Методические указания к практическим и лабораторным занятиям по курсу «Математические основы искусственного интеллекта»

Практические занятия 1
Часть 1. Элементы общей алгебры 1
ЗАНЯТИЕ 1 1
ЗАНЯТИЕ 2. 7
ЗАНЯТИЕ 3. 12
ЗАНЯТИЕ 4. 16
Часть 2. Математическая логика 21
ЗАНЯТИЕ 1. 21
ЗАНЯТИЕ 2. 23
ЗАНЯТИЕ 3. 26
ЗАНЯТИЕ 4. 29
Лабораторный практикум 35
Лабораторная работа №1: Реализация операций над множествами. 35
Лабораторная работа №2: Выявление свойств бинарных отношений. Реализация операций над отношениями. 38
Лабораторная работа №3: Решение задач на графах 41
Лабораторная работа №4: Интерпретация формул языка логики высказываний. Представление и переработка информационных конструкций в виде графов 44
Лабораторная работа №5: Исследование свойств логических функций. 46
Лабораторная работа №6: Приведение логических функций 48
к совершенной дизъюнктивной нормальной форме и совершенной конъюнктивной нормальной форме. 48
Приложение: индивидуальные задания к практическим занятиям 51
Часть 1. Элементы общей алгебры 51
Часть 2. Математическая логика 64

Практические занятия

Часть 1. Элементы общей алгебры

ЗАНЯТИЕ 1

Ключевые слова: Множество. Принадлежность элемента множеству. Подмножество. Включение подмножества в множество, как отношение (типы и свойства этого отношения). Мощность множества. Конечное, бесконечное и пустое множество. Способы задания множеств. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение. Вектор. Проекция. Декартово произведение.

Множество – одно из основных исходных понятий математики. Множество состоит из элементов. Принадлежность элемента а множеству М обозначается $a \in M$; не принадлежность а множеству М обозначается $a \notin M$.

Как и любое другое исходное понятие математической теории, понятие множества не определяется. Ведь всякое определение содержит другие понятия, логически предшествующие определяемому; поэтому первое определение теории обязательно содержит неопределяемые понятия, которые принимаются за исходные. В качестве исходных обычно выбираются понятия, в понимании которых не возникает существенных разногласий; более точно: различия в понимании которых не нарушает правильности ни одного положения теории.

Под множеством понимается набор предметов, которые имеют по крайней мере одно общее качество.

Пример 1.1.

а) ягоды и грозди винограда, четные и нечетные числа, точки некоторой прямой, предложения из книги;

б) M1 - множество всех решений уравнения sinx=1; элементы этого множества – числа, являющиеся решениями этого уравнения,

в) M2 - множество всех чисел вида $\pi/2\pm\kappa\pi$, где κ=0,1,2,...

г) множество всех действительных чисел (R).

Следует обратить внимание на то, что в природе множеств не существует (также как, например, не существует такого объекта как "система"). Множество – математическое абстрактное понятие, которое конкретизируется в зависимости от предметной области, решаемых в ней задач, инженера знаний и т.д.

Принадлежность (отношение) элемента a множеству M обозначается $a\in M$, непринадлежность - $a\notin M$. Два множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Все элементы должны быть различными, т.е. они не могут совпадать. Множества могут служить элементами других множеств, возможны множества множеств, множества множеств множеств и т.д.

Множество B называется подмножеством множества A, если всякий элемент B является элементом A. A содержит или покрывает B. Множества A и B равны, если их элементы совпадают. Доказательство равенства множеств сводится к доказательству включения объектов в одну и в другую стороны. Т.е. множества A и B равны, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Пример 1.2.

Тригонометрическая теорема, состоящая из двух утверждений:

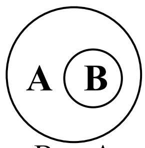
а) всякое решение (M1) уравнения sinx=1, имеет вид $\pi/2\pm\kappa\pi$ (M2), κ=0, 1, 2,...; ($M1 \subseteq M2$);

б) всякое число вида $\pi/2\pm\kappa\pi$ (M2) является решением (M1) уравнения sinx=1 ($M2 \subseteq M1$).

Следовательно M1 = M2.

Т.о. необходимо различать отношения принадлежности ($\in$) и включения ($\subseteq$). Например, верно, что множество футболистов футбольной команды (M1) является подмножеством людей (M2): $M1 \subseteq M2$. Однако, не верно, что $M1 \in M2$ (M1 является элементом M2), т.к. эти множества разной природы. Если M1 знак некоторой футбольной команды как единого целого, не уточняя из чего это множество состоит, а M2 – это множество знаков всех футбольных команд, например, высшей лиги, то было бы верно, что $M1 \in M2$.

Есть строгое и нестрогое включение (отношение включения). Отношение (!) включения является несимметричным. Например, множество простых чисел включено в множество натуральных чисел.



$B \subset A$

Отношение включения транзитивно, поскольку из $A \subset B$ и $B \subset C$ следует $A \subset C$. Например, A – множество квадратов, B – множество прямоугольников, C – множество четырехугольников. Ясно, что $A \subset B$ и $B \subset C$; следовательно $A \subset C$.

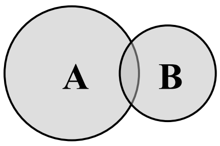
Множества могут быть конечными (т.е. состоящими из конечного числа элементов) и бесконечными. Число элементов в конечном множестве называется мощность. Множество мощности 0, т.е. не содержащее элементов, называется пустым множеством. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества. Мощность бесконечного множества называется трансфинитным числом. С последним понятием связан парадокс Кантора. Кантор доказал, что каково бы ни было трансфинитное число, существует большее трансфинитное число, и что максимального трансфинитного числа не существует. Для этого рассмотрим множество, элементами которого являются все возможные множества. Очевидно, что такое множество всех множеств содержит больше элементов, чем любое другое множество. Но если это так, его мощность и будет максимальной. Но какое из двух этих множеств (множество всех возможных множеств и бесконечное множество) все-таки имеет большую мощность. Разрешение парадокса заключается в следующем. Видимо, первое множество можно также назвать бесконечным. Тогда будем считать, что нет различий в мощности между различными бесконечными множествами, т.е. все бесконечным множества имеют одинаковую мощность.

Способы задания множеств

1. Перечислением (списком своих элементов). Списком можно задавать лишь конечные множества. Например, A={a,b,c,d} означает, что множество A состоит из 4-х элементов.
2. Описанием характеристических свойств, которыми должны обладать элементы множества. Например, $\{x \in A$: x – четное число$\}$, что означает: “элементы x, принадлежащие множеству A, характеризуются тем, что являются четными числами”. Множество хороших фильмов. Т.е. множество задается описанием (на естественном языке, на языке математических формул и т.д.) критериев, по которым производится включение элементов в это множество.
3. Порождающей процедурой. Описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо из других объектов. Элементами множества считаются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, исходными объектами для построения множества являются натуральные числа, а порождающей процедурой – вычисление, описанное формулой $\pi/2 \pm k\pi$. Пусть задано множество A. По определенному правилу можно разбить A на два подмножества, которые не имеют ни одного общего элемента. Например, A – множество натуральных чисел, < 10, и пусть S(x) – условие того, что элемент x должен быть нечетным числом. Это правило приводит к образованию множества {1,3,5,7,9}.

Операции над множествами

Объединение множеств A и B – это множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B:



$A \cup B = \{x: x \in A$ или $x \in B\}$

Объединение произвольной совокупности множеств: для каждого непустого набора множеств существует множество, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному множеству заданного набора.

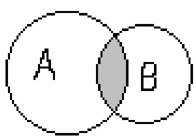
Пример1.3.

а) $\{1,3\} \cup \{5,7\} = \{1,3,5,7\}$;
б) $\{1,3\} \cup \{3,9\} = \{1,3,9\}$.

Объединение обладает следующими свойствами:

1) $A \cup \varnothing = A$;
2) $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность);
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность);
4) $A \cup A = A$ (идемпотентность); Свойство идемпотентности множеств относительно операции $\cup$ аналогично свойству, которым обладает число 1 по отношению к операции умножения $1*1 = 1^2 = 1$, откуда видно, что число 1, возведенное в любую степень, имеет ту же величину 1.
5) $B \subset A$ тогда и только тогда, когда $B \cup A = A$ (поглощение).

Пересечение множеств A и B – это множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и A, и B. (Пересечение множеств A и B есть множество, образованное из



$A \cap B = \{x: x \in A$ и $x \in B\}$

элементов, общих множествам А и В.):

Пересечение произвольной совокупности множеств: для каждого непустого набора множеств существует множество, которое состоит из элементов, принадлежащих каждому множеству заданного набора. Для любого набора S непустых множеств, существует множество V, такое, что $x \in V$ тогда и только тогда, когда $x \in X$ для любого X из S:

$$V = \{\forall x\ ,\ x \in V:\ x \in X,\ \forall X \in S\}.$$

Пример 1.4.

X = {1, 2, ..., n}, где m <= n <= p. Пересечением всех этих множеств является множество {1, 2, ..., m}.

Система множеств, в которой все попарные пересечения множеств (пересечение каждого множества с каждым) пусты, называется разбиением множества U всех элементов этих множеств, а множества такой системы называются классами или блоками разбиения. Всякий элемент U входит в один и только один класс разбиения.

Пример 1.5.

а) $\{1,3\} \cap \{3,9\} = \{3\}$;

б) $\{1,3\} \cap \{5,7\} = \varnothing$.

Пересечение обладает следующими свойствами:

1) $A \cap \varnothing = \varnothing$;
2) $A \cap B = B \cap A$;
3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
4) $A \cap A = A$;
5) $B \subset A$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = B$ (поглощение).

Можно доказать следующие дистрибутивные формулы (де Моргана):

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Разность множеств А и В – это множество, состоящее из всех тех и только тех элементов А, которые не содержатся в В:

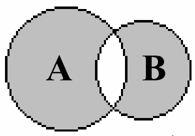
$$A - B = \{\ x \in A\ \text{ и } x \notin B\}$$

Однако это определение не предполагает выполнения условия $B \subset A$.

Разность обладает следующими свойствами:

1) $A - B \neq B - A$;
2) Если $A - B = \varnothing$, то $A \subseteq B$;
3) Если $A - B = A$, то $A \cap B = \varnothing$.

Если А и В – множества, то симметрическая разность множеств А и В задается формулой:



$A + B = (A - B) \cup (B - A)$

Симметрическая разность обладает следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$(коммутативность);
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность);
3) $A + \varnothing = A$;

4) $A + A = \varnothing$.

Если все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого «универсального» множества U, то может быть определена операция дополнения ($\neg$). Дополнением (до U) множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих A (но принадлежащих U).

Операция дополнения обладает следующими свойствами:
1) $\neg(\neg A) = A$;
2) $A \cap \neg A = \varnothing$;
3) $\neg\varnothing = U$;
4) $\neg A \cup A = U$.

Вектор – это упорядоченный набор элементов (другой синоним – «кортеж»), также как и множество будем считать это понятие неопределяемым. Элементы, образующие вектор, называются координатами или компонентами вектора. Координаты нумеруются слева на право. Число координат называется длиной или размерностью вектора. В отличие от элементов множества координаты вектора могут совпадать. Векторы длины 2 часто называют упорядоченными парами (или просто парами), векторы длины 3 – тройками и т.д. Два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и соответствующие координаты их равны.

Проекция вектора $v = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на i-ю ось (обозначение $пр_i v$) – это i-я его компонента:

$$пр_i v = a_i$$

Набор проекций вектора $v = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на оси с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$ – это вектор $(ai_1, ai_2, ..., ai_k)$ длины k (обозначение $пр\ i_1, i_2, ..., i_k v$).

Пусть V – множество векторов одинаковой длины. Тогда проекцией множества V на i-ю ось называется множество проекций всех векторов из V на i-ю ось:

$$пр_i V = \{пр_i v \mid v \in V\}$$

Аналогично определяется проекция множества V на несколько осей:

$$пр\ i_1, i_2, ..., i_k V = \{пр\ i_1, i_2, ..., i_k v \mid v \in V\}$$

Декартово произведение (прямое произведение) множеств A и B ($A \times B$) – это множество всех пар (a, b), таких, что $a \in A$, $b \in B$. В частности, если A=B, то обе координаты принадлежат A. Такое произведение обозначается A^2.

Теорема 1.1. Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – конечные множества и $m_1, m_2, ..., m_n$ – соответственно их мощности. Тогда мощность множества $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ равна произведению мощностей $A_1, A_2, ..., A_n$:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = m_1 * m_2 * ... * m_n$$

Следствие:

$$|A^n| = |A|^n$$

Задачи:

1. Доказать или опровергнуть тождественность выражений, где β (X) – булеан множества X:
   $\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$
   $\beta(A \cup B) = \beta(A) \cup \beta(B)$
   $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
   $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$
   $A/(B/C) = (A/B) \cup (A \cap C)$
   $A/(B \cup C) = (A/B)/C$
   $A \cap (B/C) = (A \cap B)/C$
   $A \cup (B/C) = (A \cup B)/C$
   $A/B = A/(A \cap B)$
   $A/(A/B) = (A \cap B)$
   $A \cup B = A - (A \cap B) - B$
   $A/B = A - (A \cap B)$

$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B)$
$A \cap (B/A) = \varnothing$

2. Решить системы (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение):

$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$

$\begin{cases} A/X = B \\ X/A = C \end{cases}$

$\begin{cases} A/X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$

$\begin{cases} A \cap X = B \\ X/A = C \end{cases}$

$\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = C \cup X \end{cases}$

$\begin{cases} A/X = X/B \\ X/A = C/X \end{cases}$

$\begin{cases} A \cap X = B/X \\ C \cup X = X/A \end{cases}$

$\begin{cases} A \cap B = B \cup X \\ C \cup B = B/X \end{cases}$

3. Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing \in \{\varnothing\}$
$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$
$\varnothing \in \{\{\varnothing\},\varnothing\}$
$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$
$\varnothing \in \{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

4. Найдите $A - B$, A/B, B/A, $A \cup B$, $B \cap A$:
$A = \{B, \varnothing\}$
$B = \{\varnothing\}$
$A = \{B, t, \{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, B\}$
$A = \{\langle z, t\rangle, x, (B/A)/\{\varnothing,\langle t, z\rangle\},\{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, \langle t, z\rangle\}$

5. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A', B':

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 4\}$, $U = \{0, 1, 2,..., 9\}$;

$A = \{x \mid x$ делится на $2\}$, $B = \{x \mid x$ делится на $3\}$, $U = \mathbf{N}$.

6. Пусть дано некоторое множество, знак этого множества, некоторое изображение знака указанного множества, множество всевозможных изображений знака указанного множества. Что значит, задать множество и как задание множества может выглядеть в виде текста формального языка? Предложите несколько вариантов.

7. Перечислить ограничения, накладываемые на элементы множеств? Из каких объектов можно построить множество?

8. Перечислить ограничения, накладываемые на изображения знаков множеств? Любой ли объект можно использовать в качестве изображения знака какого-либо множества?

9. Какими преимуществами обладают нормализованные множества по сравнению с ненормализованными?

10. Можно ли изобразить ненормализованную пару принадлежности в виде текста формального языка? Если можно, то приведите пример.

11. Докажите, что не все пары синонимии являются нормализованными множествами.

ЗАНЯТИЕ 2.

Ключевые слова: Соответствие. Всюду определенное, частичное и сюрьективное соответствия. Образ и прообраз элемента. Функциональное соответствие. Взаимнооднозначное соответствие. Равномощность множеств. Конечные и континуальные (бесконечные), счетные и несчетные множества. Отображения и функции: аргумент, значение, местность функции. Обратная функция. Композиция (суперпозиция) функций. Формула. Способы задания функций. Конструктивизм. Отношения.

Соответствие между множествами A и B есть подмножество $G \subseteq A \times B$.
Если $(a, b) \in G$, то говорят, что b соответствует a при соответствии G.
$пр_1G$ – область определения соответствия;
$пр_2G$ – область значения соответствия.
Если $пр_1G = A$, то соответствие называется всюду (полностью) определенным, в противном случае соответствие называется частичным; если $пр_2G = B$, то соответствие называется сюрьективным (обязательным).
Множество всех $b \in B$, соответствующих элементу $a \in A$, называется образом a в B при соответствии G. Множество всех a, которым соответствует b, называется прообразом b в A при соответствии G.
G - Функциональное соответствие (или однозначное), если образом любого элемента из $пр_1G$ является единственный элемент из $пр_2G$.

Пример 2.1.
а) Англо-русский словарь устанавливает соответствие между множеством английских и русских слов. Это соответствие не является функциональным (т.к. одному англ. слову, как правило, ставится в соответствие несколько русских слов); кроме того, оно практически никогда не является полностью определенным: всегда можно найти английское слово, не содержащееся в данном словаре;
б) Позиция на шахматной доске – взаимно однозначное соответствие между множеством оставшихся на доске фигур и множеством занятых ими полей;
в) Различные виды кодирования – кодирование букв азбукой Морзе, представления чисел в различных системах счисления, секретные шифры, входящие и исходящие номера в деловой переписке – соответствия между кодируемыми объектами и присваиваемыми им кодами. Эти соответствия являются полностью определенными и однозачными, но не сюрьективными. Единственность образа и прообраза гарантирует однозначность шифровки и дешифровки. Отсутствие сюрьективности означает, что не всякий код имеет смысл, т.е. соответствует какому-либо объекту.

Взаимно однозначные соответствия и мощности множеств

Между множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие G, если оно всюду определено, сюрьективно, функционально, и, кроме того, прообразом любого элемента из $пр_2G$ является единственный элемент из $пр_1G$.
Следствие: Если между конечными множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие, то $|A|=|B|$.
□ От противного.
1) $|A|>|B|$ тогда, поскольку отображение всюду определено, в A найдутся два такие элемента, которым соответствует один элемент $b \in B$ => нарушится единственность образа;
2) $|B|>|A|$ тогда, поскольку отображение сюрьективно, в B найдутся два элемента, соответствующих одному и тому же $a \in A$ => нарушится единственность прообраза. ■

Это следствие удобно использовать для вычисления мощности множеств. Проиллюстрируем это при помощи следующей теоремы о числе подмножеств конечного множества.
Теорема 2.1. Если для конечного множества A $|A|=n$, то число всех подмножеств A равно 2^n, т.е. $2^{|A|}$.

□ Занумеруем элементы A номерами от 1 до n: $A=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и рассмотрим множество B двоичных векторов длины n. Каждому подмножеству $A^*\subseteq A$ поставим в соответствие вектор $v=(v_1, v_2, ..., v_n)\in B$ следующим образом:

$$v_i=0, \text{ если } a_i\notin A^*;$$
$$v_i=1, \text{ если } a_i\in A^*.$$

Например, если A={a, b, c, d, e}, то подмножеству {a, c, d} соответствует вектор (1,0,1,1,0), а подмножеству {b} соответствует вектор (0,1,0,0,0). Пустому множеству соответствует вектор (0, 0, 0, 0, 0), а самому A – вектор (1,1,1,1,1,). Очевидно, что соответствие между A и B взаимно однозначное и число подмножеств A равно |B|. А так как B является декартовым произведением n двухэлементных множеств {0,1}, то в силу следствия из теоремы 1.1 $|B|=2^n$.■

Пример 2.2.

Количество всех слов конечного алфавита A равно $2^{|A|}$. Т.е. количество слов, например, в русском языке, без учета синтаксических (орфографических, грамматических и морфологических) и семантических условий, т.к. они влияют на количество реально используемых слов, составляет 2^{33}= 8 589 934 592.

Множества равномощны, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Для конечных множеств это утверждение доказывается, т.к. мощность конечного множества – это количество элементов, входящих в это множество. Для бесконечного множества это утверждение является определением равномощности, т.к. все бесконечные множества равномощны.

Множества, взаимооднозначно соответствующие (равномощные) множеству N, называются счетными, т.е. множество можно пронумеровать натуральными числами. Вообще любое бесконечное подмножество N счетно. Объединение конечного числа счетных множеств счетно. Объединение счетного множества конечных счетных множеств (или множеств без уточнения их элементов) также счетно.

Множество всех действительных чисел отрезка [0, 1] не является счетным (теорема Кантора). Действительно, предположим, что оно счетно и существует его нумерация. Расположим все числа, изображенные бесконечными десятичными дробями, в порядке этой нумерации:

$$0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ ...$$
$$0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ ...$$
$$0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ ...$$
$$.......................$$

Рассмотрим любую бесконечную дробь $0, b_1\ b_2\ b_3$ ..., такую, что $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$, и т.д. Эта дробь не может войти в указанную последовательность, т.к. от первого числа она отличается первой цифрой, от второго – второй цифрой и т.д. Следовательно, все числа отрезка [0, 1] не могут быть пронумерованы, и множество всех действительных чисел отрезка [0, 1] несчетно. Его мощность называется континуум (уже упоминалась мощность бесконечного множества с другим своим названием – трансфинитное число); множества такой мощности называются континуальными. Метод, использованный при доказательстве, называется диагональным методом Кантора.

Отображения и функции

Функция – это функциональное соответствие. Функция f устанавливает соответствие между множествами A и B (f : A -> B). Каждому элементу a из своей области определения функция f ставит в соответствие единственный элемент b из области значений (f(a) = b). Элемент a – аргумент функции, b – значение функции на a. Полностью определенная функция f: A->B называется отображением A и B.

Функция типа $A_1\times A_2\times A_3\times\ldots\times A_n$->B называется n-местной функцией. В этом случае принято считать, что функция имеет n аргументов: $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$, где $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $a_3\in A_3$, …, $a_n\in A_n$,

$b \in B$. Сложение, умножение, вычитание и деление являются двухместными функциями на R, т.е. функциями типа R^2 -> R.

Пусть задано соответствие $G \subseteq A \times B$. Если соответствие $H \subseteq B \times A$ таково, что $(b, a) \in H$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in G$, то соответствие H называется обратным к G и обозначается G^{-1}. Если соответствие, обратное к функции f: A->B, является функциональным, то оно называется функцией, обратной к f, и обозначается f^{-1}. Т.к. в обратном соответствии образы и прообразы меняются местами, то для существования функции, обратной к f: A->B, требуется чтобы каждый элемент b из области значений f имел единственный прообраз. Это, в свою очередь означает, что для функции f: A->B обратная функция существует тогда и только тогда, когда f является взаимно однозначным соответствием между своей областью определения и областью значений.

Пусть даны функции f: A->B и g: B->C. Функция h: A->C называется композицией функций f и g:

$$h(x)=g(f(x)), \text{ где } x \in A$$

Для многоместных функций f: A^m->B, g: B^n->C возможны различные подстановки f и g, дающие функции различных типов.

Пример 2.3.

Функция $h_1=g(x_1, f(y_1,y_2,y_3), x_3, x_4)$ имеет 6 аргументов и тип $B \times A^3 \times B^2$->C.

Особый интерес представляет случай, когда задано множество функций типа:

$$f_1: A^{m1} \to A, \ldots, f_n: A^{mn} \to A$$

В этом случае возможны, во-первых, любые подстановки функций друг в друга, а во-вторых, любые переименования аргументов, например переименование x_3 в x_2, порождающее из функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ функцию трех аргументов $f(x_1, x_2, x_2, x_4)$. Функция, полученная из $f_1, \ldots, f_n$ некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов, называется суперпозицией $f_1, \ldots, f_n$. Выражение, описывающее эту суперпозицию и содержащее функциональные знаки и символы аргументов, называется формулой.

Способы задания функций

1. Функции, определенные на конечных множествах, задаются таблицей (например, булевы функции). На бесконечных множествах (например, log(x)), эти функции задают только в конечном числе точек. Для вычисления (приближенных) значений функций в промежуточных точках служат правила интерполяции (экстраполяции).
2. Функция задается формулой, описывающей функцию как суперпозицию других (исходных) функций. Например, $\log^2(x_1+x_2)+3\sin(\sin(x_1))+x_3$ – функция элементарна, т.к. является результатом нескольких последовательных суперпозиций x_1+x_2, x^2, log(x), 3x, sin(x). Функцию можно также задать с помощью графика.
3. Функция задается с помощью рекурсивной процедуры. Например, n!: 1) 0!=1, 2) (n+1)!=n!(n+1).
4. Описание функции, которое не содержит способ вычисления функции, хотя сомнений в том, что функция однозначно задана, не возникает. Например,

$$f(x)=x, \text{ если } x \in M;$$
$$f(x)=0, \text{ если } x \notin M.$$

Поскольку функция – это функциональное соответствие одного множества другому, то задать функцию – значит описать определяющее ее подмножество. Однако можно определить понятие функции и не используя теорию множеств: функция считается заданной, если задана вычислительная процедура, которая по любому заданному значению аргумента выдает соответствующее значение функции. Функция, определенная таким образом называется вычислимой. Процедура должна однозначно приводить к результату. Уточнение понятия однозначной и результативной процедуры привело к созданию теории алгоритмов. Т.о. понятие алгоритма может быть принято за исходное при построении всей системы понятий математики. Такой подход к обоснованию математики, называемый конструктивным (или конструктивизм), допускает только те математические объекты и утверждения, которые могут быть получены с помощью алгоритмов. Понятие множества перестает быть первичным; оно определяется с помощью разрешающей или порождающей процедуры. Множества, для которых таких процедур нет, просто не рассматриваются.

