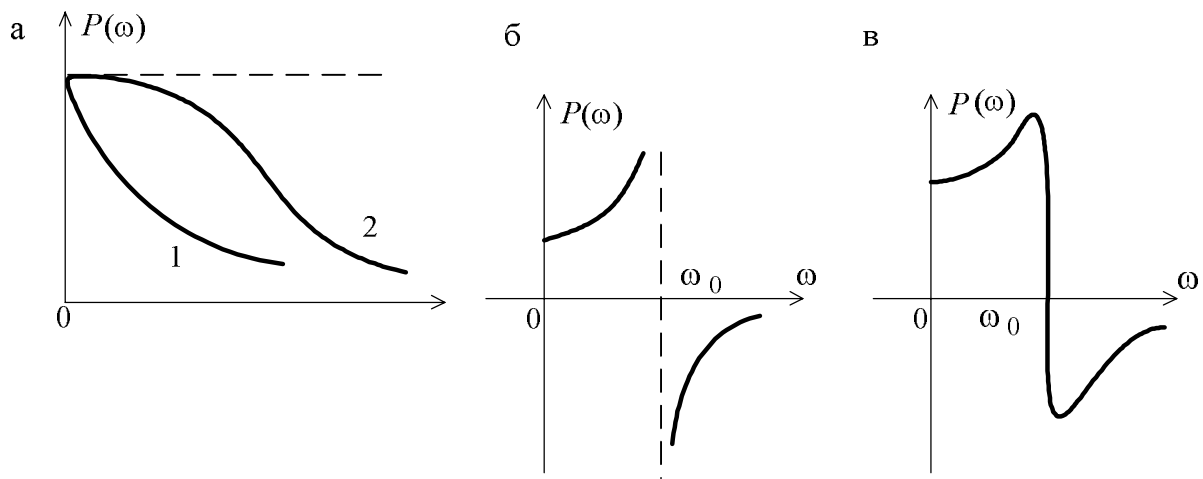


Рис. 7.4

4. Если характеристическое уравнение замкнутой системы $D(\lambda) = 0$ имеет чисто мнимый корень $\lambda = j\omega_0$, то характеристика $P(\omega)$ при $\omega = \omega_0$ имеет разрыв непрерывности, что соответствует незатухающей гармонической составляющей с частотой ω_0 в переходном процессе $h_3(t)$. График такой характеристики представлен на рис. 7.5, а. Поэтому если характеристика вблизи некоторой частоты ω_0 имеет резкий перепад и большие пики, то следует ожидать наличие в переходной функции медленно затухающей гармонической составляющей частоты ω_0 . Такой случай представлен на рис. 7.5, б.

Оценки второй группы, как указывалось выше, имеют приближенный и в значительной степени эмпирический характер.

На рис. 7.5, а, б показаны случаи аппроксимации вещественной характеристики $P(\omega)$ соответственно одной и суммой двух трапецеидальных характеристик.

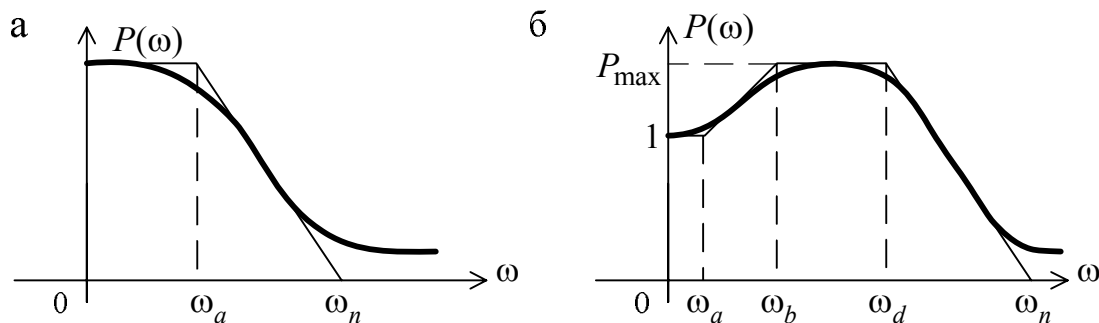


Рис. 7.5

Для случая, изображенного на рис. 7.5, а, время регулирования t_p оценивается по неравенству

$$\frac{\pi}{\omega_n} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_n}. \quad (7.20)$$

Для случая аппроксимации в виде суммы двух трапеций (см. рис. 7.5, б) время регулирования t_p и перерегулирования σ более сложным образом зависят от параметров аппроксимирующих трапеций.

На рис. 7.6 представлены графики зависимостей t_p и σ от P_{\max} при $\frac{\omega_e}{\omega_n} \geq 0,5$, $\frac{\omega_d}{\omega_n} \geq 0,8$; $\frac{\omega_a}{\omega_e} \geq 0,4$.

На этом рисунке время регулирования t_p построено в относительных единицах, где ω_c – частота среза разомкнутой системы.

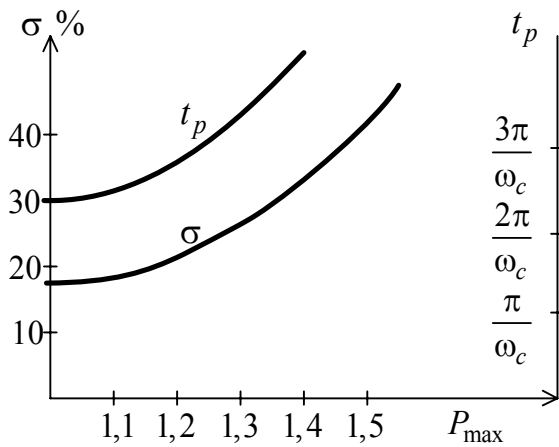


Рис. 7.6

Оценку (7.20) приближенно можно применять и для системы, имеющей произвольную вещественную характеристику $P(\omega)$. При этом величину ω_n следует выбирать такой, после которой $P(\omega) < 5\% P(0)$.

Для характеристики рис. 7.5, б справедлива такая оценка перерегулирования:

$$\sigma = \frac{1,18P_{\max} - P(0)}{P(0)} 100 \%$$

Наряду с оценками качества системы по переходной функции $h_3(t)$ широкое распространение получили оценки качества системы при обработке гармонических входных сигналов. Особенно это касается исследования следящих систем, для которых изменяющиеся по амплитуде и знаку входные сигналы наиболее характерны. При таком подходе удобнее пользоваться АЧХ замкнутой системы $A_3(\omega) = |\Phi(j\omega)|$, типичный график которой представлен на рис. 7.7.

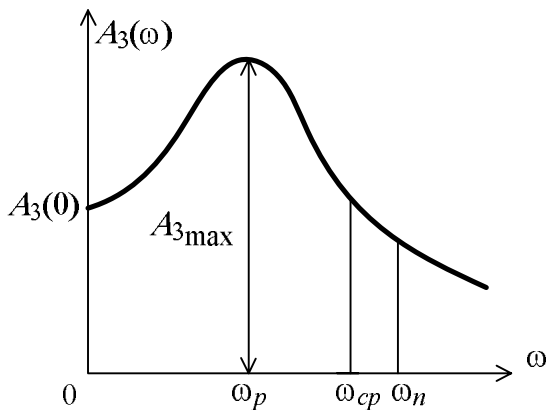


Рис. 7.7

Величина $A_3(0)$ для астатических систем равна 1, а для статических $\frac{K}{1+K}$ и при большом K близка к единице. Частота ω_p – резонансная частота, при которой $A_3(\omega)$ достигает максимального значения $A_{3\max}$. Частота ω_{cp} – частота среза замкнутой системы, при которой $A(\omega_{cp}) = 1$ (ω_{cp} не совпадает с частотой среза разомкнутой системы,

которая обозначается ω_c). Интервал частот $[0, \omega_n]$ определяет полосу пропускания системы. Величина $A_3(\omega_n)$ может задаваться из условий точности воспроизведения гармонического сигнала (см. подраздел 6.3).

Частота ω_{cp} косвенно характеризует время регулирования в замкнутой системе, которое оценивается величиной $t_p \cong (1 \dots 2) \frac{2\pi}{\omega_{cp}}$.

Для оценки склонности системы к колебаниям вводят так называемый *показатель колебательности*, который определяется как

$$M = \frac{A_{3\max}}{A_3(0)} = \frac{|\Phi(j\omega)|_{\max}}{|\Phi(j0)|}, \quad (7.21)$$

либо иногда как

$$M = A_{3\max} = |\Phi(j\omega)|_{\max}. \quad (7.22)$$

Так как $A_3(\omega) = 1$ для астатических и $A_3(\omega) \approx 1$ для статических систем при большом коэффициенте усиления K разомкнутой системы, то отличие выражений (7.21), (7.22) друг от друга незначительно.

Физически показатель колебательности M характеризует склонность системы к колебаниям: чем больше M , тем более колебательный характер переходного процесса. Этот показатель имеет менее прозрачный смысл, чем, например, время регулирования t_p и перерегулирование σ . Считается, что если M не превосходит величины 1,2 – 1,3, то качество процессов в системе будет удовлетворительным и при других внешних воздействиях, отличных от гармонических.

Величина M также косвенно характеризует запасы устойчивости системы: чем больше M , тем меньше запасы устойчивости. Однако количественно связать M и величины $\Delta\varphi$, ΔL не удастся.

Для определения величины M можно воспользоваться графиком АЧХ разомкнутой системы $W(j\omega)$. Пусть $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$. Тогда

$$|\Phi(j\omega)| = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right| = \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{(1 + U)^2 + V^2}}, \text{ откуда } U^2 + V^2 = |\Phi|^2 [(1 + U)^2 + V^2],$$

или
$$(C + U)^2 + V^2 = R^2, \quad (7.23)$$

где $C = \frac{|\Phi|^2}{|\Phi|^2 - 1}$, $R = \frac{|\Phi|}{|\Phi|^2 - 1}$.

Задавая $|\Phi| = \text{const}$ и находя C и R по уравнению (7.23) в комплексной плоскости U, jV , получим кривые, которые будут представлять собой окружности радиусом R с центрами на действительной оси. Эти окружности для разных значений $|\Phi|$ приведены на рис. 7.8.

Все эти окружности (линии равных значений $|\Phi|$) охватывают при $|\Phi| < 1$ начало координат, а при $|\Phi| > 1$ – точку с координатам $(-1, j0)$. При $|\Phi| = 1$ они вырождаются в прямую.

На рис. 7.8 нанесен график АЧХ $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$. Фактически пред-

ставленная серия кривых при $|\Phi| = \text{const}$ является номограммой для определения $|\Phi(j\omega)|$ по кривой $W(j\omega)$. В точках пересечения $W(j\omega)$ и соответствующей кривой $|\Phi| = \text{const}$ находим для заданного значения ω величину $|\Phi(j\omega)|$. Из рис. 7.8 видим, что при ω_1 величина $|\Phi(j\omega_1)| = 1$, при ω_2 величина $|\Phi(j\omega_2)| = 1,2$ и т. д. Очевидно, что показатель колебательности M определится в точке касания годографа $W(j\omega)$ с окружностью, имеющей максимальное значение $|\Phi|$. Для данного случая видно, что это будет окружность, соответствующая $M = 1,5$.

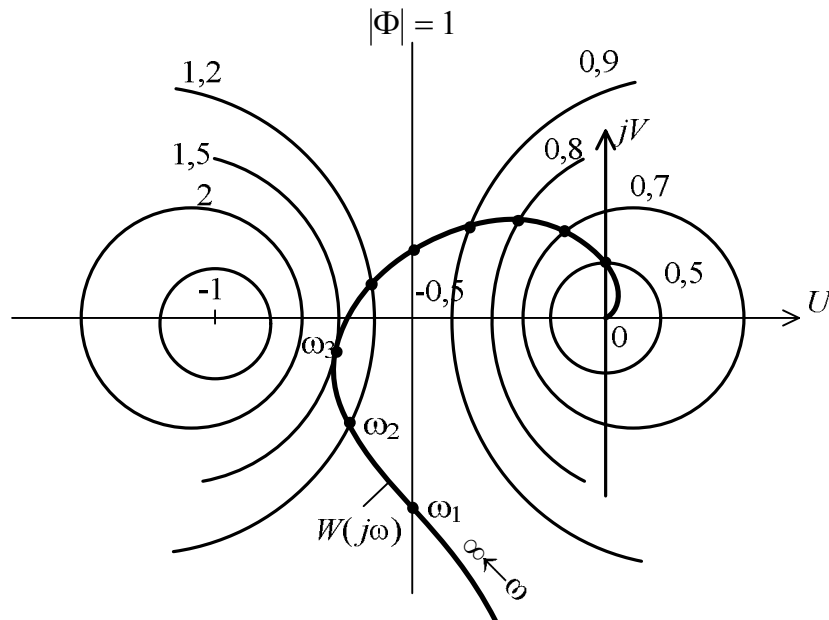


Рис. 7.8

Из рис. 7.8 видно, что чем больше величина M (или $|\Phi|$) для данной системы, тем ближе АФЧХ $W(j\omega)$ подходит к точке с координатами $(-1, j0)$, тем меньше у системы будут запасы устойчивости.

Наконец, возможна оценка качественных показателей системы по виду логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы. Всю характеристику можно условно разбить по оси частот на три диапазона, как это по-

казано на рис. 7.9, где НЧ – диапазон низких частот, СЧ – средних и ВЧ – высоких частот.

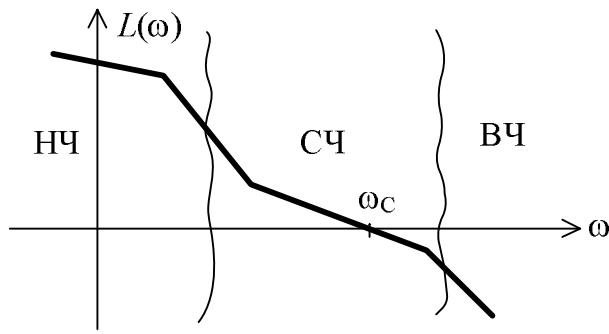


Рис. 7.9

Логарифмическая характеристика ΔL в диапазоне НЧ влияет на точностные характеристики системы, так как первая асимптота определяется двумя величинами: K – коэффициентом усиления разомкнутой системы и ν – порядком астатизма. Область средних частот вблизи частоты среза ω_c в значительной степени определяет такие показатели системы, как запасы устойчивости $\Delta\varphi$, ΔL , время

регулирования t_p , перерегулирование σ , величину показателя колебательности M . Связать указанные параметры непосредственно с параметрами произвольной ЛАЧХ достаточно трудно. Однако для ряда частных случаев ЛАЧХ путем экспериментальных исследований получены графические зависимости, связывающие указанные величины. Отметим лишь одно общее свойство: чем больше величина ω_c , тем меньше время регулирования. Кроме этого, считается, что для получения приемлемых показателей качества и обеспечения устойчивости желательно, чтобы наклон асимптоты на частоте среза ω_c был -20 дБ/дек, а ее протяженность – не менее одной декады.

Область ВЧ существенного влияния на динамику системы не оказывает, поэтому при анализе ее обычно не учитывают.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & \cdot & & & 0 \\ a_2 & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_n & \cdot & a_2 & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

Из (8.19) следует, что $\beta_0 = b_0$, $a_1\beta_0 + \beta_1 = b_1$, $a_2\beta_0 + a_1\beta_1 + \beta_2 = b_2, \dots$, откуда последовательно находятся β_0, β_1, \dots .

Для физически реализуемых систем $m < n$ и $\beta_0 = 0$.

Пример 8.5. Рассмотрим замкнутую систему управления стандартной структуры (см. рис. 8.1), где будем полагать $W_1(s) = \frac{K_1(\tau_1 s + 1)}{T_1 s + 1}$,

$$W_2(s) = \frac{K_2}{s(T_2 s + 1)}, \quad f = 0, \quad K_1 K_2 = 500, \quad \tau_1 = 0,03 \text{ с}, \quad T_1 = 0,1 \text{ с}, \quad T_2 = 0,006 \text{ с}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы будет равна

$$W(s) = \frac{K_1 K_2 (\tau_1 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{500(0,03s + 1)}{s(0,1s + 1)(0,006s + 1)}.$$

Найдем дифференциальное уравнение разомкнутой системы, связывающее y и e : $y^{(3)} + 176,6y^{(2)} + 1666y^{(1)} = 25 \cdot 10^3 e^{(1)} + 0,83 \cdot 10^6 e$.

Коэффициенты этого уравнения $a_1 = 176,6$, $a_2 = 1666$, $a_3 = 0$, $b_0 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 25 \cdot 10^3$, $b_3 = 0,83 \cdot 10^6$.

Уравнение для определения β_i имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 176,6 & 1 & 0 & 0 \\ 1666 & 176,6 & 1 & 0 \\ 0 & 1666 & 176,6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \cdot 10^3 \\ 0,83 \cdot 10^6 \end{bmatrix},$$

откуда $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 25 \cdot 10^3$, $\beta_3 = -3,75 \cdot 10^6$.

Итак, уравнения состояния разомкнутой системы в нормальной форме имеют вид

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1666 & -176,6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \cdot 10^3 \\ -3,57 \cdot 10^6 \end{bmatrix} e, \quad y = [1, 0, 0] x. \quad (8.20)$$

31. Каноническая форма уравнений состояния одномерной системы

Для получения уравнений состояния одномерной системы в канонической форме используется передаточная функция системы. Будем полагать, что система описывается дифференциальным уравнением (8.16), которому соответствует передаточная функция $W(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$, $m < n$.

Пусть характеристическое уравнение системы имеет n различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тогда передаточную функцию можно представить в виде

$$W(s) = \frac{\beta_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{\beta_n}{s - \lambda_n}, \quad \beta_i = (s - \lambda_i) W(s) \Big|_{s = \lambda_i}. \quad (8.22)$$

Очевидно, что в этом случае $Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{s - \lambda_i} V(s)$.

Обозначим $\frac{\beta_i V(s)}{s - \lambda_i} = X_i(s)$, тогда $(s - \lambda_i) X_i(s) = \beta_i V(s)$, $Y(s) = \sum_{i=1}^n X_i(s)$.

Перейдем в операторных соотношениях к оригиналам, полагая $L^{-1}\{X_i(s)\} = x_i(t)$. Получим $\dot{x}_i = \lambda_i x_i + \beta_i v$, $y = x_1 + \dots + x_n$, $i = 1, \dots, n$.

Вводя вектор состояния $x = \text{col}[x_1, \dots, x_n]$, запишем полученные уравнения в виде уравнений состояния

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} v, \quad y = [1, \dots, 1] x. \quad (8.23)$$

Итак, получили уравнения состояния в канонической форме с диагональной матрицей коэффициентов, где в общем случае элементы λ_i , β_i матриц могут быть и комплексными величинами.

Из (8.22) можно получить другую каноническую форму уравнений состояния. Если обозначить $\frac{V(s)}{s - \lambda_i} = X_i(s)$, то проводя аналогичные рассуждения, получим следующие уравнения состояния:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad y = [\beta_1, \dots, \beta_n] x. \quad (8.24)$$

Рассмотрим теперь случай кратных корней. Пусть характеристическое уравнение имеет корни λ_1 кратности k , а остальные корни простые $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$.

Тогда передаточную функцию можно представить в виде разложения

$$W(s) = \frac{\beta_1}{(s - \lambda_1)^k} + \dots + \frac{\beta_k}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{\beta_{k+1}}{s - \lambda_{k+1}} + \dots + \frac{\beta_n}{s - \lambda_n},$$

где

$$\beta_i = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s - \lambda_1)^k W(s)]_{s = \lambda_1}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\beta_i = (s - \lambda_1) W(s) \Big|_{s = \lambda_i}, \quad i = k+1, \dots, n.$$

В этом случае $Y(s) = \left[\frac{\beta_1}{(s - \lambda_1)^k} + \dots + \frac{\beta_k}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{\beta_{k+1}}{s - \lambda_{k+1}} + \dots + \frac{\beta_n}{s - \lambda_n} \right] V(s)$, или

$$Y(s) = \beta_1 X_1(s) + \dots + \beta_k X_k(s) + \beta_{k+1} X_{k+1}(s) + \dots + \beta_n X_n(s).$$

Между изображениями $X_1(s), \dots, X_k(s)$ существует связь $X_i(s) = \frac{X_{i+1}(s)}{s - \lambda_1}$,

$i = 1, \dots, k-1$. Полагая $x_i(t) = L^{-1}\{X_i(s)\}$ и переходя к оригиналам, получим в области оригиналов: $\dot{x}_i = \lambda_1 x_i + x_{i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$; $\dot{x}_k = \lambda_1 x_k + u$; $\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u$,

$$i = k+1, \dots, n; \quad y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i.$$

Вводя вектор состояния $x = col[x_1, \dots, x_n]$, полученные соотношения запишем в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [\beta_1, \dots, \beta_n] x. \quad (8.25)$$

Уравнения состояния (8.25) имеют каноническую форму, основная матрица – форму Жордана. Корню кратности k соответствует клетка Жордана размерностью $k \times k$. Очевидно, при наличии нескольких кратных корней будем получать соответствующие клетки Жордана для каждого корня.

32. Преобразование уравнений состояния

Пусть система описывается уравнениями состояния общего вида (8.3). Сделаем в этих уравнениях замену переменных $x = Qz$, где $z = \text{col}[z_1, \dots, z_n]$ – новый вектор состояния, Q – произвольная матрица размерностью $n \times n$ с постоянными коэффициентами. На матрицу Q накладывается единственное ограничение – она должна быть невырожденной (неособенной), т. е. определитель этой матрицы $\det Q \neq 0$. В этом случае всегда существует обратная матрица, которую будем обозначать через Q^{-1} , такая, что $Q^{-1}Q = E$, где $E = \text{diag}[1, \dots, 1]$ – единичная матрица размерностью $n \times n$. Очевидно, что при этих условиях существует однозначная связь между векторами x и z : $x = Qz$, $z = Q^{-1}x$.

В уравнениях (8.3) сделаем замену $x = Qz$ и с учетом того, что $\dot{x} = Q\dot{z}$, получим

$$\dot{z} = Q^{-1}AQz + Q^{-1}Bv, \quad y = CQz. \quad (8.8)$$

Уравнения (8.8) будут новыми уравнениями состояния, имеющими основную матрицу системы $Q^{-1}AQ$, входа $Q^{-1}B$ и выхода CQ . Так как Q – произвольная матрица, то исходным уравнениям (8.3) соответствует бесчисленное количество эквивалентных уравнений состояния (8.8).

Отметим, что две матрицы A и A_1 , связанные преобразованием $A_1 = Q^{-1}AQ$ называются подобными. Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Используя линейное преобразование, можно поставить задачу о выборе при исследовании той или иной формы уравнений состояния. Наиболее часто решается задача преобразования исходной системы (8.3) к нормальной или канонической форме уравнений состояния (8.8).

Доказано, что для произвольной матрицы A всегда существует невырожденная квадратная матрица размерностью $n \times n$, которую обозначим через M и назовем *модальной*, такая, что матрица $M^{-1}AM$ будет иметь форму Жордана. Если матрица A имеет различные собственные значения (числа) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$\det[A - \lambda E] = 0, \quad (8.9)$$

то матрица $M^{-1}AM$ будет диагональной: $M^{-1}AM = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$.

Таким образом, преобразование произвольной системы уравнений (8.3) к канонической форме всегда возможно. Наиболее просто задача определения модальной матрицы решается для случая различных собственных чисел матрицы A , которые обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Для каждого собственного числа λ_i находится собственный вектор $x^i = \text{col}[x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i]$ из решения векторно-матричного уравнения

$$[A - \lambda_i E]x^i = 0. \quad (8.10)$$

Матрица, образованная вектор-столбцами x^i , т. е. матрица

$$M = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^1 & x_n^2 & \cdot & \cdot & \cdot & x_n^n \end{bmatrix}, \quad (8.11)$$

и будет искомой модальной матрицей.

В соответствии с (8.9) при $\lambda = \lambda_i$ определитель системы линейных уравнений (8.10) равен нулю, т. е. система имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых можно принять за собственный вектор. Отсюда матрица M является неединственной.

В случае кратных собственных значений матрицы A задача определения модальной матрица значительно усложняется.

В частности, если исходная матрица A является матрицей Фробениуса вида

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

и собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, являющиеся корнями характеристического уравнения

$$\det[A - \lambda E] = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (8.13)$$

различны, то модальная матрица будет иметь следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

33. Передаточная и весовая матрицы

Наряду с переходной матрицей состояния при описании и исследовании линейных многомерных систем находят применение матричные аналоги обычных передаточных функций одномерных систем.