Взаимно однозначные соответствия и мощности множеств

Если между конечными множествами А и В существует взаимно однозначное соответствие, то $|A|=|B|$. Действительно, если это не так, то либо $|A|>|B|$, и тогда, поскольку отображение всюду определено, в А найдутся два элемента, которым соответствует один и тот же элемент $b\in B$ (нарушится единственность образа), либо $|A|<|B]$, и тогда, поскольку отображение сюръективно, в B найдутся два элемента, соответствующих одному и тому же $a\in A$ (нарушится единственность прообраза)[1].

Этот факт, во-первых, позволяет установить равенство мощностей двух множеств, не вычисляя этих мощностей, а во-вторых, часто дает возможность вычислить мощность множества, установив его взаимно однозначное соответствие с множеством, мощность которого известна или легко вычисляется. В качестве иллюстрации этого приема докажем важную теорему о числе подмножеств конечного множества.

Теорема 1.2. Если для конечного множества А $|A|=n$, то число всех подмножеств А равно 2^n, т. е. $2^{|A|}$.

Занумеруем элементы А номерами от 1 до n: $A=\{a_1, a_2, ..., d_n\}$ и рассмотрим множество B_n двоичных векторов из нулей и единиц длины n. Каждому подмножеству $A^*\subseteq A$ поставим в соответствие вектор $v=(v_1, v_2, ..., v_n)\in B_n$ следующим образом:

$V_i=$ {0, если $a_i \notin A^*$;

{1, если $a_i \in A^*$.

Например, если $A=\{a, Ь, c, d, e\}$, то подмножеству $\{a, c, d\}$ соответствует вектор (1, 0, 1, 1, O), а подмножеству $\{Ь\}$ соответствует вектор (0, 1, O, O, 0). Пустому подмножеству любого А соответствует вектор из одних нулей, а самому A — вектор из одних единиц. Очевидно, что установленное соответствие между множеством всех подмножеств A и двоичными векторами длины n является взаимно однозначным и число подмножеств A равно $|B_n|$. А так как B_n является прямым произведением n двухэлементных множеств {O, 1}, то в силу следствия из теоремы 1.1 $|B_n| =2^n$. □

Множества *равномощны,* если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Для конечных множеств это утверждение доказывается, что и было сделано ранее. Для бесконечных множеств оно является определением равномощности. Множества, равномощные N, называются *счетными.* Соответствие, установленное в примере 1.7,д, показывает, что множество M_2n счетно. Вообще любое бесконечное подмножество N счетно. Действительно, пусть $N'\subset N$. Выберем в N' наименьший элемент и обозначим его n_1; в $N'\setminus\{n_1\}$ выберем наименьший элемент и обозначим его n_2; наименьший элемент $N'\setminus[n_1, n_2\}$ обозначим n_3 и т. д. Поскольку для всякого натурального числа имеется лишь конечное множество меньших натуральных чисел, то любой элемент N' рано или поздно получит свой номер. Эта нумерация, т. е. соответствие (n_i, i), и есть взаимно однозначное соответствие между N' и N.

Множество N^2 счетно. Нумерацию N^2 можно устроить следующим образом. Разобьем N^2 на классы. К первому классу $N^2{}_1$ отнесем все пары чисел с минимальной суммой. Такая пара всегда одна: (1,1). Ко второму классу $N^2{}_2$ отнесем все пары чисел с суммой 3: $N^2{}_2=\{(1, 2), (2, 1)\}$, В общем случае $N^2{}_i=\{(a, b)|a+b=i+1\}$. Каждый класс $N^2{}_i$, содержит ровно i пар. Упорядочим теперь классы по возрастанию индексов i, а пары внутри класса — по возрастанию первого элемента и занумеруем получившуюся последовательность пар номерами 1, 2, 3... Легко видеть, что если $a+Ь=i+1$, то пара $(a, Ь)$ получит номер $1+2+...+(i—l)+ +a$. Эта нумерация и доказывает счетность N^2, из которой, в свою очередь, непосредственно следует счетность множества P положительных рациональных чисел, т. е. дробей вида $a/Ь$, где a и $Ь$ — натуральные числа[1]. Аналогично доказывается счетность N^3 и вообще N^k для любого натурального k.

Нетрудно понять, что объединение конечного числа счетных множеств $M_1, M_2, ..., M_k$ счетно. Действительно, перенумеруем сначала все первые элементы множеств, затем все вторые и т. д.

Объединение счетного множества конечных множеств также счетно (сначала нумеруем все элементы первого множества, затем все элементы второго множества и т. д.). Из последнего утверждения следует, что множество всех слов в любом конечном алфавите счетно. Менее очевидно, что счетно и объединение счетного множества счетных множеств. Примером такого объединения является множество $\bigcup\limits_{i\in N} N^i$ всех векторов с натуральными компонентами.

Множество всех действительных чисел отрезка [О, 1] не является счетным *(теорема Кантора).* Действительно, предположим, что оно счетно и существует его нумерация. Расположим все числа, изображенные бесконечными десятичными дробями, в порядке этой нумерации:

$0, a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ldots$

$0, a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ldots$

$0, a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ldots$

....

Рассмотрим любую бесконечную десятичную дробь $0, b_1, b_2, b_3\ldots$, такую, что $b_1\neq a_{11}$, $b_2\neq a_{22}$, $b_3\neq a_{33}$ и т. д. Эта дробь не может войти в указанную последовательность, так как от первого числа она отличается первой цифрой, от второго числа — второй цифрой и т. д. Следовательно, все числа из отрезка [О, 1] не могут быть пронумерованы, и множество всех действительных чисел отрезка [О, 1] *несчетно.* Его мощность зазывается *континуум;* множества такой мощности называются *континуальными.* Метод, использованный при доказательстве, называется *диагональным методом* Кантора.

Множество всех подмножеств счетного множества континуально.

Задачи:

1. Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
   $A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$
   $B = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle \{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle \{z, x\}, z\rangle\}$
   $C = \{\langle x, \langle a, t\rangle\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
   $D = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
   $E = \{\langle t, a\rangle, \langle x, a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle, \langle a, a\rangle\}$
   $F = \{\langle \{a, b\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, c\}, \{b, c\}\rangle, \langle \{c, b\}, \{c, a\}\rangle\}$
   $G = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle a, t\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
   $H = \{\langle t, a\rangle, \langle x, a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle a, t\rangle, \langle a, x\rangle, \langle a, y\rangle, \langle a, z\rangle\}$

2. Для каждого из следующих отображений исследовать, является ли оно инъективным, сюръективным или биективным:

   $R\to R$, $y=x^2+3x+5$;

   $R\to R$, $y=x^2-x-1$;

   $R\to R$, $y=2^{2x+4}$;

   $R\to R$, $y=x^7+ x+1$;

   $R\to R$, $y=\log_2(x^2+4x+5)$;

   $R\to R$, $y=2x^5-1$;

   $R\to R$, $y=3^{2x}+x$;

   $R\to R$, $y=x^3+3x$.

3. Докажите или опровергните следующее утверждение: две разные дуги принадлежности могут ли быть инцидентными.

4. Докажите почему текст языка SCB трактуется как множество троек принадлежности и почему его нельзя трактовать как множество пар принадлежности?

5. Перечислите, какие графические примитивы используются в языке SCBg для изображения предметного scb-узла? SCB-элемента неопределённого типа? Дуги принадлежности?

6. Перечислите, какие графические примитивы используются в языке SCBg для изображения узлов различных типов?

ЗАНЯТИЕ 3.

Ключевые слова: Отношение. Арность отношения. Способы задания отношений. Область определения отношения. Область значений отношения. Рефлексивность. Симметричность. Транзитивность. Отношение эквивалентности. Отношение порядка. Отношение строгого порядка. Отношение нестрогого порядка.

Отношения

Подмножество $R \subseteq M^n$ называется n-местным отношением на множестве M. Говорят, что a_1, a_2, ..., a_n находятся в отношении R, если $(a_1, a_2, ..., a_n) \in R$.

Одноместное отношение – это просто подмножество M. Такие отношения называются признаками: a обладает признаком R, если $a \in R$ и $R \subseteq M$.

Наиболее часто встречающимися и хорошо изученными являются двухместные или бинарные отношения. Если a, b находятся в отношении R, это часто записывается как aRb.

Способы задания отношений

1. Табличный. Пример - отношение равенства.
2. Графовый.

Операции над отношениями те же, что и над множествами. Например, отношение <= является объединением отношений "меньше" и "равенства".

Обратное отношение.

Свойства отношений

Рефлексивность. Антирефлексивность. Симметричность. Антисимметричность. Транзитивное замыкание. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Отношение порядка, строгого и нестрогого (Кузнецов О.П.).

1. Рефлексивность. Отношение r рефлексивно, если $(x,x) \in r$ для любого $x \in A$.
2. Иррефлексивность. Отношение r иррефлексивно, если $(x,x) \notin r$ для любого $x \in A$.
3. Симметричность. Отношение r симметрично, если $(y,x) \in r$ для любых $x,y \in A$, таких что $(x,y) \in r$.
4. Антисимметричность. Отношение r антисимметрично, если $(y,x) \notin r$ для любых $x,y \in A$, таких что $(x,y) \in r$.
5. Транзитивность. Отношение r транзитивно, если $(x,z) \in r$ для любых $x,y,z \in A$, таких что $(x,y),(y,z) \in r$.

Отношение называется отношением эквивалентности (или просто эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Пример 2.3. а. Отношение равенства *E* на любом множестве является отношением эквивалентности. Равенство — это минимальное отношение эквивалентности в том смысле, что при удалении любой пары из *E (т.* е. любой единицы на диагонали матрицы *E)* оно перестает быть рефлексивным и, следовательно, уже не является эквивалентностью.

б. Рассмотрим множество треугольников на плоскости, считая, что треугольник задан, если заданы координаты его вершин. Два треугольника называются конгруэнтными (иногда их называют просто равными), если они при наложении совпадают, т. е. могут быть переведены друг в друга путем некоторого перемещения. Конгруэнтность является отношением эквивалентности на множестве треугольников.

в. Отношение «иметь один и тот же остаток от деления на 7» является эквивалентностью на *N.* Это отношение выполняется, например, для пар (11, 46), (14, 70) и не выполняется для пар (12,13), (14,71).

Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности R. Осуществим следующее построение. Выберем элемент $a_1 \in M$ и образуем класс (подмножество M) C_1, состоящий из a_1 и всех элементов, эквивалентных a_1, затем выберем элемент $a_2 \notin C_1$) и образуем класс C_2, состоящий из a_2 и всех элементов, эквивалентных a_2, и т. д. Получится система классов C_1, C_2... (возможно, бесконечная) такая, что любой элемент из M входит хотя бы в один класс, т. е. $\cup C_i = M$. Эта система классов обладает следующими свойствами: 1) она образует разбиение, т.е. классы попарно не пересекаются; 2) любые два элемента из одного класса эквивалентны; 3) любые два элемента из разных классов неэквивалентны. Все эти свойства немедленно вытекают из рефлексивности, симметричности и транзитивности R. Действительно, если бы классы, например C_1 и C_2, пересекались, то они имели бы общий элемент $Ь$, эквивалентный a_1 и a_2, но тогда из-за транзитивности R было бы a_1Ra_2, что противоречит построению C_2. Аналогично доказываются другие два свойства.

Построенное разбиение, т. е. система классов, называется системой классов эквивалентности по отношению R. Мощность этой системы называется индексом разбиения. С другой стороны, любое разбиение M на классы определяет некоторое отношение эквивалентности, а именно, отношение «входить в один и тот же класс данного разбиения».

Пример 2.4.

а. Все классы эквивалентности по отношению равенства E состоят из одного элемента.

б. Формулы, описывающие одну и ту же элементарную функцию, находятся в одном классе эквивалентности по отношению равносильности. В этом примере счетны само множество формул, множество классов эквивалентности, т.е. индекс разбиения, и каждый класс эквивалентности.

Бинарное отношение упорядоченности (или отношение порядка)

Бинарное отношение R в множестве M, обладающее следующими свойствами:

1. рефлексивности $(\forall a \in M)((a, a) \in R)$;
2. антисимметричности $(\forall a, b \in M)((a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$ <-> $a=b)$;
3. транзитивности $(\forall a, b, c \in M)((a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$ -> $(a, c) \in R)$,

называется бинарным отношением упорядоченности и обозначается “$\leq$”.

Бинарное отношение R в множестве M, обладающее свойствами антирефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называется отношением строгой упорядоченности и обозначается “$<$”.

Отношение R в множестве M, обладающее свойствами рефлексивности и транзитивности, называется отношением предпорядка.

Элементы a, b сравнимы по отношению порядка R, если выполняется aRb или bRa. Множество M, на котором задано отношение порядка, называется полностью упорядоченным, если любые два элемента M сравнимы, и частично упорядоченным в противном случае.

Пример 2.5.

а. Отношения $\leq$ и $\geq$ для чисел являются отношениями нестрогого порядка, отношения $<$ и $>$ — отношениями строгого порядка. Оба отношения полуостью упорядочивают множества N и R.

б. Определим отношения $\leq$ и $\geq$ на R^n следующим образом: $(a_1,...,a_n) \leq (b_1,...,b_n)$, если $a1 \leq b1, ..., a_n \leq b_n$; $(a_1,...,a_n) < (b_1, ...,b_n)$, если $(a_1,..., a_n) \leq (b_1,..., Ь_n)$ и хотя бы в одной координате i выполнено a_i;$< b_i$ Эти отношения определяют частичный порядок на R^n: (5, 1/2, —3) < (5, 2/3, —3); (5, 1/2, —3) и (5, 0, 0) не сравнимы,

в. На системе подмножеств множества M отношение включения s задает нестрогий частичный порядок, а отношение строгого включения с: задает строгий частичный порядок. Например, {1, 2}<={1, 2, 3}, а {1, 2} и {1, 3, 4} не сравнимы.

г. Отношение подчиненности на предприятии задает строгий частичный порядок. В нем несравнимыми являются сотрудники разных отделов.

д. Пусть в списке букв конечного алфавита А порядок букв зафиксирован, т. е. всегда один и тот же, как, например, в русском или латинском алфавите цифр. Тогда этот список определяет полное упорядочение букв, которое назовем < отношением предшествования и обозначим < ($a_i < a_j$, если a_i предшествует a_j в списке букв). На основе отношения предшествования букв строится отношение предшествования слов, определяемое следующим образом. Пусть даны слова $\alpha_1=a_{11} \ldots a_{1m}$ и $\alpha_2=a_{21} \ldots a_{2m}$. Тогда $\alpha_1<\alpha_2$, если и только если либо 1) $\alpha_1=\beta a_i\gamma$, $\alpha_2=\beta a_j\delta$ и $a_i<a_j$, β, γ, δ—некоторые слова, возможно, пустые, a_i, и a_j—буквы, либо 2) $\alpha_1=\alpha_2\beta$, где β—непустое слово. Это отношение задает полное упорядочение множества всех конечных слов в алфавите А, которое называется лексико-графическим *упорядочением* слов.

Пример 2.6.

а. Наиболее известным примером лексикографического упорядочения является упорядочение слов в словарях. Например, лес < лето (случай 1 определения:
β=лес, с-< т, γ пусто, δ=о), поэтому слово «лес» расположено в словаре раньше слова «лето», лес < лесть (случай 2 определения: β=ть).

б. Если рассматривать числа в позиционных системах счисления (например, в двоичной или десятичной) как слова в алфавите цифр, то их лексико-графическое упорядочение совпадает с обычным, если все сравнимые числа имеют одинаковое число разрядов. В общем же случае эти два вида упорядочения могут не совпадать: например, 10<1073 и 20<1073, но “10”<”1073”, а “20”>”1073”. Для того чтобы они совпадали, нужно выровнять число разрядов у всех сравниваемых чисел, приписывая слева нули. В данном примере при этом получим “0020”<”1073”. Такое выравнивание автоматически происходит при записи целых чисел в ЭВМ.

в. Лексико-графическое упорядочение цифровых представлений дат вида 05.08.86 (пятое августа 1986 года) не совпадает с естественным упорядочением дат от **ранних к** поздним: например, 05.08.86 лексико-графически «старше» третьего числа любого года. Чтобы возрастание дат совпадало с лексико-графическим упорядочением, обычное представление надо «перевернуть», т. е. годы поместить слева: 86.08.05. Так обычно делают при представлении дат в памяти ЭВМ.

Задачи:

1. Для каждого из бинарных отношений определить, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) оно обладает или не обладает. Выявить отношения эквивалентности и отношения порядка.

Отношения определены на множестве **R**:

a) $x\rho y \Leftrightarrow x^2=y^2$;

b) $x\rho y \Leftrightarrow y=|x|$;

c) $x\rho y \Leftrightarrow x-y=k\in Z$;

d) $x\rho y \Leftrightarrow xy > 1$;

Отношения определены на множестве **Z**:

e) $x\rho y \Leftrightarrow x \le y+1$;

f) $x\rho y \Leftrightarrow x^2+y^2 =1$;

g) $x\rho y \Leftrightarrow 2x=3y$;

h) $x\rho y \Leftrightarrow 3/(x-y)$;

i) $x\rho y \Leftrightarrow 3/(x+y)$;

Отношения определены на множестве **N**:

j) $x\rho y \Leftrightarrow$ НОД(x, y) $\ne 1$;

k) $x\rho y \Leftrightarrow x\ne y$;

l) $x\rho y \Leftrightarrow x/y$ (x делится на y);

2. Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
A = {<x, t>, <t, x>, <x, y>, <y, x>, <z, z>}
B = {{a, s},{s, a}, {<n, n>,<n, n>}, {a, a}}
C = {<x, {a, t}>, <{t, a}, x>, <{x, z}, y>, <y, {z, x}>, <{z, x}, z>}
D = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}
E = {<<t ,a>, <a, t>>, <<t, a>, <t, a>>, <<x, z>, y>, <y, <z, x>>, <<z, x>, z>}
F = {<t, <a, a>>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>}
G = {<{a}, {b, a}>, <{a, b}, {a}>, <a, {b, a}>, <{a, b},a>, <a, b, a>}
H = {<{a ,b}, {b, a}>, <{a ,c}, {b, c}>, <{c ,b}, {c, a}>}

3. Доказать, что отношения R, Q и S являются отношением эквивалентности на множестве натуральных чисел, т.е. обладают свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности:

   a) <a,b> ∈ R ⇔ ∃ m > 0, a-b / m = целое число

   b) <<a,b>,<c,d>> ∈ Q ⇔ a+d = b+c

   c) <<a,b>,<c,d>> ∈ S ⇔ a*d = b*c, a, b,c,d ≠ 0

4. Найти область определения отношения: R={<x,y> | x,y∈[-π/2;π/2], y>=sin(x)}

5. Могут ли классические кортежи быть неклассическими множествами? Если да, то приведите пример.

6. Запишите на языке SCBg высказывание о том, что множество ***s*** является областью определения некоторого отношения ***r***.

7. Запишите на языках SCBg высказывание о том, что множество ***U*** является областью определения отношения "***область определения***". Является ли указанное множество ***U*** универсальным множеством?

8. Все ли отношения (как классические, так и неклассические) имеют область определения? Если да, то как этот факт записывается на языке SCBg?

9. Построить реляционные таблицы фрагментов (подмножеств) некоторых отношений, например, отношения сложения, отношения умножения, генеалогических отношений, отношения, связывающего страны с их столицами, отношения, связывающего выполняемые проекты с их исполнителями, и т.д.

10. Могут ли существовать разные классические отношения, у которых совпадают минимальные декартовы произведения? Если да, то приведите примеры.

11. Являются ли функции, соответствующие тернарным отношениям, операциями?

12. Может ли ассоциативное отношение быть некоммутативным?

13. Может ли коммутативное отношение быть неассоциативным?

14. Можно ли говорить о неунарной проекции неклассического отношения?

15. Можно ли говорить о функциональной зависимости для неклассического отношения?

16. Существует ли хотя бы одно отношение, которому соответствует несколько функциональных зависимостей (несколько ключей), или несколько функций, или несколько операций? Если да, то приведите примеры.

17. Чем отличаются:

   а) функциональная зависимость от ключевой зависимости;

   б) ключевая зависимость от функции;

   в) функция от операции?

18. Могут ли первичные элементы реляционной структуры быть одновременно вторичными элементами реляционной структуры?

19. Может ли первичный элемент реляционной структуры быть:

   а) знаком атрибута в кортежах, знаки которых являются вторичными элементами реляционной структуры;

   б) знаком сигнатурного отношения реляционной структуры;

   в) знаком сигнатурного множества реляционной структуры?

ЗАНЯТИЕ 4.

Ключевые слова: Алгебра. Модель. Сигнатура. Алгебраическая операция. Арность операции. Идемпотентность алгебраических операций. Коммутативность алгебраических операций. Антикоммутативность алгебраических операций. Ассоциативность алгебраических операций. Дистрибутивность алгебраических операций. Взаимно обратные алгебраические операции. Нейтральный элемент. Обратный элемент. Булеан. Изоморфизм. Гомоморфизм. Биекция. Инъекция. Сюръекция. Автоморфизм.

Алгебраическая операция. n-арной (n-местной) алгебраической операцией (или просто операцией), определенной на множестве A называется n-местная функция

$$f_1: A^n \to A$$

Число n для n-арной операции f (n-арного отношения r) называется арностью операции f (отношения r) и обозначается n(f) (n(r)). Арности отношений – это числа большие нуля. Арности операций – это числа большие или равные нулю. Операции арности 0 представляют собой функции с областью определения, состоящей из одного элемента (n-ки длины 0) и отождествляются со значением функции (константные функции). Для унарных операций мы будем использовать префиксную и постфиксную нотацию, а для бинарных – как правило инфиксную.

Свойства операций

1. Идемпотентность. Операция * идемпотентна, если $x*x = x$, $\forall\, x\in A$.
2. Коммутативность. Операция * коммутативна, если $x*y = y*x$, $\forall\, x,y\in A$.
3. Антикоммутативность. Операция * антикоммутативна, если $x*y \neq y*x$, $\forall\, x,y\in A$.
4. Ассоциативность. Операция * ассоциативна, если $x*(y*z) = (x*y)*z$, $\forall\, x,y,z \in A$.
5. Дистрибутивность. Операция * дистрибутивна относительно операции $\circ$, если $x\circ(y*z)= (x\circ y)*(x\circ z)$, $\forall\, x,y,z \in A$.
6. Взаимно обратные операции. Операции * и $\circ$ называют взаимно обратными, если $x*y=z$ тогда и только тогда, когда $z\circ y = x$, $\forall\, x,y,z\in A$.
7. Нейтральный элемент. Про операцию * говорят, что она имеет нейтральный элемент, если во множестве A существует элемент (обозначим его e), такой что $x*e = x$, $\forall\, x\in A$ Если рассматриваемая операция обозначается знаком “+”, то нейтральный элемент обычно называют нулём, если знаком “·” (умножить), то – единицей.
8. Обратный элемент. Про операцию * с нейтральным элементом e говорят, что для неё элемент $x\in A$ имеет обратный элемент, если для него во множестве A можно найти элемент (обозначим его x'), такой что $x*x' = e$. Если для всех элементов существуют обратные, то операцию называют обратимой.

Если некоторое свойство не выполняется (т.е. для некоторых элементов условие нарушается), то к названию свойства добавляют “не”. Так, если говорят о нерефлексивном отношении, это означает, что есть элемент, для которого нарушается свойство рефлексивности.

Если множество A конечно, алгебраическую операцию на этом множестве можно определить в виде таблицы. Если операция бинарная, то такое определение особенно удобно.

Пример 1 (таблица операции). Составим таблицу операции (+ mod 5) на множестве {0,1,2,3,4}.

(+ mod 5)	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Алгебраической системой называется тернарный кортеж $<A, \Omega_F, \Omega_R>$, элементами которого являются непустое множество A, множество алгебраических операций Ω_F, определенных на A, и множества отношений Ω_R, , определенных на A.

Если алгебраическая система не содержит операций, она называется моделью, если не содержит отношений, то – алгеброй.

Символы алгебраических операций и отношений (каждый из которых имеет определённую арность) составляют сигнатуру алгебраической системы.

Мы будем иметь дело с алгебраическими системами, содержащими конечное число операций и отношений. Алгебраические системы мы будем записывать в виде: $<A; f_1, \ldots, f_k; r_1, \ldots, r_l>$, где $\{f_1,\ldots,f_k\}=\Omega_F$, $\{r_1,\ldots,r_l\}=\Omega_R$.

Типом алгебраической системы $<A;f_1,\ldots,f_k;r_1,\ldots,r_l>$ называется пара наборов или векторов $(n(f_1),\ldots,n(f_k))$ и $(n(r_1),\ldots,n(r_l))$, состоящих из арностей операций и отношений. Тип будем записывать в виде $<n(f_1),\ldots,n(f_k);\ n(r_1),\ldots,n(r_l)>$. Две алгебраические системы имеют одинаковый тип, если количества и арности их операций и отношений совпадают.

Пример

$<$ N;+,*;$<$ $>$ является алгебраической системой типа $<2, 2; 2>$, так как операции “+”, ”*” определены для любых двух натуральных чисел и результат снова является натуральным числом.

$<$ N;+,-;$<$ $>$ не является алгебраической системой, так как результат операции “-“, применённой к натуральным числам – не всегда натуральное число.

Задача №1

Является ли $<N;+,-;\leq>$ алгебраической системой?

Решение

Для того, чтобы можно было говорить об алгебраической системе, мы должны удостовериться, что все операции алгебраические, т.е. определены для любых элементов и замкнуты (т.е. результат принадлежит носителю). В данном случае операция “+” – алгебраическая, а операция “-“ не является алгебраической, т.к. разность двух натуральных чисел не всегда является натуральным числом. Таким образом, $<N;+,-;\ \leq>$ не является алгебраической системой.

Пусть задано множество U. Множество всех его подмножеств называют булеаном U и обозначают $\beta(U)$. Алгебра $<\beta(U);\ \cup,\cap,\ -\ >$ называется булевой алгеброй множеств над U. Ее тип (2, 2, 1).

Если алгебры имеют одинаковый тип, то наличие у них сходства характеризуется с помощью понятий гомоморфизма и изоморфизма.

Пусть $A = <A;\ f_1,\ldots,f_k;\ r_1,\ldots,r_l>$ и $B = <B;\ g_1,\ldots,g_k;\ p_1,\ldots,p_l>$ – алгебраические системы одного типа $<m_1,\ldots,m_k;\ n_1,\ldots,n_l>$. Однозначное отображение $\varphi\colon A \to B$ называется гомоморфизмом алгебраической системы A в B, если выполняются следующие условия:

1. $\varphi\,(f_i(x_1,\ldots,x_{mi})) = g_i(\varphi(x_1),\ldots,\ \varphi(x_{mi}))$,
2. $(x_1,\ldots,x_{nj}) \in r_j \Rightarrow (\varphi(x_1),\ldots,\ \varphi(x_{nj})) \in p_j$

$\forall\ x_1,\ x_2,\ \ldots \in A,\ \forall\ i : 1 \leq i \leq k,\ \forall\ j : 1 \leq j \leq l.$

Смысл условий 1 и 2 в том, что независимо от того, выполнена ли сначала операция f_i в A и затем произведено отображение φ, либо сначала произведено отображение φ, а затем в B выполнена соответствующая операция g_i, результат будет одинаков.

Пример

Любое отображение любой модели $<A;\ p>$ типа $<2>$ на модель $<A;\ V>$ (где V – пустое бинарное отношение) является гомоморфизмом, так как первое условие выполняется ввиду отсутствия операций, а второе – из-за того, что посылка импликации всегда ложна.

Если гомоморфизм является биекцией и обратное отображение тоже – гомоморфизм, то такой гомоморфизм называется изоморфизмом. Алгебраические системы, для которых существует изоморфизм, называются изоморфными.

Иначе говоря, изоморфизм алгебраических систем $A=<A;f_1,...,f_k;r_1,...,r_l>$ и $B=<B;g_1,...,g_k;p_1,...,p_l>$ одного типа $<m_1,...,m_k;\ n_1,...,n_l>$ – это взаимно-однозначное отображение φ множества A на B, такое что выполняются условия:

1. $\varphi(f_i(x_1,...,x_{mi})) = g_i(\varphi(x_1),...,\varphi(x_{mi}))$,
2. $(x_1,...,x_{nj}) \in r_j <=> (\varphi(x_1),...,\varphi(x_{nj}) \in p_j$

$\forall\ x_1, x_2, ... \in A, \forall\ i : 1 \le i \le k, \forall\ j : 1 \le j \le l.$

Для алгебр условие 2 автоматически выполняется, поэтому для алгебр изоморфизмы – это гомоморфизмы, являющиеся биекцией.

Пример (изоморфизм алгебр)

Покажем, что алгебры <R; +> и <R_+ ;*> изоморфны. Определим отображение φ: R -> R_+ как $\varphi(x) = e^x$. Это отображение – биекция и $\varphi(x+y) = e^{(x+y)} = e^x * e^y = \varphi(x) * \varphi(y)$.

Пример (изоморфизм моделей)

Покажем, что модели < R; ≤ > и <R; ≥ > изоморфны. Определим отображение $\varphi(x)=-x$. Это отображение– биекция и $\varphi(x) \ge \varphi(y) <=> -x \ge -y <=> x \le y$.

Изоморфизм алгебраической системы на (в) себя называется автоморфизмом. Автоморфизм, являющийся тождественным отображением ($A=B$) называется тривиальным или изоморфизмом на себя, если $B \subset A$ – изоморфизмом в себя.

Задача №2. Доказать, что алгебры <Q ; + > и <Z ; + > неизоморфны. Q – множество всех рациональных чисел, Z – множество всех целых чисел.

Решение

Мощности множеств Q и Z равны. Значит, существуют биективные отображения из Q на Z. Вопрос в том, можно ли найти такое биективное отображение, которое сохраняло бы операцию +. Многие свойства операции "+" в <Q; + > и в <Z; + > совпадают. Действительно, они обе коммутативны, ассоциативны, имеют нейтральный элемент и т.д. Однако свойства операции "+" в <Z; + >, связанные с 1, не выполняются в <Q; + >. Это даёт возможность доказать отсутствие изоморфизма.

Предположим, что изоморфизм φ алгебры <Q; + > на <Z; + > существует. Пусть p/q – прообраз 1 при отображении φ (т.е. $\varphi(p/q)=1$). Пусть $\varphi(p/2q)=n$. Но так как φ – изоморфизм, то $\varphi(p/2q+p/2q) = \varphi(p/2q)+\varphi(p/2q)$. Получаем, что 1 = n + n, где n – некоторое целое число. Но как известно, таких целых чисел нет. Приходим к противоречию, что и доказывает отсутствие изоморфизма.

Задачи:

1. Доказать или опровергнуть высказывание о том, что < R ; + , ≥ ; ≤ > алгебраическая система?
2. Доказать или опровергнуть высказывание о том, что < Z ; * , + ; - ; < ; > ; = > алгебраическая система?
3. Доказать или опровергнуть высказывание, что алгебры <N ; + > и <R ; + > изоморфны. N – множество всех натуральных чисел, R – множество всех рациональных чисел.
4. Для заданного графа найти все возможные для него автоморфизмы:
   a) Вершины: A, B, C, D, E
   Дуги: A->B, B->C, C->D, D->A, A->E, E->B.
   b) Вершины: A, B, C, D, E
   Ребра: A-B, B-C, C-D, D-A, A-E, E-B.
   c) Вершины: A, B, C, D, E
   Ребра: A-B, B-C, C-D, D-E, E-A.
5. Будут ли булевыми алгебрами ?
   a) < {0, 1, ..., n-1}; (+ mod n), (· mod n), n-x, 0, n-1 >

b) $< \{0, 1, ..., n\text{-}1\}; \max, \min, n\text{-}x, 0, n\text{-}1 >$
c) $< \{0, 1, i, i+1\}; +, \cdot, i+1\text{-}x, 0, i+1 >$

6. Указать в булевой алгебре с носителем {(0,0,0,0), (0,0,0,1),..., (1,1,1,1)} и операциями, определёнными следующим образом: + – как sup, · – как inf, $\neg x$ – как (1,1,1,1)-x, 0 – как (0,0,0,0), 1 – как (1,1,1,1)
a) все атомы
b) все суммы пар атомов
c) все суммы троек атомов
d) все элементы, представимые в виде: $a \cdot \neg b + b \cdot \neg a$, где a и b – атомы
e) все элементы, представимые в виде: $(a + b) \cdot (\neg a + \neg b)$, где a и b – элементы булевой алгебры.

7. Будут ли решётками?
a) $< \{1, ..., n\}^n; \min, \max >$
b) < **N**; *НОД, НОК* >
c) $< \{0, 1\}^n; \min, \max >$
d) < **Z**; min, max >

8. Будут ли булевыми решётками?
a) $< \{0, 1, ..., n\text{-}1\}; (+ \bmod n), (\cdot \bmod n) >$
b) $< \{0, 1, ..., n\text{-}1\}; \max, \min >$
c) $< \{0, 1, i, i+1\}; +, \cdot >$

9. Найти замыкание в булевой решётке $< \{(x_1, ..., x_n) |\ x_i \in \{0, 1\}\}; \max, \min >$ множеств:
a) $\{(x_1, ..., x_n) |\ \Sigma_i x_i = 1\}$
b) $\{(x_1, ..., x_n) |\ \Sigma_i x_i = 2\}$
c) $\{(x_1, ..., x_n) |\ \Sigma_i x_i \ge n\text{-}1\}$
d) $\{(x_1, ..., x_n) |\ x_1 = 0\}$
e) {(0, ..., 0), (1, ..., 1), (0, 1, 0, 1, ..., 0, 1) }
f) { (0, 1, 0, 1, ..., 0, 1), (1, 1, 0, 1, ..., 0, 1) }

10. Является ли операция алгебраической?
a) операция / (деления) на множестве рациональных чисел,
b) операция / (деления) на множестве целых чисел,
c) операция - (вычитания) на множестве целых чисел,
d) операция - (вычитания) на множестве натуральных чисел,
e) операция извлечения корня на множестве вещественных чисел,
f) операция извлечения корня на множестве вещественных чисел больших 1,
g) операция извлечения корня на множестве вещественных чисел больших 2.

11. При каких p $<\{1, 2, ..., p\}; (\cdot \bmod (p+1)) >$ является алгебраической системой?

12. Доказать, что алгебраические системы изоморфны:
a) <**N**;; ≤ > и <**N** \ { 1 } ;; ≤ >
b) $<\{0, 2, ..., 2\cdot n, ...\}; +; \le >$ и $<\{0, 3, ..., 3\cdot n, ...\}; +; \le >$

13. Доказать, что алгебраические системы не изоморфны:
a) <**N**; + > и <**Z**; + >
b) <**N**; +; ≤ > и <**N**; -; ≤ >
c) <**R**; + > и <**Q**; + >
d) <**Z**; (+ mod 3) > и <**Z**; (· mod 3) >
e) $<\{0, 2, ..., 2\cdot n, ...\}; \cdot; \le >$ и $<\{0, 3, ..., 3\cdot n, ...\}; \cdot; \le >$

14. Является ли алгебраическая система A подсистемой алгебраической системы B?
$A = B =$ <**N**; + >
$A =$ <**N**; + >, $B =$ <**Z**; + >
$A =$ <**N**\ {1}; + >, $B =$ <**N**; + >
$A =$ <**N**; · >, $B =$ <**N**; + >
$A =$ <**N**; + >, $B =$ <**N**\ {1}; + >
$A = <\{1, 2, ..., n\}; ; <, \le >$, $B = <\{1, 2, ..., n\}; ; <, \ge >$

15. При каких p алгебраическая система $<\{0, 1, ..., p\text{-}1\}; (+ \bmod p); \le >$ изоморфна алгебраической системе*
a) $<\{1, 2, ..., p\}; (\cdot \bmod (p+1)); \le >$
b) $<\{1, 2, ..., p\}; ((\cdot \bmod p)+1); \le >$

16. Проверить, изоморфны или нет алгебраические системы:
a) <**Z**; + > и <**Z**; - >
b) <**Z**; +; ≤ > и <**Z**; +; ≥ >
c) <**Z**; -; ≤ > и <**Z**; -; ≥ >

d) $<\mathbf{Z};\ \cdot;\ \leq>$ и $<\mathbf{Z};\ \cdot;\ \geq>$

17. Существует ли гомоморфизм алгебраической системы A в алгебраическую систему B?
$A = <\mathbf{N};\ +>,\ B = <\mathbf{N};\ \cdot>$
$A = <\mathbf{N};\ +>^2$ (множемтво пар натуральных чисел с покоординатным сложением), $B = <\mathbf{N};\ \cdot>$
$A = <\mathbf{N};\ \cdot>,\ B = <\mathbf{N};\ +>$
$A = <\mathbf{N};\ +>,\ B = <\mathbf{N} \setminus \{1\};\ \cdot>$
$A = <\{1, 2, ..., n\};\ ;\ <, \leq>,\ B = <\{1, 2, ..., n\};\ ;\ <, \geq>$
$A = <\{1, 2, ..., n\};\ ;\ <, \leq>,\ B = <\{1, 2, ..., n\};\ ;\ \leq, \geq>$

18. Найти количество изоморфизмов алгебраической системы $<\mathbf{R};\ +;\ \leq>$ на $<\mathbf{R}_+ \setminus \{0\};\ \cdot\ ;\ \leq>$

19. Найти количество гомоморфизмов
a) алгебры $<\mathbf{Z};\ +>$ в себя
b) модели $<\{1, 2, ..., n\};\ \leq>$ в $<\{1, 2, ..., n\};\ \geq>$

20. Найти количество автоморфизмов модели
a) $<\{1,2,3,4,5,6\};\ r>$, где r – отношение взаимной непростоты
b) $<\{1, 2, ..., n\};\ \neq>$

21. Найти количество автоморфизмов алгебры
a) $<\mathbf{N};\ +>$
b) $<\mathbf{N};\ \cdot>$
c) $<\mathbf{N};\ +>^2$
d) $<\{0, 1, ..., p\text{-}1\};\ (+ \bmod p)>$, где p - простое число
e) $<\{0, 1, ..., 5\};\ (+ \bmod 6)>$

22. Найти граф с минимальным числом вершин (но не менее двух) и ребер, имеющий только тривиальный автоморфизм.

23. Найти простой граф с минимальным числом вершин (но не менее двух) и ребер, имеющий только тривиальный автоморфизм.

Часть 2. Математическая логика

ЗАНЯТИЕ 1.

Логика высказываний

Будут использоваться большие латинские буквы A, B, C, … для обозначения произвольных пропозициональных переменных, а большие готические буквы $\Im$, ς **,…** для обозначения формул.

Понятие формулы алгебры высказываний определяется следующим образом:

1. пропозициональная переменная есть формула;
2. если $\Im$ и B – формулы, то $\rceil\Im$, ($\Im$ & B), ($\Im \cup B$), ($\Im \supset B$)—формулы;
3. других формул, кроме построенных по пп. 1), 2), нет.

Будем интерпретировать логические связки как функции, определенные на множестве {1 ,0} (истина, ложь), со значениями в том же множестве следующим образом.

Отрицание : $\rceil 1 = 0$, $\rceil 0 = 1$.

Конъюнкция: 1 & 1 = 1, 1 & 0 = 0, 0 & 1 = 0, 0 & 0 =0.

Дизъюнкция: $1 \cup 1 = 1$, $1 \cup 0 = 0$, $0 \cup 1 = 1$, $0 \cup 0 = 0$.

Импликация: $1 \supset 1 = 1$, $0 \supset 1 = 0$, $0 \supset 0 = 1$, $1 \supset 0 = 1$.

Исключающее или $\oplus$: (A&$\rceil$B) $\cup$ ($\rceil$A&B).

Тогда каждая формула будет интерпретироваться как функция, определенная на множестве {*1,0*}, со значениями в этом же множестве, полученная из $\rceil$, & , $\cup$, $\supset$ по правилам построения данной формулы. Такую функцию будем называть таблицей истинности данной формулы. Значением формулы $\Im$ при данных значениях переменных в множестве {1*,* 0} называется значение функции, соответствующей формуле $\Im$, при этих значениях переменных.

Переменная x_i называется фиктивной (несущественной) переменной функции $f(x_1,\cdots,x_n)$, если

$$f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n) = f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$$

для любых значений $x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$. Иначе переменная x_i называется существенной.

Функций от двух аргументов шестнадцать. Наиболее употребимые из этих функций (только те, которые существенно зависят от обеих переменных) мы приводим в следующей таблице: (возможно есть ошибки)

x_1	x_2	x_1 & x_2	$x_1 \cup x_2$	$x_1 \supset x_2$	x_1 != x_2	x_1 == x_2	!(x_1 | x_2)
0	**0**	0	0	1	0	1	1
0	**1**	0	1	1	1	0	0
1	**0**	0	1	0	1	0	0
1	**1**	1	1	1	0	1	0

Задачи:

1. Сколько функций от 2-х переменных существенно зависят от этих переменных?
2. Укажите фиктивные переменные функции $f(x,y,z)$, заданной вектором значений:
   f = (1,1,1,1,0,0,0,0)
   f = (0,0,1,1,0,0,1,1)
   f = (0,0,1,1,1,1,0,0)
3. Найдите количество функций n переменных, принимающих значение 1 ровно на одном наборе.
4. Найдите количество функций n переменных, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения.
5. Сколько имеется различных функций от n переменных, сохраняющих 0, т.е. равных нулю на нулевом наборе: f (0, … ,0) = 0.
6. Является ли формулой ¬(p & q)?

7. Является ли формулой (p)?

8. Определить, являются ли следующие формулы тавтологиями:

$(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z));$

$(x\to y)\to((z\to y)\to(x\lor z\to y));$

$(x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z));$

$(\neg x\to\neg y)\to(x\to y).$

$((a\to b)\to a)\to((a\to b)\to b);$

$(a\to c)\to(a\to b\lor c);$

$(\neg a\to b)\to(\neg b\to a);$

$((a\to b)\to(a\to c))\to((a\to(b\to c));$

$(b\to c)\to(b\to(a\to c));$

$(b\to a)\to(a\lor b\to a);$

$a\&b\to(c\to b);$

$(b\to a\lor c)\to((b\to c)\to((d\to c)\to(b\lor d\to c)));$

$((b\to a)\to c)\to(a\to c);$

$a\&b\lor c\&d\to(a\lor b)\&(c\lor d);$

$(a\to b)\&(c\to d)\to(a\lor c\to b\lor d);$

$(a\lor b\to c)\to(a\to c)\lor(b\to c);$

$(a\&b\to c)\to((a\to c)\to(b\to c));$

$(a\to b)\&(c\to d)\to(a\&c\to b\&d).$

9. Проверить, являются ли эквивалентными следующие формулы:

а) $A\equiv(A\lor B)$ и $A\lor B$;

б) $A\to B$ и $\neg A\lor B$;

в) $A\equiv B, \neg A\neg B\lor AB$ и $(A\lor\neg B)(\neg A\lor B)$;

г) $A\oplus B$ и $\neg AB\lor\neg BA$.

10. Проверить полноту систем функций:

$\{x\oplus y,\ x\lor y,\ 1\}$

$\{xy\lor xz\lor yz,\ \bar{x}\}$

$\{x\equiv y,\ x\lor y,\ 0\}$

$\{0,\ 1,\ (x\to y)\to z\}$

$\{xy,\ (x\equiv y)\equiv z\}$

11. Построить таблицы истинности на области интерпретации D={1, 2}:

$\exists_X\forall_y(P(x)\lor Q(y)\to R)$

$\forall_x(\exists_y(R\to P(x)\lor Q(y))$

$\exists_x(R\to\forall_y(P(x)\to Q(y)))$

$\forall_x(R\to\forall_y(Q(y)\to P(x)))$

$\exists_x(P(x)\to\exists_y(R\to Q(y)))$

$\exists_x(P(x)\to\forall_y(Q(y)\to P(x)))$

$\forall_x\exists_y(P(x)\lor Q(y)\to Q(y))$

$\exists_x(P(x)\&\exists_y(Q(y)\to R))$

$\forall_x(P(x)\lor\exists_y(Q(y)\to R)\to S)$

$\exists_x(P(x)\&\forall_y Q(y))\to\forall_x P(x)$

$\exists_X\forall_y(P(x)\lor Q(y)\to R)$

$\forall_x(\exists_y(R\to P(x)\lor Q(y))$

$\exists_x(R\to\forall_y(P(x)\to Q(y)))$

$\forall_x(R\to\forall_y(Q(y)\to P(x)))$

$\exists_x(P(x)\to\exists_y(R\to Q(y)))$

$\exists_x(P(x)\to\forall_y(Q(y)\to P(x)))$

$\forall_x\exists_y(P(x)\lor Q(y)\to Q(y))$

$\exists_x(P(x)\&\exists_y(Q(y)\to R))$

$\forall_x(P(x)\lor\exists_y(Q(y)\to R)\to S)$

$\exists_x(P(x)\&\forall_y Q(y))\to\forall_x P(x)$

$\exists_X\forall_y(P(x)\lor Q(y)\to R)$

$\forall_x(\exists_y(R\to P(x)\lor Q(y))$

$\exists_x(R\to\forall_y(P(x)\to Q(y)))$

$\forall_x(R\to\forall_y(Q(y)\to P(x)))$

$\exists_x(P(x)\to\exists_y(R\to Q(y)))$

$\exists_x(P(x)\to\forall_y(Q(y)\to P(x)))$

ЗАНЯТИЕ 2.

Всякое высказывание, построенное с помощью операций |, &, -, имеет некоторое истинностное значение, зависящее от значений составляющих высказываний. Любое высказывание f может быть задано в виде таблицы истинности.

x_i - атомарное высказывание (переменная x_i);

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – сложное высказывание (функция от n переменных).

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}$ – булева функция.

Исчисление высказываний можно построить, используя соответствующие таблицы истинности. При этом очевидно, что алгебра высказываний изоморфна алгебре Буля $< \beta(U); \cup, \cap, - >$, элементы носителя которой принимают значения 0 или 1, а сигнатура $\cup, \cap, -$ *(|, &, -)* обладает свойствами операций дистрибутивных решеток с дополнениями [1]. Алгебра Буля – простейшая в классе булевых алгебр; она является двухэлементной булевой алгеброй.

Алгебра, образованная k-элементным множеством вместе со всеми операциями на нем, называется *алгеброй k-значной логики, а* n-арные операции на k-элементном множестве называются *k-значными логическими функциями n* переменных [2].

Согласно теореме Стоуна (Булева алгебра изоморфна алгебре Кантора) [1, с.24] и теореме (каждое непустое множество, образованное из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ с помощью операций $\cup, \cap$, -, является объединением некоторого числа конституент) каждое высказывание и соответствующую ему булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в виде дизъюнкции конституент:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i^{\sigma i}$$

где

$$x_i^{\sigma i} = \begin{cases} x_i, \ \sigma_i = 1, \\ -x_i, \ \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Пример: Функция голосования трех элементов. Каждый голосующий может либо одобрить решение, либо отклонить. Если большинство голосующих согласны, то решение принимается.

№	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	1

$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_2x_3 \mid x_1 -x_2x_3 \mid -x_1x_2 -x_3 \mid x_1x_2x_3.$

Суперпозиция функций алгебры логики

Операция образования сложной функции. Интуитивный смысл операции: в аргументы функции подставляются другие функции, некоторые переменные отождествляются, и эта процедура может повторяться.

Суперпозицией булевых функций f_0 и $f_1,\ldots,f_n$ называется функция

$$f(x_1,\ldots,x_m) = f_0(g_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_m)),$$

где каждая из функций $g_i(x_1, \ldots,x_m)$ либо совпадает с одной из переменных (тождественная функция), либо – с одной из функций $f_1,\ldots,f_n$.

Функция f_0 называется элементарной суперпозицией или суперпозицией ранга 1, если она может быть получена одним из следующих способов:

1) из какой-то функции $f_i \in \{f_1,...,f_n\}$ переименование какой-то из ее переменных x_{ij}, т.е.
$$f_0 = f_i(x_{i1}, \ldots, x_{ij-1}, y, x_{ij+1}, \ldots, x_{im}), y = x_{ij}$$
2) подстановкой некоторой функции f_l вместо какого-то аргумента x_{ij} одной из функций f_i, т.е.
$$f_0 = f_i(x_{i1}, \ldots, x_{ij-1}, f_l(x_{l1},...,x_{ln}), x_{ij+1}, \ldots, x_{im}), f_l(x_{l1},...,x_{ln}) = x_{ij}$$

Получившаяся в результате функция f_0 зависит от всех аргументов:
$$f_0\,(x_{i1}, \ldots, x_{ij-1}, x_{l1},...,x_{ln}, x_{ij+1}, \ldots, x_{im}),$$
т.е. от всех переменных функций f_i и f_l исключая, быть может, x_{ij}.

Если функция f и g имеют одинаковые таблицы истинности, отличаясь только обозначениями переменных, то в силу п. 1) определения “Суперпозиции булевых функций” каждая из них является суперпозицией другой.

Если описаны класс функций $\Phi = \{f_1,...,f_n\}$, классс функций $\Phi^{(r)}$, $\Phi^{(r+1)}$, являющихся суперпозициями ранга (r), (r+1) функций из системы Φ, то $\Phi \subset \Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)}$.

Примеры задач:

1. Функции f и g имеют одинаковые таблицы истинности, отличаясь только обозначениями переменных, постройте суперпозицию этих функций.
2. Если описаны класс функций $\Phi = \{f_1(x_{11},...,x_{1k1}),...,f_m(x_{m1},...,x_{mkm})\}$, классы функций $\Phi^{(r)}$, $\Phi^{(r+1)}$, являющихся суперпозициями ранга (r) и (r+1) функций из системы Φ, то $\Phi \subset \Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)}$.