Применим к уравнениям (8.27) преобразование Лапласа, полагая $x(0) = 0$, тогда получим $X(s) = AX(s) + BV(s)$, $Y(s) = CX(s)$ или, исключая из уравнений вектор $X(s)$, получим

$$Y(s) = C[sE - A]^{-1}BV(s) = W(s)V(s). \quad (8.38)$$

Передаточной матрицей (матричной передаточной функцией) $W(s) = C[sE - A]^{-1}B$ будем называть матрицу размерности $p \times m$, связывающую изображение вектора входа $V(s)$ и вектора выхода $Y(s)$.

Элементами передаточной матрицы $W_{ij}(s)$ являются обычные скалярные передаточные функции, связывающие i -й выход $Y_i(s)$ с j -м входом $V_j(s)$ при условии, что все остальные входы равны нулю. Передаточная функция $W_{ij}(s)$ есть отношение двух полиномов относительно s . Полином знаменателя является для всех $W_{ij}(s)$ одним и тем же и равен $\det[sE - A]$ (степень его n), а полиномы числителя будут степени не выше $(n - 1)$.

В уравнении (8.33) будем полагать $x(0) = 0$. Внесем матрицу C под знак интеграла и запишем это уравнение в виде

$$y = \int_0^t C\Phi(t - \tau)Bv(\tau)d\tau = \int_0^t w(t - \tau)v(\tau)d\tau. \quad (8.39)$$

Матрицу $w(t) = C\Phi(t)B$ размерностью $p \times m$ будем называть *весовой матрицей (импульсной переходной матрицей)*.

Смысл её такой же, как и у весовой функции скалярной системы. Элементы $w_{ij}(t)$ матрицы $w(t)$ являются скалярными весовыми функциями. Если j -й вход $v_j(t) = \delta(t)$, а остальные входы равны нулю, то $y_i(t) = w_{ij}(t)$.

Передаточная и весовая матрицы связаны между собой преобразованием Лапласа

$$W(s) = L\{w(t)\}, \quad w(t) = L^{-1}\{W(s)\}. \quad (8.40)$$

Частотные характеристики системы в многомерном случае не нашли широкого применения. Хотя формально сделав в $W(s)$ замену $s = j\omega$, можно ввести аналогичные понятия и рассматривать $p \times m$ обычных скалярных частотных характеристик $W_{ij}(j\omega)$.

Если уравнения (8.27) описывают одномерную систему, то $v, y \in R$, $B = \text{col}[b_1, \dots, b_n]$, $C = [c_1, \dots, c_n]$. В этом случае $W(s) = C[sE - A]^{-1}B$, $w(t) = C\Phi(t)B$ будут скалярными функциями.

34. Устойчивость, управляемость и наблюдаемость линейных систем

Рассмотрим линейную систему, описываемую уравнениями (8.27). Устойчивость процессов в системе можно рассматривать по отношению к тем или иным переменным, характеризующим систему. Очевидно, из (8.27) следует, что поведение системы можно рассматривать по отношению к переменным состояниям x_i (вектору состояния x) или к выходным переменным y_i (вектору выхода y). Процессы в системе могут быть устойчивы по отношению к одной группе переменных и неустойчивы по отношению к другой. Чаще всего рассматривают устойчивость по отношению к переменным состояниям $x(t)$. За исключением особых случаев это будет справедливо и по отношению к вектору выхода y .

Закон изменения вектора состояния $x(t)$ определяется выражением (8.32). В случае линейной системы устойчивость процессов в ней зависит только от поведения свободной составляющей $\Phi(t)x(0)$, обусловленной начальным значением вектора состояния, т. е. составляющей

$$x(t) = \Phi(t)x(0). \quad (8.41)$$

Пусть корни характеристического уравнения системы

$$\det[A - \lambda E] = 0, \quad (8.42)$$

соответствующего системе (8.27), будут все различные $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тогда переходная матрица состояния $\Phi(t)$ представима в виде (8.34), где M – модальная матрица, элементы которой не зависят от времени. В этом случае (8.41) запишем в виде

$$x(t) = M \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] M^{-1} x(0). \quad (8.43)$$

Процессы в системе автоматического управления по отношению к переменным состояниям x_i будут асимптотически устойчивы, если при любом начальном значении $x(0)$ свободная составляющая (8.43) с течением времени затухает, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Процессы в системе будут просто устойчивы, если $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, неустойчивы, если хотя бы для одной координаты $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \infty$.

В соответствии с тремя рассматриваемыми случаями будем говорить об асимптотически устойчивой, устойчивой (нейтральной или находящейся на границе устойчивости) и неустойчивой линейных системах.

Из приведенных определений и анализа выражения (8.43) следует, что система будет асимптотически устойчивой, если все действительные части корней λ_i строго отрицательны, т. е. $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$. Система будет просто устойчивой, если $\text{Re } \lambda_i \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, и неустойчивой, если для некоторого корня $\text{Re } \lambda_i > 0$.

Наличие кратных корней не меняет полученных результатов относительно асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Таким образом, необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (8.27) является отрицательность действительных частей всех корней характеристического уравнения (8.42), т.е. все $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i = 1, \dots, n$.

Если в (8.42) раскрыть определитель, то в результате получим уравнение $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$, где a_i определяются через элемент a_{ij} матрицы A .

К последнему уравнению обычным путем можно применить известные критерий устойчивости (Гурвица, Рауса, Михайлова и т.п.).

Прежде чем сформулировать в общем виде понятия, связанные с управляемостью и наблюдаемостью систем, рассмотрим частный случай. Пусть система управления с одним входом и одним выходом описывается уравнениями состояния

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad y = Cx, \quad (8.44)$$

где A – $n \times n$ матрица; $B = \text{col}[b_1, \dots, b_n]$; $C = [c_1, \dots, c_n]$, $x \in R^n$, $y, v \in R$.

Предположим, что матрица A имеет различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Сделаем в (8.44) замену $x = Mz$, где M – модальная матрица размерностью $n \times n$. В результате приходим к канонической форме уравнений состояния

$$\dot{z} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]z + B'v, \quad y = C'z, \quad (8.45)$$

где $B' = \text{col}[b'_1, \dots, b'_n]$, $C' = [c'_1, \dots, c'_n]$, $B' = M^{-1}B$, $C' = CM$.

Скалярный элемент b'_i получается перемножением i -й строки матрицы M^{-1} на столбец B , а элемент c'_i – перемножением строки C на i -ю строку матрицы M .

Уравнения (8.45) запишем в скалярном виде:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + b'_i v, \quad y = c'_1 z_1 + \dots + c'_n z_n, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.46)$$

На рис. 8.5 по уравнениям (8.46) построена схема моделирования.

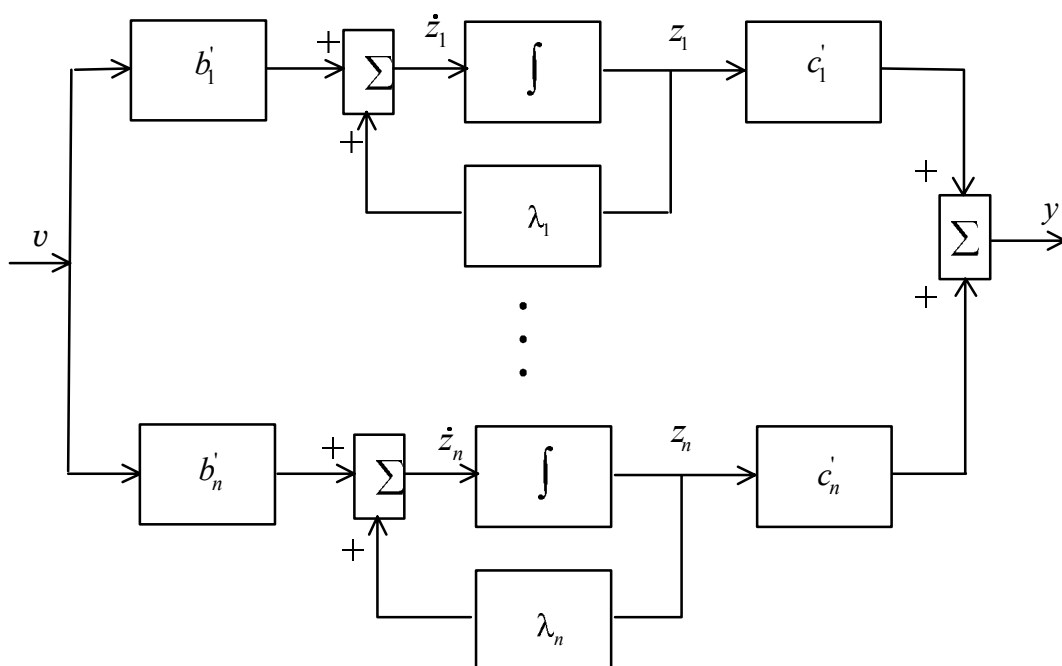


Рис. 8.5

Из этого рисунка следует, что внутренняя структура системы представляет параллельное соединение n однотипных ветвей, соответствующих каждому характеристическому числу.

Если все b'_i отличны от нуля, то с помощью входного сигнала v можно влиять на все координаты z_i (управлять ими). Однако при определенных условиях в зависимости от значений элементов матриц M^{-1} и B могут возникнуть случаи, когда один или несколько коэффициентов b'_i будут равны нулю. Тогда одна или несколько координат z_i не будут зависеть от входного сигнала v , не будут им управляться, т. е. соответствующая цепь оказывается разорванной по входу.

Аналогичная картина может наблюдаться по отношению к выходу y . Если все c'_i отличны от нуля, то в выходном сигнале присутствуют (наблюдаются) все координаты z_i . Если же один или несколько коэффициентов c'_i равны нулю, то соответствующие переменные состояния не могут быть измерены или не наблюдаются. В данном случае имеем разрыв во внутренней структуре системы на выходе соответствующих цепей.

Из рассмотренного примера, в частности, следует, что система, описываемая уравнениями (8.44), будет полностью управляемой и полностью наблюдаемой, если все элементы матриц $B' = M^{-1}B$, $C' = CM$ будут отличны от нуля.

Коэффициенты b'_i определяются коэффициентами матрицы B и собственными числами матрицы A , т. е. фактически коэффициентами матрицы A . Отсюда следует, что управляемость системы зависит только от пары матриц A и B . Аналогично наблюдаемость будет зависеть от пары матриц A и C .

Если система полностью управляема и наблюдаема, то порядок передаточной функции системы $W(s) = C[sE - A]^{-1}B$ будет совпадать с порядком дифференциального уравнения в (8.44) и будет равен n . В случае неполной управляемости или наблюдаемости порядок передаточной функции будет меньше, чем n . Этот результат следует из структуры (см. рис. 8.5), так как в этом случае в части каналов нет связи между v и y . Например, если b'_i или c'_i равны нулю, то порядок передаточной функции будет $(n - 1)$, хотя порядок системы (8.44) равен n . Отсюда следует, что передаточная функция характеризует только полностью управляемую и наблюдаемую часть системы.

Рассмотрим теперь свойства устойчивости системы в связи с ее управляемостью и наблюдаемостью. Пусть, например, $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$, а все остальные $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i = 2, \dots, n$. В этом случае по отношению к координатам x_i (то же самое z_i) система неустойчива. Если в этом случае система не наблюдаема по координате z_1 ($c'_1 = 0$), то $y = c'_2 z_2 + \dots + c'_n z_n$ и неустойчивая координата не влияет на выход системы. По отношению к выходу система будет вести себя как устойчивая. Отсюда следует, что если система полностью наблюдаема, то устойчивость по отношению к переменным состояниям (иногда ее называют внутренней устойчивостью) будет совпадать с устойчивостью по отношению к выходной координате (внешней устойчивостью). В случае ненаблюдаемой системы это условие может не выполняться.

Будем полагать, что уравнения (8.44) описывают объект управления. Регулятор, управляющий этим объектом (выход регулятора это сигнал v), формирует сигнал управления, используя выходной сигнал y . Пусть объект управления является неустойчивым $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ и неуправляемым ($b'_1 = 0$) по координате z_1 , тогда какой бы регулятор мы не применили, с помощью обратной связи и регулятора невозможно сделать систему устойчивой, так как разорвана на входе первая цепь. Говорят, что в этом случае объект является не стабилизируемым.

Дадим более строгие определения управляемости и наблюдаемости линейной системы (8.44) общего вида, т. е. в (8.44) будем полагать $x \in R^n$, $y \in R^p$, $v \in R^m$ – матрицы соответствующих размерностей. Обозначим значения вектора состояния $x(t_0)$ при t_0 , $x(t_1)$ $t = t_1$, $t_1 > t_0$.

Система (8.44) называется *полностью управляемой*, если для любых моментов времени t_0 и t_1 и любых заданных состояний $x(t_0)$ и $x(t_1)$ существует управление $v(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), переводящее начальное состояние $x(t_0)$ в конечное $x(t_1)$.

Состояние $x(t)$ системы (8.44) называется *наблюдаемым*, если в момент наблюдения $t = t_0$ можно однозначно определить по данным измерения $y(t)$ и $v(t)$ на конечном интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$, $t_1 > t_0$. Система (8.44) называется *полностью наблюдаемой*, если наблюдаемы все ее состояния в любые моменты времени.

Американским ученым Р. Калманом были предложены критерии управляемости и наблюдаемости. Вводятся в рассмотрение матрица управляемости $K_Y = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B]$ и матрица наблюдаемости $K_H = [C^T : A^T C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T]$.

Матрица K_Y имеет размерность $n \times nt$, а матрица K_H – размерность $n \times np$, символ T означает операцию транспонирования матрицы.

Столбцами матрицы K_Y являются столбцы матриц $B, AB, \dots, A^{n-1}B$. Аналогично столбцы матрицы K_H – это столбцы матриц $C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T$. Если уравнения (8.44) описывают одномерную систему, то $m = p = 1$ и K_Y, K_H будут квадратными матрицами размерности $n \times n$.

Критерий управляемости и наблюдаемости. Система (8.44) является полностью управляемой только тогда, когда ранг матрицы управляемости равен n , и полностью наблюдаемой только тогда, когда ранг матрицы наблюдаемости равен n .

Напомним, что под рангом матрицы понимается максимальный порядок ее минора, отличного от нуля.

35. Корректирующие устройства

Любое устройство, включаемое в систему управления с целью изменения ее свойств для обеспечения заданных показателей качества, можно рассматривать как корректирующее. По способу включения корректирующие устройства делятся на *последовательные, параллельные, встречно-параллельные (местные обратные связи)*, которые соответственно представлены на рис. 9.1, а, б, в. Обозначим передаточную функцию последовательного корректирующего устройства $W_{K_1}(s)$, параллельного $W_{K_2}(s)$ и встречно-параллельного $W_{K_3}(s)$.

При отсутствии корректирующего устройства любого типа передаточная функция разомкнутой системы, как это видно из рис. 9.1, будет равна $W_0(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)$. Включение корректирующего устройства изменяет передаточную функцию прямой цепи, которая соответственно для рис. 9.1, а, б, в будет иметь следующий вид:

$$W(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s)W_{K_1}(s), \quad (9.1)$$

$$W(s) = W_1(s)[W_2(s) + W_{K_2}(s)]W_3(s), \quad (9.2)$$

$$W(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_2(s)W_{K_3}(s)}. \quad (9.3)$$

Приравнивая попарно соотношения (9.1) – (9.3), можно найти связь одного типа коррекции с любым другим и выбрать нужный тип коррекции, исходя из технических возможностей.

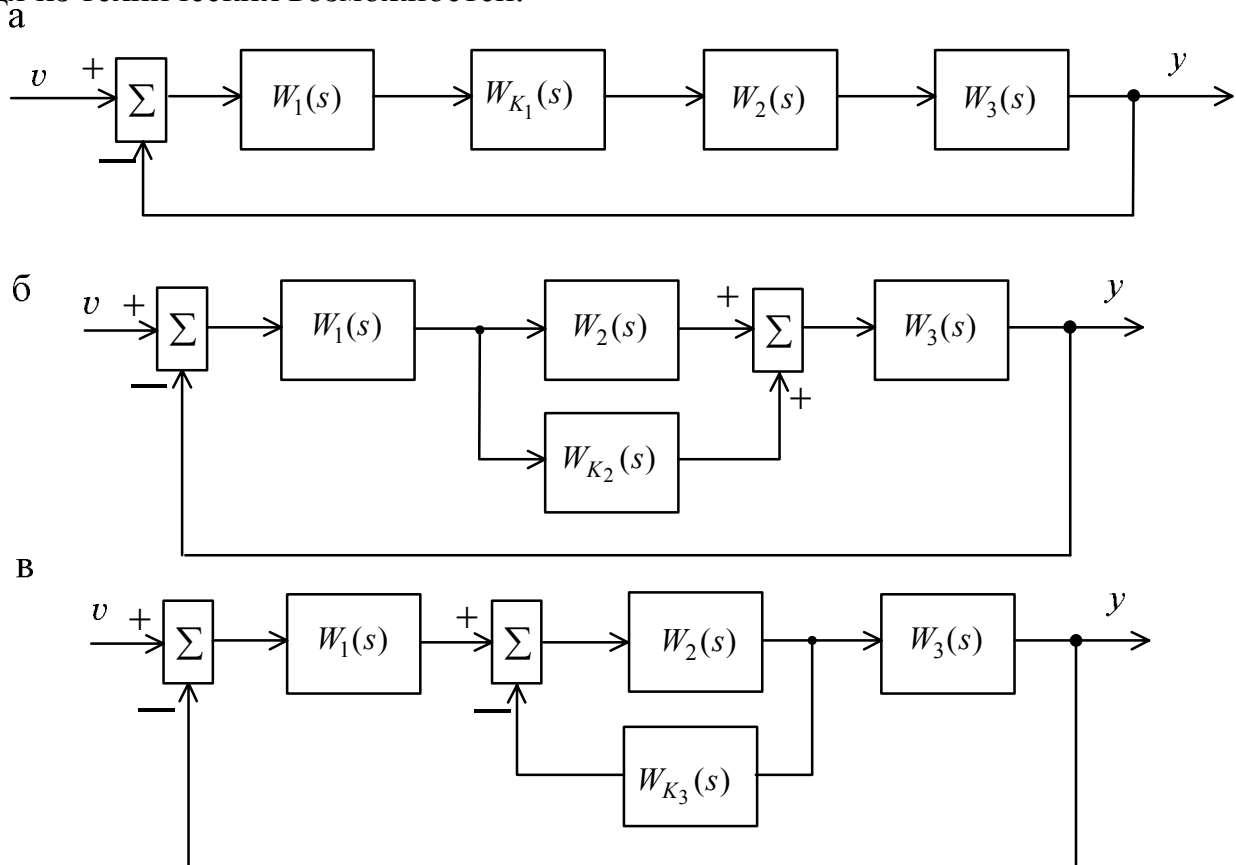


Рис. 9.1

9.2.1. Последовательные корректирующие устройства. Последовательные корректирующие устройства включаются в прямую цепь системы управления в соответствии с рис. 9.1, а.

При последовательной коррекции передаточная функция разомкнутой скорректированной системы будет равна $W(s) = W_{K_1}(s)W_0(s)$. Выбором передаточной функции $W_{K_1}(s)$ можно добиться требуемой передаточной функции $W(s)$, обеспечивающей желаемые свойства системы.

Последовательная коррекция часто применяется для обеспечения заданной точности системы. В этом случае передаточная функция корректирующего устройства выбирается в виде $W_{K_1}(s) = \frac{K_1}{s^v}$, т. е. в прямую цепь системы вводится усилительное звено с коэффициентом усиления K_1 и интегрирующее звено с передаточной функцией $\frac{1}{s^v}$, так что $W_{K_1}(s) = \frac{K_1 W_0(s)}{s^v}$. Выбор величин K_1 и v обусловлен необходимой точностью системы в установившихся режимах. Пусть исходная система статическая $W_0(s) = \frac{K_0 N(s)}{L(s)}$ и требуется, чтобы

она имела статическую ошибку $e_y^o = 0$ и скоростную ошибку $e_y' \leq A$. В соответствии с результатами подразд. 6.1 требуется, чтобы скорректированная система обладала астатизмом первого порядка, а общий коэффициент усиления

$K = K_0 K_1$ был выбран из условия $e_y' = \frac{v_1}{K} \leq A$, откуда $K \geq \frac{v_1}{A}$, где величина

v_1 задана. Таким образом, параметры корректирующего устройства

$W_{K_1}(s) = \frac{K_1}{s^v}$ следует выбрать из условия $K_1 \geq \frac{v_1}{AK_0}$, $v = 1$.

В случае задания точности системы при обработке гармонического сигнала требуемый общий коэффициент усиления $K = K_0 K_1$ (и соответственно величина K_1) и порядок астатизма можно найти аналогично, если воспользоваться выражениями (6.17), (6.19).

Наряду с использованием последовательных корректирующих устройств для повышения точности эти устройства могут использоваться и для улучшения показателей качества системы. В этом случае в соответствии с выражением (9.1) выбором $W_{K_1}(s)$ изменяют среднечастотную часть исходной частотной характеристики $W_0(j\omega)$, добиваясь требуемой частотной характеристики $W(j\omega)$.

Последовательные корректирующие устройства в виде пассивных или активных четырехполюсников обычно включаются после устройства сравнения или между каскадами предварительного усилителя. При этом применяют устройства с отставанием по фазе, с опережением по фазе и с отставанием и опережением по фазе.

На рис. 9.2, а представлены частотные характеристики системы при коррекции с отставанием по фазе. Здесь $L(\omega)$ – ЛАХ исходной системы, $L_{жс}(\omega)$ – ЛАХ желаемой (скорректированной) системы, $L_{К1}(\omega)$ – ЛАХ корректирующего устройства. На рис. 9.2, б изображена цепочка, реализующая эту коррекцию. Комплексная передаточная функция корректирующего устройства равна:

$$W_{K1}(j\omega) = \frac{(1 + j\omega\alpha T)}{(1 + j\omega T)}, \quad T = (R_1 + R_2)C, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{T}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\alpha T}. \quad (9.4)$$

Эта коррекция приводит к повышению устойчивости, подавлению высокочастотных помех, но к снижению быстродействия.

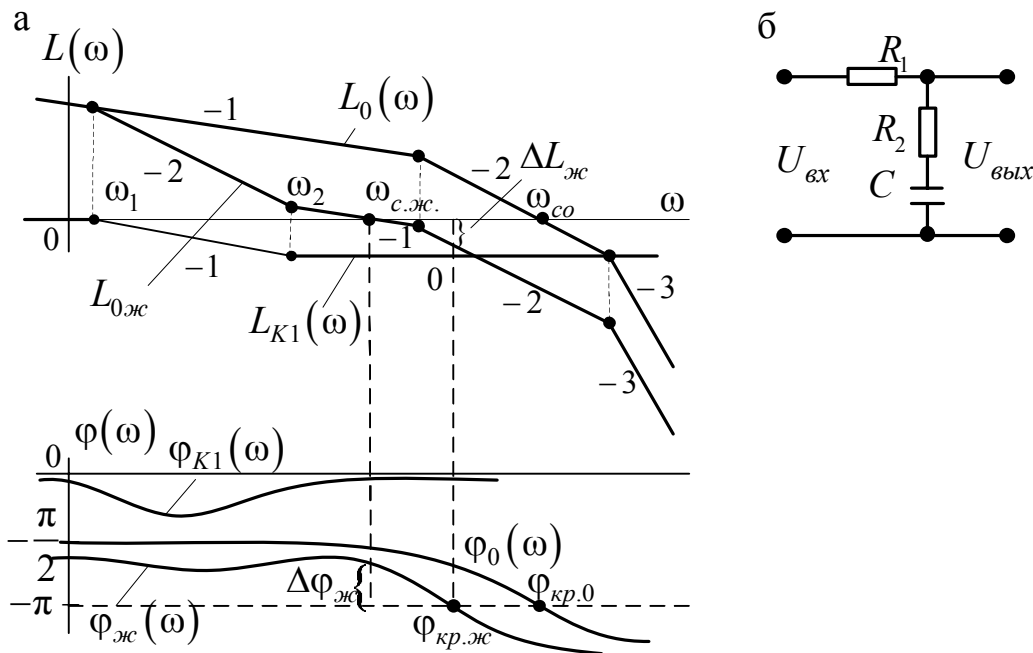
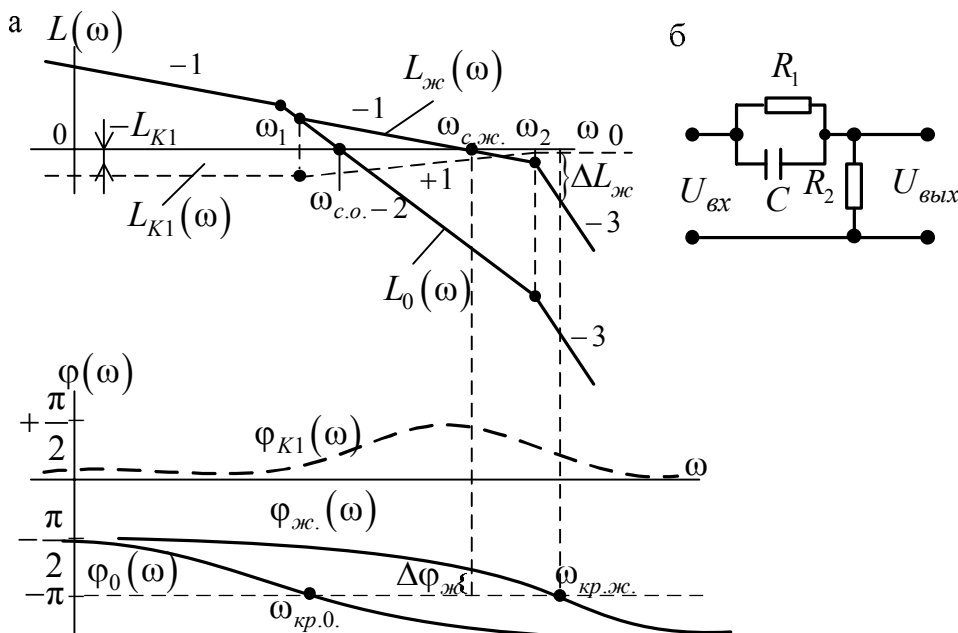


Рис. 9.2

На рис. 9.3 изображены частотные характеристики и цепочка при коррекции с опережением по фазе. Надо помнить, что цепочка вносит ослабление $L_1(\omega)$, которое необходимо скомпенсировать.