Соотношения между классами функций и суперпозиций этих функций

Допустим, получилась суперпозиция f_0 некоторых функций f_i и f_l:

ранг суперпозиции	Суперпозиция
1	$f_0\,(x_{i1}, \ldots, x_{ij-1}, x_{l1},...,x_{lkl}, x_{ij+1}, \ldots, x_{iki}) = f_i(x_{i1}, \ldots, x_{ij-1}, f_l(x_{l1},...,x_{lkl}), x_{ij+1}, \ldots, x_{iki})$
2	$\ldots x_{l1} = f_n(x_{n1},...,x_{n\,kn}) \ldots$
3	$\ldots x_{n1} = f_m(x_{m1},...,x_{n\,km}) \ldots$
...	...
r	
r+1	

$\Phi^{(1)} \subset \Phi^{(2)} \subset \ldots \subset \Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)} \subset \ldots$

$\Phi^{(r)} \subset \Phi^{(s)}$, $r \le s$.

Важнейшие равносильности алгебры логики (аксиомы):

1) $\neg\neg x = x;$
2) xy = yx;
3) (xy)z = x(yz);
4) x | y = y | x;
5) (x | y) | z = x | (y | z);
6) x(y | z) = xy | xz;
7) x | yz) = (x | y)(x | z);
8) $\neg(x \mid y) = \neg x \neg y;$
9) $\neg(xy) = \neg x \mid \neg y;$
10) $x \mid x = x;$
11) $xx = x;$

12) $1x = x$
13) $0 \mid x = x$.

Задачи:

1. Постройте таблицу истинности функции f:
   $f(x,y) = (x \mid y) \mathbin{\&} (y \mid x)$
   $f(x,y,z) = (x \mathbin{\&} y) \oplus (x \mathbin{\&} z) \oplus (y \mathbin{\&} z)$
   $f(x,y,z) = (x \mathbin{\&} y) \mid (x \mathbin{\&} z) \mid (y \mathbin{\&} z)$
   $f(x,y,z) = (x \mathbin{\&} \neg y) \mid (x \mathbin{\&} \neg z) \mid (y \mathbin{\&} \neg z)$
   $f(x,y) = x \mid (x \mid y)$
   $f(x,y) = (x \mid y) \mid (x \mid y)$
2. По функциям f и g, заданным векторно, построить векторное задание функции h:
   $f = (0,0,1,0)$, $g = (0,1,0,0)$, $h(x,y,z) = f(g(x,y),z)$
   $f = (1,1,1,0)$, $g = (1,0,1,1)$, $h(x,y,z) = f(x,y) \mathbin{\&} g(z,y)$
   $f = (1,1,1,0)$, $g = (1,0,0,0)$, $h(x,y,z) = f(g(x,y),g(y,z))$
3. Проверьте, справедливы ли следующие соотношения:
   $x \mid (y \equiv z) = (x \mid y) \equiv (x \mid z)$
   $x \to (y \equiv z) = (x \to y) \equiv (x \to z)$
   $x \mathbin{\&} (y \equiv z) = (x \mathbin{\&} y) \equiv (x \mathbin{\&} z)$
   $x \to (y \mid z) = (x \to y) \mid (x \to z)$
   $x \to (y \mathbin{\&} z) = (x \to y) \mathbin{\&} (x \to z)$
   $x \oplus (y \mathbin{\&} z) = (x \oplus y) \mathbin{\&} (x \oplus z)$
   $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$

4. Проверить эквивалентность формул A и B, используя основные аксиомы и теоремы булевой алгебры:
   а) $A=xy\vee\neg x\neg z\vee x\neg z$, $B=x(\neg y\neg z)\vee(\neg x\vee\neg z)$
   б) $A=\neg x\neg y\neg z\vee\neg x\neg yz\vee\neg xy$, $B=\neg x$
   в) $A=xy\neg z\vee xy\vee z\neg z$, $B=xy$
   г) $A=x(y\vee z)\vee y(\neg x\neg z)\vee\neg z(\neg y\vee x)$, $B=x\vee y\vee\neg z$

5. Доказать или опровергнуть:
   Если A и B – тавтологии, то A&B – тоже тавтология.
   Если A и B – тавтологии, то $A\vee B$ – тоже тавтология. Верно ли обратное?
   Если A и B – тавтологии, то $A\to B$ – тоже тавтология.
   Если $A\equiv B$ – тавтология, то A и B – тавтологии.

6. Представить булевы функции в виде СДНФ, СКНФ и канонического полинома Жегалкина, проверить, являются ли они линейными, монотонными, самодвойственными, созраняющими 0, сохраняющими 1:
   $x\vee y\vee z$;
   $(x\vee\neg y\vee z)(\neg x\neg y\neg z)$;
   $(\neg x\neg y\vee\neg y\neg z)\equiv(x\vee z\to y)$;
   $xy\vee xz\vee yz$.
   $x\to(x\to z)$;
   $(x\to(x\to y))\to z$;
   $(x\equiv y)\equiv z$;

7. Найти минимальные ДНФ булевых функций:

f(x,y,z,t)=1	на наборах	0,3,4,7,8,9,11,12;
f(x,y,z,t)=1	на наборах	3,6,8,9,10,13,15;
f(x,y,z,t)=1	на наборах	1,2,4,7,9,10,13,14
f(x,y,z,t)=1	на наборах	1,3,5,7,8,10,12,14,15;
f(x,y,z,t)=1	на наборах	7,8,9,10,11,12,14,15.
f(x,y,z,t)=1	на наборах	1,8,10,11,13,14,15.
f(x,y,z,t)=1	на наборах	2,3,6,9,10,12,14,15.
f(x,y,z,t)=1	на наборах	3,5,8,9,11,12,14,15.
f(x,y,z,t)=1	на наборах	1,3,6,8,9,10,13,14,15.
f(x,y,z,t)=1	на наборах	4,5,8,10,11,12,13,15.

ЗАНЯТИЕ 3.

Минимизация булевых функций в классе ДНФ

Минимизация – уменьшение сложности ДНФ булевой функции.

Сложность – количество всех первичных термов (переменная или ее отрицание), которые образуют форму, задающую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

В примере сложность функции голосования равна 12.

Длина некоторых элементарных конъюнкций может быть уменьшена с помощью элементарных преобразований. Для этого применяются следующие соотношения:

1. $xy \mid \neg xy = xy \mid \neg xy \mid y$ (закон неполного склеивания)
2. $xy \mid \neg xz = xy \mid \neg xz \mid yz$ (закон полного склеивания)
3. $x \mid xy = x$ (законы поглощения)
4. $\neg x \mid xy = \neg x \mid y$;
5. $x \mid \neg xy = x \mid y$
6. $x(\neg x \mid y) = xy$;
7. $x (x \mid y) = x$
8. $\neg x(x \mid y) = \neg xy$.
9. $x \mid x = x$ (идемпотентность дизъюнкции)

Пример 1: $f (x, y, z) = xyz \mid x\text{-}yz \mid xy\text{-}z \mid \text{-}xy\text{-}z = (xyz \mid x\text{-}yz \mid xz) \mid (xy\text{-}z \mid \text{-}xy\text{-}z \mid y\text{-}z) = (x\text{-}yz \mid xz) \mid (xy\text{-}z \mid y\text{-}z) = xz \mid y\text{-}z$

Сложность минимизированной формы равна 4.

Пример 2: $f(x_1, x_2, x_3)= \text{-}x_1x_2x_3 \mid x_1\text{-}x_2x_3 \mid \text{-}x_1x_2\text{-}x_3 \mid x_1x_2x_3$

Идемпотентность дизъюнкции ($a \mid a = a$): $f(x_1, x_2, x_3)= \text{-}x_1x_2x_3 \mid x_1\text{-}x_2x_3 \mid \text{-}x_1x_2\text{-}x_3 \mid x_1x_2x_3 \mid x_1x_2x_3 \mid x_1x_2x_3$;

Коммутативность ($a|b=b|a$), ассоциативность ($a|(b|c)=(a|b)|c$) и дистрибутивность ($a\&(b|c)=a\&b \mid a\&c$):

$f(x_1, x_2, x_3)= (x_1|\text{-}x_1)x_2x_3 \mid (x_2|\text{-}x_2)x_1x_3 \mid (x_3| \text{-}x_3)x_1x_2$;

$f(x_1, x_2, x_3)= (1)x_2x_3 \mid (1)x_1x_3 \mid (1)x_1x_2$;

$f(x_1, x_2, x_3)= (x_2 \mid x_1)x_3 \mid x_1x_2$;

Сложность минимизированной формы равна 5.

Элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) называется произвольная конъюнкция (дизъюнкция) формул, каждая из которых есть пропозициональная переменная или отрицание пропозициональной переменной.

Дизъюнктивной нормальной формой (д.н.ф.) называется произвольная дизъюнкция элементарных конъюнкций. Конъюнктивной нормальной формой (к.н.ф.) называется произвольная конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Д.н.ф. (к.н.ф.) $\Im$ называется совершенной и обозначается с.д.н.ф. (с.к.н.ф.), если каждая переменная формулы $\Im$ входит в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз с отрицанием или без отрицания.

Элементарная конъюнкция называется правильной, если в нее каждая переменная входит не более одного раза (включая ее вхождения под знаком отрицания).

Правильная элементарная конъюнкция называется полной относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если в нее каждая из этих переменных входит один и только один раз (быть может, под знаком отрицания).

СДНФ относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – это ДНФ, в которой:

- нет одинаковых элементарных конъюнкций;
- все элементарные конъюнкции правильные;
- все элементарные конъюнкции полны относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Теорема. Всякую функцию алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, не равную тождественно нулю, можно представить СДНФ, и не равную тождественно единице в СКНФ.

$$f(x_1, ..., x_n) = | (\overset{n}{\underset{i=1}{\&}} x_i^{\sigma i})$$

Элементарное произведение, которое является импликантой функции f, но никакая его собственная часть импликантой этой функции не является, называется *простой импликантой* данной функции.

Длина простой импликанты уже не может быть уменьшена путем склеивания ее с другими импликантами данной функции.

Алгоритм преобразования формулы в СДНФ

Предыдущее равенство позволяет находить СДНФ для функции по ее таблице. Это не удобно, если функция задана формулой. Построение СДНФ разобьем на два этапа. Вначале по формулам мы построим ДНФ, а затем по ДНФ построим СДНФ. Формулы и элементарные операции преобразования формул, использующие 13 известных аксиом и их простейшие следствия:

1) преобразуем формулу так, чтобы в ней были только операции |, &, ¬, причем отрицания могут стоять только над аргументами;

2) преобразовать формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше, чем дизъюнкции (при помощи дистрибутивного закона);

Преобразуем ДНФ в СДНФ.

3) удаляем дублирующиеся элементарные конъюнкции;

4) делаем все элементарные конъюнкции правильными путем следующих преобразований:

а) если в элементарную конъюнкцию входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем эту конъюнкцию из ДНФ.

б) если некоторая переменная входит в элементарную конъюнкцию несколько раз, причем во всех случаях без отрицания, или во всех случаях под знаком отрицания, то мы оставляем только одно вхождение.

Получаем полные конъюнкции.

5) если в некоторую конъюнкцию $x_1^{\sigma 1}$ ... $x_k^{\sigma k}$ не входит переменная y, то нужно рассмотреть равносильное выражение $x_1^{\sigma 1}$ $x_k^{\sigma k}$(y | ¬y) и вновь применить преобразование 2). После применения 6) могут вновь появиться одинаковые конъюнкции. Поэтому нужно вновь применить преобразование 3).

Задачи:

1. Показать, что необходимое и достаточное условие тождественного обращения в нуль ДНФ состоит в том, что в каждую элементарную конъюнкцию какая-нибудь переменная (для каждой элементарной конъюнкции, вообще говоря, своя) входит вместе со своим отрицанием.

2. Показать, что необходимое и достаточное условие тождественного равенства КНФ 1 является наличие в каждой элементарной дизъюнкции некоторой переменной вместе с ее отрицанием.

3. Докажите теорему о разложении в конъюнкцию используя теорему о разложении в дизъюнкцию и принцип двойственности.

4. Какие из указанных элементарных конъюнкций являются правильными:

а) $x_1¬(x_2x_3)$;

б) $x_1¬(x_3x_1)$;

в) $x_2¬x_2x_2x_1$;

г) $x_1¬x_2x_3¬x_4$.

5. Доказать, что представление функции в СДНФ (СКНФ) единственно.

6. Найти СДНФ для:

- функции от 3-х переменных, равной 1, если большинство аргументов равно 1;

xyz | xy¬z | x¬*yz* | ¬*xyz;*

- функции от 4-х переменных, равной 1, если четное число аргументов равно 1.

xyzt | xy¬z¬*t* | x¬*y*¬*zt* | ¬*x*¬*yzt* | ¬*xy*¬*zt* | ¬*xyz*¬*t* | *x*¬*yz*¬*t* | ¬*x*¬*y*¬*z*¬*t.*

7. преобразовать в ДНФ:

а) x | y;

б) ¬(x | z)(x->y);

в) (x=y)¬(z->t).

8. Найти СДНФ:

а) x | yz;
б) xy¬xz | xt;
в) ¬xy | yzz | ¬xyzt.
9. Найдите совершенную дизъюнктивную нормальную форму следующих функций:

12. $f_1(x,y,z) = (1,1,0,1,0,0,0,0)$,
13. $f_2(x,y,z) = x \,\&\, y \,\&\, z$,
14. $f_3(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$,
15. $f_4(x,y,z) = \neg((x \,\&\, y) \square z)$.

10. Найдите совершенную конъюнктивную нормальную форму следующих функций:

a. $f_1(x,y,z) = (1,1,0,1,0,0,0,0)$,
b. $f_2(x,y,z) = x \mid y \mid z$,
c. $f_3(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$,
d. $f_3(x,y,z) = (x \mid y)(y \mid z)(z \mid t)$,
e. $f_3(x,y,z) = x(y \mid \neg z)(x \mid y \mid z)$.

11. Найдите количество дизъюнктивных членов в совершенных дизъюнктивных нормальных формах следующих функций:

a. $f_1(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$,
b. $f_2(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \mid \ldots \mid x_n$,
c. $f_3(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 \mid \ldots \mid x_n) \,\&\, (\neg x_1 \mid \ldots \mid \neg x_n)$.

12. Упростить формулы:
а) xyz | xy¬z | x¬yz| ¬xyz;
б) x | xy | yz| ¬xz;
в) (x | y) & ¬(xy) | z | ¬z | (x | y)(u | v);
13. Путешественник находится в одном из городов А или Б, но в каком именно – ему не известно. Он задает собеседнику один вопрос, на который может получить ответ “да” или “нет”, причем ответ его собеседника может являться правдой или ложью (чем именно, ему тоже неизвестно). Придумать вопрос, по ответу на который можно безошибочно судить, в каком городе находится путешественник.
Решение:
а) Расстояние от меня до города А такое же как от А до Б. (Я в городе Б.)
б) Утверждение а) истинно.
в) Утверждение а) ложно.
г) Я действительно нахожусь в городе Б.

а	б	в	г
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

14. Человек решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или кино, а если будет хорошая погода – пойти на реку выкупаться. В каком случае можно сказать, что решение мальчика выполнено?
A – закончить чтение книги;
B – сходить в музей;
C – сходить в кино;
D – хорошая погода;
E – выкупаться в реке.
A&(B | C)&(D=E)
15. Исследовать на непротиворечивость систему посылок:
A→¬(B&C), D∨E→G, G→¬(H∨I), ¬C&E&H;
A∨B→C&D, D∨E→G, A∨¬G;
(A→B)&(C→D), (B→D)&(¬C→A), (E→G)&(G→¬D), ¬E→E;
(A→B&C)&(D→B&E), (G→¬A)&H→I, (H→I)→G&D, ¬(¬C→E);
A→¬(B&C), D∨E→G, G→¬(H∨I), ¬C&E&H;
A∨B→C&D, D∨E→G, A∨¬G;
(A→B)&(C→D), (B→D)&(¬C→A), (E→G)&(G→¬D), ¬E→E;
(A→B&C)&(D→B&E), (G→¬A)&H→I, (H→I)→G&D, ¬(¬C→E).

ЗАНЯТИЕ 4.

Формальная модель обработки информации. Абстрактная машина обработки информации. Примеры формализации математических структур на языке SCB.

Формальная модель обработки информации F, называемая также формальной системой, исчислением, определяет процесс переработки информационной конструкции и задается четверкой: $F = \langle T, P, S, W \rangle$,

где

T – множество **первичных элементов** (терминальных элементов, базовых элементов, элементарных конструкций) формальной модели;

P – множество **синтаксических правил** формальной модели, которые определяют множество синтаксически правильных (правильно построенных) информационных конструкций (конструктивных объектов), перерабатываемых в рамках данной формальной модели;

S – **начальная** (исходная) **информационная конструкция** формальной модели, т.е. начальное состояние перерабатываемой информационной конструкции, которое иногда называют совокупностью аксиом;

W – множество **операций формальной модели**, т.е. правил построения новых информационных конструкций из уже построенных, правил преобразования (модификации) текущего состояния перерабатываемой информационной конструкции.

Операции формальной модели иногда называют правилами вывода, которые не следует отождествлять с правилами логического вывода, поскольку формальные модели могут быть не только логическими.

Нетрудно заметить, что понятие формальной модели включает в себя <u>три аспекта</u>:

- представление (кодирование) информации в виде некоторых информационных конструкций, устройство этих информационных конструкций, их соотношение с описываемой предметной областью, т.е. устройство языка, используемого формальной моделью, его синтаксис и семантика;
- построение начальной информационной конструкции формальной модели, представляющей собой исходное описание некоторой конкретной предметной области. Для формальной модели переработки знаний, отражающей логико-семантический уровень интеллектуальной системы, начальная информационная конструкция называется исходным состоянием базы знаний;
- организация переработки информационных конструкций. Таким образом, наряду с приведенным выше определением формальной модели можно дать следующее эквивалентное определение.

Формальная модель F задается тройкой $F = \langle L, S, C \rangle$, где

L – **язык** формальной модели F с присущими ему синтаксисом и семантикой;

S – **начальная информационная конструкция** формальной модели F, которая должна принадлежать языку L;

C – **абстрактная машина** обработки информации, определяющая операции (правила преобразования) конструкций языка L. Множество операций абстрактной машины C в точности соответствует множеству операций формальной модели, которое в приведенном выше определении обозначено символом W.

Формальная модель рассматривает процесс обработки информации как процесс преобразования информационной конструкции, хранимой в памяти абстрактной машины. Следовательно, текущее состояние такого процесса полностью определяется текущим состоянием перерабатываемой информационной конструкции, т.е. текущим состоянием памяти абстрактной машины.

Приведенное определение формальной модели обработки информации условно разбивает модель обработки информации на модель представления информации и модель преобразования информации (модель манипулирования информационными конструкциями).

Язык ***L*** определяется множеством информационных конструкций, которое называется множеством синтаксически правильных (правильно построенных) конструкций этого языка. Описание синтаксиса языка формальной модели должно быть конструктивным определением множества синтаксически правильных его конструкций, которое соответственно задается а) множеством первичных элементов (базовых элементов, элементарных, атомарных конструкций) языка и б) множеством синтаксических правил. То, как соотносится произвольная синтаксически правильная конструкция этого языка с фрагментом предметной области, описываемой этой конструкцией, будем называть денотационной семантикой языка, а соотношение конкретной конструкции языка с описываемым этой конструкцией фрагментом предметной области будем называть денотационной семантикой указанной конструкции.

Абстрактная машина ***C*** задается а) абстрактной памятью (абстрактной запоминающей средой), в которой хранятся перерабатываемые информационные конструкции, и б) множеством операций. Текущее состояние абстрактной памяти представляет собой текущее состояние перерабатываемой информационной конструкции. В этом смысле абстрактная память есть нестационарная (динамическая, изменяющаяся во времени) информационная конструкция. Структура памяти абстрактной машины, ее "статические" свойства определяются синтаксисом языка ***L*** . Принципы изменения состояния памяти абстрактной машины, т.е. "динамические" свойства хранимых в памяти информационных конструкций, характер преобразования информационных конструкций определяются операциями абстрактной машины. На одной и той же абстрактной машине могут быть реализованы разные формальные модели, отличающиеся друг от друга разными начальными информационными конструкциями, которые задают разное исходное состояние памяти абстрактной машины. Таким образом, каждому сочетанию абстрактной машины и языка соответствует целое семейство формальных моделей, использующих указанный язык и реализуемых на указанной абстрактной машине. Могут существовать формальные модели, отличающиеся разными начальными информационными конструкциями, разными языками, но имеющие одинаковые операции. Такие формальные модели также могут быть реализованы на одной и той же абстрактной машине. Могут существовать формальные модели, отличающиеся разными начальными информационными конструкциями, разным набором операций, но имеющие одинаковые языки.

Язык, которому однозначно ставится в соответствие набор операций, т.е. определенная абстрактная машина, будем называть языком с фиксированной операционной семантикой. Операционная семантика такого языка задается соответствующей абстрактной машиной. Все остальные языки будем называть языками с нефиксированной операционной семантикой. Языками с фиксированной (четко заданной) операционной семантикой являются все языки программирования. В отличие от этого языки представления знаний могут иметь нефиксированную операционную семантику. Это означает, что одному и тому же языку представления знаний могут быть поставлены в соответствие разные методы решения задач в рамках этого языка.

Рассматриваемая нами трактовка формальной модели дает возможность четко выделить три этапа разработки конкретных формальных моделей:

- разработка языка (языка программирования или языка представления знаний);
- разработка абстрактной машины (машины реализации хранимых программ или машины переработки знаний);

- разработка начальной информационной конструкции начального состояния памяти абстрактной машины (конкретной программы вместе с ее конкретными исходными данными или исходного состояния некоторой базы знаний).

Таким образом, рассматриваемая трактовка формальной модели дает возможность явно связать формальную модель с главными компонентами инструментальных средств, обеспечивающих ее реализацию, – с соответствующим языком и с соответствующей абстрактной машиной.

Кроме того, используемое понятие абстрактной машины дает возможность с общих позиций рассмотреть принципы организации обработки информации в формальных моделях самого различного вида, а также дает возможность исследовать новые архитектуры компьютеров следующих поколений, в частности, компьютеров, ориентированных на реализацию интеллектуальных систем.

Рассмотрим язык формализации предметной области, основанный на однородных семантических сетях.

Язык **SCB** (Semantic Code Basic) – это фактографический язык, обеспечивающий представление (изображение и запись) всевозможных математических структур путем трактовки каждой такой структуры как полностью нормализованной системы множеств. Каждая полностью нормализованная система множеств однозначно задается множеством троек принадлежности, которые имеют следующий вид: $\rightharpoonup \boldsymbol{v}\ ,\ \boldsymbol{e}\ ,\ \boldsymbol{g} \leftharpoondown$,

где

v – знак нормализованного множества, не являющегося парой принадлежности (знак узлового непредметного множества);

e – один из элементов множества ***v*** , каковым может быть только знак некоторого множества, поскольку множество ***v*** является нормализованным;

g – знак нормализованной пары принадлежности, проведенной из знака ***v*** в знак ***e***.

Знак нормализованной пары принадлежности в языке SCB будем называть **дугой принадлежности**.

Знак узлового множества, т. е. множества, не являющегося парой принадлежности, в языке SCB будем называть **scb-узлом**. При этом будем отличать **предметные scb-узлы**, которые являются предметными знаками (знаками предметных множеств), и **непредметные scb-узлы**, которые являются знаками нормализованных узловых непредметных множеств, а также scb-узлы неопределённого (неуточняемого, неустановленного, неизвестного типа), принадлежность которых к классу предметных scb-узлов или к классу непредметных scb-узлов в текущий момент не установлена.

Тексты языка SCB будем называть **scb-текстами**, или scb-конструкциями.

Элементарные фрагменты **scb-текста** будем называть **scb-элементами**. К числу scb-элементов относятся **дуги принадлежности** и **scb-узлы** (как предметные узлы, так и непредметные узлы), а также scb-элементы неопределённого типа (неуточняемого, неустановленного, неизвестного типа), принадлежность которых к классу дуг принадлежности или к классу scb-узлов не установлена. Никаких других scb-элементов не существует. Каждый scb-элемент является "синтаксически" элементарным (поскольку его "внутренняя" структура в языке SCB не требует уточнения), а также семантически значимым (поскольку каждый scb-элемент представляет собой знак некоторого множества).

Узловые непредметные множества в языке SCB могут состоять из знаков множеств того или иного типа. Соответственно этому можно говорить о типологии знаков узловых непредметных множеств, а следовательно, и о типологии **непредметных scb-узлов**. Согласно этому среди непредметных scb-узлов можно выделить:

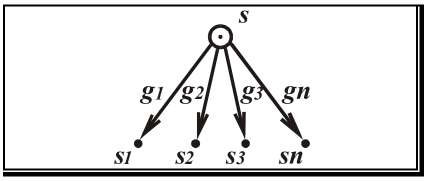
- непредметные scb-узлы, являющиеся знаками различных множеств, состоящих только из знаков пар принадлежности;
- непредметные scb-узлы, являющиеся знаками различных множеств, состоящих только из знаков
  узловых множеств (т. е. множеств, не являющихся парами принадлежности), и в частности,
- непредметные scb-узлы, являющиеся знаками различных множеств, состоящих только из знаков предметных множеств (т. е. из предметных знаков);
- непредметные scb-узлы, являющиеся знаками различных множеств, состоящих только из знаков узловых непредметных множеств (т. е. множеств, не являющихся парами принадлежности и не являющихся предметными множествами);
- непредметные scb-узлы, являющиеся знаками различных систем множеств. Напомним, что каждая система множеств есть множество, в состав которого входят как знаки узловых множеств, так и знаки пар принадлежности.

На основании введённых понятий языка SCB тройка принадлежности ⟶ ***v*** , ***e*** , ***g*** ⟵ будет трактоваться следующим образом:
v – некоторый непредметный scb-узел;
e – знак некоторого множества, который представляется в виде некоторого scb-элемента и который является одним из элементов множества, обозначаемого узлом ***v***. Подчеркнем, что scb-элемент ***e*** может быть как scb-узлом, так и дугой принадлежности;
g – дуга принадлежности, проведенная из scb-узла ***v*** в scb-элемент ***e***.

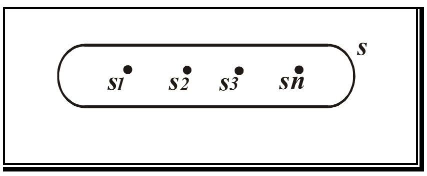
В нижеследующих примерах scbg-текстов приведено представление (изображение, запись, задание) на языке SCB узлового непредметного множества, т.е. множества, не являющегося парой принадлежности и не являющегося предметным множеством. Здесь:

- узел с идентификатором ***s*** есть знак некоторого нормализованного множества, представлением (изображением) которого является данная scbg-конструкция;
- scb-элементы с идентификаторами ***s1***, ***s2***, ***…***, ***sn*** есть такие знаки множеств, которые являются элементами множества ***s***. Указанные знаки могут быть предметными узлами (т.е. знаками унарных ненормализованных множеств), дугами принадлежности (т.е. знаками пар принадлежности), непредметными узлами (т.е. знаками нормализованных множеств, не являющимися парами принадлежности).

Вариант 1g изображения узлового непредметного множества (с явным изображением дуг, выходящих из узла *s*)

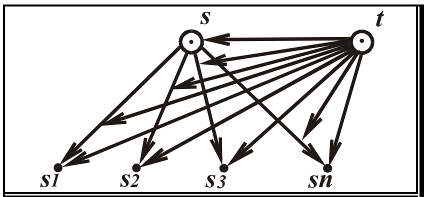


Вариант 2g изображения узлового непредметного множества (с неявным изображением scb-дуг, выходящих из узла *s*)

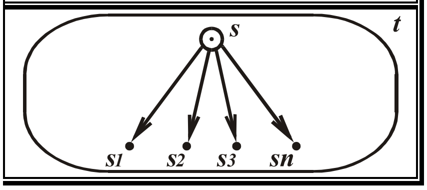


На нижеследующих scbs-текстах приведены примеры изображения на языке SCB множества, которое представляет собой систему множеств, являющуюся представлением множества ***s***. Обозначим эту систему множеств идентификатором ***t***.

Вариант 1g изображения системы множеств (с явным изображением дуг, выходящих из узла *t*)

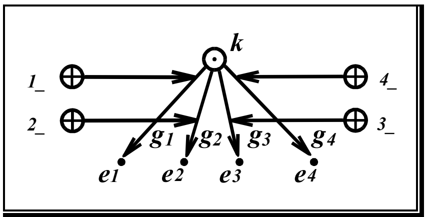


Вариант 2g изображения системы множеств (с неявным изображением дуг, выходящих из узла *t*)



Приведем несколько вариантов изображения указанного кортежа на языке SCBg.

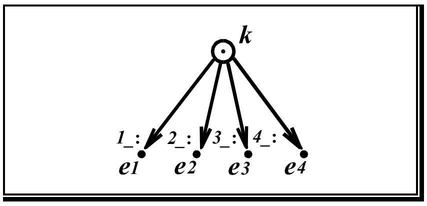
Вариант 1g изображения 4-мощного кортежа



Здесь:

- ***k*** – знак кортежа;
- ***e1**, **e2**, **e3**, **e4*** – элементы этого кортежа.

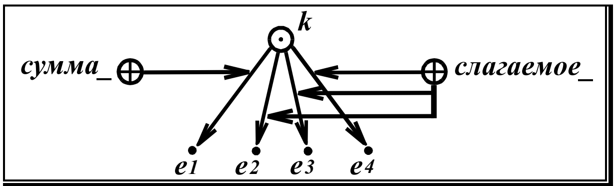
Вариант 2g изображения 4-мощного кортежа



Идентификатор с двоеточием, приписываемый графическому изображению какого-либо scb-элемента (в данном случае – изображению scb-дуги) – это идентификатор scb-узла, из которого проведена scb-дуга в указанный scb-элемент.

На нижеследующих scbg-текстах приведен пример изображения кортежа, связывающего набор некоторых чисел с их суммой. Это конкретный содержательный пример кортежа, в котором несколько вхождений элементов имеют одинаковые атрибуты.

Пример изображения кортежа, связывающего набор некоторых чисел с их суммой

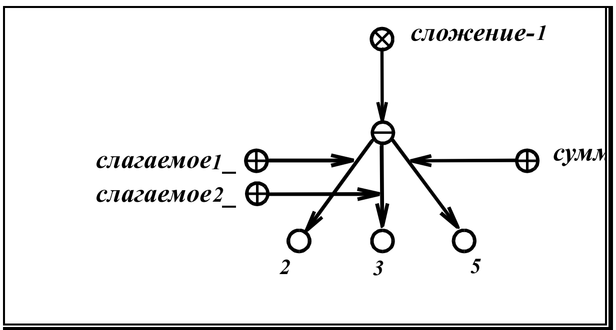


Очевидно, что противопоставлять друг другу различные слагаемые (например, нумеровать их) нет никакой необходимости.

Приведём несколько вариантов представления отношения сложения.

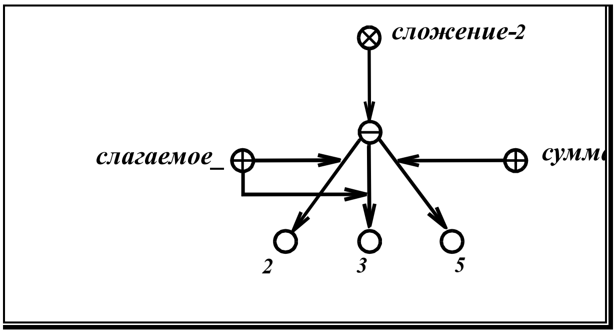
Вариант 1 изображения отношения сложения

Это классическое тернарное коммутативное отношение с атрибутами ***“слагаемое1_”***, ***“слагаемое2_”***, ***сумма_”***.



SCBg-текст 3.3.3.2. Вариант 2 изображения отношения сложения

Это неклассическое тернарное ориентированное отношение, в каждом кортеже которого используются два атрибута:
“слагаемое_”, ***”сумма_”***.



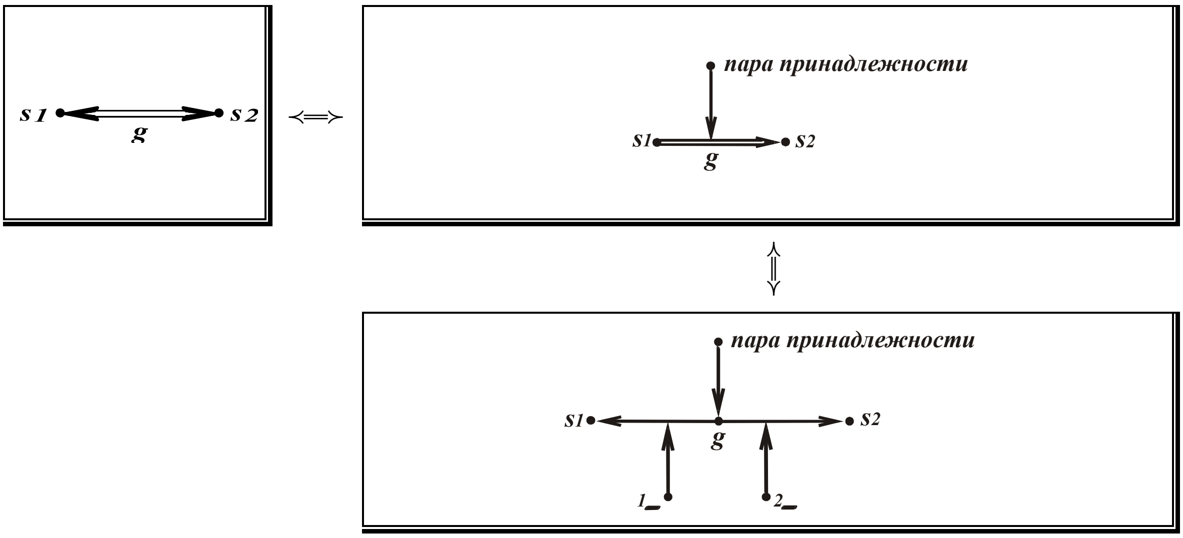
Задачи:

1 . Могут ли быть инцидентными две разные дуги принадлежности?

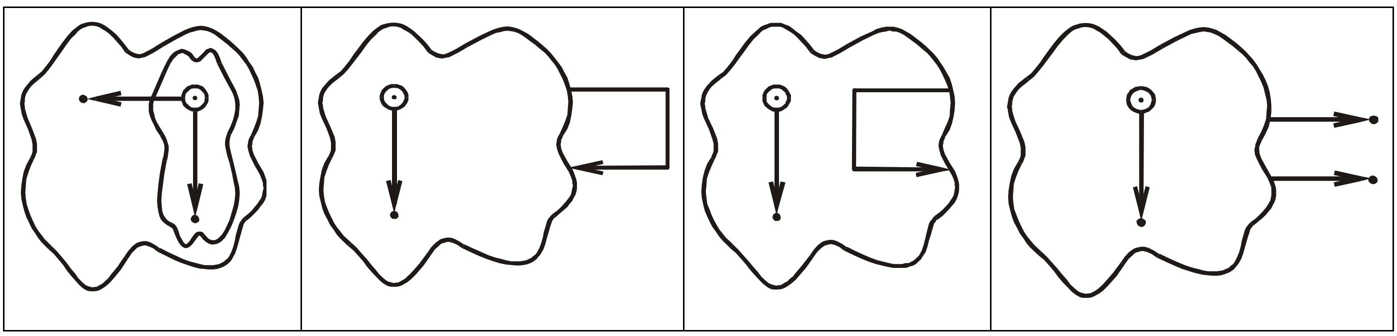
2 . Почему текст языка SCB трактуется как множество троек принадлежности и почему его нельзя трактовать как множество пар принадлежности?

3. Можно ли считать семантически эквивалентными следующие scbg-конструкции?

4. Корректны ли следующие преобразования?



5. Преобразуйте приведённые ниже scbg-тексты, исключив из них изображения непредметных scb-узлов в виде замкнутых линий:



Лабораторный практикум

Лабораторная работа №1: Реализация операций над множествами.

Цель: *ознакомиться и получить навыки реализации операций над множествами*.

Множество – простейшая информационная конструкция и математическая структура, позволяющая рассматривать какие-то объекты как целое, связывая их. Объекты, связываемые некоторым множеством, называются элементами этого множества. Если объект связан некоторым множеством, то говорят, что существует вхождение объекта в это множество, а объект принадлежит этому множеству. Допускается неограниченное количество вхождений одного объекта в какое-либо множество. Допускаются множества, каждое из которых имеет только одно вхождение какого-либо единственного элемента этого множества, а также допускается множество, не имеющее вхождений, – пустое множество. Среди множеств выделяют ориентированные множества и неориентированные множества. Множество может быть задано с помощью механизма, процедуры. Если некоторая процедура даёт ответ для любого объекта: является он или нет элементом некоторого множества, то такая процедура называется разрешающей процедурой для такого множества. Если же некоторая процедура позволяет получить любой новый элемент некоторого множества, отличный от известных или выданных ранее элементов этого множества, то такая процедура называется порождающей процедурой для такого множества. Неориентированное множество, имеющее малое количество вхождений, может быть представлено в тексте в следующем виде:

$$S = \{a, b, a, a, c\}.$$

Элементы a, b и c принадлежат множеству с именем S, причём множество S имеет три вхождения элемента a ($S|a| = 3$) и по одному вхождению элементов b и c ($S|b| = S|c| = 1$). Неориентированное множество A называют подмножеством неориентированного множества B тогда и только тогда, когда для любого элемента x, который принадлежит множеству A, истинно $A|x| \le B|x|$. Если некоторый элемент x не принадлежит множеству S, то истинно $S|x| = 0$. Если множество A является подмножеством множества B, то это записывают так:

$$A \subseteq B.$$

Неориентированные множества A и B равны тогда и только тогда, когда $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$.

Все вхождения, которые имеет любое ориентированные множество, упорядочены. Два ориентированных множества равны тогда и только тогда, когда все их элементы входят в одинаковом порядке. Ориентированное множество может быть представлено в тексте в следующем виде:

$$\langle a, b, a, c\rangle.$$

Множеством *с кратными* вхождениями элементов называют множество S тогда и только тогда, когда существует x такой, что истинно $S|x| > 1$.

Множеством *без кратных* вхождений элементов называют множество S тогда и только тогда, когда для любого x истинно $S|x| < 2$.

Пересечением неориентированных множеств A и B *с учётом* кратных вхождений элементов будем называть неориентированное множество S тогда и только тогда, когда для любого x истинно $S|x| = min\{A|x|, B|x|\}$.

Объединением неориентированных множеств A и B *с учётом* кратных вхождений элементов будем называть неориентированное множество S тогда и только тогда, когда для любого x истинно $S|x| = max\{A|x|, B|x|\}$.

Разностью неориентированных множеств A и B *с учётом* кратных вхождений элементов будем называть неориентированное множество S тогда и только тогда, когда для любого x истинно $S|x| = max\{A|x|-B|x|, 0\}$.

Симметрической разностью неориентированных множеств A и B *с учётом* кратных вхождений элементов будем называть неориентированное множество S тогда и только тогда, когда для любого x истинно $S|x| = max\{A|x|-B|x|, B|x|-A|x|\}$.

Суммой неориентированных множеств ***A*** и ***B*** элементов называют неориентированное множество ***S*** тогда и только тогда, когда для любого ***x*** истинно $S|x| = A|x|+B|x|$.

Пересечением неориентированных множеств ***A*** и ***B*** *без учёта* кратных вхождений элементов будем называть неориентированное множество ***S*** тогда и только тогда, когда для любого ***x*** истинно $S|x| = min\{A|x|, B|x|, 1\}$.

Объединением неориентированных множеств ***A*** и ***B*** *без учёта* кратных вхождений элементов будем называть неориентированное множество ***S*** тогда и только тогда, когда для любого ***x*** истинно $S|x| =min\{max\{A|x|, B|x|\}, 1\}$.

Разностью неориентированных множеств ***A*** и ***B*** *без учёта* кратных вхождений элементов будем называть неориентированное множество ***S*** тогда и только тогда, когда для любого ***x*** истинно $S|x| = max\{min\{A|x|-B|x|, 1\}, 0\}$.

Симметрической разностью неориентированных множеств ***A*** и ***B*** *без учёта* кратных вхождений элементов будем называть неориентированное множество ***S*** тогда и только тогда, когда для любого ***x*** истинно $S|x| = max\{min\{A|x|, 1\}-min\{B|x|, 1\}, min\{B|x|, 1\}-min\{A|x|, 1\}\}$.

Булеаном неориентированного множества ***A***, которое является множеством без кратных вхождений элементов, называют неориентированное множество ***S*** тогда и только тогда, когда для любого ***x*** истинно $S|x| < 2$ и $((S|x|=1) \Leftrightarrow (x \subseteq A))$.

Декартовым произведением неориентированных множеств ***A*** и ***B*** называют неориентированное множество ***S*** тогда и только тогда, когда для любого ***z*** истинно: если $S|z| > 0$, то $z = <x, y>; S|z| = A|x|*B|y|$ и наоборот.

Индивидуальные задания:

1. Реализовать программу, формирующую множество равное объединению произвольного количества исходных множеств (без учёта кратных вхождений элементов).
2. Реализовать программу, формирующую множество равное пересечению произвольного количества исходных множеств (без учёта кратных вхождений элементов).
3. Реализовать программу, формирующую множество равное симметрической разности произвольного количества исходных множеств (без учёта кратных вхождений элементов).
4. Реализовать программу, формирующую множество равное разности двух исходных множеств (без учёта кратных вхождений элементов).
5. Реализовать программу, формирующую множество равное булеану исходного множества.
6. Реализовать программу, формирующую множество равное декартовому произведению произвольного количества исходных множеств.
7. Реализовать программу, формирующую без повторений всевозможные ориентированные множества из элементов исходного неориентированного множества, количество элементов в сформированных множествах должно быть равно исходному натуральному n.
8. Реализовать программу, формирующую без повторений всевозможные неориентированные множества из элементов исходного неориентированного множества, количество элементов в сформированных множествах должно быть равно исходному натуральному n.
9. Реализовать программу, определяющую является ли одно, либо оба из двух исходных множеств подмножеством или элементом другого.
10. Реализовать программу, формирующую множество равное объединению произвольного количества исходных множеств (с учётом кратных вхождений элементов).
11. Реализовать программу, формирующую множество равное пересечению произвольного количества исходных множеств (с учётом кратных вхождений элементов).
12. Реализовать программу, формирующую множество равное симметрической разности произвольного количества исходных множеств (с учётом кратных вхождений элементов).
13. Реализовать программу, формирующую множество равное разности двух исходных множеств (с учётом кратных вхождений элементов).

Формат данных:

[<имя_множества>=]<множество>

<множество>::=

<ориентированное_множество>|<неориентированное_множество>

<неориентированное_множество>::={[<элемент>{,<элемент>}]}

<ориентированное_множество>::=<<элемент>,<элемент>{,<элемент>}>

<элемент>::=<имя>|<множество>

<имя_множества>::=<имя>

<имя>::=<буква> {<буква>|<подчёркивание>|<цифра>}

<подчёркивание>::=_

<цифра>::=0|…|9

<буква >::=A|…|z

Пример:

A={o,{},A}

B={o,<1,2>,A2,c3,B,b3_A,{},{o,{},A}}

C={o,A2,b3,A,<1,2>,{}}

Пересечением множеств A, B, C будет множество:

{o,{},{o,{},A}}

Требования к реализации программы:

Все корректные входные и выходные данные программы должны строго соответствовать чётко заданному формату данных. Программа должна давать верный результат для любых корректных входных данных. Для любых некорректных входных данных программа должна сообщать о некорректности входных данных и не должна терять управления в результате ошибки исполнения. Все входные данные должны читаться программой из файла.

В качестве инструмента реализации требуется использовать императивные языки программирования: *C*, *Pascal* и др.

Исходный текст программы должен содержать имя, фамилию и отчество разработчика. Там же должны быть указаны: дата разработки и описание функциональности и назначения программы. Все функции в исходном тексте программы должны быть прокомментированы. Для каждой функции должны быть указаны и пояснены: назначение, входные данные, выходные данные – в том числе и используемые глобальные переменные. Все глобальные переменные и некоторые локальные переменные должны быть прокомментированы.

Требования к защите:

Требуется присутствие всех разработчиков и наличие: исходного текста программы, исполняемого файла и отчёта по лабораторной работе. Отчёт по лабораторной работе должен содержать: постановку задачи, теоретические сведения, использованные при разработке алгоритма, точное словесное описание алгоритма по шагам либо схему программы, наиболее характерные примеры результатов работы программы. Отчёт может быть предоставлен в электронном виде. При защите лабораторной работы требуется: продемонстрировать работоспособность программы на наиболее характерных тестовых примерах, а также – на тестовых входных данных, предложенных преподавателем; уметь пояснить исходный текст и алгоритм работы программы; показать и предоставить исходный текст и отчёт. Недопустима защита работы в момент отсутствия одного из разработчиков. Работа принимается в случае соблюдения всех требований.

Лабораторная работа №2: Выявление свойств бинарных отношений. Реализация операций над отношениями.

Цель: Изучение свойств бинарных отношений и реализация операций над множествами.

Отношение – математическая структура и минимальная информационная конструкция, позволяющая объективно отражать связи разного типа между объектами.

Декартовым произведением неориентированных множеств A_1, A_2, … A_n называют неориентированное множество S ($S = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$) тогда и только тогда, когда для любого z истинно: если $S|z| > 0$, то $z = <a_1, a_2, \ldots a_n>$; $S|z| = \prod A_i|a_i|$ и наоборот.

Степенью неориентированного множества A называют множество A^n тогда и только тогда, когда $A^n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ и $A_i = A$ для любых i с 1 по n.

Мощностью множества A называют число p такое, что $p = \sum A|x|$, где x принимает все возможные значения.

Отношением на множестве A **арности** n называют неориентированное множество S тогда и только тогда, когда $S \subseteq A^n$.

Бинарным отношением на множестве A называется отношение на множестве A арности 2.

Перестановкой множества A называется ориентированное множество S тогда и только тогда, когда для любых x выполняется $S|x| = A|x|$.

Будем обозначать элемент, входящий i-тым в ориентированное множество S, $S[i]$.

Схемой отношения A арности n называется множество S тогда, когда мощность множества A равна n ($|A| = n$) и определена перестановка $\underline{A}$ множества A.

Проекцией арности n отношения R по множеству атрибутов A называется отношение P арности n тогда и только тогда, когда существует схема S отношения R, что A является схемой отношения P, причём $2 \leq |A| \leq |S|$, и выполняется: для любого элемента k множества R существует элемент m множества P такой, что для любых натуральных i ($i \leq |S|$) – если $A|k[i]| > 0$, то существует натуральное j, что $k[i] = m[j]$ и $\underline{S}[i] = \underline{A}[j]$; для любого элемента m множества P существует элемент k множества R такой, что для любых натуральных j ($j \leq |A|$) существует натуральное i, что $k[i] = m[j]$ и $\underline{S}[i] = \underline{A}[j]$.

Проекцию отношения R по множеству атрибутов A будем обозначать $R|_A$.

Доменом или **унарной проекцией** отношения A по атрибуту a называется множество D тогда и только тогда, когда существует схема S отношения A и существует такое натуральное i, что $\underline{S}[i] = a$ и для любого элемента k множества A выполняется $D|k[i]|=1$, причём других элементов D не содержит.

Соединением двух отношений R и Q, имеющим схемы U и V соответственно, называется отношение P тогда и только тогда, когда схема W отношения P является объединением множеств U и V и выполняется: для любых элемента k множества R и элемента m множества Q таких, что для любых натуральных i ($i \leq |U|$) – если $V|\underline{U}[i]| > 0$, то существует натуральное j, что $k[i] = m[j]$ и $\underline{U}[i] = \underline{V}[j]$ и для любых натуральных j ($j \leq |V|$) – если $U|\underline{V}[i]| > 0$, то существует натуральное i, что $k[i] = m[j]$ и $\underline{U}[i] = \underline{V}[j]$, существует элемент r множества P такой, что для любых натуральных i ($i \leq |U|$) существует натуральное j, что $k[i] = r[j]$ и $\underline{U}[i] = \underline{W}[j]$ и для любых натуральных i ($i \leq |V|$) существует натуральное j, что $m[i] = r[j]$ и $\underline{V}[i] = \underline{W}[j]$; для любого элемента r множества P существуют элемент k множества R и элемент m множества Q такие, что для любых натуральных j ($j \leq |W|$) существует натуральное i, что $k[i] = r[j]$ и $\underline{U}[i] = \underline{W}[j]$ либо $m[i] = r[j]$ и $\underline{V}[i] = \underline{W}[j]$.

Соединение отношений R и Q будем обозначать $R \bullet Q$.

Композицией двух отношений R и Q, имеющим схемы U и V соответственно, является отношение P такое, что $P=(R \bullet Q)|_W$, где W является симметрической разностью U и V.

Областью определения отношения R называется множество, которое является объединением всех унарных проекций отношения R по каждому из всех атрибутов его схемы.

n-рефлексивным отношением на множестве A называется отношение R арности m ($n < m$) такое, что для любого элемента x множества A существует элемент k отношения R, для которого $n \leq k|x|$.

Симметричным отношением на множестве A называется отношение, в котором если содержится в качестве элемента перестановка множества S такого, что каждый элемент S принадлежит множеству A, то в качестве элементов содержатся и все остальные перестановки множества S.

Антисимметричным отношением на множестве A называется отношение, которое не содержит в качестве элементов двух различных перестановок одного и того же множества S такого, что каждый элемент S принадлежит множеству A.

Рефлексивным бинарным отношением на множестве A называется 1-рефлексивное бинарное отношение на множестве A.

Арефлексивным бинарным отношением на множестве A называется бинарное отношение такое, что для любого элемента x множества A не существует элемента k отношения R, для которого $k|x| = 2$.

Асимметричным бинарным отношением на множестве A называется антисимметричное и арефлексивное бинарное отношение на множестве A.

Транзитивным бинарным отношением на множестве A называется бинарное отношение R такое, что для любых x, y, z элементов множества A верно, что если $<x, y>$ и $<y, z>$ принадлежат R, то и $<x, z>$ принадлежит R.

Транзитивным замыканием бинарного отношения R называется минимальное по мощности бинарное отношение A транзитивное на своей области определения такое, что $R \subseteq A$.