Комплексная передаточная функция корректирующего устройства равна:

$$W_{K1}(j\omega) = \alpha \frac{(1 + j\omega T)}{(1 + j\alpha\omega T)}, \quad T = R_1 C, \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \omega = \frac{1}{T}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\alpha T}. \quad (9.5)$$

Эта коррекция приводит к повышению устойчивости и быстродействия, но к снижению помехоустойчивости на высоких частотах.

Объединение этих двух видов коррекции позволяет расширить среднечастотную зону (рис. 9.4).

В этом случае

$$W_{K1}(j\omega) = \frac{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_4)}, \quad (9.6)$$

где $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$, $T_2 = R_1 C_1$, $T_3 = R_2 C_2$, $T_2 T_3 = T_1 T_4$, $T_1 + T_4 = T_2 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_3$.

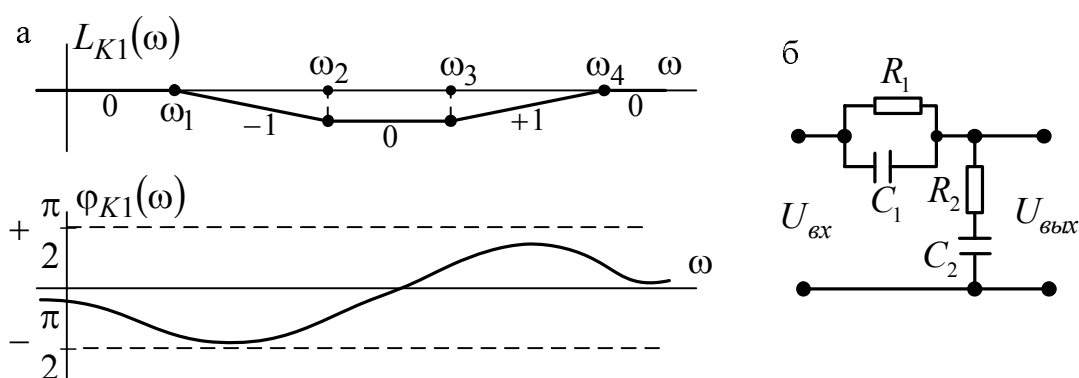


Рис. 9.4

Эта коррекция существенно улучшает качественные показатели САУ.

9.2.2. Параллельные корректирующие устройства. Одним из распространенных способов улучшения качества системы является введение производной от сигнала в прямой цепи. Пусть на рис. 9.1, б $W_2(s) = K_2$, $W_{K_2}(s) = Ts$, тогда передаточная функция прямой цепи скорректированной системы будет равна $W(s) = W_1(s)W_3(s)K_2(1 + T's) = W_0(s)(1 + T's)$, где $T' = T/K_2$.

Введение корректирующего устройства изменяет амплитудную и фазовую характеристики системы, которые примут вид

$$A(\omega) = A_0(\omega)\sqrt{1 + T'^2\omega^2}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \operatorname{arctg} T'\omega, \quad (9.7)$$

$$A_0(\omega) = |W_0(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg W_0(j\omega).$$

Из (9.7) следует, что введение производной увеличивает положительные фазовые сдвиги и позволяет при соответствующем выборе T' в диапазоне частоты среза системы «поднять» фазовую характеристику и увеличить запасы устойчивости. При этом при малых частотах вид частотных характеристик исходной и скорректированной системы не изменится. Такая коррекция часто применяется для стабилизации или демпфирования систем.

Так как реализовать звено, осуществляющее чистое дифференцирование $W_{K_2}(s) = Ts$, достаточно сложно, то используют введение производной с инерционностью, что соответствует $W_{K_2}(s) = \frac{Ts}{T_1s + 1}$. При этом эффект демпфирования несколько ослабевает.

Другой вид параллельного корректирующего устройства, находящего широкое применение, – это введение интеграла и производной от сигнала прямой цепи. Пусть $W_2(s) = K_2$, а $W_{K_2}(s) = \frac{1}{Ts}$, тогда передаточная функция прямой цепи будет равна $W(s) = W_0(s) \frac{1 + T's}{T's}$, а ее частотные характеристики

$$A(\omega) = A_0(\omega) \frac{\sqrt{1 + T'^2 \omega^2}}{T' \omega}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) - 90^\circ + \operatorname{arctg} T' \omega, \quad T' = K_2 T. \quad (9.8)$$

В системе повышается порядок астатизма на единицу и соответственно увеличивается точность. При этом путем выбора величины T' , как следует из (9.8), отрицательный фазовый сдвиг в значительной степени можно на частоте среза скомпенсировать положительным $\operatorname{arctg} T' \omega$, что позволяет обеспечить устойчивость системы.

9.2.3. Встречно-параллельные корректирующие устройства. Встречнопараллельные корректирующие устройства выполняются в виде местных обратных связей. Наиболее часто обратными связями охватывают силовую часть системы управления (исполнительные элементы и усилители мощности).

Рассмотрим общие свойства таких корректирующих устройств. Для рис. 9.1, в частотная характеристика участка, охватываемого обратной связью, имеет вид $W_2'(j\omega) = \frac{W_2(j\omega)}{1 + W_2(j\omega)W_{K_3}(j\omega)}$.

Обычно в диапазоне рабочих частот системы (в диапазоне низких частот) выполняется условие $|W_2(j\omega)W_{K_3}(j\omega)| \gg 1$ и частотная характеристика

$W_2'(j\omega) \cong \frac{1}{W_{K_3}(j\omega)}$, т. е. характеристика участка цепи, охваченного обратной

связью, определяется только видом частотной характеристики корректирующего элемента и не зависит от звена прямой цепи $W_2(s)$. В ряде случаев это позволяет скомпенсировать нежелательное влияние звена $W_2(s)$ на динамику системы, например, влияние малых нелинейностей или малого изменения параметров этого звена прямой цепи.

В зависимости от вида передаточной функции $W_{K_3}(s)$ корректирующие обратные связи делятся на *жесткие* и *гибкие*. Если звено $W_{K_3}(s)$ является статическим ($W_{K_3}(0) \neq 0$), то обратная связь называется жесткой. Если звено $W_{K_3}(s)$ является звеном дифференцирующего типа ($W_{K_3}(0) = 0$), то имеем гибкую обратную связь. Жесткая обратная связь действует как в переходных, так и в установившихся режимах, а гибкая – только в переходных.

Рассмотрим несколько частных задач коррекции с помощью обратных связей.

Пусть $W_2(s) = \frac{K_2}{Ts + 1}$, $W_{K_3}(s) = K_3$. Тогда передаточная функция участка цепи $W'_2(s)$, охваченного отрицательной обратной связью, будет иметь вид

$$W'_2(s) = \frac{K_2}{Ts + 1 + K_2K_3} = \frac{K'_2}{T's + 1}, \text{ где } K'_2 = \frac{K_2}{1 + K_2K_3}, T' = \frac{T}{1 + K_2K_3}.$$

Итак, структура звена не изменилась, оно осталось аperiodическим, но произошло уменьшение коэффициента передачи и эквивалентной постоянной времени T' . Отсюда следует, что охват в прямой цепи наиболее инерционного звена позволяет уменьшить инерционность всей цепи, что благоприятно сказывается на показателях качества системы (быстродействию, устойчивости). Уменьшение коэффициента передачи можно компенсировать введением дополнительного усилительного устройства.

Пусть $W_2(s) = K_2$, $W_{K_3}(s) = \frac{K_3}{Ts + 1}$, тогда $W'_2(s) = \frac{K'_2(Ts + 1)}{T's + 1}$, $K'_2 = \frac{K_2}{1 + K_2K_3}$, $T' = \frac{T}{1 + K_2K_3}$. В этом случае меняется тип звена. При $K_2K_3 \gg 1$, $T' \ll T$ и можно записать приближенное выражение для передаточной функции $W'_2(s) \cong K'_2(Ts + 1)$. Итак, получили эквивалентное форсирующее звено, влияние которого аналогично влиянию введения производной при параллельной коррекции.

Рассмотрим изменение свойств охваченного участка прямой цепи при охвате его гибкой обратной связью. Пусть $W_2(s) = \frac{K_2}{s(Ts + 1)}$,

$$W_{K_3}(s) = \frac{K_3s}{T_0s + 1}.$$

В этом случае передаточная функция участка цепи с обратной связью $W'_2(s) = \frac{K'(T_0s + 1)}{s(T_2^2s^2 + T_1s + 1)}$, где $K' = \frac{K_2}{1 + K_2K_3}$, $T_2^2 = \frac{TT_0}{1 + K_2K_3}$, $T_1 = \frac{T + T_0}{1 + K_2K_3}$.

Итак, при сохранении интегрирующих свойств эквивалентная передаточная функция обладает форсирующими свойствами из-за сомножителя $(T_0s + 1)$. Если сделать величину K_2K_3 достаточно большой, то малыми постоянными времени T_1 и T_2 можно пренебречь. При этом получим $W'_2(s) \cong \frac{K'(T_0s + 1)}{s}$

$K' \cong \frac{1}{K}$. В этом случае получаем в прямой цепи изодромное звено.

36. Корректирующие устройства по внешнему воздействию

При изменении передаточной функции прямой цепи с помощью последовательных, параллельных или встречно-параллельных корректирующих устройств для достижения заданных показателей качества неизменным остается главный принцип построения системы – принцип обратной связи (управление по отклонению). Учет внешнего воздействия при коррекции, в частности применение принципа компенсации (управление по возмущению) совместно с управлением по отклонению, позволяет расширить возможности коррекции системы.

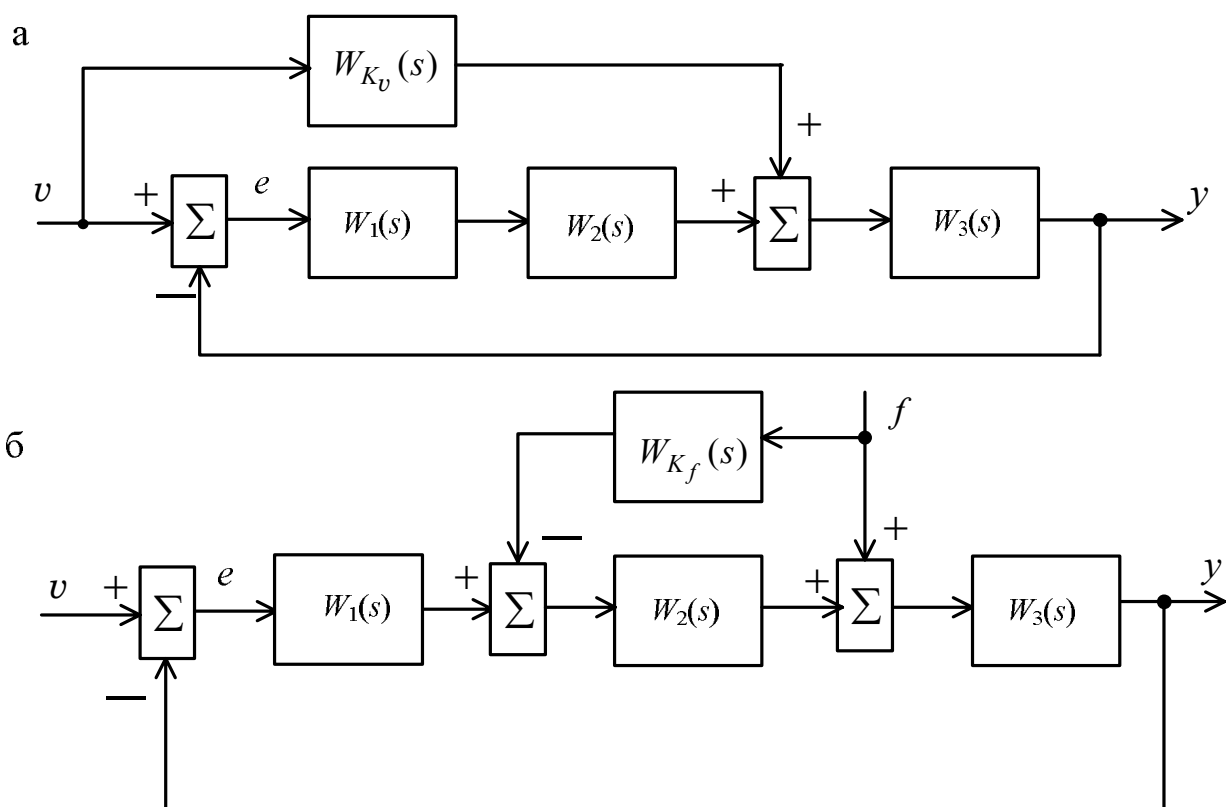
Системы, использующие как управление по отклонению, так и по возмущению, относятся к классу комбинированных систем управления (см. подразд. 1.1). Наиболее часто комбинированное управление применяется для повышения точности системы управления и уменьшения установившейся ошибки. При определенных условиях с помощью комбинированного управления можно свести установившуюся ошибку к нулю при любой форме внешнего воздействия. Такое свойство называется *инвариантностью системы* по отношению к внешнему воздействию.

На рис. 9.5, а представлена структура комбинированной системы с корректирующим устройством по управляющему воздействию, а на рис. 9.5, б – с корректирующим устройством по возмущению, где в первом случае передаточная функция корректирующего устройства обозначена через $W_{K_v}(s)$, а во втором – через $W_{K_f}(s)$.

Передаточная функция замкнутой системы без коррекции, связывающая выход y со входом v , для обоих случаев имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)}. \quad (9.9)$$

Найдем связь изображений выходного сигнала y с внешними воздействиями.



Для структуры (см. рис. 9.5, а) имеем

$$Y(s) = \frac{W_3(s)[W_{K_v}(s) + W_1(s)W_2(s)]}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)} V(s), \quad (9.10)$$

а для структуры (см. рис. 9.5, б) имеем

$$Y(s) = \frac{W_3(s)[1 - W_1(s)W_{K_f}(s)]}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)} F(s). \quad (9.11)$$

Задача любой системы автоматического управления – как можно более точно воспроизвести управляющий (полезный) сигнал $v(t)$ и максимально ослабить влияние возмущения на выходной сигнал. С этой точки зрения желательно, чтобы в (9.10) передаточная функция, связывающая $Y(s)$ и $V(s)$, была равна единице (тогда $v(t) = y(t)$), а передаточная функция в (9.11), связывающая $Y(s)$ и $F(s)$, была равна нулю (тогда $f(t)$ не влияет на $y(t)$). Выполнением этих условий будут соответственно следующие соотношения:

$$W_{K_v}(s) = \frac{1}{W_3(s)}, \quad (9.12)$$

$$W_{K_f}(s) = \frac{1}{W_2(s)}. \quad (9.13)$$

Условия (9.12), (9.13) соответствуют так называемой полной *инвариантности системы*. При выполнении (9.12) передаточная функция, связывающая ошибку e и входной сигнал v , как это нетрудно проверить, будет равна нулю, т. е. ошибка в системе не зависит (инвариантна) от управляющего сигнала и всегда равна нулю. При выполнении (9.13) выход системы y не зависит (инвариантен) от возмущения f .

Отметим, что условия (9.12), (9.13) гарантируют инвариантность соответствующих координат с точностью до свободной составляющей, т. е. процессы, вызванные начальными отклонениями соответствующих координат и их производных, компенсироваться не будут.

Сравнивая (9.9) – (9.11), приходим к выводу, что характеристическое уравнение нескорректированной системы (9.9) и скорректированных систем (9.10), (9.11) одно и то же:

$$D(\lambda) = 1 + W_1(\lambda)W_2(\lambda)W_3(\lambda) = 0, \quad (9.14)$$

т. е. коррекция по внешнему воздействию не изменяет характеристического уравнения системы и соответственно свойств устойчивости (запасов устойчивости), а также ряда других показателей качества переходных процессов.

В силу этого контур управления по отклонению, как правило, используют для придания определенных динамических свойств системе, а контуры коррекции по внешним воздействиям – для обеспечения точности.

Точное выполнение условий инвариантности (9.12), (9.13) практически невозможно из условий физической реализуемости. Действительно, если в (9.12), (9.13) передаточные функции $W_2(s)$, $W_3(s)$ соответствуют физически реализуемым звеньям, т. е. степени полиномов относительно s их числителя меньше степеней знаменателя, то передаточные функции $W_{K_v}(s)$ и $W_{K_f}(s)$, обратные им, будут соответствовать физически нереализуемым звеньям.

Поэтому (9.12), (9.13) выполняются на практике с некоторой погрешностью, в силу чего и инвариантность систем будет не полной, но ошибки в системе с помощью корректирующих устройств по внешнему воздействию могут быть значительно уменьшены.

37. Синтез САУ на основе логарифмических частотных характеристик

Общий порядок синтеза системы включает следующие этапы:

1. По виду передаточной функции исходной системы $W_0(s)$ строится ЛАХ исходной системы $L_0(\omega)$. При этом исходная система должна иметь функционально необходимые элементы и должна быть минимально-фазовой.

2. На основании требований к САУ строится желаемая ЛАХ $L_{жс}(\omega)$.

3. Путем сравнения характеристик $L_{жс}(\omega)$ и $L_0(\omega)$ определяется $L_K(\omega) = L_{жс}(\omega) - L_0(\omega)$ (если коррекция последовательная). Эту коррекцию также можно пересчитать к параллельной или встречно-параллельной.

4. По виду $L_K(\omega)$ определяется структурная схема и параметры коррекции.

5. Производится моделирование системы на ЦВМ (например в среде Matlab), уточняются параметры САУ.

6. Производится реализация коррекции с помощью регуляторов или программно.

Построение ЛАХ исходной системы не вызывает затруднений. Рассмотрим подробнее построение желаемой ЛАХ.

Учет требований точности САУ:

а) Пусть даны рабочая частота ω_p и амплитуда v_p задающего воздействия $v(t)$, а также допустимая ошибка $e_{дон}$.

Так как для низких частот $\Delta e(\omega) \cong \frac{v}{|W(j\omega)|}$, то при $\omega = \omega_p$, $v = v_p$ $W(j\omega) = W(j\omega_p)$. Тогда

$$K_v = |W(j\omega_p)| \geq \frac{v_p}{e_{дон}}. \quad (9.15)$$

б) Пусть даны \dot{v}_{\max} , \ddot{v}_{\max} , $e_{дон}$. Тогда

$$\omega_p = \frac{\ddot{v}_{\max}}{\dot{v}_{\max}}, \quad v_p = \frac{\dot{v}_{\max}^2}{\ddot{v}_{\max}}, \quad K_v = |W(j\omega_p)| \geq \frac{\dot{v}_{\max}^2}{\ddot{v}_{\max} e_{дон}}. \quad (9.16)$$

в) Пусть для астатической САУ даны $\dot{v}_{\max} = \Omega_{\max}$ и $e_{дон}$.

Тогда $\Delta e(\omega) = \frac{\omega^v}{K}$ и при $v = 1$ $\Delta e(\omega) = \frac{\omega}{K}$ и

$$K_v \geq \frac{\Omega_{\max}}{e_{дон}}. \quad (9.17)$$

Используя выражения (9.15) – (9.17), строится низкочастотная область $L_{жс}(\omega)$ (рис. 9.6).

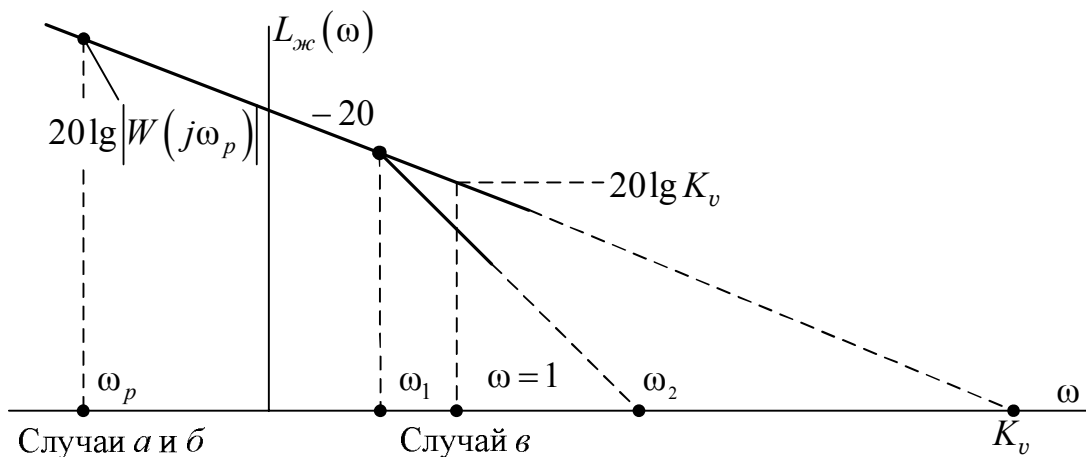


Рис. 9.6

Значение частоты $K_v \left[\frac{1}{c} \right]$ называют добротностью САУ по скорости. Первый излом $L_{жс}(\omega)$ на частоте ω_1 при однократном изломе (при изменении наклона на $-20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$) определяется как $\omega_1 = \frac{K_a}{K_v}$, где $K_a = \omega_2^2 = \frac{\Omega_{\text{max}}}{e_{\text{дон}}} \left[\frac{1}{c^2} \right]$ называют добротностью системы по ускорению; при двукратном изломе $\omega_1 = 2 \frac{K_a}{K_v}$. Учет требований качества переходного процесса: t_p , σ , колебательности, запасов устойчивости. Эти показатели учитываются при формировании среднечастотной области $L_{жс}(\omega)$. Здесь можно воспользоваться графиками (рис. 9.7, а, б).

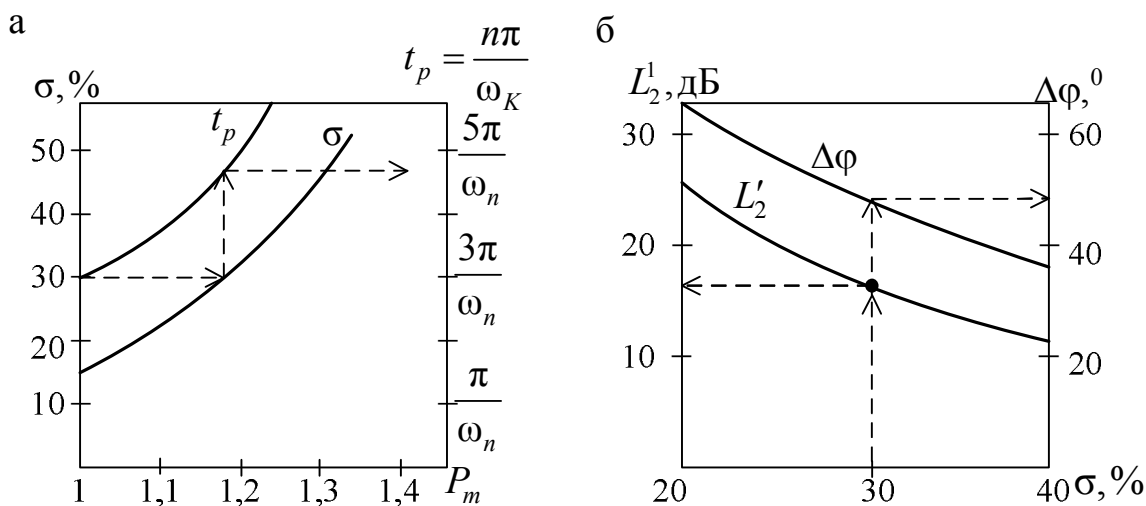


Рис. 9.7

По графику (см. рис. 9.7, а) для заданных значений σ и t_p находят ω_n и затем из соотношения $\omega_c \cong (0,6 \dots 0,9) \omega_n$ частоту среза ω_c .