Отношением толерантности называется бинарное отношение, являющееся симметричным и рефлексивным на своей области определения.

Отношением эквивалентности называется отношение толерантности, являющееся транзитивным на своей области определения.

Отношением порядка называется бинарное отношения, являющееся антисимметричным и транзитивным на своей области определения.

Отношением строгого порядка называется отношение порядка, являющееся арефлексивным на своей области определения.

Отношением нестрогого порядка называется отношение порядка, являющееся рефлексивным на своей области определения.

Отношением полного порядка называется отношение порядка, которое для любых двух различных элементов x и y своей области определения содержит в качестве элемента одну пару, которой принадлежат оба элемента x и y.

Соответствием между множествами A и B называется бинарное отношение $R \subseteq A \times B$.

Областью определений соответствия называется множество всех тех и только тех элементов, которые входят первыми во все пары соответствия.

Областью значений соответствия называется множество всех тех и только тех элементов, которые входят вторыми во все пары соответствия.

Образом элемента x при соответствии называется множество всех тех и только тех элементов, которые входят вторыми в любую из всех пар соответствия тогда, когда первым элементом в пару входит x.

Прообразом элемента x при соответствии называется множество всех тех и только тех элементов, которые входят первыми в любую из всех пар все пары соответствия тогда, когда вторым элементом в пару входит x.

Образ элемента x при соответствии R будем обозначать $R(x)$.

Однозначным соответствием или **функцией** называется соответствие R такое, что для любого элемента x из области определения соответствия R выполняется $|R(x)| = 1$.

Функциональной зависимостью по набору атрибутов A называется отношение R со схемой V, для которого существует однозначное соответствие S такое, что для каждого элемента k отношения R существует одна пара соответствия, в которую в качестве второго элемента входит элемент либо ориентированное множество всех элементов, которые входят в k в тех же позициях, что и атрибуты множества A в $\underline{V}$, а в качестве первого – элемент либо ориентированное множество всех элементов, которые входят в k во всех остальных позициях, причём A не равно V, но является подмножеством V и не является пустым.

Индивидуальные задания:

1. Реализовать программу, определяющую является ли n-арное отношение (n-1)-рефлексивным на своей области определения.
2. Реализовать программу, определяющую является ли отношение симметричным отношением на своей области определения.
3. Реализовать программу, определяющую является ли отношение антисимметричным отношением на своей области определения.
4. Реализовать программу, вычисляющую транзитивное замыкание бинарного отношения.
5. Реализовать программу, формирующую произведение двух отношений, произведение по всем совпадающим атрибутам.
6. Реализовать программу, определяющую по каким наборам атрибутов отношение является функциональной зависимостью.
7. Реализовать программу, формирующую проекцию отношения по всем выбранным атрибутам.
8. Реализовать программу, определяющую является ли бинарное отношение отношением строгого порядка.
9. Реализовать программу, определяющую является ли бинарное отношение отношением нестрогого порядка.
10. Реализовать программу, определяющую является ли бинарное отношение отношением эквивалентности.
11. Реализовать программу, определяющую является ли бинарное отношение отношением полного порядка.
12. Реализовать программу, определяющую является ли бинарное отношение отношением толерантности.
13. Реализовать программу, определяющую является ли бинарное отношение отношением порядка.

Формат входных данных:

[<имя отношения>[<список атрибутов>] =]<отношение>

<отношение>::={[<ориентированное множество>{,<ориентированное множество>}]}
<имя отношения>::=<имя>
<список атрибутов>::=(<имя>:{,<имя>})
<ориентированное множество>::=<<элемент>,<элемент>{,<элемент>}>
<элемент>::=<имя>|<множество>
<имя>::=<символ> {<символ>}
<символ>::=<буква>|<подчёркивание>|<цифра>|<минус>
<подчёркивание>::=_
<минус>::=-
<цифра>::=0|…|9
<буква >::=A|…|z

Пример:

R (Capital : Country)={<Moscow, Russian_Federation>,<Warsaw, Poland>,<Paris, France>}
R_A ={<{1, 2}, 3>, <{3, 1}, 2>, <{2, 3}, 1>}
R_B (a: b: c) ={<-1, 3, 2>, <1, -7, 6>, <1, 2, 1>}
{<c1, c2>, <c2, c2>, <c1,c1>}

Лабораторная работа №3: Решение задач на графах.

Цель работы: решение задач на графах.

Граф – алгебраическая система, модель, сигнатура которой содержит только бинарные отношения. Обычно рассматриваются графы с одним бинарным отношением в сигнатуре. Если такое единственное бинарное отношение является симметричным или его связки являются неориентированными множествами, то такой граф называется неориентированным, иначе – ориентированным. Подграфом графа **A** называется граф, носитель и все сигнатурные отношения которого являются соответственно подмножествами носителя и сигнатурных отношений графа **A**. Элементы носителя графа называют вершинами графа, а элементы сигнатурных отношений – рёбрами в симметричных отношениях и дугами – в не симметричных. Смежными вершинами называют вершины, соединённые одним ребром либо дугой. Смежными рёбрами называют рёбра, имеющие общую вершину. Смежностным неориентированному графу **A** называется граф, множество вершин которого взаимно однозначно соответствует множеству рёбер графа **A** таким образом, что если два ребра смежны в графе **A**, то смежны и соответствующие вершины в смежностном графе и наоборот. Граф называется взвешенным графом, если его каждому ребру или дуге сопоставлено число. Полный граф – граф, в котором любые две вершины соединены ребром. Множество компонент связности графа – множество его связных подграфов, каждая пара которых не образует связный граф. Связный граф – граф, у которого любая пара его вершин соединена простой цепью. Простая цепь – цепь, у которой все вершины различны. Цепь – маршрут, у которого все рёбра различны. Маршрут – чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся с вершины **A**(начало) и заканчивающаяся вершиной **B**(конец). Каждые два соседних элемента этой последовательности инцидентны друг другу. Длина маршрута – количество рёбер в нём. Расстояние между двумя вершинами связного графа – длина соединяющей их простой цепи. Эксцентриситет вершины связного графа – расстояние до самой удалённой от неё вершины. Диаметр связного графа – наибольший из его эксцентриситетов. Радиус связного графа – наименьший из его эксцентриситетов. Центром связного графа называется вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа. Ребро графа – мост, если его удаление приводит к возрастанию числа компонент связности в нём. Цикл – цепь, которая начинается и заканчивается одной вершиной. Простой цикл – цикл, являющийся простой цепью. Эйлеров граф – граф, для которого существует цикл, содержащий все его рёбра или дуги. Связный неориентированный граф, для которого отсутствуют циклы, называется деревом. Граф называется двудольным тогда и только тогда, когда все его вершины могут быть разбиты на два множества, причём любая пара вершин одного множества не является смежной в этом графе. Двудольный неориентированный граф называется дольнорегулярным тогда и только тогда, когда для каждой доли существует число, для любой вершины этой доли совпадающее с числом всех ребёр графа, инцидентных этой вершине.

Рекомендуемый формат данных:

[<имя графа> =]<граф>

<граф>::=[[<бинарное множество> {,<бинарное множество>}]];

<бинарное множество>::=<бинарное ориентированное множество вершин> |
<бинарное неориентированное множество вершин>

<имя графа>::=<имя>

<бинарное ориентированное множество вершин>::=(1_: <имя >, 2_: <имя >)

<бинарное неориентированное множество вершин>::={<имя>,<имя>}

<имя>::=<символ> {<символ>}

<символ>::=<буква>|<подчёркивание>|<цифра>

<подчёркивание>::=_

<цифра>::=0|…|9

<буква >::=A|…|z

Пример:

R =[(1_: Vertex1, 2_: Vertex2),(1_: Vertex3, 2_: Vertex1),(1_: Vertex2, 2_: Vertex2)];

R_A =[(1_: VertexA, 2_: VertexB),(1_: VertexB, 2_: VertexA),(1_: VertexA, 2_: VertexB)];
R_B =[{A,B}, (1_: A, 2_: C), (1_: D, 2_: B)];
R_C =[{A,B}, {A,C}, {D, B}];
[(1_: c1, 2_: c2), {c2, c2}, (1_: c1, 2_: c1)];

Требования к реализации программы:

Программа должна давать верный результат для любых корректных входных данных. Для любых некорректных входных данных программа должна сообщать о некорректности входных данных и не должна терять управления в результате ошибки исполнения. Все входные данные должны читаться программой из файла.

Исходный текст программы должен содержать имя, фамилию и отчество разработчика. Там же должны быть указаны: дата разработки и описание функциональности и назначения программы. Все функции в исходном тексте программы должны быть прокомментированы. Для каждой функции должны быть указаны и пояснены: назначение, входные данные, выходные данные – в том числе и используемые глобальные переменные. Все глобальные переменные и некоторые локальные переменные должны быть прокомментированы.

Доступ ко всем элементам массивов и матриц осуществлять через макросы. Так, например:
при доступе к матрице смежности использовать макрос ADJACENCY(X,Y);
при необходимости сортировки вершин использовать макрос INDEX(X) для получиния индекса вершины X, позволяющиго осуществлять упорядоченный доступ к вершинам без непосредственной сортировки матрицы смежности; Доступ к отмеченным вершинам осуществлять через макрос MARKED(X) и т.п.

Требования к защите:

Требуется присутствие всех разработчиков и наличие: исходного текста программы, исполняемого файла и отчёта по лабораторной работе. Отчёт по лабораторной работе должен содержать: постановку задачи, теоретические сведения, использованные при разработке алгоритма, точное словесное описание алгоритма по шагам либо схему программы, наиболее характерные примеры результатов работы программы. Отчёт может быть предоставлен в электронном виде. При защите лабораторной работы требуется: продемонстрировать работоспособность программы на наиболее характерных тестовых примерах, а также – на тестовых входных данных, предложенных преподавателем; уметь пояснить исходный текст и алгоритм работы программы; показать и предоставить исходный текст и отчёт. Недопустима защита работы в момент отсутствия одного из разработчиков. Работа принимается в случае соблюдения всех требований.

Индивидуальные задания:

1. Построить неориентированный связный граф с указанным числом вершин, каждая из которых инцидентна указанному одинаковому для всех вершин числу рёбер (если такой граф существует).
2. Построить ориентированный связный граф с указанным числом вершин, такой, что из каждой вершины выходит и в каждую вершину входит указанное одинаковое для всех вершин количество дуг (количество входящих = количество выходящих = N).
3. Достроить исходный неориентированный граф до графа с указанным числом вершин, каждая из которых инцидентна указанному одинаковому для всех вершин числу рёбер (если такой граф существует).
4. Достроить исходный неориентированный граф до связного дольнорегулярного двудольного графа с указанным числом вершин, для каждой доли которого указаны числа, задающие число инцидентных рёбер вершине.
5. Для исходного неориентированного графа выделить компоненты связности: для каждой компоненты связности найти величину диаметра и радиуса: определить вершины являющиеся её центрами.
6. В исходном неориентированном графе найти все его рёбра, являющиеся мостами этого графа.
7. В исходном графе найти все вершины, являющиеся точками сочленения этого графа.

8. Определить, является ли исходный неориентированный граф деревом. Если да, то найти центр (или два центра) этого дерева и вывести поуровневое (относительно центра) описание этого дерева.
9. Определить, является ли исходный ориентированный граф ориентированным деревом. Если да, то зафиксировать его начальную вершину и вывести поуровневое описание этого дерева.
10. Определить, является ли исходный неориентированный граф эйлеровым графом, и если да, то построить для него один из эйлеровых циклов.
11. Определить, является ли исходный ориентированный граф эйлеровым графом, и если да, то построить для него один из ориентированных эйлеровых циклов.
12. В исходном неориентированном графе выделить все максимальные полные подграфы.
13. Реализовать процедуру нахождения кратчайшего расстояния между двумя вершинами (взвешенного) ориентированного графа.
14. Найти все минимальные простые циклы в заданном неориентированном графе.
15. Раскрасить граф минимальным числом цветов.
16. Дан неориентированный граф, реализовать процедуру, которая строит смежностный граф для заданного.

Лабораторная работа №4: Интерпретация формул языка логики высказываний. Представление и переработка информационных конструкций в виде графов

Цель работы: изучение языка логики высказываний, представление и переработка информационных конструкций в виде графов.

Логика высказываний

Будут использоваться большие латинские буквы A, B, C, … для обозначения произвольных пропозициональных переменных, а большие готические буквы ℑ, ς **,…** для обозначения формул.

Понятие формулы алгебры высказываний определяется следующим образом:

1. пропозициональная переменная есть формула;
2. если ℑ и *B* – формулы, то ⌉ℑ , (ℑ & *B*), (ℑ ∪ *B*), (ℑ ⊃ *B*)—формулы;
3. других формул, кроме построенных по пп. 1), 2), нет.

Будем интерпретировать логические связки как функции, определенные на множестве {1 ,0} (истина, ложь), со значениями в том же множестве следующим образом.

Отрицание : ⌉1 = 0, ⌉0 = 1.

Конъюнкция: 1 & 1 = 1, 1 & 0 = 0, 0 & 1 = 0, 0 & 0 =0.

Дизъюнкция: 1 ∪ 1 = 1, 1 ∪ 0 = 0, 0 ∪ 1 = 1, 0 ∪ 0 = 0.

Импликация: 1 ⊃ 1 = 1, 0 ⊃ 1 = 0, 0 ⊃ 0 = 1, 1 ⊃ 0 = 1.

Исключающее или ⊕: (A&⌉B) ∪ (⌉A&B).

Тогда каждая формула будет интерпретироваться как функция, определенная на множестве {1,*0*}, со значениями в этом же множестве, полученная из ⌉ , & , ∪ , ⊃ по правилам построения данной формулы. Такую функцию будем называть таблицей истинности данной формулы. Значением формулы ℑ при данных значениях переменных в множестве {1, 0} называется значение функции, соответствующей формуле ℑ, при этих значениях переменных.

Переменная x_i называется фиктивной (несущественной) переменной функции $f(x_1,\cdots,x_n)$, если

$$f(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n) = f(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$$

для любых значений $x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$. Иначе переменная x_i называется существенной.

Функций от двух аргументов шестнадцать. Наиболее употребимые из этих функций (только те, которые существенно зависят от обеих переменных) мы приводим в следующей таблице: (возможно есть ошибки)

x_1	x_2	x_1 & x_2	$x_1 \cup x_2$	$x_1 \supset x_2$	x_1 != x_2	x_1 == x_2	!(x_1 | x_2)
0	**0**	0	0	1	0	1	1
0	**1**	0	1	1	1	0	0
1	**0**	0	1	0	1	0	0
1	**1**	1	1	1	0	1	0

Формат данных:

<формула>::=<атом> | <отрицание> | <конъюнкция> | <дизъюнкция> | <импликация> | <эквиваленция> | (<формула>) | <константа>

<эквиваленция>::=<формула>~<формула>

<импликация>::=<формула>-><формула>

<дизъюнкция>::=<формула>|<формула>

<конъюнкция>::=<формула>&<формула>

<отрицание>::=!<формула>

<атом>::=<буква> {<символ>}

<константа>::=0|1

<символ>::=<буква>|<подчёркивание>|<цифра>

<подчёркивание>::=_
<цифра>::=0|…|9
<буква>::=A|…|z

Пример:

R->B
(!K)&F_A
A~B
T->0|Q

Индивидуальные задания:

1. Формулой задана логическая функция. Также задана интерпретация (частично или полностью). Найти значение функции для каждой возможной интерпретации.
2. Формулой задана логическая функция. Определить к какому классу она относится: классу общезначимых, нейтральных или невыполнимых.
3. Формулой задана логическая функция. Построить её совершенную конъюнктивную нормальную форму.
4. Формулой задана логическая функция. Построить её совершенную дизъюнктивную нормальную форму.
5. Формулами заданы две логические функции. Проверить равносильность заданных формул.
6. Формулой задана логическая функция. Методом решения логических уравнений найти множество таких интерпретаций, при которых она принимает истинное/ложное значение.
7. Формулами заданы две логические функции. Методом решения логических уравнений найти множество таких интерпретаций, на которых формулы равносильны.
8. Формулами заданы **n-1** логическая функция (система функций). Проверить вновь заданную функцию на независимость от системы прежде заданных функций.
9. Формулами заданы **n** логических функций (система функций). Проверить систему функций на непротиворечивость.
10. Формулой задана логическая функция. Вычислить число всех подформул заданной формулы.
11. Формулой задана логическая функция. Вычислить число всех нейтральных подформул заданной формулы.
12. Формулой задана логическая функция. Выявить и заменить константой 1 все общезначимые подформулы заданной формулы.
13. Формулой задана логическая функция. Выявить и заменить константой 0 все невыполнимые подформулы заданной формулы.

Лабораторная работа №5: Исследование свойств логических функций.

Цель работы: исследовать свойства логических функций.

Всякое высказывание, построенное с помощью операций |, &, -, имеет некоторое истинностное значение, зависящее от значений составляющих высказываний. Любое высказывание f может быть задано в виде таблицы истинности.

x_i - атомарное высказывание (переменная x_i);

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – сложное высказывание (функция от n переменных).

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}$ – булева функция.

Исчисление высказываний можно построить, используя соответствующие таблицы истинности. При этом очевидно, что алгебра высказываний изоморфна алгебре Буля $< \beta(U); \cup, \cap, - >$, элементы носителя которой принимают значения 0 или 1, а сигнатура $\cup, \cap, -$ *(/, &, -)* обладает свойствами операций дистрибутивных решеток с дополнениями [1]. Алгебра Буля – простейшая в классе булевых алгебр; она является двухэлементной булевой алгеброй.

Алгебра, образованная k-элементным множеством вместе со всеми операциями на нем, называется *алгеброй k-значной логики, а* n-арные операции на k-элементном множестве называются *k-значными логическими функциями n* переменных [2].

Согласно теореме Стоуна (Булева алгебра изоморфна алгебре Кантора) [1, с.24] и теореме (каждое непустое множество, образованное из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ с помощью операций $\cup, \cap$, -, является объединением некоторого числа конституент) каждое высказывание и соответствующую ему булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в виде дизъюнкции конституент:

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i^{\sigma i}$$

где

$$x_i^{\sigma i} = \begin{cases} x_i, \sigma_i = 1, \\ - x_i, \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Пример: Функция голосования трех элементов. Каждый голосующий может либо одобрить решение, либо отклонить. Если большинство голосующих согласны, то решение принимается.

№	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	1

$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_2x_3 \mid x_1-x_2x_3 \mid -x_1x_2-x_3 \mid x_1x_2x_3.$

Суперпозиция функций алгебры логики

Операция образования сложной функции. Интуитивный смысл операции: в аргументы функции подставляются другие функции, некоторые переменные отождествляются, и эта процедура может повторяться.

Суперпозицией булевых функций f_0 и $f_1,\ldots,f_n$ называется функция

$$f(x_1,\ldots,x_m) = f_0(g_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_m)),$$

где каждая из функций $g_i(x_1, ..., x_m)$ либо совпадает с одной из переменных (тождественная функция), либо – с одной из функций $f_1,...,f_n$.
Функция f_0 называется элементарной суперпозицией или суперпозицией ранга 1, если она может быть получена одним из следующих способов:
14) из какой-то функции $f_i \in \{f_1,...,f_n\}$ переименование какой-то из ее переменных x_{ij}, т.е.

$$f_0 = f_i(x_{i1}, \dots, x_{ij-1}, y, x_{ij+1}, \dots, x_{im}),\ y = x_{ij}$$

15) подстановкой некоторой функции f_l вместо какого-то аргумента x_{ij} одной из функций f_i, т.е.

$$f_0 = f_i(x_{i1}, \dots, x_{ij-1}, f_l(x_{l1},...,x_{ln}), x_{ij+1}, \dots, x_{im}), f_l(x_{l1},...,x_{ln}) = x_{ij}$$

Получившаяся в результате функция f_0 зависит от всех аргументов:

$$f_0\ (x_{i1}, \dots, x_{ij-1}, x_{l1},...,x_{ln}, x_{ij+1}, \dots, x_{im}),$$

т.е. от всех переменных функций f_i и f_l исключая, быть может, x_{ij}.

Если функция f и g имеют одинаковые таблицы истинности, отличаясь только обозначениями переменных, то в силу п. 1) определения “Суперпозиции булевых функций” каждая из них является суперпозицией другой.

Если описаны класс функций $\Phi = \{f_1,...,f_n\}$, классс функций $\Phi^{(r)}$, $\Phi^{(r+1)}$, являющихся суперпозициями ранга (r), (r+1) функций из системы Φ, то $\Phi \subset \Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)}$.

Индивидуальные задания:

1. Функции f и g имеют одинаковые таблицы истинности, отличаясь только обозначениями переменных, постройте суперпозицию этих функций.
2. Вычислить к какому классу принадлежит функция $\Phi \subset \Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)}$, если описаны класс функций $\Phi = \{f_1(x_{11},...,x_{1k1}),...,f_m(x_{m1},...,x_{mkm})\}$, классы функций $\Phi^{(r)}$, $\Phi^{(r+1)}$, являющихся суперпозициями ранга (r) и (r+1) функций из системы Φ.
3. Разработать программу, которая синтезирует логическую формулу и проверяет является ли она общезначимой, противоречивой или нейтральной.
4. Разработать программу, проверяющую полноту системы функций. Функция задается, например, в следующем виде: $\{xy \vee xz \vee yz,\ \overline{x}\}$
5. Разработать программу проверки логических функций на тавтологию. Функция задается в следующем виде: A и B – тавтологии, F = A&B
6. Разработать программу проверки истинности логического вывода. На вход подается формула в следующем виде: $\neg A \vee B, C \to \neg B \models \neg C$

Лабораторная работа №6: Приведение логических функций к совершенной дизъюнктивной нормальной форме и совершенной конъюнктивной нормальной форме.

Цель работы: изучение приведения логических функций к СДНФ и СКНФ.
Минимизация булевых функций в классе ДНФ
Минимизация – уменьшение сложности ДНФ булевой функции.
Сложность – количество всех первичных термов (переменная или ее отрицание), которые образуют форму, задающую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
В примере сложность функции голосования равна 12.
Длина некоторых элементарных конъюнкций может быть уменьшена с помощью элементарных преобразований. Для этого применяются следующие соотношения:
1. $xy \mid \neg xy = xy \mid \neg xy \mid y$ (закон неполного склеивания)
2. $xy \mid \neg xz = xy \mid \neg xz \mid yz$ (закон полного склеивания)
3. $x \mid xy = x$ (законы поглощения)
4. $\neg x \mid xy = \neg x \mid y$;
5. $x \mid \neg xy = x \mid y$
6. $x(\neg x \mid y) = xy$;
7. $x (x \mid y) = x$
8. $\neg x(x \mid y) = \neg xy$.
9. $x \mid x = x$ (идемпотентность дизъюнкции)

Пример 1: $f (x, y, z) = xyz \mid x\text{-}yz \mid xy\text{-}z \mid \text{-}xy\text{-}z = (xyz \mid x\text{-}yz \mid xz) \mid (xy\text{-}z \mid \text{-}xy\text{-}z \mid y\text{-}z) = (x\text{-}yz \mid xz) \mid (xy\text{-}z \mid y\text{-}z) = xz \mid y\text{-}z$
Сложность минимизированной формы равна 4.
Пример 2: $f(x_1, x_2, x_3)= \text{-}x_1x_2x_3 \mid x_1\text{-}x_2x_3 \mid \text{-}x_1x_2\text{-}x_3 \mid x_1x_2x_3$
Идемпотентность дизъюнкции ($a \mid a = a$): $f(x_1, x_2, x_3)= \text{-}x_1x_2x_3 \mid x_1\text{-}x_2x_3 \mid \text{-}x_1x_2\text{-}x_3 \mid x_1x_2x_3 \mid x_1x_2x_3 \mid x_1x_2x_3$;
Коммутативность ($a|b=b|a$), ассоциативность ($a|(b|c)=(a|b)|c$) и дистрибутивность ($a\&(b|c)=a\&b \mid a\&c$):
$f(x_1, x_2, x_3)= (x_1|\text{-}x_1)x_2x_3 \mid (x_2|\text{-}x_2)x_1x_3 \mid (x_3| \text{-}x_3)x_1x_2$;
$f(x_1, x_2, x_3)= (1)x_2x_3 \mid (1)x_1x_3 \mid (1)x_1x_2$;
$f(x_1, x_2, x_3)= (x_2 \mid x_1)x_3 \mid x_1x_2$;
Сложность минимизированной формы равна 5.

Элементарной конъюнкцией (дизъюнкцией) называется произвольная конъюнкция (дизъюнкция) формул, каждая из которых есть пропозициональная переменная или отрицание пропозициональной переменной.

Дизъюнктивной нормальной формой (д.н.ф.) называется произвольная дизъюнкция элементарных конъюнкций. Конъюнктивной нормальной формой (к.н.ф.) называется произвольная конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Д.н.ф. (к.н.ф.) $\mathfrak{I}$ называется совершенной и обозначается с.д.н.ф. (с.к.н.ф.), если каждая переменная формулы $\mathfrak{I}$ входит в каждую элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) ровно один раз с отрицанием или без отрицания.

Элементарная конъюнкция называется правильной, если в нее каждая переменная входит не более одного раза (включая ее вхождения под знаком отрицания).

Правильная элементарная конъюнкция называется полной относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, если в нее каждая из этих переменных входит один и только один раз (быть может, под знаком отрицания).

СДНФ относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ – это ДНФ, в которой:
- нет одинаковых элементарных конъюнкций;
- все элементарные конъюнкции правильные;
- все элементарные конъюнкции полны относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Теорема. Всякую функцию алгебры логики $f(x_1, ..., x_n)$, не равную тождественно нулю, можно представить СДНФ, и не равную тождественно единице в СКНФ.

$$f(x_1, ..., x_n) = | (\underset{i=1}{\overset{n}{\&}} x_i^{\sigma i})$$

Элементарное произведение, которое является импликантой функции f, но никакая его собственная часть импликантой этой функции не является, называется *простой импликантой* данной функции.

Длина простой импликанты уже не может быть уменьшена путем склеивания ее с другими импликантами данной функции.

Алгоритм преобразования формулы в СДНФ

Предыдущее равенство позволяет находить СДНФ для функции по ее таблице. Это не удобно, если функция задана формулой. Построение СДНФ разобьем на два этапа. Вначале по формулам мы построим ДНФ, а затем по ДНФ построим СДНФ. Формулы и элементарные операции преобразования формул, использующие 13 известных аксиом и их простейшие следствия:

1) преобразуем формулу так, чтобы в ней были только операции |, &, ¬, причем отрицания могут стоять только над аргументами;

2) преобразовать формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше, чем дизъюнкции (при помощи дистрибутивного закона);

Преобразуем ДНФ в СДНФ.

3) удаляем дублирующиеся элементарные конъюнкции;

4) делаем все элементарные конъюнкции правильными путем следующих преобразований:

а) если в элементарную конъюнкцию входит некоторая переменная вместе со своим отрицанием, то мы удаляем эту конъюнкцию из ДНФ.

б) если некоторая переменная входит в элементарную конъюнкцию несколько раз, причем во всех случаях без отрицания, или во всех случаях под знаком отрицания, то мы оставляем только одно вхождение.

Получаем полные конъюнкции.

5) если в некоторую конъюнкцию $x_1^{\sigma 1}$ ... $x_k^{\sigma k}$ не входит переменная y, то нужно рассмотреть равносильное выражение $x_1^{\sigma 1}\ x_k^{\sigma k}(y \mid \neg y)$ и вновь применить преобразование 2). После применения 5) могут вновь появиться одинаковые конъюнкции. Поэтому нужно вновь применить преобразование 3).

Индивидуальные задания:

1. Разработать программу, которая по сгенерированной случайной таблице истинности синтезирует булеву функцию. Булева функция может быть представлена в совершенной коньюнктивной (СКНФ) или дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ).

Пример: Функция голосования трех элементов.

$F(x_1, x_2, x_3)= -x_1x_2x_3 \mid x_1-x_2x_3 \mid -x_1x_2-x_3 \mid x_1x_2x_3$.

Программа должна работать в двух режимах:

1) генерация случайной таблицы истинности и построение булевой функции в СДНФ или СКНФ
2) пользователь вводит произвольную функцию в аналитическом виде, программа приводит ее к СДНФ, СКНФ

2. Разработать программу нахождения минимальной ДНФ булевой функции. Функция задается в следующем виде: f(x,y,z,t)=1 на наборах (0,3,4,7,8,9,11,12).

3. Разработать программу представления булевой функции в виде СДНФ, СКНФ и канонического полинома Жегалкина. Проверить, является ли она линейной, монотонной, самодвойственной, сохраняющей 0, сохраняющей 1. Функция подается в следующем виде: $(\neg x\neg y\vee\neg y\neg z)\equiv(x\vee z\rightarrow y)$

4. Разработать программу проверки непротиворечивости системы посылок. Система посылок подается на вход в следующем виде: $A \rightarrow \neg(B\&C)$, $D \vee E \rightarrow G$, $G \rightarrow \neg(H \vee I)$, $\neg C\&E\&H$.
5. Формализовать предметную область и разработать программу проверки непротиворечивости системы посылок. Предметная область представлена в следующем виде:
Область определения: животные.
a) Единственные животные в этом доме - кошки.
b) Любое животное можно приручить, если оно любит глядеть на луну.
c) Если животное вызывает у меня отвращение, я стараюсь держаться от него подальше.
d) Ни одно животное не плотоядно, если оно не бродит по ночам.
e) Ни одна кошка не упустит случая поймать мышь.
f) Я не пускаю к себе в кабинет животных, кроме тех, которые находятся в этом доме.
g) Кенгуру не поддается приручению.
h) Лишь плотоядные животнеы ловят мышей.
i) Животные, которых я не пускаю к себе в кабинет, вызывают у меня отвращение.
j)Животные, которые бродят по ночам, любят смотреть на луну.
Вывод: Я всегда стараюсь держаться подальше от кенгуру.

Приложение: индивидуальные задания к практическим занятиям

Часть 1. Элементы общей алгебры

1. **Вопрос:** Понятие множества и операции над множествами. Типология множеств. Представление множеств на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A \cup (B/C) = (A \cup B)/C$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing \in \{\varnothing\}$
$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$
$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$
D) Найдите $A-B$, A/B, B/A, $A \cup B$, $B \cap A$:
$A = \{B, \varnothing\}$
$B = \{\varnothing\}$
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
$A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$
$B = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle\{t, a\}, x\rangle, \langle\{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\{z, x\}, z\rangle\}$
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
$G = \{\langle\{a\}, \{b, a\}\rangle, \langle\{a, b\}, \{a\}\rangle, \langle a, \{b, a\}\rangle, \langle\{a, b\}, a\rangle, \langle a, b, a\rangle\}$
$H = \{\langle\{a, b\}, \{b, a\}\rangle, \langle\{a, c\}, \{b, c\}\rangle, \langle\{c, b\}, \{c, a\}\rangle\}$
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Иван является студентом университета. Он учится на втором курсе. Расстояние между домом Ивана и университетом в три раза меньше, чем расстояние, которое он проходит за день.30 мая он сдал последний зачёт. Сегодня уже прошла неделя, после того как Иван завершил зачётную сессию. На первом экзамене задачей Ивана являлась задача формализации этого высказывания.

2. **Вопрос:** Сочетания, размещения, перестановки, булеаны.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A/(B/C) = (A/B) \cup (A \cap C)$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$\begin{cases} A \cap X = B \\ X/A = C \end{cases}$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$
$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
D) Найдите $A-B$, A/B, B/A, $A \cup B$, $B \cap A$:
$A = \{\langle z, t\rangle, x, (B/A)/\{\varnothing, \langle t, z\rangle\}, \{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, \langle t, z\rangle\}$
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
$A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$
$B = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle\{t, a\}, x\rangle, \langle\{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\{z, x\}, z\rangle\}$
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
$B = \{\{a, s\}, \{s, a\}, \{\langle n, n\rangle, \langle n, n\rangle\}, \{a, a\}\}$
$E = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:

В среду вечером местоположение корабля было близко от пересечения сорокового меридиана западной долготы и 34 параллели южной широты. «Нептун» обладал прочным стальным корпусом, изготовленным 1 год и три месяца назад на английской верфи. Команда корабля составляла 15 человек. Всего на борту «Нептуна» находилось 34 человека. Они не представляли насколько будет отличаться вечер четверга от всех предыдущих.

3. **Вопрос:** Понятие атрибута, кортежа и схемы отношения. Представление атрибутов, кортежей и схем отношений на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C) \cap (B\times D)$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A\cap B = B\cup X \\ C\cup B = B/X \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing\in\{\varnothing\}$
$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$
$\{\varnothing\}\in\{\varnothing\}$
$\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing\}$
D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:
$A = \{B, t, \{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, B\}$
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
$F = \{<\{a ,b\}, \{b, a\}>, <\{a ,c\}, \{b, c\}>, <\{c ,b\}, \{c, a\}>\}$
$H = \{<t, a>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>, <a, a>, <a, t>, <a, x>, <a, y>, <a, z>\}$
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
$B = \{\{a, s\},\{s, a\}, \{<n, n>,<n, n>\}, \{a, a\}\}$
$G = \{<\{a\}, \{b, a\}>, <\{a, b\}, \{a\}>, <a, \{b, a\}>, <\{a, b\},a>, <a, b, a>\}$
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Для приготовления 0.5 кг. узбекского плова сначала необходимо сварить 100 гр. риса, потом 200 гр. мяса, через 1 час изжарить 23 гр. лука, 30 гр. морковки. Всё перемешать и тушить в течение пяти часов.

4. **Вопрос:** Понятие отношения. Операции над отношениями. Представление отношений на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A\cup B = A-(A\cap B)-B$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A\cup X = B\cap X \\ A\cap X = C\cup X \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing\in\{\varnothing\}$
$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$
$\{\varnothing\}\in\{\varnothing\}$
$\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:
$A = \{<z, t>, x, (B/A)/\{\varnothing,<t, z>\},\{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, <t, z>\}$
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
$D = \{<<t ,a>, <a, t>>, <<t, a>, <t, a>>, <<x, z>, y>, <y, <z, x>>, <<z, x>, z>\}$
$H = \{<t, a>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>, <a, a>, <a, t>, <a, x>, <a, y>, <a, z>\}$
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
$D = \{<x, <a, t>>, <\{t, a\}, x>, <<x, z>, y>, <y, \{z, x\}>, <<z, x>, z>\}$

$E = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Люди делятся на две группы те, которые согласны с этим высказыванием и те которые не согласны с ним.

5. **Вопрос:** Бинарные отношения, свойства бинарных отношений и их представление на языке семантических сетей.

A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:

$A \cap (B/A) = \varnothing$

B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)

$$\begin{cases} A/X = B \\ X/A = C \end{cases}$$

C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:

$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$

$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$

$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

D) Найдите $A-B$, A/B, B/A, $A \cup B$, $B \cap A$:

$A = \{B, \varnothing\}$

$B = \{\varnothing\}$

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:

$C = \{\langle x, \langle a, t\rangle\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$

$D = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$

F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:

$E = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$

$G = \{\langle \{a\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, b\}, \{a\}\rangle, \langle a, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, b\}, a\rangle, \langle a, b, a\rangle\}$

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Отношение подчиненности во время феодальной организации общества между феодалами и вассалами формровалось по следующему правилу: «Вассал моего вассала – не мой вассал».

6. **Вопрос:** Соответствия и их типология. Представление соответствий на языке семантических сетей.

A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:

$A/B = A/(A \cap B)$

B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)

$$\begin{cases} A/X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$$

C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:

$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$

$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$

$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$

D) Найдите $A-B$, A/B, B/A, $A \cup B$, $B \cap A$:

$A = \{B, t, \{\varnothing, x\}\}$

$B = \{\varnothing, x, B\}$

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:

$A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$

$D = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$

F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:

$A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$

$E = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:

Два события (x_1,y_1,z_1,t_1), (x_2,y_2,z_2,t_2) называются независимыми, если интервал $d=dx^2+dy^2+dz^2-c^2*dt^2>0$ ($dx=x_1-x_2$, $dy=y_1-y_2$, $dz=z_1-z_2$, $dt=t_1-t_2$), в противном случае события называются зависимыми.

7. **Вопрос:** Понятие метаотношения. Представление метаотношений на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A/(A/B) = (A\cap B)$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A/X = X/B \\ X/A = C/X \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing\in\{\varnothing\}$
$\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing\}$
$\varnothing\in\{\{\varnothing\},\varnothing\}$
$\varnothing\subseteq\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$
D) Найдите $A-B$, A/B, B/A, $A\cup B$, $B\cap A$:
$A = \{\langle z, t\rangle, x, (B/A)/\{\varnothing,\langle t, z\rangle\},\{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, \langle t, z\rangle\}$
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
$B = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle\{t, a\}, x\rangle, \langle\{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\{z, x\}, z\rangle\}$
$F = \{\langle\{a ,b\}, \{b, a\}\rangle, \langle\{a ,c\}, \{b, c\}\rangle, \langle\{c ,b\}, \{c, a\}\rangle\}$
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
$A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$
$H = \{\langle\{a ,b\}, \{b, a\}\rangle, \langle\{a ,c\}, \{b, c\}\rangle, \langle\{c ,b\}, \{c, a\}\rangle\}$
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Длина среднего шага взрослого человека равна половине расстояния от его глаз до ступней. Человек проходит в час столько километров, сколько шагов делает он в 3 сек. Пусть длина шага X м., а число шагов в 3 сек. равно N. Тогда в 3 сек. пешеход делает N*X м., а в час – 1200*N*X м. или 1.2*N*X км. Чтоб путь этот равнялся числу шагов, делаемых в 3 сек., должно существовать равенство:1.2*N*X = N <=> X=0.83 м. Значит рост человека должен быть равным 175 м.

8. **Вопрос:** Понятие алгебраической операции. Типология и свойства алгебраических операций. Представление алгебраических операций на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A\cup B =A-(A\cap B)-B$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A\cap X = B/X \\ C\cup X = X/A \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\{\varnothing\}\in\{\varnothing\}$
$\varnothing\subseteq\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$
$\varnothing\in\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
$\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
D) Найдите $A-B$, A/B, B/A, $A\cup B$, $B\cap A$:
$A = \{\langle z, t\rangle, x, (B/A)/\{\varnothing,\langle t, z\rangle\},\{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, \langle t, z\rangle\}$
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
$C = \{\langle x, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\{t, a\}, x\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
$E = \{\langle t, a\rangle, \langle x ,a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle, \langle a, a\rangle\}$
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
$B = \{\{a, s\},\{s, a\}, \{\langle n, n\rangle,\langle n, n\rangle\}, \{a, a\}\}$
$C = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle\{t, a\}, x\rangle, \langle\{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\{z, x\}, z\rangle\}$

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Деление есть нахождение одного из сомножителей по произведению и другому сомножителю. Данное произведение называется делимое, данный сомножитель – делитель, искомый сомножитель – частное. Если частное есть целое число, то говорят, что первое из упомянутых чисел делится на второе. Второе число называется делителем первого. Первое – кратным второго.
Общим делителем нескольких чисел называется число, служащее делителем для каждого из них.
Пример: числа 12; 18; 30 имеют общий делитель 3, 2 и т.д.
Среди всех общих делителей всегда имеется наибольший. В примере – это число 6. Это число называется общим наибольшим делителем.

9. **Вопрос:** Понятие шкалы измерения. Представление результатов измерений на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A/(B\cup C) = (A/B)/C$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A\cap B = B\cup X \\ C\cup B = B/X \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing\in\{\varnothing\}$
$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$
$\{\varnothing\}\in\{\varnothing\}$
$\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing\}$
D) Найдите $A-B$, A/B, B/A, $A\cup B$, $B\cap A$:
$A = \{B, t, \{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, B\}$
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
$C = \{<x, <a, t>>, <\{t, a\}, x>, <<x, z>, y>, <y, \{z, x\}>, <<z, x>, z>\}$
$F = \{<\{a ,b\}, \{b, a\}>, <\{a ,c\}, \{b, c\}>, <\{c ,b\}, \{c, a\}>\}$
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
$C = \{<x, \{a, t\}>, <\{t, a\}, x>, <\{x, z\}, y>, <y, \{z, x\}>, <\{z, x\}, z>\}$
$E = \{<<t ,a>, <a, t>>, <<t, a>, <t, a>>, <<x, z>, y>, <y, <z, x>>, <<z, x>, z>\}$
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Деление есть нахождение одного из сомножителей по произведению и другому сомножителю. Данное произведение называется делимое, данный сомножитель – делитель, искомый сомножитель – частное. Если частное есть целое число, то говорят, что первое из упомянутых чисел делится на второе. Второе число называется делителем первого. Первое – кратным второго.
Общим кратным нескольких чисел называется число, служащее кратным для каждого из них.
Пример: числа 15; 6; 10 имеют общее кратное 180, 90 и т.д.
Среди всех общих кратных всегда есть наименьшее. В примере – это число 30. Это число называется общим наименьшим кратным.

10. **Вопрос:** Понятие алгебраической системы. Типология алгебраических систем. Представление алгебраических систем на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A/(A/B) = (A\cap B)$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A/X = B \\ A\cup X = C \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing\in\{\varnothing\}$
$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$
$\{\varnothing\}\in\{\varnothing\}$
$\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$
D) Найдите $A-B$, A/B, B/A, $A\cup B$, $B\cap A$:
$A = \{<z, t>, x, (B/A)/\{\varnothing,<t, z>\},\{\varnothing, x\}\}$

B = {∅, x, <t, z>}

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:

B = {<x, {a, t}>, <{t, a}, x>, <{x, z}, y>, <y, {z, x}>, <{z, x}, z>}

F = {<{a ,b}, {b, a}>, <{a ,c}, {b, c}>, <{c ,b}, {c, a}>}

F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:

E = {<<t ,a>, <a, t>>, <<t, a>, <t, a>>, <<x, z>, y>, <y, <z, x>>, <<z, x>, z>}

F = {<t, <a, a>>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>}

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:

Возвести число в целую степень (вторую, третью, четвертую и т.д.) – значит повторить его сомножители два, три, четыре и т.д. раз. Число. Повторяющееся сомножителем, называется основанием степени; число, указывающее сколько раз берется одинаковый множитель, называется показателем степени. Результат называется степенью.

11. **Вопрос:** Отношение гомоморфизма на алгебраических системах. Представление отношения гомоморфизма на языке семантических сетей.

A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:

$(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C) \cap (B\times D)$

B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)

$$\begin{cases} A\cap B = B\cup X \\ C\cup B = B/X \end{cases}$$

C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:

{∅}∈{∅}

∅⊆{{∅,{∅}},{∅}}

∅∈{{∅},{∅,{∅}}}

{∅}⊆{∅,{∅}}

D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:

A = {B, ∅}

B = {∅}

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:

A = {<x, t>, <t, x>, <x, y>, <y, x>, <z, z>}

B = {<x, {a, t}>, <{t, a}, x>, <{x, z}, y>, <y, {z, x}>, <{z, x}, z>}

F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:

D = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}

E = {<<t ,a>, <a, t>>, <<t, a>, <t, a>>, <<x, z>, y>, <y, <z, x>>, <<z, x>, z>}

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:

На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на 11.

12. **Вопрос:** Отношение изоморфизма и автоморфизм алгебраических систем. Представление отношения изоморфизма и автоморфизма на языке семантических сетей.

A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:

$(A\cup B)\times(C\cup D) = (A\times C) \cup (B\times D)$

B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)

$$\begin{cases} A/X = B \\ A\cup X = C \end{cases}$$

C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:

{∅}∈{∅}

∅∈{{∅},∅}

∅⊆{{∅,{∅}},{∅}}

∅∈{{∅},{∅,{∅}}}

D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:

A = {B, t, {∅, x}}
B = {∅, x, B}
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
B = {<x, {a, t}>, <{t, a}, x>, <{x, z}, y>, <y, {z, x}>, <{z, x}, z>}
H = {<t, a>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>, <a, a>, <a, t>, <a, x>, <a, y>, <a, z>}
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
B = {{a, s},{s, a}, {<n, n>,<n, n>}, {a, a}}
F = {<t, <a, a>>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>}
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо разнится от нее на число, делящееся на 11.

13. **Вопрос:** Понятие реляционной структуры. Типология элементов реляционной структуры. Представление реляционных структур на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C) \cap (B\times D)$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A/X = X/B \\ X/A = C/X \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing\in\{\varnothing\}$
$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$
$\varnothing\in\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
$\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing\}$
D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:
A = {B, t, {∅, x}}
B = {∅, x, B}
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
C = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}
H = {<t, a>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>, <a, a>, <a, t>, <a, x>, <a, y>, <a, z>}
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
G = {<{a}, {b, a}>, <{a, b}, {a}>, <a, {b, a}>, <{a, b},a>, <a, b, a>}
H = {<{a ,b}, {b, a}>, <{a ,c}, {b, c}>, <{c ,b}, {c, a}>}
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Два треугольника равны, если у них соответственно равны:
1) две стороны и угол, заключенный между ними;
2) два угла и прилежащая к ним сторона;
3) два угла и сторона, противолежащая одному из них;
4) три стороны;
5) две стороны и угол, лежащий против большей из них.

14. **Вопрос:** Типология и свойства графовых структур.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения, где β (X) – булеан множества X:
$\beta(A\cup B) = \beta(A) \cup \beta(B)$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A/X = B \\ A\cup X = C \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing\in\{\varnothing\}$
$\varnothing\subseteq\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

$\varnothing \in \{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:

A = {<z, t>, x, (B/A)/{∅,<t, z>},{∅, x}}

B = {∅, x, <t, z>}

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:

B = {<x, {a, t}>, <{t, a}, x>, <{x, z}, y>, <y, {z, x}>, <{z, x}, z>}

F = {<{a ,b}, {b, a}>, <{a ,c}, {b, c}>, <{c ,b}, {c, a}>}

F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:

B = {{a, s},{s, a}, {<n, n>,<n, n>}, {a, a}}

F = {<t, <a, a>>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>}

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:

Четырех угольник ABCD является параллелограммом, если налицо одно из следующих условий:

1) противолежащие стороны попарно равны (AB=CD, BC=DA);
2) две противолежащие стороны равны и параллельны (AB=CD, AB|| CD);
3) диагонали взаимно делятся пополам;
4) противолежащие углы попарно равны (<A = <C, <B = <D).

15. **Вопрос:** Алфавит и синтаксис формального фактографического языка семантических сетей.

A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения, где β (X) – булеан множества X:

$\beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B)$

B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$$

C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:

$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$

$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

$\varnothing \in \{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:

A = {<z, t>, x, (B/A)/{∅,<t, z>},{∅, x}}

B = {∅, x, <t, z>}

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:

C = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}

F = {<{a ,b}, {b, a}>, <{a ,c}, {b, c}>, <{c ,b}, {c, a}>}

F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:

B = {{a, s},{s, a}, {<n, n>,<n, n>}, {a, a}}

E = {<<t ,a>, <a, t>>, <<t, a>, <t, a>>, <<x, z>, y>, <y, <z, x>>, <<z, x>, z>}

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:

Умножить некоторое число (целое или дробное) на дробь – значит разделить это число на знаменатель дроби и результат умножить на числитель.

16. **Вопрос:** Понятие шкалы измерения. Представление результатов измерений на языке семантических сетей.

A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:

$A/(B/C) = (A/B) \cup (A \cap C)$

B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ X/A = C \end{cases}$$

C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:

$\varnothing \in \{\varnothing\}$

$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

$\varnothing \in \{\{\varnothing\},\varnothing\}$

$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$

D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:

A = {B, ∅}

B = {∅}

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:

B = {<x, {a, t}>, <{t, a}, x>, <{x, z}, y>, <y, {z, x}>, <{z, x}, z>}
E = {<t, a>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>, <a, a>}
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
A = {<x, t>, <t, x>, <x, y>, <y, x>, <z, z>}
G = {<{a}, {b, a}>, <{a, b}, {a}>, <a, {b, a}>, <{a, b},a>, <a, b, a>}
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Чтоб умножить дробь на дробь, умножают числитель на числитель и знаменатель на знаменатель. Первый результат есть числитель произведения, второй – знаменатель.

17. **Вопрос:** Понятие алгебраической системы. Типология алгебраических систем. Представление алгебраических систем на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B)$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A \cap B = B \cup X \\ C \cup B = B/X \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing \in \{\varnothing\}$
$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$
D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:
A = {<z, t>, x, (B/A)/{∅,<t, z>},{∅, x}}
B = {∅, x, <t, z>}
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
C = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}
H = {<t, a>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>, <a, a>, <a, t>, <a, x>, <a, y>, <a, z>}
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
E = {<<t ,a>, <a, t>>, <<t, a>, <t, a>>, <<x, z>, y>, <y, <z, x>>, <<z, x>, z>}
G = {<{a}, {b, a}>, <{a, b}, {a}>, <a, {b, a}>, <{a, b},a>, <a, b, a>}
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Чтоб разделить какое-нибудь число на дробь, нужно умножить это число на дробь, обратную делителю.

18. **Вопрос:** Понятие атрибута, кортежа и схемы отношения. Представление атрибутов, кортежей и схем отношений на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B)$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = C \cup X \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing \in \{\varnothing\}$
$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:
A = {B, t, {∅, x}}
B = {∅, x, B}
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
F = {<{a ,b}, {b, a}>, <{a ,c}, {b, c}>, <{c ,b}, {c, a}>}
H = {<t, a>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>, <a, a>, <a, t>, <a, x>, <a, y>, <a, z>}
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
D = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}
H = {<{a ,b}, {b, a}>, <{a ,c}, {b, c}>, <{c ,b}, {c, a}>}
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Уравнение движения материальной точки имеет вид: r=(3t-r)i-4tj. Уравнение движения точки в координатной форме: x = 3t – 2 и y = – 4t. Проекции вектора скорости на оси координат: vx = dx/dt = 3 и vy = dy/dt = -4. Вектор скорости: v = 3i - 4j. Проекции ускорения точки: wx = dvx/dt = 0 и wy = dvy/dt = 0. Ускорение точки: w = 0. Последовательность операций для выражения координат: x = 3t – 2 и y = – 4t; 4x = 12t – 8 и 3y = – 12t; 4x + 3y = – 8. Уравнение прямой в плоскости XY: – y = – 4/3x – 8/3.