Например: (как показано на рис. 9.7, а) для $\sigma = 30\%$, $t_p \approx \frac{4,7\pi}{\omega_n}$, откуда для заданного значения t_p (допустим, что оно равно 0,1 с), определяются значения $\omega_n = \frac{4,7\pi}{0,1}$ и $\omega_c \approx 0,8\omega_n \cong 128 \text{ с}^{-1}$.

По графику (см. рис. 9.7, б), где установлены зависимости $\Delta\varphi$ от γ и ординат L_1 и L_2 среднечастотной части $L_{жс}(\omega)$ от σ , находят для заданного значения σ необходимые L_1 , L_2 и $\Delta\varphi$.

Сопряжение среднечастотного участка с низкочастотным и высокочастотным (рис. 9.8) должно быть таким, чтобы была проще коррекция и изломы, по возможности, были однократными.

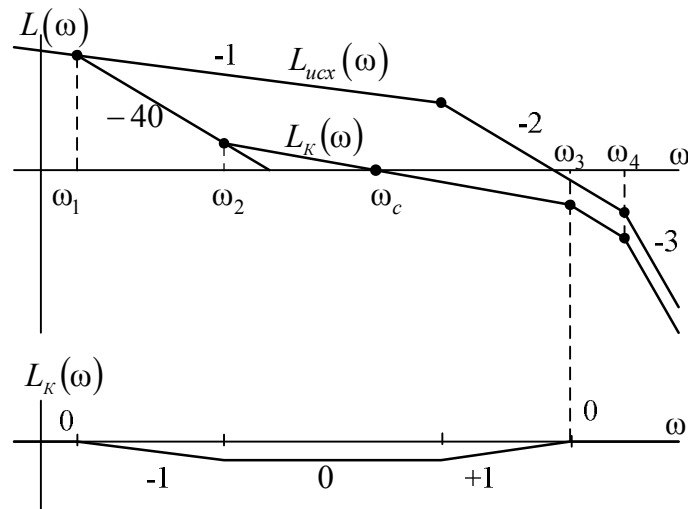


Рис. 9.8

Для облегчения процедуры синтеза коррекции вводятся типовые передаточные функции исходной системы и соответствующие им передаточные функции желаемой системы:

$K_0(s)^*$	$K_{ж}(s)$
$\frac{K_{ж}}{s(Ts+1)}$	$\frac{K_{ж}(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)}$
$\frac{K_{ж}}{s(T_1's+1)(T_2's+1)}$	$\frac{K_{ж}(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)}$
$\frac{K_{ж}}{s(T_1's+1)(T_2's+1)(T_3's+1)}$	$\frac{K_{ж}(T_2s+1)}{s(T_1s+1)(T_3s+1)(T_4s+1)(T_5s+1)}$

* $K_0 = K_{ж}$ с учётом требований по точности; $T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > T_5$.

Остановимся на коррекции. Вычитая из $L_{эс}(\omega)$ ординаты $L_0(\omega)$, получим $L_K(\omega)$. Вид ЛАХ коррекции соответствует случаю коррекции с опережением и отставанием по фазе.

Передаточная функция коррекции будет с учётом обеспечения показателей точности иметь вид

$$W_K(s) = K_K \frac{(T_2s + 1)(T_3s + 1)}{(T_1s + 1)(T_4s + 1)}, \quad (9.18)$$

где $T_1 = \frac{1}{\omega_1}$, $T_2 = \frac{1}{\omega_2}$, $T_3 = \frac{1}{\omega_3}$, $T_4 = \frac{1}{\omega_4}$, $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$; $K_K = \frac{K_v}{K_0}$, причём K_0 – коэффициент передачи исходной системы.

Так как реализовать дифференцирующие звенья сложно, переходят к схеме коррекции с использованием интеграторов. Для этого необходимо представить (9.18) в виде

$$W_K(s) = K_K \frac{T_2T_3s^2 + (T_2 + T_3)s + 1}{T_1T_4s^2 + (T_1 + T_4)s + 1} = \frac{K_K}{T_1T_4} \frac{T_2T_3s^2 + (T_2 + T_3)s + 1}{s^2 + \frac{T_1 + T_4}{T_1T_4}s + \frac{1}{T_1T_4}}.$$

Схема реализации коррекции представлена на рис. 9.9.

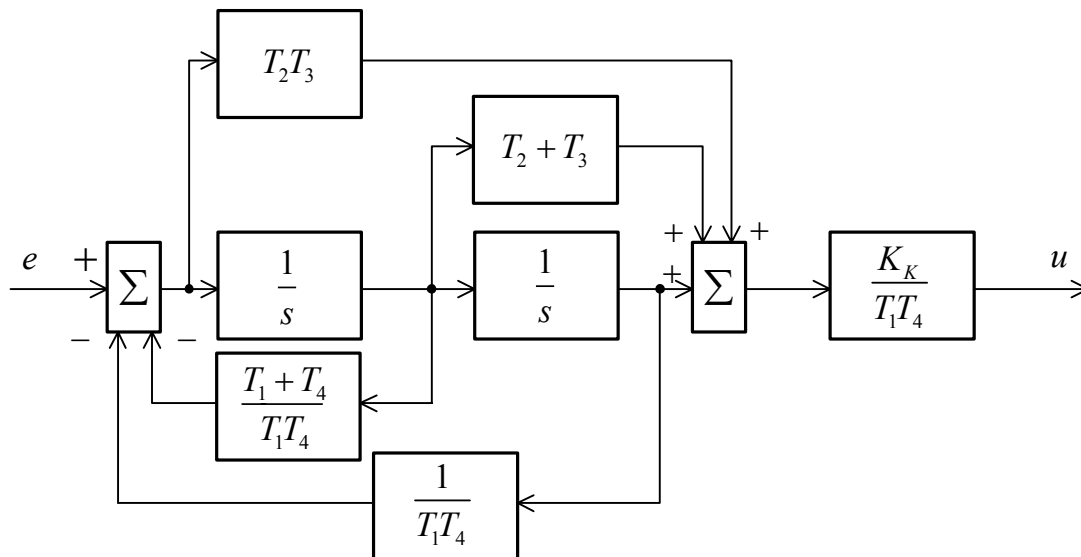
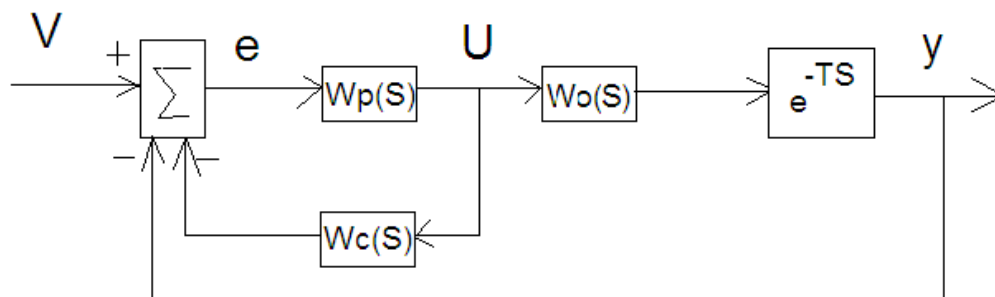


Рис. 9.9

38. Синтез САУ с запаздыванием

Пусть ОУ обладает запаздыванием, т.е. имеет передаточную функцию $\omega_0 e^{-\tau S}$.



Сначала рассчитывают регулятор $w_p(S)$ без учета чистого запаздывания (учитывают объект с $w_0(S)$), только потом учитывают чистое запаздывание, при учете включают так называемый регулятор Смита в местную обратную связь.

$$\omega_c(S) = \omega_0(S) - \omega_0(S)e^{-\tau S}$$

Запишем передаточную функцию разомкнутой системы:

$$\omega(S) = \frac{\omega_p(S)\omega_0(S)e^{-\tau S}}{1 + \omega_p(S)\omega_c(S)} = \frac{\omega_p(S)\omega_0(S)e^{-\tau S}}{1 + \omega_p(S)[\omega_0(S) - \omega_0(S)e^{-\tau S}]}$$

Получим передаточную функцию замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \Phi(S) &= \frac{\omega_p(S)\omega_0(S)e^{-\tau S}}{1 + \omega_p(S)\omega_0(S) - \omega_p(S)\omega_0(S)e^{-\tau S} + \omega_p(S)\omega_0(S)e^{-\tau S}} \\ &= \frac{\omega_p(S)\omega_0(S)e^{-\tau S}}{1 + \omega_p(S)\omega_0(S)} \end{aligned}$$

Устойчивость системы не зависит от элемента чистого запаздывания.

При условии $\omega_p(S)\omega_0(S) \gg 1$:

$$\Phi(S) = e^{-\tau S}$$

$h_3(t) = 1(t - \tau)$ - скачок подали на вход, на выходе скачок со смещением (сдвигом) на τ

39 Модальный метод синтеза (метод размещения полюсов)

Рассмотрим САУ с одним входом и одним выходом, будем считать $v = 0$. Пусть модель объекта имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu, \\ y &= CX. \end{aligned} \quad (9.19)$$

При этом методе синтеза закон управления выражается формулой

$$u = -KX, \quad (9.20)$$

где K – вектор коэффициентов $[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$.

Структура замкнутой САУ приведена на рис. 9.10.

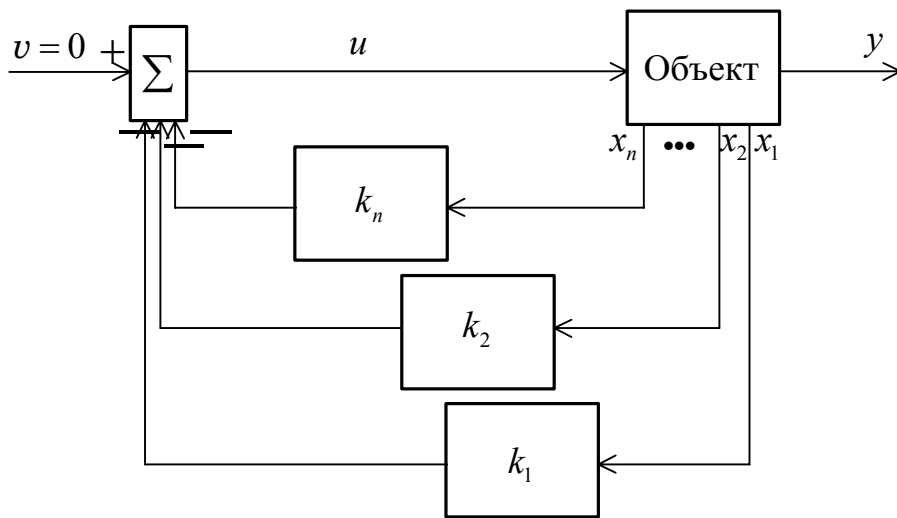


Рис. 9.10

Так как $v = 0$, то назначение САУ поддерживать значение $y = 0$. Такую САУ называют регулятором состояния.

Рассмотрим пример спутника (рис. 9.11) с передаточной функцией $\frac{1}{s^2}$ [6].

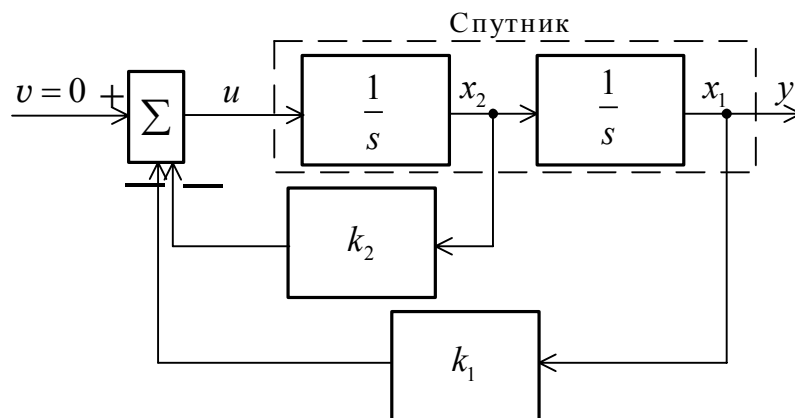


Рис. 9.11

Модель объекта (спутника) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \text{ или } \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Для замкнутой САУ, где $u = -KX$, имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \end{cases} \text{ или } \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} X = A_3 X, \quad (9.21)$$

где A_3 – матрица коэффициентов замкнутой САУ.

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид

$$|\lambda E - A_3| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ k_1 & \lambda + k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 = 0. \quad (9.22)$$

Пусть корни его будут $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$, тогда характеристическое уравнение желаемой замкнутой системы имеет вид

$$D_{\text{ж}}(\lambda) = \lambda^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2 = 0. \quad (9.23)$$

Синтез системы заключается в выборе k_1 и k_2 в (9.22), которые бы соответствовали коэффициентам уравнения (9.23), т. е. :

$$\begin{aligned} k_1 &= \lambda_1 \lambda_2, \\ k_2 &= \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Рассмотрим общий принцип синтеза САУ.

Пусть

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad (9.25)$$

$$u = -KX, \quad K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]. \quad (9.26)$$

Подставляя (9.26) в (9.25), получим

$$\dot{X} = AX - BKX = (A - BK)X = A_3 X. \quad (9.27)$$

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид

$$|\lambda E - A_3| = |\lambda E - A + BK| = 0. \quad (9.28)$$

Если корни $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$, то желаемое характеристическое уравнение замкнутой САУ будет иметь вид

$$D_{\text{ж}}(\lambda) = (\lambda + \lambda_1)(\lambda + \lambda_2) \dots (\lambda + \lambda_n) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0. \quad (9.29)$$

Приравнивая (9.28) и (9.29), имеем

$$|\lambda E - A + BK| = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n. \quad (9.30)$$

В этом уравнении n неизвестных (k_1, k_2, \dots, k_n), но они могут быть найдены путем приравнивания коэффициентов при λ в одинаковых степенях.

Пусть передаточная функция объекта будет иметь вид

$$W_0(s) = \frac{b_0 s^{n-1} + b_1 s^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad a_0 = 1. \quad (9.31)$$

Уравнения состояния при $y = x_1, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, \dots$ имеют вид

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \quad y = [b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad \dots \quad b_0] X. \quad (9.32)$$

Матрица A является фробениусовой, а уравнение объекта соответствует нормальной форме.

При законе модального уравнения $u = -KX$ для замкнутой САУ в

матрице $A - BK$ член $BK = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1 & k_2 & & k_n \end{bmatrix}$. Матрица

$$A_3 = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n - k_1 & \dots & \dots & \dots & -a_1 - k_n \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой САУ имеет вид

$$[\lambda E - A + BK] = \lambda^n + (a_1 + k_n) \lambda^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + k_2) \lambda + (a_n + k_1) = 0.$$

Желаемое характеристическое уравнение замкнутой САУ будет

$$D_{\mathcal{K}}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0.$$

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

40. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Основные понятия

Дискретной называется система, в состав которой помимо непрерывных динамических звеньев входит хотя бы один элемент, производящий квантование непрерывного сигнала в дискретный.

Если сигнал определен лишь в некоторые, чаще всего равностоящие, дискретные моменты времени t_0, t_1, \dots, t_k , то такой сигнал будем называть квантованным (дискретным) по времени и обозначать $f(t_k)$. Существенно, что между моментами квантования сигнал не определен. Величину $T = t_k - t_{k-1}$ называют периодом или шагом квантования. Такую систему называют импульсной.

Примерами импульсных систем могут служить системы радио- и оптической локации, системы с частотными датчиками.

Если сигнал принимает строго определенные значения (уровни) f_0, f_1, \dots, f_i , то такой сигнал называется квантованным по уровню. Величину $\Delta_f = f_i - f_{i-1}$ называют шагом квантования по уровню. Систему в этом случае называют релейной.

Благодаря простоте реализации и приемлемому качеству работы релейные системы получили широкое распространение в бытовой технике, например, системы регулирования температуры в холодильных и электронагревательных приборах.

Наконец, возможен случай сигнала, квантованного по времени и уровню одновременно, т. е. сигнал определен в дискретные моменты времени t_0, t_1, \dots, t_k и может принимать только определенные значения f_0, f_1, \dots, f_i . Такая система называется цифровой.

К цифровым системам относятся системы автоматического управления, в замкнутый контур которых включается цифровое вычислительное устройство, что позволяет реализовать сложные алгоритмы управления. Включение цифрового вычислительного устройства в контур системы управления сопряжено с преобразованием непрерывных величин в дискретные на входе и с обратным преобразованием на выходе.

Развитие дискретных систем обусловлено постоянно повышающимися конструктивными, эксплуатационными и метрологическими требованиями к управлению. Например, в современных электромеханических системах требуется обеспечивать перемещение со скоростью достигающей 0,5 м/с, поддерживать эту скорость с погрешностью около 1%. Погрешность позиционирования при этом не должна превышать 1–2 мкм. Аналоговая система управления не может обеспечить таких показателей из-за инерционности и дрейфа нуля

операционных усилителей, на которых, как правило, реализуются устройства управления. Кроме того, при изменении режима работы системы необходимо перестраивать параметры регулятора, а возможно и менять саму структуру системы управления. Эта операция требует значительных затрат времени, а, следовательно, ведет к снижению производительности оборудования.

В дискретных системах отсутствует дрейф нуля, они обладают более высокой помехозащищенностью и устойчивостью к возмущениям, имеют меньшие габариты и вес. Закон управления в них реализуется программно, что позволяет быстро перестраивать параметры регуляторов, а при необходимости и их структуру. Применение микропроцессоров в дискретных системах также позволяет расширить функции управления, например, организовать тестовый контроль за работой элементов системы, своевременно обнаружить тенденцию к нарушению работоспособности элементов системы, указать место «отказа» системы, учесть физические ограничения элементов.

В то же время расчет и проектирование цифровых дискретных систем требуют более четкой постановки ряда задач: тщательной разработки алгоритмов управления, грамотного выбора аппаратных средств для их реализации, создания собственных систем команд и архитектуры вычислительных средств, проектирования средств программного обеспечения.

1.2. Классификация импульсных систем

Как было отмечено, характерной особенностью импульсных систем автоматического управления (ИСАУ) является то, что хотя бы одна из переменных является квантованной по времени. Эти квантованные по времени величины при помощи импульсной модуляции преобразуются в последовательность импульсов, которые в дальнейшем воздействуют на непрерывную часть системы. Процесс квантования и импульсной модуляции осуществляется импульсным элементом. Импульсную систему в общем случае можно представить в виде импульсного элемента (ИЭ) и непрерывной части (НЧ) (рис. 1.1).

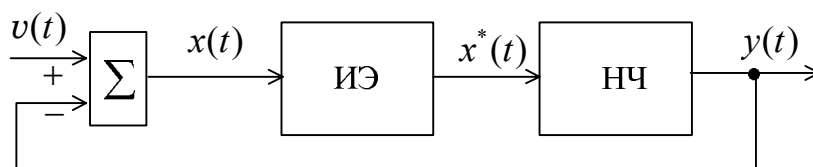


Рис. 1.1. Типовая структурная схема ИСАУ: $v(t)$ – входной сигнал; $x(t)$ – сигнал рассогласования, входной сигнал ИЭ; $x^*(t)$ – импульсный сигнал с выхода ИЭ; $y(t)$ – выходной сигнал

Импульсный элемент преобразует непрерывно изменяющуюся величину $x(t)$ в последовательность модулированных импульсов $x^*(t)$, осуществляя при этом квантование сигнала (рис. 1.2, а) и модуляцию (рис. 1.2, б).

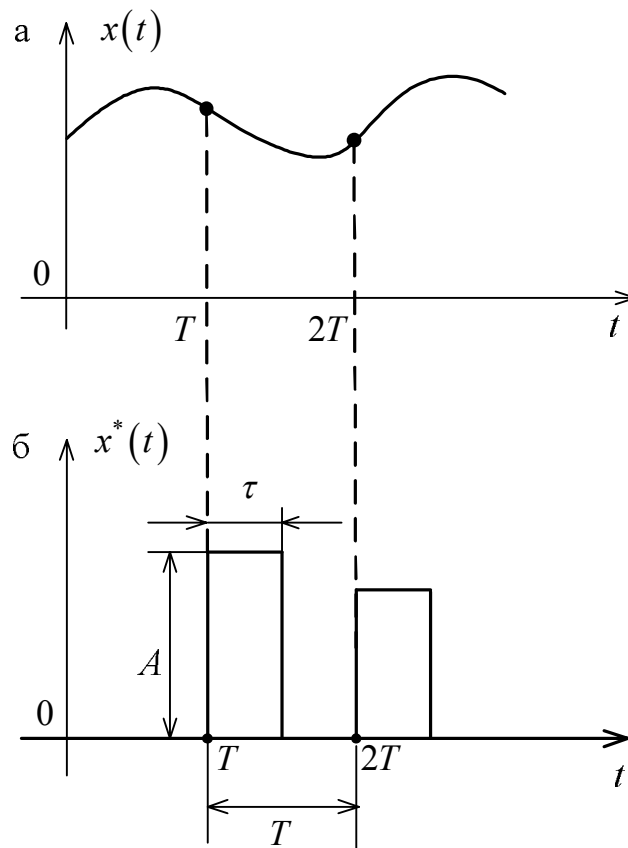


Рис. 1.2. Временные диаграммы работы ИЭ

Процесс импульсной модуляции состоит в изменении по определенному закону какого-либо параметра периодически повторяющихся импульсов.

Величина, определяющая закон модуляции, называется модулирующей величиной.

Основными параметрами импульсной последовательности являются:

A – амплитуда (высота) импульса;

τ – длительность (ширина) импульса;

T – период квантования (повторения, дискретности);

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – частота повторения.

В зависимости от того, какой параметр последовательности импульсов изменяется, различают следующие виды импульсной модуляции:

1. Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ), при которой амплитуда импульса пропорциональна входному сигналу;

2. Широтно-импульсная модуляция (ШИМ), при которой длительность импульса пропорциональна входному сигналу;

3. Время-импульсная модуляция (ВИМ), включающая в себя фазо-импульсную модуляцию ФИМ, когда фаза или временной сдвиг импульса относительно начала периода дискретности T пропорциональна входному сигналу, и частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ) – частота дискретности пропорциональна входному сигналу.

Кроме того, различают два рода импульсной модуляции. Если параметры последовательности импульсов изменяются в зависимости от значений модулирующей величины в фиксированные равноотстоящие друг от друга моменты времени, то такой вид модуляции называется импульсной модуляцией первого рода. Если же параметры последовательности импульсов изменяются в соответствии с текущим значением модулирующей величины, то такой вид модуляции называется импульсной модуляцией второго рода.

Нетрудно показать, что только ИСАУ с АИМ–I являются линейными, поскольку амплитуда выходных импульсов ИЭ пропорциональна значению входного сигнала в дискретные моменты времени (рис. 1.3).

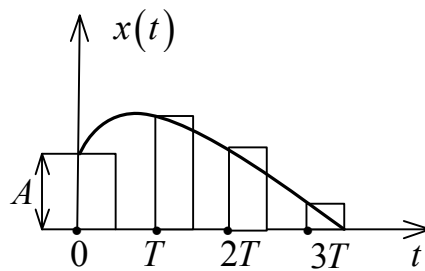


Рис. 1.3. Выходной сигнал ИЭ с АИМ-I

При других видах модуляции из-за ограниченности ширины импульса τ при ШИМ или его сдвига при ВИМ в пределах периода дискретизации T наступает насыщение ИЭ, что свидетельствует о его нелинейности.

41. Решетчатые функции и разностные уравнения

Под решетчатыми (рис. 2.2) понимают функции дискретного аргумента, определяемые в дискретные промежутки времени kT , где $k=0, 1, 2, 3, \dots$, а T – период дискретизации:

$$f(kT) = f(t)|_{t=kT} \text{ или } f(k) = f(t)|_{t=k, T=1}. \quad (2.2)$$

Значения дискретной функции в моменты $t = kT$ называют дискретами.

Употребляют и смещенные решетчатые функции $f(kT, T)$ или $f(k, \varepsilon)$, где

$$\varepsilon = \frac{\Delta T}{T} \leq 1.$$

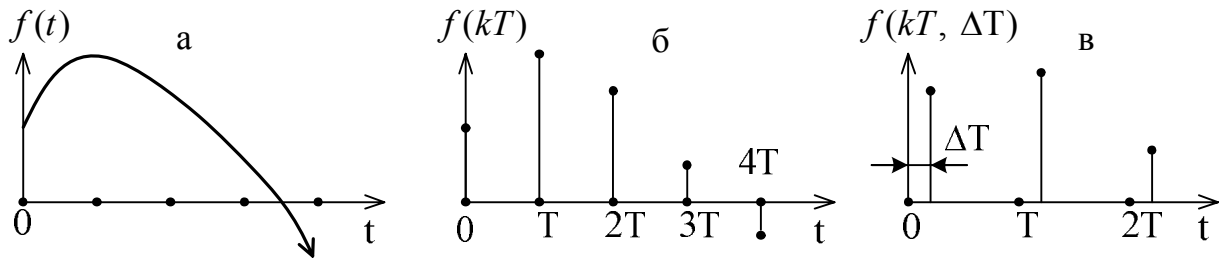


Рис. 2.2. Непрерывная функция – а, решетчатая функция – б, смещенная решетчатая функция – в

Надо иметь ввиду, что по непрерывной функции легко находится решетчатая. Обратная же задача, т.е. формирование по решетчатой функции непрерывной – неоднозначна, т.к. неизвестны промежуточные значения решетчатой функции.

Аналог первой производной непрерывной функции для решетчатой функции есть первая разность (разность 1-го порядка) (рис. 2.3.):

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k). \quad (2.3)$$

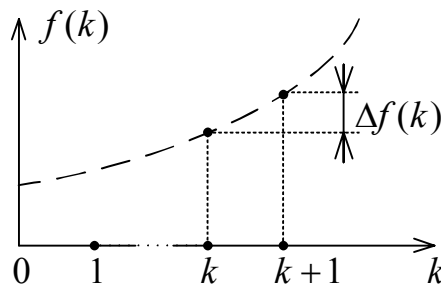


Рис. 2.3. Определение разности решетчатой функции

Вторая разность представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(k) &= \Delta f(k+1) - \Delta f(k) = f(k+2) - f(k+1) - \{f(k+1) - f(k)\} = \\ &= f(k+2) - 2f(k+1) + f(k),\end{aligned}$$

n -ая разность

$$\Delta^n f(k) = \Delta^{n-1} f(k+1) - \Delta^{n-1} f(k) = \sum_{i=0}^n C_n^i f(k+n-i) (-1)^i, \quad (2.4)$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ (число сочетаний).

Аналогом интеграла является сумма

$$F_{\Sigma}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} f(i) = f(0) + f(1) + \dots + f(k-1). \quad (2.5)$$

Разность от суммы вычисляется по формуле

$$\Delta F_{\Sigma}(k) = F_{\Sigma}(k+1) - F_{\Sigma}(k) = f(k). \quad (2.6)$$

Выражение, связывающее решетчатую функцию и ее разности на выходе дискретного устройства и на его входе, называют уравнением в конечных разностях. Для устройства n -го порядка это уравнение в общем виде может быть записано так:

$$\alpha_0 \Delta^n y(k) + \alpha_1 \Delta^{n-1} y(k) + \dots + \alpha_n y(k) = \beta_0 \Delta^m v(k) + \beta_1 \Delta^{m-1} v(k) + \dots + \beta_m v(k), \quad (2.7)$$

где $m < n$, $y(k)$ – сигнал выхода, $v(k)$ – сигнал входа устройства.

В рекуррентном виде (при переходе от конечных разностей к значениям решетчатых функций) получают разностные уравнения вида (2.8):

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 v(k+m) + b_1 v(k+m-1) + \dots + b_m v(k), \quad (2.8)$$

где $a_l = \sum_{i=0}^l (-1)^{l-i} \alpha_i c_{n-i}^{l-i}$, а $c_{n-i}^{l-i} = \frac{(n-i)!}{(l-i)!(n-l)!}$;

$b_l = \sum_{i=0}^l \beta_i c_{m-i}^{l-i}$, а $c_{m-i}^{l-i} = \frac{(m-i)!}{(l-i)!(m-l)!}$

42. Дискретное преобразование Лапласа и его свойства

Аналогом преобразования Лапласа для непрерывных функций $f(t)$ является дискретное преобразование Лапласа для решетчатых функций $f(k)$.

Прямое дискретное преобразование

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)e^{-skT}, \quad (2.9)$$

обратное дискретное преобразование

$$f(k) = \frac{1}{j\omega_0} \int_{c-j\frac{\omega_0}{2}}^{c+j\frac{\omega_0}{2}} F^*(s)e^{skT} ds. \quad (2.10)$$

где $F^*(s)$ называют изображением решетчатой функции $f(k)$, а функцию $f(k)$ – оригиналом.

В выражениях (2.9), (2.10) s – комплексная переменная, c – абсцисса абсолютной сходимости, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ – частота дискретизации.

В символической записи формулы (2.9), (2.10) представляют в виде:

$$F^*(s) = D\{f(k)\}, \quad (2.11)$$

$$f(k) = D^{-1}\{F^*(s)\}. \quad (2.12)$$

Чтобы избавиться от нерациональности функции $F^*(s)$ из-за наличия множителя e^{sT} , её преобразуют в рациональную путём замены переменных по формуле

$$e^{sT} = z; \quad s = \frac{1}{T} \ln z. \quad (2.13)$$

Таким образом,

$$F(z) = Z\{f(k)\} = F^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}, \quad (2.14)$$

$$f(k) = Z^{-1}\{F^*(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint F^*(z)z^{k-1} dz. \quad (2.15)$$

При использовании в теории дискретных систем z -преобразования следует помнить, что z -преобразование выходного сигнала линейной системы определяет значения временной функции только в момент квантования (т.е. не содержит информацию о значениях функции между моментами квантования).

Кроме того, передаточная функция непрерывной системы должна иметь количество полюсов, по крайней мере, на один большее, чем количество нулей, что в реальных системах практически всегда выполняется.

Для перехода к z -преобразованию используют специальные таблицы. Приведем наиболее часто используемые преобразования (табл. 2.1.).

Таблица 2.1 – Преобразование Лапласа и z -преобразование

Непрерывная функция		Решетчатая функция	
Оригинал	Преобразование Лапласа	Оригинал	z -преобразование
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{(kT)^2}{2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{Tz}{z-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-akT}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$	$\sin bkT$	$\frac{z \sin bt}{z^2 - 2z \cos bT + 1}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$	$\cos bkT$	$\frac{z(z - \cos bT)}{z^2 - 2z \cos bT + 1}$

Отметим основные свойства z -преобразования.

Свойство линейности

$$af(k) \rightarrow aF(z); f_1(k) + f_2(k) \rightarrow F_1(z) + F_2(z). \quad (2.16)$$

Теоремы сдвига (упреждения и запаздывания)

Упреждение иллюстрируется рис. 2.4. и вычисляется по формуле:

$$Z\{f(k+1)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)z^{-k} = f(1)z^{-0} + f(2)z^{-1} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} f[k]z^{-(k-1)} = z \sum_{k=1}^{\infty} f(k)z^{-k}.$$

Прибавив и вычтя в правой части $f(0)$, получим

$$Z\{f(k+1)\} = z[F(z) - f(0)]. \quad (2.17)$$

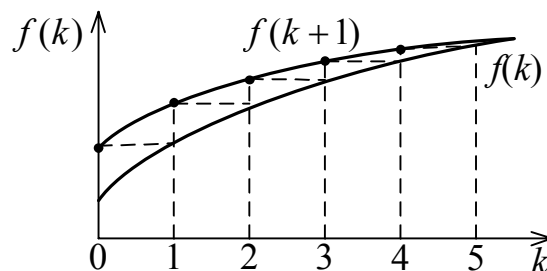


Рис. 2.4. К теореме об упреждении

При нулевых начальных условиях $f(0) = 0$ и

$$Z \{ f(n+1) \} = zF(z) \quad (2.18)$$

При упреждении на 2 такта и нулевых начальных условиях

$$Z \{ f(k+2) \} = z^2 F(z).$$

При упреждении на m тактов получают

$$Z \{ f(k+m) \} = z^m F(z). \quad (2.19)$$

Аналогично получают формулы для вычисления запаздывания (рис. 2.5).

$$\begin{aligned} Z \{ f(k-1) \} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k-1)z^{-k} = 0 \cdot z^{-0} + f(0)z^{-1} + f(1)z^{-2} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-(k+1)} = z^{-1}F(z), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} Z \{ f[k-2] \} &= z^{-2}F(z), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$Z \{ f[k-m] \} = z^{-m}F(z).$$

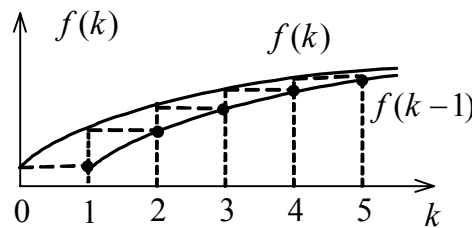


Рис. 2.5. К теореме запаздывания

Изображение разностей

При нулевых начальных условиях

$$Z \{ \Delta f(k) \} = Z \{ f(k+1) \} - Z \{ f(k) \} = zF(z) - F(z) = (z-1)F(z). \quad (2.22)$$

$$\dots \dots \dots Z \{ \Delta^m f(k) \} = (z-1)^m F(z). \quad (2.23)$$

Изображение сумм

Так как разность от суммы $\Delta F_{\Sigma}(k) = f(k)$, то изображение будет $Z \{ \Delta F_{\Sigma}(k) \} = F(z)$. В силу (2.22) $Z \{ \Delta F_{\Sigma}(k) \} = (z-1)Z \{ F_{\Sigma}(k) \}$ и окончательно получим

$$Z \{ F_{\Sigma}(k) \} = \frac{F(z)}{z-1}. \quad (2.24)$$

Для суммы m -го порядка

$$Z \{ F_{\Sigma}^m(k) \} = \frac{F(z)}{(z-1)^m}. \quad (2.25)$$

Конечное значение решетчатой функции

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z). \quad (2.26)$$

Начальное значение решетчатой функции

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Свёртка решетчатых функций

Если $Z \{ f_1(k) \} = F_1(z)$ и $Z \{ f_2(k) \} = F_2(z)$, то

$$F_1(z) \cdot F_2(z) = Z \left\{ \sum_{v=0}^k f_1(v) f_2(k-v) \right\} = Z \left\{ \sum_{v=0}^k f_2(v) f_1(k-v) \right\}. \quad (2.27)$$

Формула обращения

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z) z^{k-1} dz = \sum_{v=1}^l \operatorname{Res}_{z_v} F(z) z^{k-1}. \quad (2.28)$$

Интегрирование ведется по окружности радиуса $R > |z_v|_{\max}$, где z_v – полюсы функции $F(z)$, а $z = z_v$ – вычет в точке для простых полюсов

$$\operatorname{Res}_{z_v} F(z) z^{k-1} = \lim_{z \rightarrow z_v} (z - z_v) F(z) z^{k-1}. \quad (2.29)$$

Формула разложения

а) Пусть $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{zA_0(z)}{B(z)}$, корни знаменателя простые, степень числителя меньше степени знаменателя, тогда

$$f(k) = \sum_{v=1}^n \frac{A_0(z_v)}{B(z_v)} z_v^k, \quad (2.30)$$

где z_v – корни знаменателя.

б) Пусть $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, нулевого корня числителя нет, степень числителя меньше степени знаменателя, тогда

$$f(k) = \sum_{v=1}^n \frac{A(z_v)}{B(z_v)} z_v^{k-1}, \quad k \geq 1. \quad (2.31)$$

в) Пусть $F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ степень числителя равна степени знаменателя, тогда разделив $A(z)$ на $B(z)$ получим

$$F(z) = f(0) + \frac{A_0(z)}{B(z)},$$

т.е. приходим к случаю б).

В общем случае (в том числе при кратных корнях) можно воспользоваться методом разложения $F(z)$ на простые дроби.

Разложение в ряд Лорана

Так как $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$, то разложив $F(z)$ в ряд Лорана по убывающим степеням z путем деления числителя $F(z)$ на знаменатель, получим $F(z) = c_0 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots$. Сравнив два ряда, имеем

$$f(0) = c_0, f(1) = c_1, f(2) = c_2, \dots \quad (2.32)$$

43. Передаточные функции и схемы моделирования дискретных систем

Пусть дискретная система описывается разностным уравнением n -го порядка общего вида

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 v(k) + b_1 v(k-1) + \dots + b_m v(k-m). \quad (2.34)$$

Подвергнув его z -преобразованию, получим при нулевых начальных условиях

$$a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 V(z) + b_1 z^{-1} V(z) + \dots + b_m z^{-m} V(z). \quad (2.35)$$

Откуда

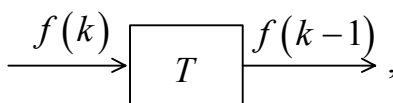
$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (2.36)$$

Выражение (2.36) является дискретной передаточной функцией.

Дискретную передаточную функцию можно получить и из разностного уравнения (2.8), подвергнув его z -преобразованию, в виде:

$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.37)$$

Моделирование дискретных систем производится по аналогии с непрерывными. Вместо интегратора используется регистр сдвига



осуществляющий задержку на период дискретизации T . В остальном принцип составления модели такой же, как и в непрерывной системе. Схема модели разностного уравнения (2.34) или передаточной функции (2.36) изображена на рис. 2.7. Отметим, что эта схема не единственная, возможны и другие конфигурации.

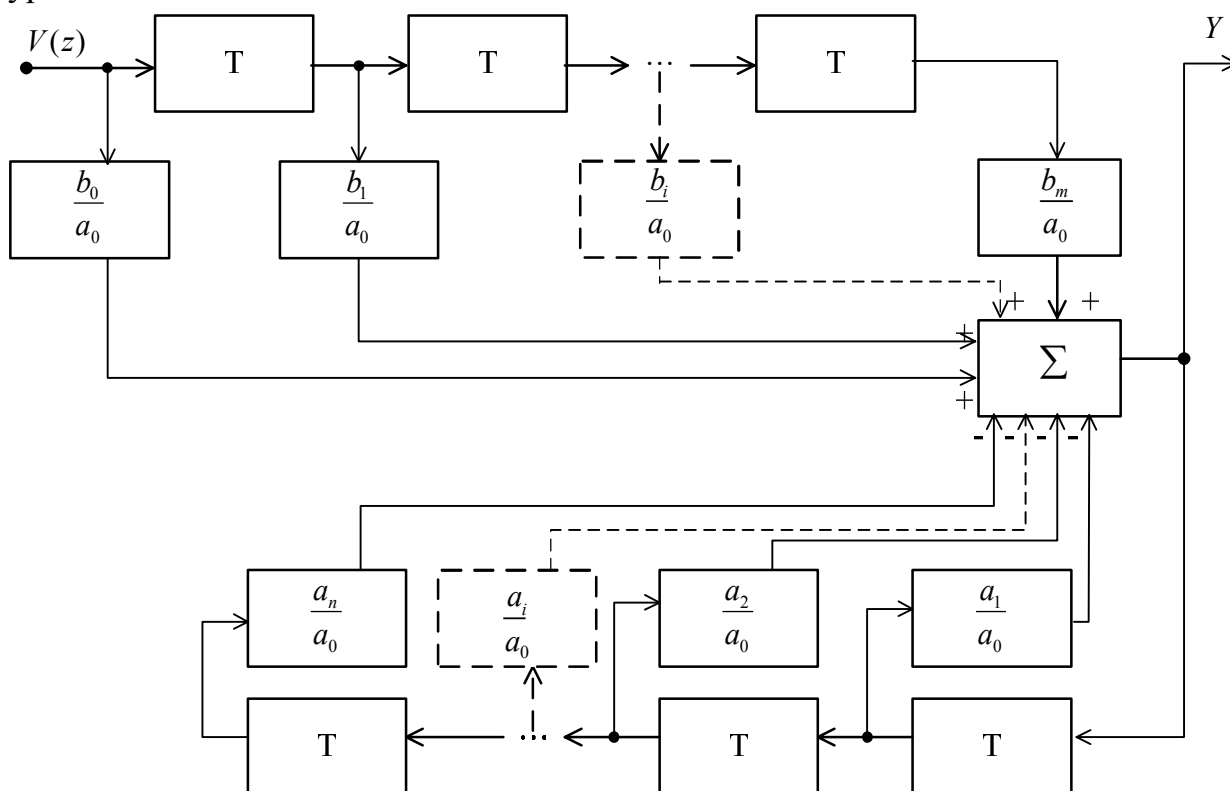


Рис. 2.7. Схема моделирования (2.34) или (2.36)

44 . Представление данных в импульсной системе

Рассмотрим систему, представленную на рис. 1.1. В этой структуре импульсный элемент (ИЭ), как отмечалось ранее, осуществляет квантование сигнала и модуляцию. Естественно, при квантовании непрерывного сигнала происходит потеря информации, поскольку значения квантованного сигнала известны только для дискретных моментов времени. Для уменьшения потери информации после квантователя вводят устройство восстановления данных, называемое фиксатором. Его назначение – преобразовать квантованный сигнал

в непрерывный, близкий исходному. Наиболее распространен фиксатор нулевого порядка, запоминающий квантованный сигнал на весь период квантования T .

Реальный импульсный элемент объединяет квантователь и фиксатор, которые отдельно не существуют. Сигналы ИЭ и его схематическое изображение показаны на рис. 2.8.

$$\bar{x}(t) = x(0)[1(t) - 1(t - T)] + x(T)[1(t - T) - 1(t - 2T)] + x(2T)[1(t - 2T) - 1(t - 3T)] + \dots$$

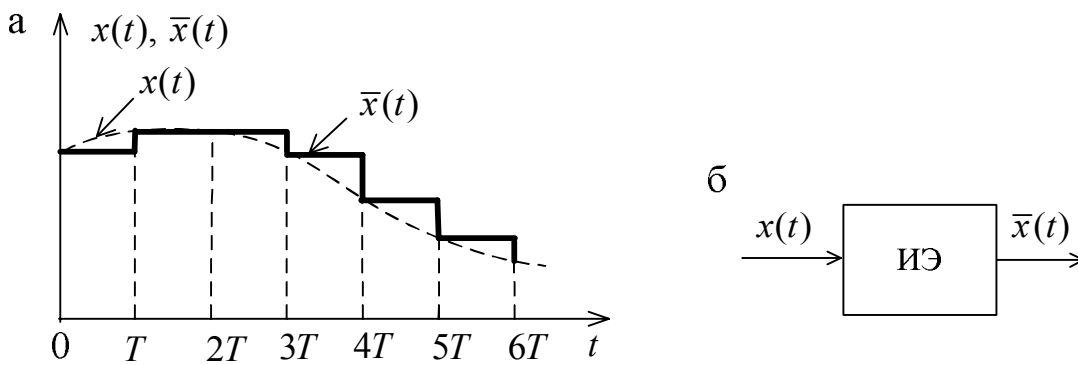


Рис. 2.8. Сигнал ИЭ (а), изображение ИЭ (б)

Подвергнув это выражение преобразованию Лапласа, получим

$$\begin{aligned} \bar{X}(s) &= x(0) \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-Ts}}{s} \right] + x(T) \left[\frac{e^{-Ts}}{s} - \frac{e^{-2Ts}}{s} \right] + x(2T) \left[\frac{e^{-2Ts}}{s} - \frac{e^{-3Ts}}{s} \right] + \dots = \\ &= [x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \dots] \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \right] \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Выражение в квадратных скобках описывает операцию квантования непрерывного сигнала, а второй множитель – фиксацию (восстановление), что эквивалентно изображению ИЭ на рис. 2.9. Другими словами: импульсный элемент состоит из идеального импульсного элемента (квантователя) – ключа и фиксатора с передаточной функцией $\frac{1 - e^{-Ts}}{s}$.

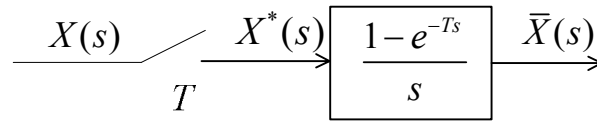


Рис. 2.9. Изображение ИЭ

Рассмотрим математическую модель идеального импульсного элемента, в котором $X^*(s)$ (назовем дискретным преобразованием Лапласа сигнала $x(t)$) определяется выражением

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} . \quad (2.39)$$

Взяв обратное преобразование Лапласа от (2.39), получаем математическую модель идеального импульсного элемента во временной плоскости:

$$x^*(t) = L^{-1}\{X^*(s)\} = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t - T) + x(2T)\delta(t - 2T) + \dots \quad (2.40)$$

Здесь $\delta(t - kT)$ – единичная импульсная функция, существующая в моменты времени $t = kT$, а $x^*(t)$ – последовательности δ -функций с весами, равными значениям исходного непрерывного сигнала в дискретные моменты времени kT . Однако (2.39) и (2.40) – это лишь модели идеального ИЭ. Реальный ИЭ – это совокупность квантователя (идеального импульсного элемента) и фиксатора (формирующего устройства).

45. Частотные свойства дискретного преобразования

Дискретное преобразование (преобразование со звездочкой) представляют и в других формах.

Полезно следующие представление:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + jk\omega_s) + \frac{f(0)}{2} \quad (2.41)$$

или

$$F^*(s) = \frac{1}{T} [F(s) + F(s + j\omega_s) + F(s + j2\omega_s) + F(s - j\omega_s) + F(s - j2\omega_s) + \dots] + \frac{f(0)}{2},$$

где $\omega_s = 2\pi / T$ – частота квантования в рад./с.

Отметим основные свойства этого преобразования.

1. $F^*(s)$ – периодическая функция переменной s с периодом $j\omega_s$, т. е.

$$F^*(s) = F^*(s + j\omega_s). \quad (2.42)$$

В силу (2.39) $F^*(s + j\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kT(s+j\omega_s)}$.

$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$; $e^{-j\omega_s kT} = e^{-j\frac{2\pi}{T}kT} = e^{-jk2\pi} = 1$ на основании формулы Эйлера, поскольку $e^{-j2\pi k} = \cos 2k\pi - j\sin 2k\pi = 1$.

Значит, $F^*(s + j\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} e^{-jkT\omega_s} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} = F^*(s)$, что и требовалось доказать.

бывалось доказать.

2. Если функция $F(s)$ имеет полюс $s = s_1$, то $F^*(s)$ имеет полюсы $s = s_1 + jm\omega_s$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Положение нулей $F^*(s)$ также обладает периодичностью с периодом $j\omega_s$ (рис. 2.10). На рисунке нули обозначены кружками, а полюсы – крестиками. Из рисунка видно, что нули и полюсы присутствуют в основной и дополнительной полосах бесконечное число раз. От этого недостатка можно избавиться заменой $e^{sT} = z$, тогда отрезок мнимой оси плоскости s от $-\frac{\omega_s}{2}$ до $\frac{\omega_s}{2}$ перейдет в окружность единичного радиуса на плоскости z (рис. 2.11).

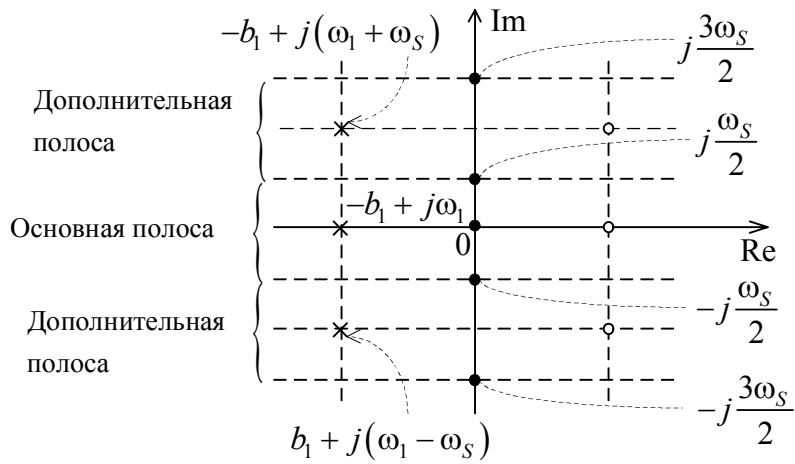


Рис. 2.10. Расположение полюсов и нулей $F^*(s)$

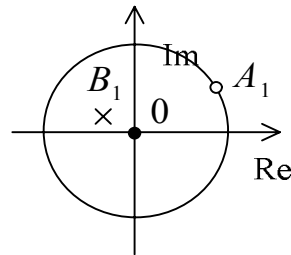


Рис. 2.11. Расположение полюсов и нулей $F(z)$

При этом все точки левой полуплоскости плоскости s , соответствующие периодически повторяющимся, например, полюсам, переходят в одну точку внутри круга плоскости z (точка B_1), а все точки правой полуплоскости, соответствующие также периодически повторяющимся, например, нулям, переходят в одну точку вне круга плоскости z (точка A_1).