19. **Вопрос:** Понятие отношения. Операции над отношениями. Представление отношений на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения, где β (X) – булеан множества X:
$\beta (A \cup B) = \beta (A) \cup \beta (B)$

B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)

$$\begin{cases} A/X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$$

C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:

$\varnothing \in \{\varnothing\}$

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$

$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$

$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$

D) Найдите A–B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:

$A = \{B, \varnothing\}$

$B = \{\varnothing\}$

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:

$G = \{\langle\{a\}, \{b, a\}\rangle, \langle\{a, b\}, \{a\}\rangle, \langle a, \{b, a\}\rangle, \langle\{a, b\}, a\rangle, \langle a, b, a\rangle\}$

$H = \{\langle\{a, b\}, \{b, a\}\rangle, \langle\{a, c\}, \{b, c\}\rangle, \langle\{c, b\}, \{c, a\}\rangle\}$

F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:

$A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$

$D = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Мудрец A подумал, что если у него на голове чёрный колпак, то мудрец B мог думать так: «Я вижу чёрный колпак у мудреца A, если мудрец C увидел бы на моей голове тоже чёрный колпак, то он сразу бы догадался что у него белый, но раз он не догадался, то значит это не так и у меня на голове белый колпак». Но так как мудрец B, не высказывал никаких догадок, то, скорее всего, у него не было оснований так думать, и колпак на голове мудреца A был белым.

20. **Вопрос:** Бинарные отношения, свойства бинарных отношений и их представление на языке семантических сетей.

A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:

$A \cap (B/C) = (A \cap B)/C$

B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)

$$\begin{cases} A/X = B \\ X/A = C \end{cases}$$

C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:

$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$

$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$

D) Найдите A–B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:

$A = \{B, t, \{\varnothing, x\}\}$

$B = \{\varnothing, x, B\}$

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:

$B = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle\{t, a\}, x\rangle, \langle\{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\{z, x\}, z\rangle\}$

$D = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$

F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:

$C = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle\{t, a\}, x\rangle, \langle\{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\{z, x\}, z\rangle\}$

$E = \{\langle\langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle, \langle n, v\rangle\}$

G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Проекция отношения r по атрибутам a1, a2,…,an – это множество кортежей, которые строятся из кортежей отношения r путем удаления всех вхождений элементов, которые имеют атрибуты, не совпадающие с указанными выше атрибутами a1, a2,…,an, а также путем последующего устранения кратности кортежей.

21. **Вопрос:** Соответствия и их типология. Представление соответствий на языке семантических сетей.

A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:

$A/(B/C) = (A/B) \cup (A \cap C)$

B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)

$$\begin{cases} A/X = X/B \\ X/A = C/X \end{cases}$$

C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:

$\varnothing \in \{\varnothing\}$

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$

$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$

$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$

D) Найдите A–B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:

$A = \{\langle z, t\rangle, x, (B/A)/\{\varnothing, \langle t, z\rangle\}, \{\varnothing, x\}\}$

$B = \{\varnothing, x, \langle t, z\rangle\}$

E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из

них являются функциями:
B = {<x, {a, t}>, <{t, a}, x>, <{x, z}, y>, <y, {z, x}>, <{z, x}, z>}
C = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
B = {{a, s},{s, a}, {<n, n>,<n, n>}, {a, a}}
D = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Функциональная зависимость атрибутов ax1, ax2, …, axn от атрибутов ay1, ay2, …, aym в отношении r – это такое отношение, в котором указанные множества атрибутов не имеют общих элементов; все перечисленные атрибуты входят в схему отношения r; в отношении r не существует двух таких кортежей, у которых бы совпадали элементы, имеющие атрибуты из множества { ax1, ax2, …, axn }, но не совпадали элементы, имеющие атрибуты из множества { ay1, ay2, …, aym }.

22. **Вопрос:** Понятие метаотношения. Представление метаотношений на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A \cap (B/A) = \varnothing$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$\begin{cases} A/X = B \\ X/A = C \end{cases}$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
{∅} ∈ {∅}
∅⊆{{∅,{∅}},{∅}}
∅∈{{∅},{∅,{∅}}}
{∅}⊆{∅,{∅}}
D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:
A = {<z, t>, x, (B/A)/{∅,<t, z>},{∅, x}}
B = {∅, x, <t, z>}
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
F = {<{a ,b}, {b, a}>, <{a ,c}, {b, c}>, <{c ,b}, {c, a}>}
H = {<t, a>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>, <a, a>, <a, t>, <a, x>, <a, y>, <a, z>}
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
F = {<t, <a, a>>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>}
G = {<{a}, {b, a}>, <{a, b}, {a}>, <a, {b, a}>, <{a, b},a>, <a, b, a>}
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Отношение d является декартовым произведением, если отношение d является классическим отношением с атрибутами a1, a2, …, an; и если в состав отношения d входит каждый кортеж вида <a1:x1i, a2:x2i, …,an:xni>, где x1i есть элемент множества, являющегося доменом отношения d по атрибуту a1, и x2i есть элемент множества, являющегося доменом отношения d по атрибуту a2, и т.д., xni есть элемент множества, , являющегося доменом отношения d по атрибуту an.

23. **Вопрос:** Понятие алгебраической операции. Типология и свойства алгебраических операций. Представление алгебраических операций на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$A/(B \cup C) = (A/B)/C$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$\begin{cases} A/X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
∅∈{∅}
∅⊆{∅}
{∅} ∈ {∅}
{∅}⊆{∅}
D) Найдите A−B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:
A = {B, t, {∅, x}}
B = {∅, x, B}
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
C = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}
H = {<t, a>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>, <a, a>, <a, t>, <a, x>, <a, y>, <a, z>}
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
D = {<x, <a, t>>, <{t, a}, x>, <<x, z>, y>, <y, {z, x}>, <<z, x>, z>}
F = {<t, <a, a>>, <x ,a>, <y, a>, <z, a>}
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Суръекцией множества sx и множества sy называется такое соответствие между множеством sx и можеством sy, которое является одновременно отображеним множества sx на множество sy, а также отображением множества sy на множество sx. Отображение множества sx и множества sy называется такое соответствие

между множеством sx и можеством sy, в котором можество sx является унарной проектцией соответствующего бинарного отношения r по соответствующему атрибуту ax, а не надмножеством указанной унарной проекции.

24. **Вопрос:** Понятие реляционной структуры. Типология элементов реляционной структуры. Представление реляционных структур на языке семантических сетей.
A) Доказать или опровергнуть тождественность выражения:
$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$
B) Решить систему (выразить X через A, B, C и выявить ограничения на соотношения между A, B, C, при которых система имеет решение)
$$\begin{cases} A \cap B = B \cup X \\ C \cup B = B / X \end{cases}$$
C) Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\varnothing \in \{\varnothing\}$
$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$
$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
D) Найдите A–B, A/B, B/A, A∪B, B∩A:
$A = \{\langle z, t\rangle, x, (B/A)/\{\varnothing, \langle t, z\rangle\}, \{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, \langle t, z\rangle\}$
E) Найдите область определения и область значений нижеприведённых соответствий, определите какие из них являются функциями:
$B = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle \{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle \{z, x\}, z, v\rangle\}$
$E = \{\langle t, a\rangle, \langle x, a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle, \langle a, a\rangle\}$
F) Выявите все бинарные отношения, найдите область определения каждого из бинарных отношений и определите какими основными свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) оно обладает, а какими – нет:
$B = \{\{a, s\}, \{s, a\}, \{\langle n, n\rangle, \langle n, n\rangle\}, \{a, a\}\}$
$H = \{\langle \{a, b\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, c\}, \{b, c\}\rangle, \langle \{c, b\}, \{c, a\}\rangle\}$
G) Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:
Инъекцией множества x во множество y называется такое сотоветствие между x и y, которое является отображением множества x на можество y и является однозначным соответствием из можества y во множество x. Отображение множества sx и множества sy называется такое соответствие между множеством sx и можеством sy, в котором можество sx является унарной проектцией соответствующего бинарного отношения r по соответствующему атрибуту ax, а не надмножеством указанной унарной проекции.

25. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
$A/(A/B) = (A \cap B)$
$A \cup B = A - (A \cap B) - B$
$A/B = A/(A \cap B)$
$$\begin{cases} A \cap B = B \cup X \\ C \cup B = B / X \end{cases}$$
Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
$\varnothing \subseteq \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$
$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$A = \{B, t, \{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, B\}$

$A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$
$B = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle \{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle \{z, x\}, z\rangle\}$
$F = \{\langle \{a, b\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, c\}, \{b, c\}\rangle, \langle \{c, b\}, \{c, a\}\rangle\}$
$H = \{\langle t, a\rangle, \langle x, a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle a, t\rangle, \langle a, x\rangle, \langle a, y\rangle, \langle a, z\rangle\}$

$D = \{\langle x, \langle a, t\rangle\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle \langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle \langle z, x\rangle, z\rangle\}$
$E = \{\langle \langle t, a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle \langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle \langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle \langle z, x\rangle, z\rangle\}$
$F = \{\langle t, \langle a, a\rangle\rangle, \langle x, a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle\}$
$H = \{\langle \{a, b\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, c\}, \{b, c\}\rangle, \langle \{c, b\}, \{c, a\}\rangle\}$
Формализовать на языке SCB следующие высказывания представленные на естественном языке:

26. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$
$A \cap (B/C) = (A \cap B)/C$
$A \cup (B/C) = (A \cup B)/C$
$A/B = A/(A \cap B)$
$$\begin{cases} A / X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$$
Зачеркните неверные соотношения между указанными множествами:
$\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$
$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, \varnothing\}$

$\varnothing\subseteq\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$
$\varnothing\in\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

$A = \{B, \varnothing\}$
$B = \{\varnothing\}$

$A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$
$B = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle \{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle \{z, x\}, z\rangle\}$
$D = \{\langle\langle t ,a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
$F = \{\langle \{a ,b\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a ,c\}, \{b, c\}\rangle, \langle \{c ,b\}, \{c, a\}\rangle\}$

$B = \{\{a, s\},\{s, a\}, \{\langle n, n\rangle,\langle n, n\rangle\}, \{a, a\}\}$
$C = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle \{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle \{z, x\}, z\rangle\}$
$F = \{\langle t, \langle a, a\rangle\rangle, \langle x ,a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle\}$
$G = \{\langle \{a\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, b\}, \{a\}\rangle, \langle a, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, b\},a\rangle, \langle a, b, a\rangle\}$

27. $(A\cap B)\times(C\cap D) = (A\times C) \cap (B\times D)$
$A/(B\cup C) = (A/B) /C$
$A\cup(B/C) = (A\cup B) /C$
$A\cap(B/A) = \varnothing$

$$\begin{cases} A/X = X/B \\ X/A = C/X \end{cases}$$

$\varnothing\subseteq\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
$\varnothing\in\{\varnothing\}$
$\varnothing\in\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$
$\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing\}$

$A = \{\langle z, t\rangle, x, (B/A)/\{\varnothing,\langle t, z\rangle\},\{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, \langle t, z\rangle\}$

$C = \{\langle x, \langle a, t\rangle\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
$E = \{\langle t, a\rangle, \langle x ,a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle, \langle a, a\rangle\}$
$D = \{\langle\langle t ,a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
$F = \{\langle \{a ,b\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a ,c\}, \{b, c\}\rangle, \langle \{c ,b\}, \{c, a\}\rangle\}$

$B = \{\{a, s\},\{s, a\}, \{\langle n, n\rangle,\langle n, n\rangle\}, \{a, a\}\}$
$E = \{\langle\langle t ,a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
$G = \{\langle \{a\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, b\}, \{a\}\rangle, \langle a, \{b, a\}\rangle, \langle \{a, b\},a\rangle, \langle a, b, a\rangle\}$
$H = \{\langle \{a ,b\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a ,c\}, \{b, c\}\rangle, \langle \{c ,b\}, \{c, a\}\rangle\}$

28. $A/(A/B) = (A\cap B)$
$A/(B\cup C) = (A/B) /C$
$A\cap(B/C) = (A\cap B) /C$
$\beta (A\cup B) = \beta (A) \cup \beta (B)$

$$\begin{cases} A/X = B \\ A\cup X = C \end{cases}$$

$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$
$\varnothing\in\{\varnothing\}$
$\varnothing\in\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$
$\{\varnothing\}\subseteq\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$A = \{B, t, \{\varnothing, x\}\}$
$B = \{\varnothing, x, B\}$

$A = \{\langle x, t\rangle, \langle t, x\rangle, \langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle, \langle z, z\rangle\}$
$B = \{\langle x, \{a, t\}\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle \{x, z\}, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle \{z, x\}, z\rangle\}$
$F = \{\langle \{a ,b\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a ,c\}, \{b, c\}\rangle, \langle \{c ,b\}, \{c, a\}\rangle\}$
$H = \{\langle t, a\rangle, \langle x ,a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle a, t\rangle, \langle a, x\rangle, \langle a, y\rangle, \langle a, z\rangle\}$

$D = \{\langle x, \langle a, t\rangle\rangle, \langle \{t, a\}, x\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \{z, x\}\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
$E = \{\langle\langle t ,a\rangle, \langle a, t\rangle\rangle, \langle\langle t, a\rangle, \langle t, a\rangle\rangle, \langle\langle x, z\rangle, y\rangle, \langle y, \langle z, x\rangle\rangle, \langle\langle z, x\rangle, z\rangle\}$
$F = \{\langle t, \langle a, a\rangle\rangle, \langle x ,a\rangle, \langle y, a\rangle, \langle z, a\rangle\}$
$H = \{\langle \{a ,b\}, \{b, a\}\rangle, \langle \{a ,c\}, \{b, c\}\rangle, \langle \{c ,b\}, \{c, a\}\rangle\}$

Часть 2. Математическая логика

1. Определить являются ли следующие формулы алгебры высказываний общезначимыми:
(x->y)->((y->z)->(x->z))
(x->y)->((y->z)->(x|(y->z)))
(x->(y->z))->((x->y)->(x->z))
(!a->!b)->(a->b)
(!a~!b)~(a~b)
((!a->a)&((a->a)->a))

2. Определить являются ли следующие формулы алгебры высказываний невыполнимыми:
!((c->d)->((d->e)->(c|d->e)))
((t->q)&(t->!q))&!t
((t->q)->(t->!q))&!t
(((t->q)->(t->!q))->((t->!q)->(t->q)))&!t
!(!(((c->d)->(c->!d))->!(c->c))|d)
((!e->e)&((e->e)->!e))

3. Эквивалентны ли следующие пары формул:
A~(A|B) и B|A
A->B и !A|B
A->B и !A|B
(A|!B)&(B|!A) и (!B&A)|(B&!A)
(A|!B)&(B) и !((!B&A)|(B))
(A|!B)&(B) и ((!B&A)|(B))

4. Эквивалентны ли следующие пары формул:
(x&y)|(!x&!z)|(x&!z) и x&(!y&!z)|(!x|!z)
(!x&!y&!z)|(!x&!y&z)|(!x&y) и !x
(x&y&!z)|(x&y)|(z&!z) и (x&y)
x&(y|z)|(y&(!x&!z))|(!z&(!y|x)) и (x|y|!z)
(a&b)|(!a&!b) и (a|!b)&(b|!a)
(a&b)|(!a&b) и (!a|b)&(b|a)

5. Определить какие из этих формул являются общезначимыми, невыполнимыми, нейтральными:
((A&B)|(C&D))->((A|B)&(C|D))
(A->B)&(C->D)->(A|C->B|D)
(A->B)->((A->(B->C))->(A->C))
((A|B)->C)->((A->C)|(B->C))
((A&B)->C)->((A->C)->(B->C))
((A->B)&(C->D))->((A&C)->(B&D))

6. При каких значениях A, B и C следующие формулы истинны:
(A->B)->(B->A)
((A->B)->(B->C))->(A->C)
((A->B)->(C->B))->(A->C)
((A->!B)->(A->B))->(A->C)
(A->!B)->((A->B)->C)
((B->!C)->(B->C))->!A

7. При каких значениях A, B и C следующие формулы ложны:
!(A->B)->(C->A)
!((A->B)->(C->A))
!((A->B)->(B->C))->(A->C)
!(A->B)->((B->C)->(A->C))
((B->C)->(A->C))->!(A->B)
(B->C)->!A

8. Постройте СДНФ для следующих формул:
A->(B->C)
(A->B)->C
(A~B)~!C
A~(B~C)
!A&!(A&!(A&!A)))|B
!A&!(A&!(A&!B)))

9. Постройте СКНФ для следующих формул:
A->(B->C)
(A->B)->C
(A~B)~C
A~!(B~C)
A&!(A&!(A&!A)))|!B
!A&!(A&!(A&!B)))

10. При каких значениях A, B и C все нижеперечисленные формулы истинны:
A
A->(B|C)
!B|C
(C->B)->(C&A)
(B~A)->C
!A~(C->(B&!C))

11. При каких значениях A, B и C все нижеперечисленные формулы истинны:
(A|C)->(C|B)
A->(B~C)
(!B|C)->!A
(B->C)->(C->B)
(B~A)->!(A~A)
!A~(C->(B&!C))

12. Следует ли из общезначимости формул A и B общезначимость формулы C:

A = x->y, B = x->!y,	C = !x
A = x->y, B = x,	C = y
A = x->y, B = y->!y,	C = !x
A = x->(y->z), B = x->y,	C = z
A = x->(y->z), B = x->y,	C = z->x
A = x->y, B = y->x,	C = y~x

13. Следует ли из общезначимости формул A и B общезначимость формулы C:

A = x->y, B = x->z,	C = x->z
A = !x->y, B = !y,	C = x
A = x->y, B = z->y,	C = x~z
A = y->x, B = y->z,	C = z~x
A = x->(y->z), B = (x->y)->z,	C = y
A = x->(y->z), B = (x->y)->z,	C = (x->y)~x

14. Путешественник находится в одном из городов А или Б, но в каком именно – ему не известно. Он задает собеседнику один вопрос, на который может получить ответ “да” или “нет”, причем ответ его собеседника может являться правдой или ложью (чем именно, ему тоже неизвестно). Придумать вопрос, по ответу на который можно безошибочно судить, в каком городе находится путешественник.

15. Человек решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или кино, а если будет хорошая погода – пойти на реку выкупаться. В каком случае можно сказать, что решение выполнено?

16. Найти СДНФ для:
функции от 3-х переменных, равной 1, если большинство аргументов равно 1;
функции от 4-х переменных, равной 1, если четное число аргументов равно 1.

17. Минимизировать функцию:
f (x, y, z) = xyz | x-yz | xy-z | -xy-z
$f(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_2x_3 \mid x_1\text{-}x_2x_3 \mid \text{-}x_1x_2\text{-}x_3 \mid x_1x_2x_3$
f (x, y, z) = xyz | xy-z | x-yz| -xyz
f (x, y, z) = x | xy | yz| -xz
f (x, y, z) = (x | y) & -(xy) | z | -z | (x | y)

18. Сколько функций от 2-х переменных существенно зависят от этих переменных?

19. Найдите количество функций n переменных, принимающих значение 1 ровно на одном наборе.

20. Найдите количество функций n переменных, принимающих на противоположных наборах одинаковые значения.

21. Сколько имеется различных функций от n переменных, сохраняющих 0, т.е. равных нулю на нулевом наборе: $f(0, \ldots ,0) = 0$.

22. Укажите фиктивные переменные функции $f(x,y,z)$, заданной вектором значений:
$f = (1,1,1,1,0,0,0,0)$
$f = (0,0,1,1,0,0,1,1)$
$f = (0,0,1,1,1,1,0,0)$

23. Найдите СКНФ и СДНФ следующих функций:
$f_1(x,y,z) = (1,1,0,1,0,0,0,0)$
$f_1(x,y,z) = (1,1,0,1,0,0,0,0)$

24. Найдите количество дизъюнктивных членов в совершенных дизъюнктивных нормальных формах следующих функций:
$f_1(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n,$
$f_2(x_1,\ldots,x_n) = x_1 \mid \ldots \mid x_n,$
$f_3(x_1,\ldots,x_n) = (x_1 \mid \ldots \mid x_n) \;\&\; (-x_1 \mid \ldots \mid -x_n).$

25. По функциям f и g, заданным векторно, построить векторное задание функции h:
$f = (0,0,1,0),\ g = (0,1,0,0),\ h(x,y,z) = f(g(x,y),z)$
$f = (1,1,1,0),\ g = (1,0,1,1),\ h(x,y,z) = f(x,y) \;\&\; g(z,y)$
$f = (1,1,1,0),\ g = (1,0,0,0),\ h(x,y,z) = f(g(x,y),g(y,z))$

26. Формализовать на языке SC следующие высказывания представленные ниже на естественном языке:
Иван является студентом университета. Он учится на втором курсе. Расстояние между домом Ивана и университетом в три раза меньше, чем расстояние, которое он проходит за день.30 мая он сдал последний зачёт. Сегодня уже прошла неделя, после того как Иван завершил зачётную сессию. На первом экзамене задачей Ивана являлась задача формализации этого высказывания.

27. Формализовать на языке SC следующие высказывания представленные ниже на естественном языке:
В среду вечером местоположение корабля было близко от пересечения сорокового меридиана западной долготы и 34 параллели южной широты. «Нептун» обладал прочным стальным корпусом, изготовленным 1 год и три месяца назад на английской верфи. Команда корабля составляла 15 человек. Всего на борту «Нептуна» находилось 34 человека. Они не представляли насколько будет отличаться вечер четверга от всех предыдущих.

28. Формализовать на языке SC следующие высказывания представленные ниже на естественном языке:
Решение задачи было следующим: мудрец А подумал, что если у него на голове чёрный колпак, то мудрец В мог думать так: «Я вижу чёрный колпак у мудреца А, если мудрец С увидел бы на моей голове тоже чёрный колпак, то он сразу бы догадался что у него белый, но раз он не догадался, то значит это не так и у меня на голове белый колпак». Но так как мудрец В, не высказывал никаких догадок, то, скорее всего, у него не было оснований так думать, и колпак на голове мудреца А был белым.

29. Записать высказывание на языке SCL:
люди делятся на две группы те, которые согласны с этим высказыванием и те которые не согласны с ним.

30. Записать высказывание на языке SCL:
существуют множества, которые включают пустое множество.

31. Записать высказывание на языке SCL:
существуют непустые множества.

32. Записать высказывание на языке SCL:
два события (x_1,y_1,z_1,t_1), (x_2,y_2,z_2,t_2) называются независимыми, если интервал $d=dx^2+dy^2+dz^2-c^2*dt^2>0$ ($dx=x_1-x_2$, $dy=y_1-y_2$, $dz=z_1-z_2$, $dt=t_1-t_2$), в противном случае события называются зависимыми.

33. Записать высказывание на языке SCL:
“Это высказывание является ложным”.

34. Записать на языке SCL:
определение подмножества множества.

35. Записать на языке SCL:
определение булеана множества.

36. Записать на языке SCL:
определение пересечения множеств.

37. Записать на языке SCL:
определение объединения множеств.

38. Записать на языке SCL:
определение разности множеств.

39. Записать на языке SCL:
определение симметрической разности множеств.

40. Записать на языке SCL:
определение рефлексивного множества.

41. Записать на языке SCL:
определение нерефлексивного множества.

42. Записать на языке SCL:
существуют множества, включающие себя.

43. Записать на языке SCL:
существуют множества, не включающие себя.

44. Записать на языке SCL:
определение канторовского множества.

45. Записать на языке SCL:
определение мультимножества.

46. Записать на языке SCL:
определение равенства мультимножеств.

47. Записать на языке SCL:
через любые две точки можно провести прямую и только одну.

48. Записать на языке SCL:
среди любых трёх точек, лежащих на одной прямой, только одна лежит между двух других.

49. Записать на языке SCL:
для каждой прямой существуют точки принадлежащие и не принадлежащие ей.

50. Записать на языке SCL:
единственный день недели, когда я остаюсь дома, – среда.

51. Записать на языке SCL:
я никогда никому не высказывал ни одной мысли, если она не стоила того, чтобы её записать на бумагу.

52. Записать на языке SCL:
я никогда никому не высказывал ни одной мысли, если она не стоила того, чтобы её записать на бумагу.

53. Записать на языке SCL:
ни одна рыба не будет вполне уверена, в том, что она прекрасно вооружена, если у неё нет трёх рядов зубов.

54. Записать на языке SCL:
ни одна птица кроме страуса, не достигает 9 футов роста.

55. Записать на языке SCL:
Признаки равенства треугольников. Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

6) две стороны и угол, заключенный между ними;
7) два угла и прилежащая к ним сторона;
8) два угла и сторона, противолежащая одному из них;
9) три стороны;
10) две стороны и угол, лежащий против большей из них.

56. Записать на языке SCL:
Признаки параллелограмма. Четырех угольник ABCD является параллелограммом, если налицо одно из следующих условий:

5) противолежащие стороны попарно равны (AB=CD, BC=DA);
6) две противолежащие стороны равны и параллельны (AB=CD, AB|| CD);
7) диагонали взаимно делятся пополам;
8) противолежащие углы попарно равны (<A = <C, <B = <D).