3. Если сигналы с амплитудными спектрами, приведенными на рис. 2.12, а подвергаются квантованию, то амплитудный спектр $F_1^*(j\omega)$ будет такой, как на рис. 2.12, б и $F_2^*(j\omega)$ как на рис. 2.12, в. Другими словами, при идеальном фильтре восстановление сигнала возможно, при неидеальном – невозможно. Под идеальным фильтром понимается фильтр с единичным коэффициентом усиления в полосе пропускания и с нулевым коэффициентом усиления – за ее пределами.

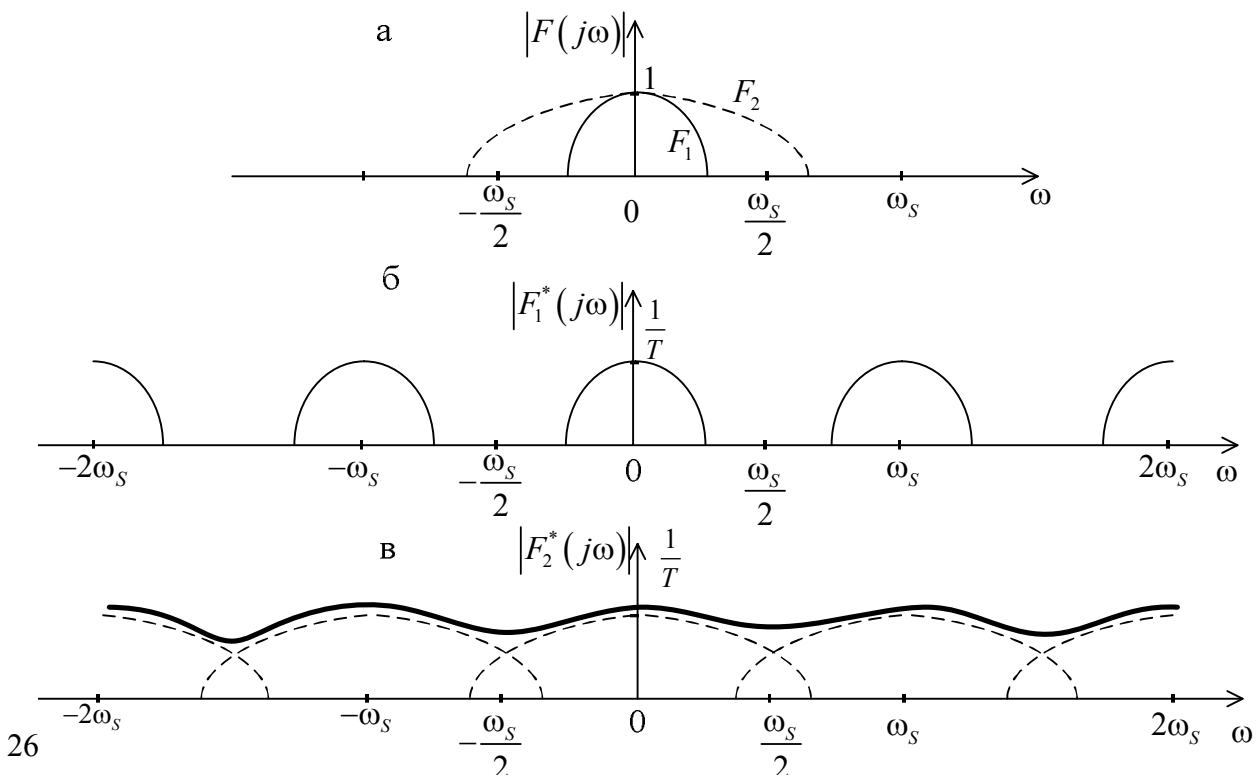


Рис. 2.12. Частотные спектры сигналов $F(j\omega)$ и $F^*(j\omega)$

46. Восстановление данных

Рассмотрим частотные характеристики второй части ИЭ – экстраполятора нулевого порядка, передаточная функция которого

$$K_{\Phi Y}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (2.43)$$

$$K_{\Phi Y}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} e^{j\omega \frac{T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}} = \frac{2e^{j\omega \frac{T}{2}}}{\omega} \cdot \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{2j} = T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}.$$

Так как $\frac{\omega T}{2} = \frac{\omega}{2} \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi\omega}{\omega_s}$, то окончательно получим

$$K_{\Phi Y}(j\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}} e^{-j\frac{\pi\omega}{\omega_s}}. \quad (2.44)$$

Амплитудно-частотная характеристика экстраполятора нулевого порядка

$$A_{\Phi Y}(\omega) = |K_{\Phi Y}(j\omega)| = T \frac{\sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right)}{\frac{\pi\omega}{\omega_s}}. \quad (2.45)$$

Фазово-частотная характеристика этого экстраполятора

$$\varphi_{\Phi Y}(\omega) = \arg K_{\Phi Y}(j\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi\omega}{\omega_s} + \pi, & \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right) < 0 \\ -\frac{\pi\omega}{\omega_s}, & \sin\left(\frac{\pi\omega}{\omega_s}\right) > 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Характеристики $A_{\Phi Y}(\omega)$ и $\varphi_{\Phi Y}(\omega)$ приведены на рис. 2.13.

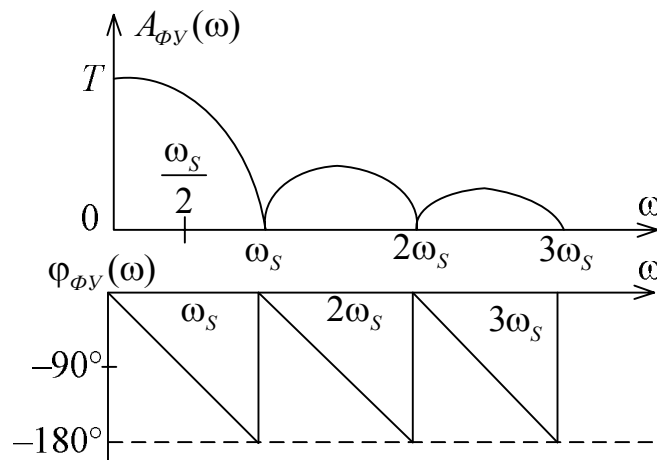


Рис. 2.13. Частотные характеристики экстраполятора нулевого порядка

Как следует из приведенного рисунка, при $\omega \ll \frac{\omega_s}{2}$ амплитудные и фазовые искажения сигнала на выходе экстраполятора минимальны.

На рис. 2.14 представлены сигналы на входе квантователя и на выходе экстраполятора, точнее – на входе ИЭ и на его выходе.

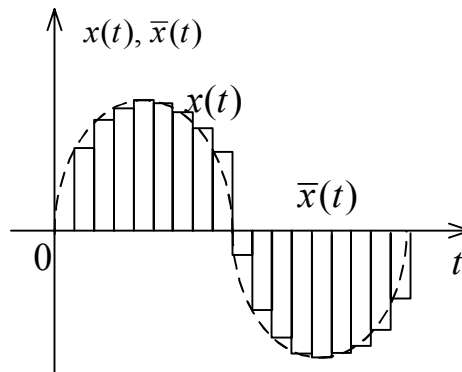


Рис. 2.14. Входной $x(t)$ и выходной $\bar{x}(t)$ сигналы ИЭ

2.9. Импульсная передаточная функция разомкнутой системы

Рассмотрим ИСАУ, изображенную на рис. 2.15.

Передаточную функцию экстраполятора объединяют с передаточной функцией непрерывной части:

$$K_{ЭНЧ}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} K_{НЧ}(s),$$

где $K_{ЭНЧ}(s)$ – передаточная функция эквивалентной непрерывной части.

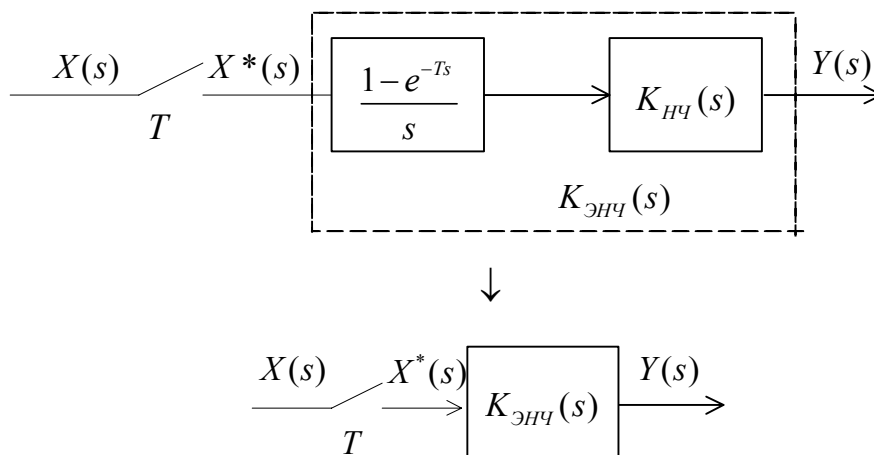


Рис. 2.15. Структура ИСАУ

Полагая начальные условия нулевыми, можно получить:

$$Y^*(s) = [K_{ЭНЧ}(s)X^*(s)]^* = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + jk\omega_s), \quad (2.47)$$

47. Импульсная передаточная функция разомкнутой системы

Рассмотрим ИСАУ, изображенную на рис. 2.15.

Передаточную функцию экстраполятора объединяют с передаточной

функцией непрерывной части:

$$K_{ЭНЧ}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} K_{НЧ}(s),$$

где $K_{ЭНЧ}(s)$ – передаточная функция эквивалентной непрерывной части.

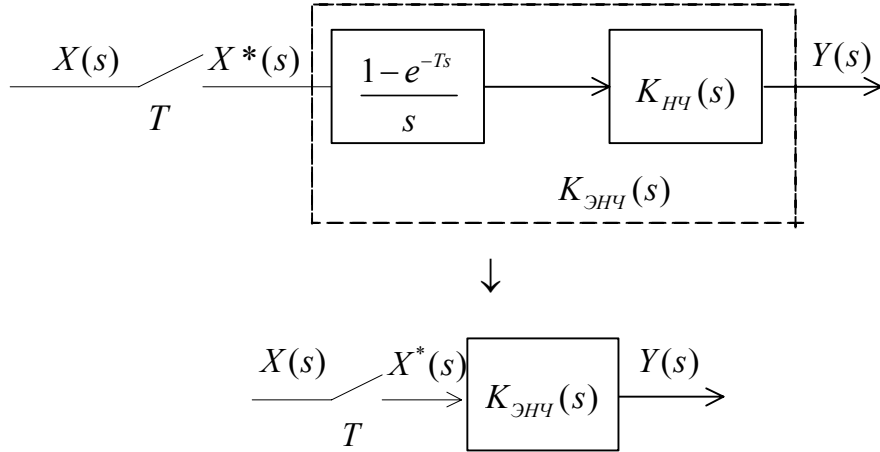


Рис. 2.15. Структура ИСАУ

Полагая начальные условия нулевыми, можно получить:

$$Y^*(s) = [K_{ЭНЧ}(s)X^*(s)]^* = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s + jk\omega_s), \quad (2.47)$$

откуда $Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{ЭНЧ}(s + jk\omega_s)X^*(s + jk\omega_s)$, а так как $X^*(s)$ – периодическая функция, то $X^*(s + jk\omega_s) = X^*(s)$ и

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_{ЭНЧ}(s + jk\omega_s)X^*(s). \quad (2.48)$$

Сделав в (2.48) подстановку $z = e^{Ts}$, получим $Y(z) = K_{ЭНЧ}(z)X(z)$.

$K_{ЭНЧ}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ называется импульсной передаточной функцией разомкнутой САУ.

Рассмотрим ИСАУ различных конфигураций, непрерывная часть которых состоит из двух передаточных функций (рис. 2.16).

Для структуры ИСАУ, каждой непрерывной части которой предшествует ИЭ (рис. 2.16, а) передаточная функция системы равна произведению импульсных передаточных функций отдельных частей:

$$K(z) = K_{ЭНЧ1}(z)K_{ЭНЧ2}(z). \quad (2.49)$$

Для структуры ИСАУ, в которой перед второй непрерывной частью нет ИЭ, общая передаточная функция системы

$$K(z) = K_{ЭНЧ}(z), \quad (2.50)$$

где $K_{ЭНЧ}(z) = Z\{K_{ФУ}(s)K_{НЧ1}(s)K_{НЧ2}(s)\}$.

Структура ИСАУ, приведенная на рис. 2.16, в, не имеет импульсной передаточной функции, поскольку входной сигнал не квантуется.

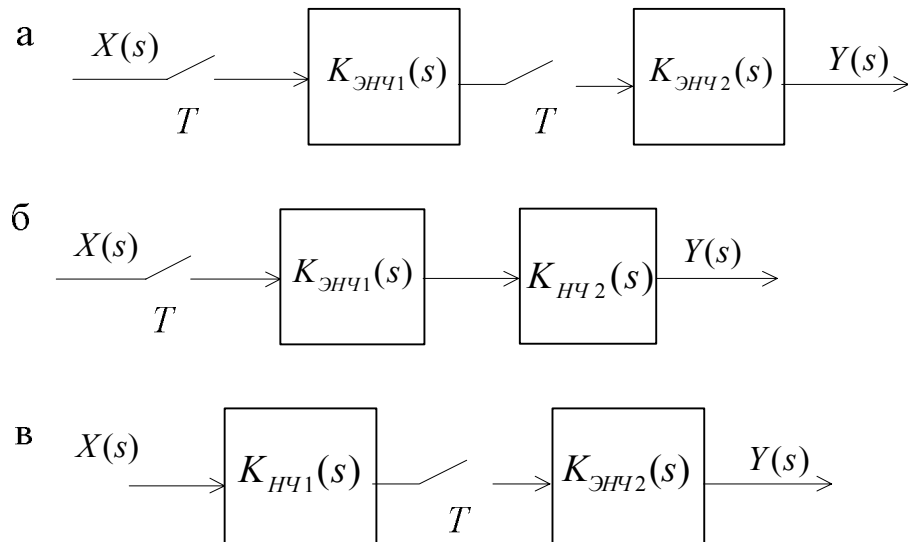


Рис. 2.16. Структуры ИСАУ

Рассмотрим цифровую систему (рис. 2.17).

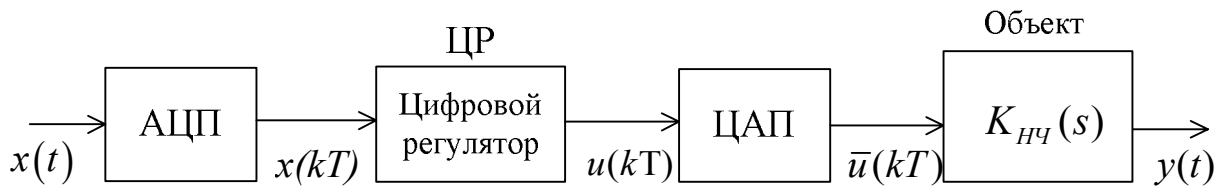


Рис. 2.17. Цифровая САУ

Коэффициент передачи АЦП $\delta_{АЦП} = \frac{1}{2^\alpha - 1}$, где α – число разрядов, а коэффициент передачи ЦАП $\delta_{ЦАП} = 2^\alpha - 1$. При одинаковом числе разрядов АЦП и ЦАП их общий коэффициент передачи равен единице. Обычно $\alpha \geq 10$, тогда $2^\alpha - 1 = 1023$ и статическую характеристику АЦП и ЦАП можно считать линейной.

При расчетах дискретных систем АЦП, цифровой регулятор и ЦАП заменяют моделью, как показано на рис. 2.18, а, всю систему окончательно – моделью рис. 2.18, б.

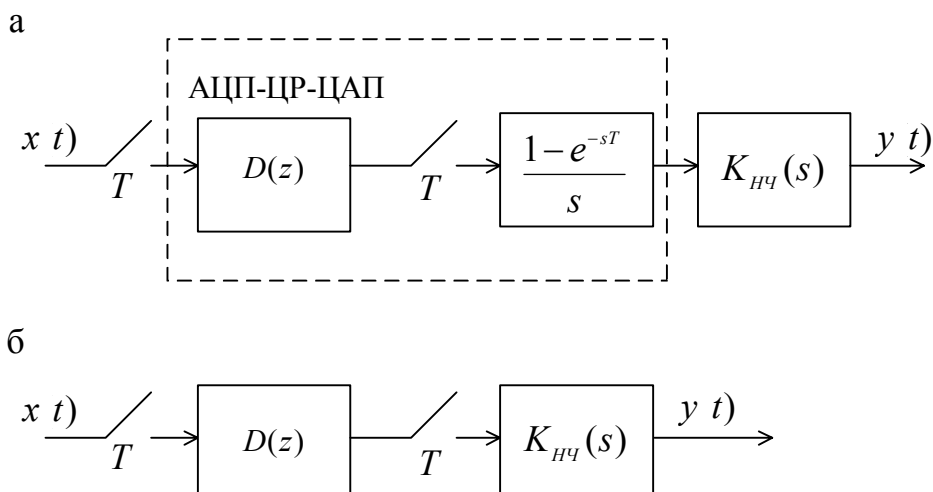


Рис. 2.18. Модель цифровой системы

Тогда $K(z) = Z\{K_{ЭНЧ}(s)\}D(z)$, где $D(z)$ – дискретная передаточная функция цифрового регулятора.

2.10. Импульсная передаточная функция замкнутой системы

Рассмотрим замкнутую ИСАУ, изображенную на рис. 2.19.

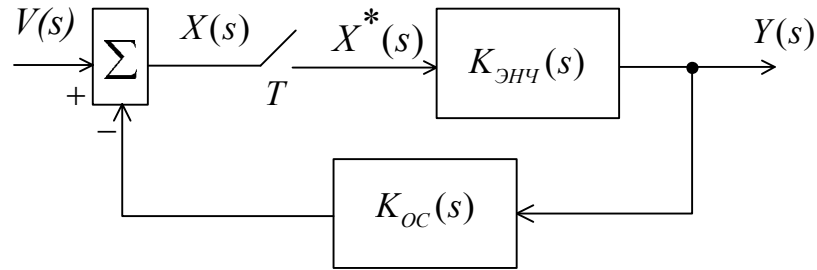


Рис. 2.19. Структура замкнутой ИСАУ

$$Y(s) = K_{ЭНЧ}(s)X^*(s),$$

$$X(s) = V(s) - K_{ОС}(s)Y(s) = V(s) - K_{ЭНЧ}(s)K_{ОС}(s)X^*(s).$$

Если найти дискретные преобразования левой и правой частей последнего равенства, то получим $X^*(s) = V^*(s) - (K_{ЭНЧ}K_{ОС})^*(s)X^*(s)$, откуда

$$X^*(s) = \frac{V^*(s)}{1 + (K_{ЭНЧ}K_{ОС})^*(s)}, \quad X(z) = \frac{V(z)}{1 + (K_{ЭНЧ}K_{ОС})(z)}.$$

Таким образом, замкнутая импульсная САУ имеет передаточную функцию по ошибке

$$K_x(z) = \frac{X(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 + (K_{ЭНЧ}K_{ОС})(z)} \quad (2.51)$$

и главную передаточную функцию

$$K_3(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{K_{ЭНЧ}(z)}{1 + (K_{ЭНЧ}K_{ОС})(z)}. \quad (2.52)$$

В этих выражениях записи $(\cdot)^*(s)$ и $(\cdot)^*(z)$ показывают, что до осуществления операции дискретного преобразования Лапласа и z -преобразования необходимо перемножить соответствующие передаточные функции, после чего разложить на элементарные дроби и только после этого осуществлять z -преобразование.

Рассмотрим замкнутую цифровую САУ (рис. 2.20).

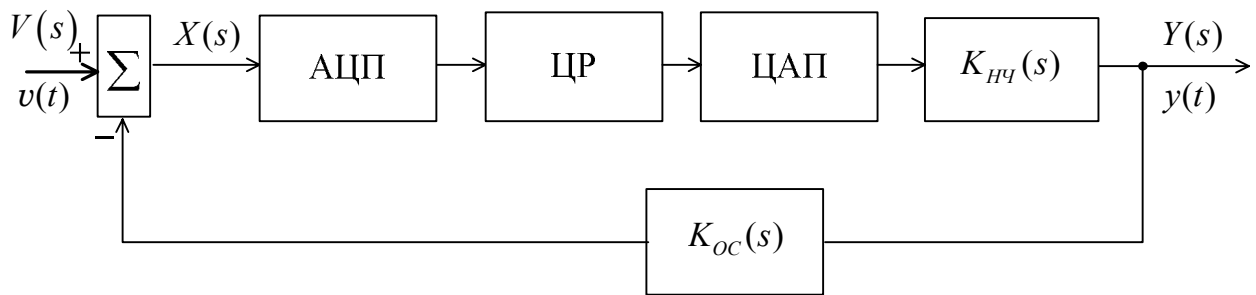


Рис. 2.20. Структура цифровой САУ

Модель разомкнутой части соответствует рис. 2.18. Изображение сигнала ошибки в замкнутой системе $X(s) = V(s) - K_{ЭНЧ}(s)X^*(s)D^*(s)K_{OC}(s)$, а изображение выходной координаты $Y(s) = K_{ЭНЧ}(s)D^*(s)X^*(s)$.

Подвергнув первое соотношение дискретному преобразованию Лапласа, получим

$$X^*(s) = \frac{V^*(s)}{1 + D^*(s)(K_{ЭНЧ}K_{OC})^*(s)}.$$

Применяя к $Y(s)$ z -преобразование и подставив в него полученное выражение $X^*(s)$, имеем

$$Y(z) = \frac{D(z)K_{ЭНЧ}(z)}{1 + D(z)(K_{ЭНЧ}K_{OC})(z)}V(z).$$

Таким образом, передаточная функция замкнутой ЦСАУ будет

$$K_3(z) = \frac{D(z)K_{ЭНЧ}(z)}{1 + D(z)(K_{ЭНЧ}K_{OC})(z)}. \quad (2.53)$$

48 . Процессы в импульсных системах

Процессы в ИСАУ возникают, как и в непрерывной системе, либо за счет изменения внутренних координат (вариации начальных условий), либо за счет внешних воздействий (управляющих или возмущающих).

В общем случае при вычислении процессов необходимо решить разностное уравнение, описывающее динамику ИСАУ. Как известно, общее решение

$$y(k) = y_c(k) + y_e(k),$$

где $y_c(k)$ – свободная составляющая, обусловленная ненулевыми начальными условиями, а $y_e(k)$ – вынужденная составляющая, обусловленная внешними воздействиями.

Для вычисления этих составляющих можно воспользоваться формулами разложения z -изображений.

Пусть имеется z -изображение выходной координаты ИСАУ

$$Y(z) = K_3(z)V(z),$$

где $K_3(z) = \frac{K(z)}{Q(z)}$, а $V(z) = \frac{R(z)}{L(z)}$.

Свободные движения обусловлены корнями z_{cv} , $v = \overline{1, n}$ характеристического уравнения замкнутой системы $Q(z) = 0$, а вынужденные – корнями z_{ev} , $v = \overline{1, m}$ уравнения $L(z) = 0$.

$$Y(z) = Y_c(z) + Y_e(z), \text{ где } Y_c(z) = \sum_{v=1}^n c_{cv} \frac{z}{z - z_{cv}} \quad \text{---} \quad y_c(k) = \sum_{v=1}^n c_{cv} z_{cv}^k =$$

$$Y_e(z) = \sum_{v=1}^m c_{ev} \frac{z}{z - z_{ev}} \quad \text{---} \quad y_e(k) = \sum_{v=1}^m c_{ev} z_{ev}^k.$$

Коэффициенты c_{cv} и c_{ev} определяются по формулам разложения в зависимости от вида $K_3(z)$ и $V(z)$.

В ИСАУ, как и в непрерывных системах, рассматривается переходная функция $h_3(k)$ как реакция ИСАУ на ступенчатое решетчатое воздействие $v(k) = 1(k)$ и вводятся те же понятия: перерегулирование σ , время регулирования t_p .

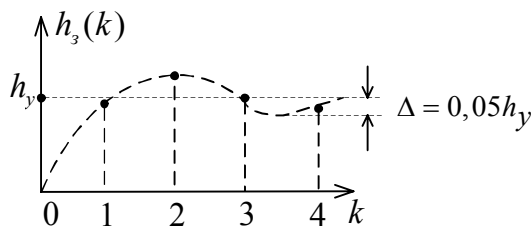


Рис. 2.21. Переходной процесс ИСАУ

Основные методы вычисления переходной функции:

1) аналитический (путем разложения изображения $Y(z)$ на элементарные слагаемые и использования таблиц соответствия z -изображений и оригиналов, а также разложение $Y(z)$ в ряд Лорана);

2) Моделирование на компьютере (например, в среде Matlab).

Рассмотрим первый из них.

$$\text{Если } Y(z) = K_3(z)V(z), \quad K_3(z) = \frac{K(z)}{Q(z)} \text{ и } V(z) = \frac{z}{z-1}, \text{ то } Y(z) = \frac{zK(z)}{(z-1)Q(z)}.$$

Это изображение соответствует первому случаю z -изображения для разложения на элементарные слагаемые. Оригинал $y(k) = h_3(k)$ в этом случае вычисляется по формуле

$$h_3(k) = \frac{K(1)}{Q(1)} - \sum_{v=1}^n \frac{K(z_v)}{(1-z_v)Q'(z_v)} z_v^k.$$

Первое слагаемое соответствует установившейся составляющей ($z = e^{Ts}$), а $\sum_{v=1}^n (\bullet)$ – переходной составляющей. Эта формула пригодна при простых корнях z_v . При кратных корнях выражение усложняется (используются вычеты), при этом предпочтительнее разложение в ряд Лорана.

В отличие от непрерывных систем в ИСАУ можно добиться конечной длительности переходного процесса.

Если в $K_3(z)$ в характеристическом уравнении $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ коэффициенты $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, то оно сводится к виду $a_0 z^n = 0$. Тогда при порядке числителя хотя бы на один меньше порядка знаменателя

$$K_3(z) = \frac{b_0 z^{n-1} + \dots + b_{n-1}}{a_0 z^n} = \frac{b_0}{a_0} z^{-1} + \frac{b_1}{a_0} z^{-2} + \dots + \frac{b_{n-1}}{a_0} z^{-n}.$$

Сравнивая коэффициенты $\frac{b_i}{a_0}$ в этом выражении с весами z -изображения

в выражении $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$, имеем $f(0) = 0$; $f(1) = \frac{b_0}{a_0}$; \dots ; $f(n-1) = \frac{b_{n-1}}{a_0}$;

$f(n) = \frac{b_{n-1}}{a_0}$, т.е. импульсная переходная функция является конечным рядом, заканчивающимся за n периодов дискретизации.

Значит и переходный процесс $h_3(k)$ закончится за время nk или nkT .

49. Частотные характеристики ИСАУ

Передаточная функция разомкнутой ИСАУ $K(z)$;

где $z = e^{j\omega T}$

$$K(e^{j\omega T}) = K^*(j\omega) - \text{АФЧХ ИСАУ}$$

Физический смысл такой же как и у непрерывных, т.е. если на вход **разомкнутой** ИСАУ подать непрерывный сигнал

$x(t) = A \sin \Omega t \Rightarrow x(kT) = A \sin \Omega kT$, то на выходе системы в установившемся режиме будет сигнал

$$y(\infty) = A |K^*(j\omega)| \sin(\Omega kT + \varphi^*(\Omega))$$

Т.к. $K^*(j\omega)$ - это $K(e^{j\omega T})$: $K^*(j\omega) = K(e^{j\omega T})$, а по формуле Эйлера

$e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$, а из-за периодичности косинуса и синуса частотные характеристики относительно частоты ω будут также периодичны с $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

В случае непрерывных систем частотные характеристики строят на интервале $0 \leq \omega \leq \infty$, а в случае дискретных - $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_0}{2}$

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

50. Условия устойчивости

$$(a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n)Y(z) = (b_0z^m + b_1z^{m-1} + \dots + b_m)V(z),$$

описывающего динамику замкнутой системы, состоит из двух частей:

$$y(k) = y_{\text{св}}(k) + y_{\text{в}}(k), \quad (3.1)$$

где первая часть определяет свободное движение, а вторая – вынужденное движение.

При оценке устойчивости ИСАУ, как и в непрерывной системе, исследуется свободное движение. Оно может быть найдено при решении однородного разностного уравнения (без правой части)

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (3.2)$$

называемого характеристическим уравнением замкнутой ИСАУ. Это же уравнение можно получить и по передаточной функции замкнутой системы $K_3(z)$, приравняв нулю ее знаменатель:

$$1 + K(z) = 0. \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.2) ищется в виде:

$$y_{\text{св}}(k) = \sum_{i=0}^n c_i z_i^k,$$

где c_i – постоянные коэффициенты, а z_i – корни характеристического уравнения.

Очевидно, что для устойчивости ИСАУ необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{\text{св}}(k) = 0$. А это возможно, когда все корни характеристического уравнения z_i будут по модулю меньше единицы. Таким образом, условием устойчивости является соотношение:

$$|z_i| < 1. \quad (3.4)$$

Графически это условие можно интерпретировать, преобразовав s -плоскость в z -плоскость. Так как $z = e^{sT}$, то положив $s = j\omega$, что соответствует мнимой оси, получим $z = e^{j\omega T}$, что является окружностью единичного радиуса (рис. 3.1).

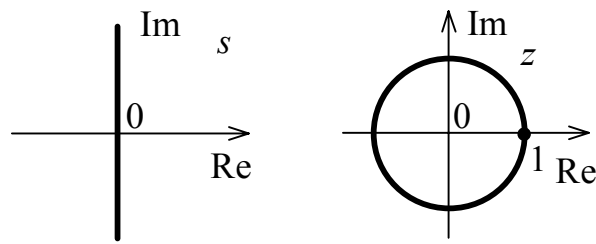


Рис.3.1. Отображение s -плоскости в z -плоскость

Если $s = c + j\omega$, то $z = e^{sT} = e^{cT} e^{j\omega T}$ и при $c \rightarrow -\infty$ переменная $z \rightarrow 0$. Это означает, что левая полуплоскость s -плоскости отображается внутри круга единичного радиуса z -плоскости, а правая полуплоскость s -плоскости – вне круга. Соответствие s -плоскости, z -плоскости и временных характеристик при различных случаях корней характеристического уравнения изображено на рис. 3.2.

Следовательно, для устойчивости ИСАУ необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения замкнутой системы находились внутри круга единичного радиуса.

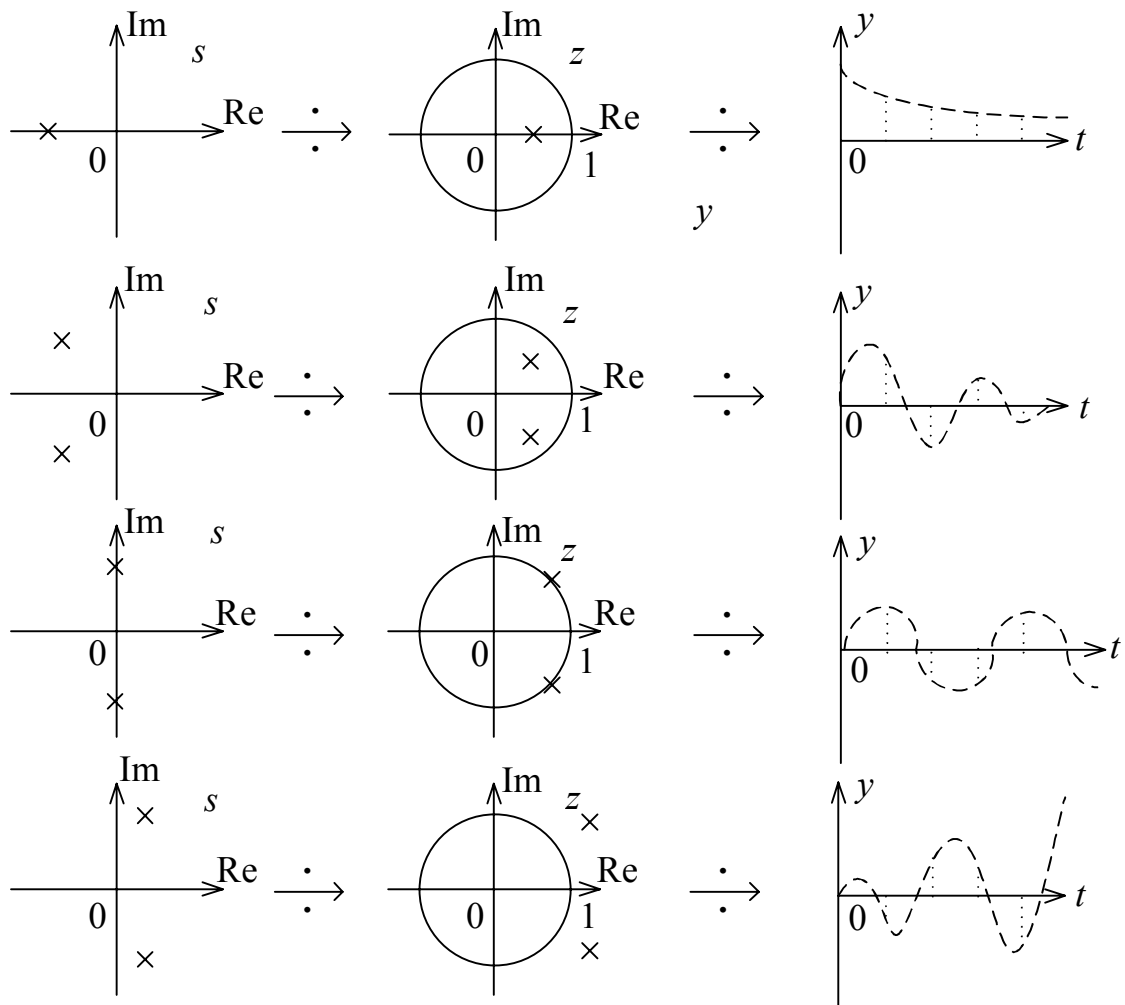


Рис. 3.2. Соответствие корней характеристического уравнения s -плоскости, z -плоскости и временных характеристик

51. Билинейное преобразование

С помощью подстановки

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}, \text{ или } w = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \text{ осуществляется}$$

так называемое билинейное преобразование, то есть отображение единичной окружности на z -плоскости в мнимую ось на w -плоскости. Это отображение можно пояснить следующим образом:

$$w = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\omega T} - e^{j\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{e^{j\omega T} + e^{j\frac{\omega T}{2}} e^{-j\frac{\omega T}{2}}} = \frac{2}{T} \frac{\cancel{e^{j\frac{\omega T}{2}}} (e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}})}{\cancel{e^{j\frac{\omega T}{2}}} (e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}})}.$$

По формуле Эйлера

$$w = \frac{2}{T} j \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\cos \omega \frac{T}{2}} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \omega \frac{T}{2}. \quad (3.5)$$

Анализ (3.5) показывает, что при $\omega = 0$ значение $w = j0$, а при $\omega = \frac{\omega_s}{2}$ или $\omega \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ значение $w = j\infty$. Другими словами, интервал $0 \leq j\omega \leq j\frac{\omega_s}{2}$ на s -плоскости отображается в верхнюю полуокружность z -плоскости и в верхнюю половину мнимой оси w -плоскости. Тогда областью устойчивости системы на w -плоскости является ее левая половина.

Выражение (3.5) устанавливает связь между частотой ω на s -плоскости и псевдочастотой ω_w на w -плоскости. Если $j\omega_w$ мнимая часть переменной w , то $j\omega_w = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \omega \frac{T}{2}$ и

$$\omega_w = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \omega \frac{T}{2}. \quad (3.6)$$

Отметим, что при малых частотах на s -плоскости, когда $\operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx \frac{\omega T}{2}$, выражение (3.6) приводится к виду:

$$\omega_w \approx \frac{2}{T} \omega \frac{T}{2} = \omega_w = \omega. \quad (3.7)$$

Это справедливо при

$$\omega < \frac{2\pi}{10T} = \frac{\omega_s}{10}. \quad (3.8)$$

Таким образом, при выполнении (3.8) можно считать частоты ω и ω_w совпадающими, а при больших частотах следует использовать псевдочастоту.

52. Критерий Рауса-Гурвица

Для замкнутой дискретной системы необходимо получить характеристическое уравнение, применив билинейное преобразование:

$$1 + K(w) = 1 + K(z) \bigg|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}} = 0. \quad (3.9)$$

Далее составляется таблица Рауса по такому же алгоритму, как и для непрерывных систем. Дискретная система устойчива, если при $a_0 > 0$ положительны все элементы первого столбца таблицы Рауса.

Пример 3.2. Рассмотрим систему, приведенную на рис. 3.3. Характеристическое уравнение замкнутой системы $D(z) = z - 1 + KT = 0$. Перейдем к $D(w)$.

$$D(w) = D(z) \bigg|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}} = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w} + (KT - 1) = \frac{w(2T - T^2K) + 2KT}{2 - Tw} = 0.$$

Характеристическое уравнение запишем в виде $\underbrace{(2T - T^2K)}_{a_0}w + \underbrace{2KT}_{a_1} = 0$.

Составим таблицу Рауса:

$$\begin{array}{c|c} w^1 & 2T - T^2K \\ w^0 & 2KT \end{array}$$

Для устойчивости дискретной системы необходимо, чтобы знак всех элементов первого столбца (а он единственный в данном примере) был одинаковый. Отсюда $2KT > 0$, при $T > 0$ и $K > 0$; $2T - T^2K > 0$ при $TK < 2$. Этот результат согласуется с результатом примера 3.1.

Рассмотренные примеры показывают, что квантование приводит к сужению области устойчивости дискретных систем по сравнению с аналогичными (имеющими одинаковые непрерывные части) непрерывными системами. В непрерывной системе первого порядка устойчивость обеспечивается при всех положительных коэффициентах характеристического уравнения, а в дискретной — накладывается жесткое ограничение ($TK < 2$).

53. Критерий Найквиста

Для дискретных систем также применим критерий Найквиста, как и для непрерывных систем. Различие в построении АФЧХ разомкнутой системы обусловлено переменной и диапазоном ее изменения для каждого типа модели (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Передаточная функция разомкнутой системы	Переменная	Диапазон изменения переменной
$K(s)$	$s = j\omega$	$0 \leq j\omega \leq j\infty$
$K(z)$	$z = e^{j\omega T}$	$0 \leq \omega T \leq \pi$
$K(w)$	$w = j\omega_w$	$0 \leq j\omega_w \leq j\infty$

АФЧХ $K(j\omega_w)$ и $K(j\omega)$ совпадают (рис. 3.4).

$K(e^{j\omega T})$ имеет такой же вид, но заканчивается не в начале координат, а на вещественной оси, так как конечная точка соответствует частоте $\omega = \frac{\omega_s}{2}$, при которой коэффициент усиления разомкнутой системы не равен нулю (рис. 3.5). Дискретная система устойчива, если $K(j\omega_w)$ или $K(e^{j\omega T})$ не охватывают точку $-1; j0$. Запасы устойчивости находятся так же, как и в случае непрерывной системы: по модулю $1/a$, по фазе $-\Delta\varphi$.

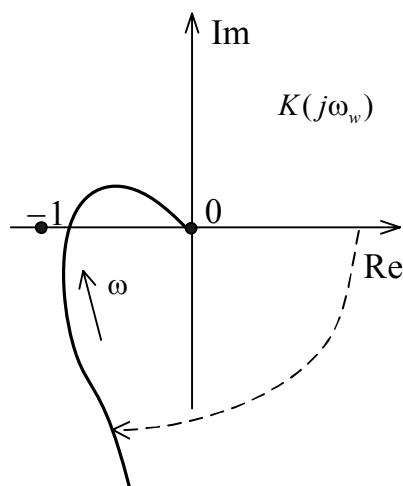


Рис. 3.4. АФЧХ $K(j\omega)$ и $K(j\omega_w)$

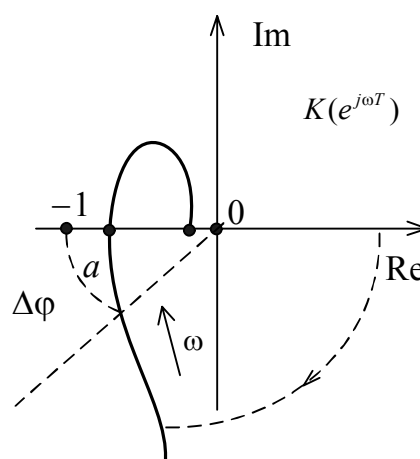


Рис. 3.5. АФЧХ $K(e^{j\omega T})$

3.5. Логарифмический критерий Найквиста

Частотные характеристики дискретных систем после перехода от реальной частоты ω к псевдо частоте ω_w в соответствии с (3.6) строят по методике построения аналогичных характеристик непрерывных систем. Логарифмические частотные характеристики строятся отдельно для областей низких и высоких частот. Границей, разделяющей частотную область на низкочастотную и высокочастотную, служит частота среза ω_c в предположении, что $\omega_c < \frac{2}{T}$. Это условие необходимо выполнять вследствие требований, предъявляемых к обеспечению запасов устойчивости и точности работы системы.

Рассмотрим методику построения ЛЧХ на примере системы, включающей в себя непрерывную часть с обобщенной передаточной функцией вида:

$$K_{HЧ}(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{s^v \prod_{i=1}^n (1 + T_i s)}. \quad (3.10)$$

При построении допускаются следующие предположения.

1. Как уже отмечалось, $\omega_c < \frac{2}{T}$.

2. Переход оси нуля децибел асимптотической ЛАХ непрерывной части происходит при отрицательном наклоне -20 дБ/дек.

3. Постоянным времени τ_j ($j=1, 2, \dots, m$) соответствуют сопрягающие частоты меньше, чем частота среза.

4. Имеется l ($l < n$) постоянных времени T_i ($i=1, 2, \dots, l$), которым соответствуют сопрягающие частоты меньше, чем частота среза.

При принятых допущениях для области низких частот передаточную функцию непрерывной части можно представить в виде:

$$K_{HЧ}^H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + \tau_j s)}{s^v \prod_{i=1}^l (1 + T_i s)}, \quad (3.11)$$

а для области высоких частот

$$K_{HЧ}^B(s) = \frac{\omega_c}{s \prod_{i=l+1}^n (1 + T_i s)}. \quad (3.12)$$

По выражениям (3.11) и (3.12) на основании (3.6) получим частотные характеристики разомкнутой импульсной системы для области низких частот:

$$K_{HЧ}^H(j\omega_w) = \left(1 - j\omega_w \frac{T}{2}\right) \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + j\omega_w \tau_j)}{(j\omega_w)^v \prod_{i=1}^l (1 + j\omega_w T_i)} \quad (3.13)$$

и для области высоких частот:

$$K_{HЧ}^B(j\omega_w) = \frac{\omega_c \left(1 - j\omega_w \frac{T}{2}\right) \left[1 + j\omega_w (T/2 - T_\Sigma)\right]}{(j\omega_w)(1 + j\omega_w T/2)}, \quad (3.14)$$

где $T_\Sigma = \sum_{i=l+1}^n T_i$.

Анализ этих выражений показывает, что в низкочастотной области частотная передаточная функция импульсной системы может быть получена из передаточной функции непрерывной части подстановкой $s = j\omega_w$ и умножением на дополнительный множитель $(1 - j\omega_w T/2)$. Псевдочастота ω_w в этой области практически совпадает с угловой частотой ω . Влиянием дополнительного множителя при построении частотной характеристики в низкочастотной области можно пренебречь, так как $\omega_c < 2/T$.

В области низких частот частотная характеристика импульсной системы совпадает с частотной характеристикой ее непрерывной части. В высокочастотной же области этого совпадения нет и построение надо выполнять по псевдочастоте ω_w .

Выражение частотной передаточной функции разомкнутой дискретной системы в плоскости псевдочастоты:

$$K(j\omega_w) = \frac{K \prod_{j=1}^m (1 + j\omega_w \tau_j) [1 + j\omega_w (T/2 - T_\Sigma)] (1 - j\omega_w T/2)}{(j\omega_w)^v \prod_{i=1}^l (1 + j\omega_w T_i) (1 + j\omega_w T/2)}. \quad (3.15)$$

Это выражение представляет собой произведение элементарных типовых сомножителей, поэтому его легко использовать для построения логарифмических частотных характеристик импульсных систем. Результирующий фазовый сдвиг определяется так:

$$\varphi(\omega_w) = -v \cdot 90^\circ + \sum_{j=1}^m \arctg \omega_w \tau_j + \arctg \omega_w \left(\frac{T}{2} - T_\Sigma \right) - \sum_{i=1}^l \arctg \omega_w T_i - 2 \arctg \omega_w \frac{T}{2}. \quad (3.16)$$

По построенным логарифмическим частотным характеристикам находят запасы устойчивости.

54. ТОЧНОСТЬ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим точность импульсной системы в установившемся режиме. При изучении непрерывных систем их точность в установившемся режиме исследовалась на основании свойства преобразования Лапласа о конечном значении непрерывной функции. Аналогичные результаты можно получить для импульсных систем на базе свойства z -преобразования о конечном значении решетчатой функции:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z), \quad (4.1)$$

где $X(z)$ – z -изображение ошибки системы $x(kT)$ в дискретные моменты времени (рис. 4.1).

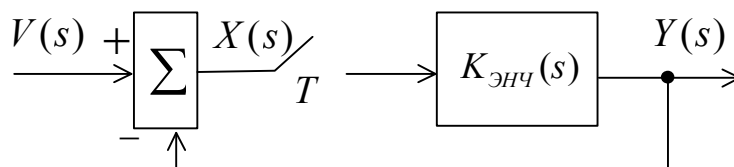


Рис. 4.1. Структура ИСАУ

z -изображение ошибки

$$X(z) = V(z) - Y(z) = V(z) - \frac{K(z)}{1 + K(z)}V(z) = \frac{1}{1 + K(z)}V(z).$$

Из выражения следует, что дискретная передаточная функция замкнутой системы по ошибке

$$K_x(z) = \frac{X(z)}{V(z)} = \frac{1}{1 + K(z)}. \quad (4.2)$$

На основании свойства о конечном значении

$$x_{ycm}(kT) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)K_x(z)V(z). \quad (4.3)$$

Рассмотрим установившуюся ошибку при ступенчатом воздействии $V1(kT)$. В этом случае $V(z) = V \frac{z}{z - 1}$ и

$$x_{ycm}^0(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)K_x(z)V \frac{z}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} K_x(z)Vz = V \lim_{z \rightarrow 1} K_x(z) = \frac{V}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} K(z)} = \frac{V}{1 + K_0}, \quad (4.4)$$

где $K_0 = \lim_{z \rightarrow 1} K(z)$ называют коэффициентом ошибки по положению.

Если $K(z)$ имеет полюс $z = 1$, т.е. знаменатель содержит множитель $(z - 1)$, то $K_0 = \infty$ и ошибка по положению равна 0, что соответствует непрерывной системе с астатизмом первого порядка.

Теперь рассмотрим установившуюся ошибку при линейно нарастающем воздействии $V \cdot kT$. В этом случае $V(z) = V \frac{Tz}{(z - 1)^2}$.

$$\begin{aligned}
 x'_{ycm}(kT) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K_x(z)V \frac{Tz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} K_x(z)V \frac{Tz}{(z-1)} = \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{VTz}{[1+K(z)](z-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{VTz}{(z-1) + (z-1)K(z)} = \frac{VT}{\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)K(z)} = \frac{V}{K_v}, \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

где $K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{T} (z-1)K(z)$ называют коэффициентом ошибки по скорости.

Если $K(z)$ имеет два полюса $z_1 = z_2 = 1$, то $K_v = \infty$ и ошибка по скорости равна нулю, что соответствует непрерывной системе с астатизмом второго порядка.

6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЯ

55. Уравнения состояния дискретных систем и схемы моделирования

Пусть дискретная система описывается разностным уравнением:

$$y(k) = 0,5v(k-1) + 0,3v(k-2) + 1,5y(k-1) - 0,5y(k-2), \quad (6.1)$$

где $v(k)$ – входной сигнал системы, а $y(k)$ – её выходная координата.

Подвергнув это уравнение z -преобразованию, получим дискретную передаточную функцию

$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{0,5z^{-1} + 0,3z^{-2}}{1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}} = \frac{0,5z + 0,3}{z^2 - 1,5z + 0,5}. \quad (6.2)$$

Разностному уравнению (6.1) или передаточной функции (6.2) могут соответствовать различные схемы моделирования (см. раздел 2.5). Одна из них приведена на рис. 6.1.

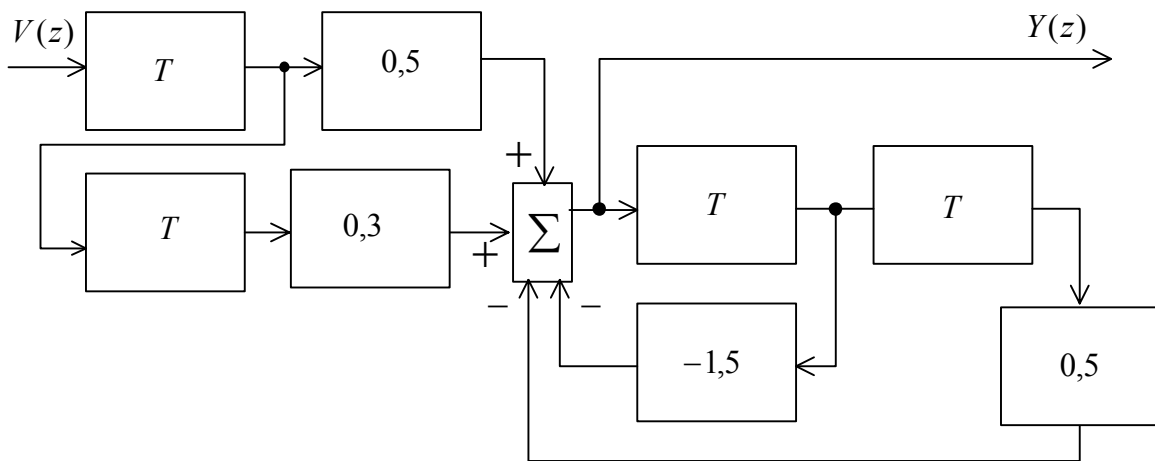


Рис.6.1. Схема моделирования дискретной передаточной функции

Чтобы изобразить модель в переменных состояния системы, описываемой разностным уравнением (6.1), примем за переменную состояния выход каждого элемента задержки T . В нашем случае система имеет второй порядок, поэтому переменных состояния две: $x_1(k)$ и $x_2(k)$. Тогда схема моделирования может иметь вид рис. 6.2.

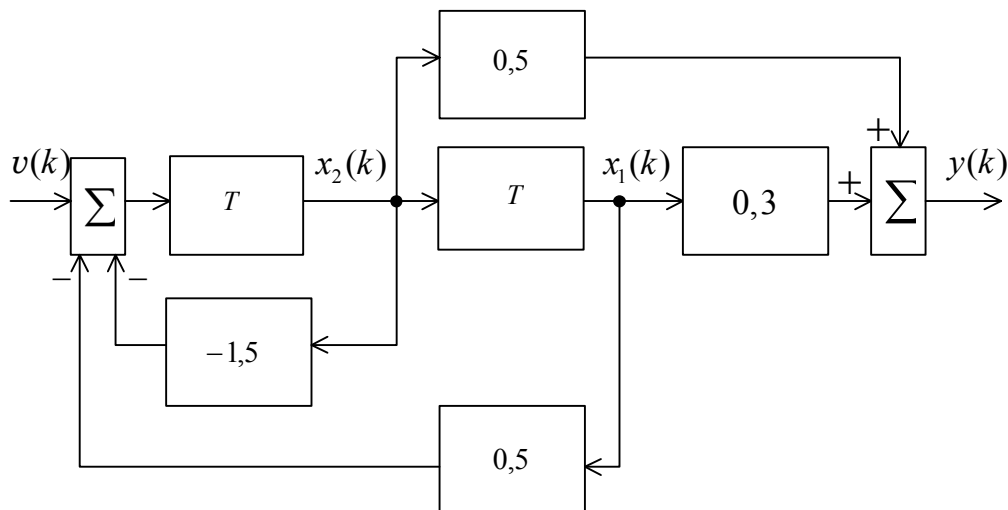


Рис. 6.2. Схема моделирования разностного уравнения в переменных состояния

В соответствии с этой схемой и с учетом того, что входы элементов задержки будут описаны как $x_1(k+1)$ и $x_2(k+1)$, уравнения состояния можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = -0,5x_1(k) + 1,5x_2(k) + v(k), \\ y(k) = 0,3x_1(k) + 0,5x_2(k). \end{cases} \quad (6.3)$$

В векторно-матричной форме получим:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k), \\ y(k) = [0,3 \quad 0,5] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Окончательно в компактном виде:

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + Bv(k), \\ y(k) = CX(k). \end{cases} \quad (6.5)$$

Распространив эти рассуждения на самый общий случай, уравнения в переменных состояния записывают в виде:

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + BV(k), \\ Y(k) = CX(k) + DV(k), \end{cases} \quad (6.6)$$

где матрицы A – основная, B – входа, C – выхода, D – связи имеют размерности, как и в непрерывных системах, соответственно $n \times n$, $n \times t$, $p \times n$, $p \times t$. В реальных системах матрица связи D обычно равна нулю, поэтому в дальнейшем ее учитывать не будем.

56 . Решение уравнений состояния

Рассмотрим первое матричное уравнение состояния системы (6.6):

$$X(k+1) = AX(k) + BV(k). \quad (6.7)$$

Его можно решить как итерационным методом, изложенным в разд. 2.4, так и используя z -преобразование.

Решим уравнение первым методом. При этом надо знать $X(0)$ и $V(k)$ для всех значений k :

$$k=0: \quad X(1) = AX(0) + BV(0);$$

$$k=1: \quad X(2) = AX(1) + BV(1) = A[AX(0) + BV(0)] + BV(1) = A^2X(0) + ABV(0) + BV(1);$$

$$k=2: \quad X(3) = AX(2) + BV(2) = A[A^2X(0) + ABV(0) + BV(1)] + BV(2) = \\ = A^3X(0) + A^2BV(0) + ABV(1) + BV(2);$$

\vdots

$$k=n-1: \quad X(n) = A^nX(0) + A^{n-1}BV(0) + A^{n-2}BV(1) + \dots + ABV(n-2) + BV(n-1).$$

Решение уравнения (6.7) в общем виде:

$$X(n) = A^nX(0) + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}BV(k). \quad (6.8)$$

Найдем решение уравнения (6.7), используя z -преобразование. Для этого представим (6.7) в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_{11}v_1(k) + \dots + b_{1m}v_m(k), \\ \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_{n1}v_1(k) + \dots + b_{nm}v_m(k). \end{cases}$$

Применим к последним уравнениям z -преобразование:

$$\begin{cases} z[X_1(z) - x_1(0)] = a_{11}X_1(z) + \dots + a_{1n}X_n(z) + b_{11}V_1(z) + \dots + b_{1m}V_m(z), \\ \vdots \\ z[X_n(z) - x_n(0)] = a_{n1}X_1(z) + \dots + a_{nn}X_n(z) + b_{n1}V_1(z) + \dots + b_{nm}V_m(z). \end{cases}$$

В векторно-матричной форме эти уравнения будут:

$$z[X(z) - X(0)] = AX(z) + BV(z),$$

откуда
$$X(z) = z[zE - A]^{-1}X(0) + [zE - A]^{-1}BV(z), \quad (6.9)$$

где E – единичная диагональная матрица $\text{diag}[1 \ 1 \ \dots \ 1]$.

Применяя к (6.9) обратное z -преобразование, получим решение в виде:

$$X(n) = \Phi(n)X(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(n-1-k)BV(k). \quad (6.10)$$

Из сравнения (6.10) и (6.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= Z^{-1} \left\{ z[zE - A]^{-1} \right\} = A^n, \\ \Phi(n-1-k) &= Z^{-1} \left\{ [zE - A]^{-1} \right\} = A^{n-1-k}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Рассматривая дискретную систему с одним входом и одним выходом, можно получить передаточную функцию системы по матрицам.

Если начальные условия нулевые (т. е. $X(0) = 0$), то из (6.9) следует:

$$X(z) = [zE - A]^{-1} BV(z).$$

Подставив это значение в z -изображение второго уравнения (6.5), получим:

$$Y(z) = CX(z) = C[zE - A]^{-1} BV(z),$$

откуда

$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = C[zE - A]^{-1} B. \quad (6.12)$$

Пример 6.1. Пусть передаточная функция дискретной системы

$$K(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}.$$

Изобразим модель в пространстве состояний (рис. 6.3).

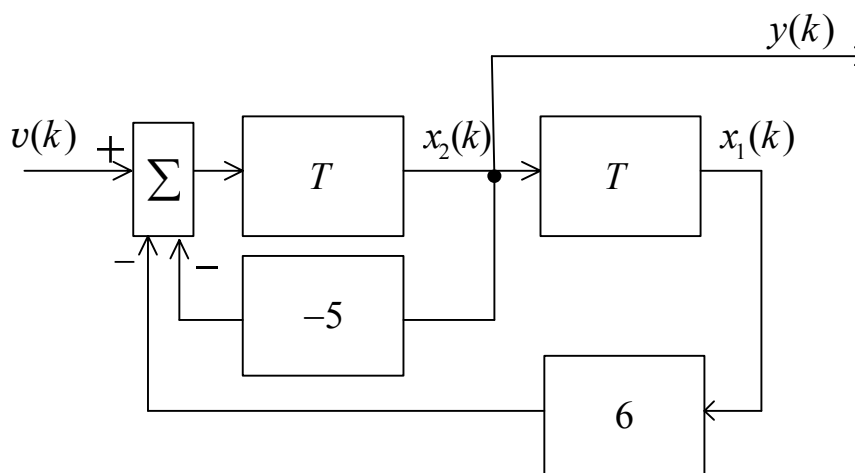


Рис. 6.3. Схема модели

Уравнения состояния в развернутом виде:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = -6x_1(k) + 5x_2(k) + v(k), \\ y(k) = x_2(k); \end{cases}$$

в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(k), \\ y(k) = [0 \quad 1] X(k). \end{cases}$$

Решим уравнения итерационным методом, полагая что $X(0) = 0$; $v(k) = 1$ при $k = 0, 1, 2, \dots$; $y(0) = 0$.

$$X(1) = AX(0) + Bv(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y(1) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1;$$

$$X(2) = AX(1) + Bv(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad y(2) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 6;$$

$$X(3) = AX(2) + Bv(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad y(3) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \end{bmatrix} = 25;$$

$$\vdots$$

Решим эти уравнения с использованием z -преобразования.

$[zE - A] = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z-5 \end{bmatrix}$; $|zE - A| = z^2 - 5z + 6$, корни уравнения $z^2 - 5z + 6 = 0$ будут:

$z_1 = 2$, $z_2 = 3$, тогда $[zE - A]^{-1} = \frac{1}{|zE - A|} [zE - A]_{np} = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix}$, где

$[zE - A]_{np}$ – матрица, присоединенная относительно матрицы $[zE - A]$.

$X(z) = [zE - A]^{-1} BV(z)$. Так как $V(z) = \frac{z}{z-1}$, то

$$X(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} = \begin{bmatrix} \frac{z}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} \\ \frac{z^2}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} \end{bmatrix},$$

$$Y(z) = CX(z) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{z}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} \\ \frac{z^2}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} \end{bmatrix} = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Разложим выражение $\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ на простые дроби.

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{\beta_1}{z-1} + \frac{\beta_2}{z-2} + \frac{\beta_3}{z-3},$$

где $\beta_1 = \frac{(z-1)z}{(z-1)(z-2)(z-3)} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2};$ $\beta_2 = \frac{(z-2)z}{(z-1)(z-2)(z-3)} \Big|_{z=2} = -2;$

$$\beta_3 = \frac{(z-3)z}{(z-1)(z-2)(z-3)} \Big|_{z=3} = 1,5.$$

Тогда $Y(z) = \frac{0,5z}{z-1} - \frac{2z}{z-2} + \frac{1,5z}{z-3}$ и по таблице соответствия изображений и оригиналов получим, что $y(k) = 0,5 \cdot 2^k - 2 \cdot 2^k + 1,5 \cdot 3^k$, откуда следует, что $y(0) = 0; y(1) = -1; y(2) = 6; y(3) = 15$. Результаты обоих методов совпали.

Наконец получим дискретную передаточную функцию по формуле (6.12).

Запишем $[zE - A]^{-1} = \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z-5}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ -\frac{6}{\Delta} & \frac{z}{\Delta} \end{bmatrix}$, где $\Delta = z^2 - 5z + 6$.

$$K(z) = C[zE - A]^{-1} B = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{z-5}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ -\frac{6}{\Delta} & \frac{z}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{\Delta} & \frac{z}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z}{\Delta} = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}, \quad \text{что}$$

соответствует исходной передаточной функции.

57. Основные формы уравнений состояния импульсных систем

В общем случае динамика ИСАУ описывается уравнениями (6.6):

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + BV(k), \\ Y(k) &= CX(k). \end{aligned}$$

Если матрица A представлена в форме Фробениуса

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

то имеем нормальную форму уравнений состояния.

Получим другую форму уравнений состояния. Пусть дискретная передаточная функция замкнутой ИСАУ имеет вид

$$K_3(z) = \frac{Y(z)}{V(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}, \quad (6.14)$$

где z_1, z_2, \dots, z_n – корни характеристического уравнения и $m < n$.

Если корни простые, то $K_3(z)$ можно разложить на простые дроби:

$$K_3(z) = \frac{\beta_1}{z - z_1} + \frac{\beta_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{z - z_n}, \quad (6.15)$$

где $\beta_i = (z - z_i) K_3(z) \Big|_{z=z_i}$.

Тогда

$$Y(z) = K_3(z) V(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{z - z_i} V(z). \quad (6.16)$$

Обозначим $\frac{\beta_i}{z - z_i} V(z) = X_i(z)$, тогда $Y(z) = \sum_{i=1}^n X_i(z)$.

Используя обратное z -преобразование и учитывая, что $x_i(k+1) = Z^{-1} \{ z X_i(z) \}$, а $v_i(k) = Z^{-1} \{ V_i(z) \}$, перейдем к оригиналам:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = z_1 x(k) + \beta_1 v(k), \\ \cdots \\ x_n(k+1) = z_n x_n(k) + \beta_n v(k), \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + \cdots + x_n(k). \end{cases} \quad (6.17)$$

или в матричном виде:

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & z_m \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} V(k), \\ Y(k) = [1, \dots, 1] X(k) \end{cases} \quad (6.18)$$

Окончательно в компактной форме:

$$\begin{cases} X(k+1) = ZX(k) + BV(k), \\ Y(k) = CX(k). \end{cases} \quad (6.19)$$

Форма уравнений состояния (6.18) называется канонической. В ней основная матрица является диагональной: $Z = \text{diag}[z_1 \ z_2 \dots \ z_n]$.

Если среди корней характеристического уравнения есть кратные, то основная матрица имеет форму Жордана.

58 Управляемость и наблюдаемость дискретных систем

Понятия управляемости и наблюдаемости дискретных систем аналогичны понятиям, рассмотренным для непрерывных систем (см. разд. 9.8, ч.1 ЭУМК). Дискретная система, описываемая уравнениями (6.5), называется полностью управляемой, если для моментов времени $t(0)$ и $t(l)$ и состояниях $x(t_0)$ и $x(t_l)$ существует управление $v(k)$, причем

$0 \leq k \leq l$, переводящее начальное состояние $x(t_0)$ в конечное $x(t_l)$.

Критерий управляемости связан с невырожденностью матрицы управляемости $K_y = [B:AB:\dots:A^{n-1}B]$. Для системы с одним входом и одним выходом критерий управляемости сводится к условию:

$$\det K_y \neq 0. \quad (6.23)$$

Это можно доказать, воспользовавшись формулой (6.8). Приняв момент времени $l = n$, найдем

$$x(n) = A^n x(0) + A^{n-1} B v(0) + \dots + B v(n-1). \quad (6.24)$$

Соотношение можно представить в виде:

$$x(n) = A^n x(0) + [B:AB:\dots:A^{n-1}B] \begin{bmatrix} v(n-1) \\ v(n-2) \\ \dots \\ v(0) \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

Из последнего выражения получаем:

$$\begin{bmatrix} v(n-1) \\ v(n-2) \\ \dots \\ v(0) \end{bmatrix} = [B:AB:\dots:A^{n-1}B]^{-1} [x(n) - A^n x(0)] = K_y^{-1} [x(n) - A^n x(0)], \quad (6.26)$$

а это возможно, когда $\det K_y \neq 0$, поскольку $K_y^{-1} = \frac{1}{\det K_y} K_{yпр}$.

Дискретная система, называется полностью наблюдаемой, если в момент наблюдения $t = t(l)$ по данным измерения $y(t_l)$ и известным значениям $v(t_l)$ можно восстановить вектор состояния в момент $k = 0$. Поскольку наблюдаемость не зависит от входной переменной, можно рассматривать систему как автономную, т.е. (6.8) представить в виде:

$$X(n) = A^n X(0). \quad (6.27)$$

Критерий наблюдаемости связан с невырожденностью матрицы наблюдаемости $K_H = [C^T:A^T C^T:\dots:(A^T)^{n-1} C^T]$. Для одномерной системы этот критерий имеет вид:

$$\det K_H \neq 0. \quad (6.28)$$

Положив $l = n - 1$ и учитывая (6.27), найдем значения $y(0), \dots, y(n - 1)$:

$$y(0) = C^T x(0), y(1) = C^T Ax(0), \dots, y(n - 1) = C^T A^{n-1} x(0),$$

или в компактном виде:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T & C^T A^T & \dots & C^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} x(0) = K_H x(0). \quad (6.29)$$

Если матрица K_H обратима ($\det K_H \neq 0$), то можно найти

$$x(0) = K_H^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(n-1) \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

59. Замена дискретной системы эквивалентной непрерывной системой

В случае систем второго типа (рис. 5.1, б) задача усложняется. В инженерной практике обычно эту структурную схему сводят к эквивалентной непрерывной схеме на основании следующих преобразований:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}, \text{ а } X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-skT}T. \quad (5.1)$$

Моделью идеального импульсного элемента можно считать

$$K_{ИИЭ} = \frac{X^*(s)}{X(p)} = \frac{1}{T}.$$

Для экстраполятора нулевого порядка $K_{\phi V}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$.

$$\text{Как было показано ранее, } K_{\phi V}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = Te^{-j\omega \frac{T}{2}} \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}.$$

Если $\frac{\omega T}{2} \ll 1$, то $\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} = 1$, $K_{\phi V}(j\omega) = Te^{-j\omega \frac{T}{2}}$ и передаточная функция импульсного элемента

$$K_{ИЭ}(s) = K_{ИИЭ}(s)K_{\phi V}(s) = \frac{1}{T}Te^{-s \frac{T}{2}} = e^{-s \frac{T}{2}}. \quad (5.2)$$

Таким образом, реальный импульсный элемент с устройством хранения информации вносит запаздывание, равное $\frac{T}{2}$. Преобразованная таким образом структурная схема представлена на рис. 5.2.

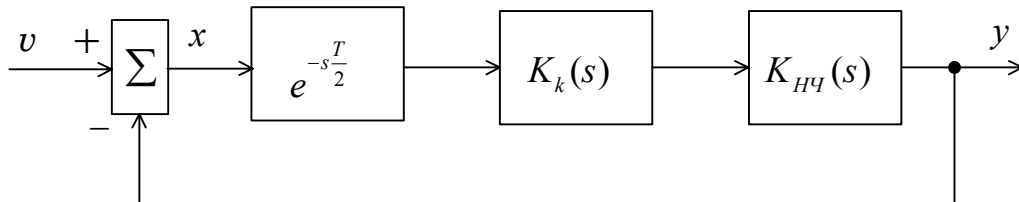


Рис. 5.2. Преобразованная структурная схема дискретной системы

На практике при моделировании применяют более точное выражение:

$$K_{ИЭ}(s) = e^{-s \frac{T}{2}} = \frac{1 - s \frac{T}{2}}{1 + s \frac{T}{2}}. \quad (5.3)$$

Как следует из (5.3), эта передаточная функция соответствует неминимально-фазовому звену.

При принятии решения о замене дискретной системы эквивалентной непрерывной системой необходимо сравнить значение периода дискретизации T с рядом величин, влияющих на процессы в системе. Эквивалентирование возможно при выполнении ряда условий:

1. $T \ll \frac{\pi}{\omega_{\max}}$, где ω_{\max} – наибольшая частота возмущающих и задающих сигналов. Обычно принимают $\omega_{\max} = (2 \div 5)\omega_c$.

2. $T \ll \frac{t_p}{n}$, где t_p – время регулирования, а n – порядок системы.

3. В следящих системах с учетом динамической точности $T \ll \sqrt{\frac{8e_{\text{дон}}}{\ddot{v}_{\max}}}$, где $e_{\text{дон}}$ – заданная ошибка слежения, \ddot{v}_{\max} – максимальное ускорение входного сигнала.

4. С учетом ухудшения запаса устойчивости $T \ll (0,1 \div 0,5)/\omega_p$, где ω_p – рабочая частота сигналов в системе.

5. С учетом показателя колебательности $T \ll (2/\omega_c) M/(M+1)$.

Из всех ограничений выбирают наиболее жёсткое.

После этого осуществляется расчет коррекции методами непрерывных систем. Правильность выбора величины периода дискретизации подтверждается результатами компьютерного моделирования системы.

60. Синтез цифровых систем методом w -преобразования

Рассмотрим цифровую систему со структурой, приведенной на рис. 5.5.

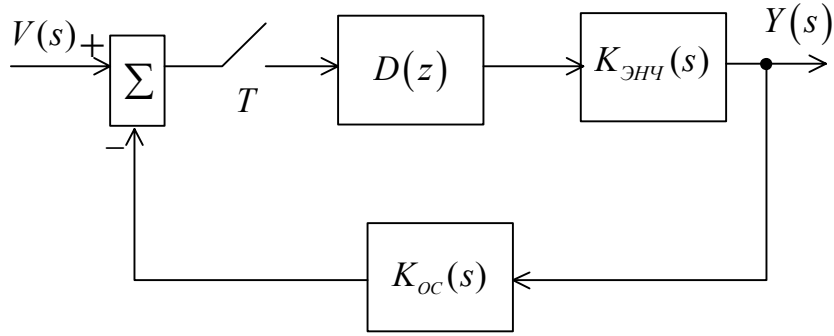


Рис. 5.5. Цифровая система управления:
 $D(z)$ -цифровой регулятор, $K_{OC}(s)$ -датчик

Передаточная функция замкнутой системы $K_3(z) = \frac{D(z)K_{ЭНЧ}(z)}{1 + D(z)(K_{ЭНЧ}K_{OC})(z)}$,

а характеристическое уравнение

$$1 + D(z)(K_{ЭНЧ}K_{OC})(z) = 0. \quad (5.4)$$

Будем рассматривать корректирующие устройства первого порядка вида:

$$D(z) = \frac{K_d(z - z_0)}{z - z_p}, \quad (5.5)$$

где z_0 – нуль, z_p – полюс, K_d – коэффициент передачи передаточной функции $D(z)$.

Для использования частотного метода синтеза необходимо перейти от z -плоскости к w -плоскости путем замены переменной z на w :

$$D(w) = D(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}}. \quad (5.6)$$

$D(w)$ имеет первый порядок, ее представляют в виде:

$$D(w) = \frac{1 + \frac{w}{\omega_{w0}}}{1 + \frac{w}{\omega_{wp}}}, \quad (5.7)$$

где ω_{w0} и ω_{wp} соответственно нуль и полюс $D(w)$ на w -плоскости.

Для реализации регулятора необходимо перейти от $D(w)$ к $D(z)$:

$$\begin{aligned}
D(z) &= \frac{1 + \frac{w}{\omega_{wo}}}{1 + \frac{w}{\omega_{wp}}} \Big|_{w = \frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{\omega_{wp} \left(\omega_{wo} + \frac{2z-1}{Tz+1} \right)}{\omega_{wo} \left(\omega_{wp} + \frac{2z-1}{Tz+1} \right)} = \frac{\omega_{wp} \omega_{wo} T(z+1) + 2(z-1)}{\omega_{wo} \omega_{wp} T(z+1) + 2(z-1)} = \\
&= \frac{\omega_{wp} T \left[\left(\omega_{wo} + \frac{2}{T} \right) z - \left(\frac{2}{T} - \omega_{wo} \right) \right]}{\omega_{wo} T \left[\left(\omega_{wp} + \frac{2}{T} \right) z - \left(\frac{2}{T} - \omega_{wp} \right) \right]} = \frac{\omega_{wp} \left(\frac{2}{T} + \omega_{wo} \right) z - \frac{\frac{2}{T} - \omega_{wo}}{\frac{2}{T} + \omega_{wo}}}{\omega_{wo} \left(\frac{2}{T} + \omega_{wp} \right) z - \frac{\frac{2}{T} - \omega_{wp}}{\frac{2}{T} + \omega_{wp}}}. \quad (5.8)
\end{aligned}$$

С учетом (5.5) параметры регулятора на z -плоскости:

$$K_d = \frac{\omega_{wp} \left(\frac{2}{T} + \omega_{wo} \right)}{\omega_{wo} \left(\frac{2}{T} + \omega_{wp} \right)}; \quad z_0 = \frac{\frac{2}{T} - \omega_{wo}}{\frac{2}{T} + \omega_{wo}}; \quad z_p = \frac{\frac{2}{T} - \omega_{wp}}{\frac{2}{T} + \omega_{wp}}. \quad (5.9)$$

При этом если $\omega_{wp} < \omega_{wo}$, регулятор обладает отставанием по фазе; если же $\omega_{wp} > \omega_{wo}$ – опережением по фазе.