Содержание

Введение

Основные цели данного учебного пособия.

Ключевые понятия:

- **интеллектуальная система;**
- **модель решения задач;**
- **интеграция моделей решения задач;**
- **базовая графодинамическая модель;**
- **семантическая сеть;**
- **семейство легко интегрируемых графодинамических моделей;**
- **математическая структура;**
- **предметная область интеллектуальной системы;**
- **дискретная математика.**

В настоящее время одним из наиболее важных направлений развития интеллектуальных систем является разработка принципов интеграции различных моделей решения задач, что позволило бы при проектировании каждой прикладной интеллектуальной системы синтезировать различные модели, необходимые для той системы. Обеспечение такой интеграции требует уточнения фундаментальной основы, на которой эта интеграция могла бы осуществляться. В качестве такой основы в данном учебном пособии предлагается использовать теоретико-множественную трактовку и теоретико-графовое представление знаний в интеллектуальных системах. При этом особое внимание уделяется выработке единых принципов представления знаний, имеющих простую структуру, и сложноструктурированных знаний, а также единых методов представления знаний и метазнаний. Данная работа является попыткой решения указанных задач на примере рассмотрения принципов представления написания основных видов **математических структур.**

Рассматриваемая в данном учебном пособии базовая модель представления и переработки знаний предложена в ([1]) и названа базовой **графодинамической моделью.** Такое название обусловлено тем, что, кроме теоретико-множественного базиса, ориентации на представление сложноструктурированных знаний, обеспечение единства языка и метаязыка в основе графодинамической модели лежит представление знаний в виде специальным образом устроенных **семантических сетей**, и рассмотрение процесса решения задач как процесса преобразования конфигурации указанных семантических сетей, т. е. как некий графодинамический процесс. На основе базовой графодинамической модели можно построить целое семейство хорошо согласованных, совместимых, легкоинтегрируемых графодинамических моделей, каждая из которых соответствует той или иной модели решения задач.

В данном учебном пособии будут рассмотрены следующие вопросы:

- Какие математические структуры могут быть использованы для формального уточнения предметной области в различных проектируемых интеллектуальных системах. **Предметная область интеллектуальной системы** – это структура той среды (того "мира"), в которой "живет" интеллектуальная система, то среды, в которой интеллектуальная система решает предназначенные ей задачи;
- Каков смысл различных математических структур;
- Как изображаются (представляются, записываются) различные математические структуры в памяти интеллектуальных систем, построенных на основе базовой графодинамической модели;
- Что такое закономерность, имеющая место в рамках математической структуры. Какие бывают закономерности и как они описываются в памяти интеллектуальных систем, построенных на основе базовой графодинамической модели.

Область математики, и следующие основные виды **математических структур** и способы описания их свойств, условно названа **дискретной математикой.** В состав дискретной математики, в частности, входят следующие разделы:

- теория множеств, посвященная исследованию самого фундаментального в математике понятия – понятия множества. (Бурбаки Н. 1965кн-ТеориМ, Куратовский К.. 1970кн-ТеориМ, Виленкин Н. Я. 1969кн-Расск. оМ);
- комбинаторика, посвященная исследованию некоторых видов семейств множеств, которые построены из заданного набора элементов и носят "предельный" характер (семейство всевозможных сочетаний из ***n*** элементов по ***m*** элементов, семейство всевозможных перестановок из n элементов);
- теория отношений;
- теория графов, представляющие собой "геометрический" аспект теории бинарных отношений (Шрейдер Ю. А. 1971кн-РавенСП-с5, Харари Ф. 1973кн-ТеориГ, Оре О. 1980кн-ТеориГ, Зыко);
- общая (абстрактная) алгебра, исследующая так называемые алгебраические структуры, каждая из которых представляет собой некоторые множество, называемая базовым множеством или носителем, и некоторых набор отношений, заданных на этом множестве (при этом некоторые отношения дополнительно могут быть объявлены как функциональные). См. (Калужнин Л. А. 1973кн-Введ. В ОА, Скорняков Л. А. ред1990кн-ОбщаяА_Т1, Скорняков Л. А. ред1991кн-ОбщаяА_Т2);
- теория алгебраических систем, возникшая в результате применения к алгебре методов математической логики (Мальцев А. Н. 1970кн-АлгебС-с. 5).

Поскольку одним из основных и трудно приобретаемых навыков в области искусственного интеллекта является умение формально представлять знания самой различной природы и поскольку дискретная математика, как и любая другая область математики, достаточно хорошо подготовлена к тому формальному представлению, задачей данного учебного пособия будет не только изложение некоторых основ дискретной математики, но и рассмотрение того, как основные структуры, изучаемые в дискретной математики, представляются в памяти соответствующей интеллектуальной системы, а также рассмотрение того, как сама дискретная математика представляется в памяти такой системы. Другими словами, речь идет не только о дискретной математике как таковой, но и об интеллектуальной системе, которая "знает" дискретную математику. Указанные особенности данного учебного пособия требуют анализа не только формальных, но и семантических аспектов основных математических структур.

Говоря об эволюции интеллектуальных систем и эволюции инструментальных средств их проектирования, можно говорить о различных её направлениях, одним из которых является накопление предметно-независимых знаний интеллектуальной системы, т. е. знаний, которые могут быть использованы в широком классе прикладных интеллектуальных систем. Важнейшей частью таких предметно-независимых знаний являются знания по математике, т. е. комплекс знаний по всевозможным математическим дисциплинам. Очевидно, что эффективность использования таких знаний во многом зависит от того, насколько удачно эти знания будут систематизированы как на семантическом, так и на синтаксическом уровне. Таким образом, для эффективной формализации знаний по математике требуются серьёзные математические исследования, целью которых является превращение имеющихся знаний в некоторую стройную систему, в основе которой лежит стройная система базовых математических структур. Многое в этом направлении сделана в таких математических дисциплинах, как теория множеств, абстрактная алгебра, математическая логика. Тем не менее, до построения достаточно полной базы знаний по математике, готовой к эффективному использованию в любых прикладных интеллектуальных системах, еще далеко.

При рассмотрении вопросов, связанных с представлением математических знаний в интеллектуальных системах, особое внимание будет уделяться представлению тех математических структур, которые являются базовыми для представления любых видов знаний, а не только математических.

Типология математических структур.

Ключевые понятия:

- **математическая структура;**
- **множество;**
- **знак множества;**
- **связка принадлежности (пара принадлежности);**
- **нормализованное множество;**

- **кортеж;**
- **математическая структура;**
- **множество;**
- **знак множества;**
- **связка принадлежности;**
- **нормализованное множество;**
- **кортеж;**
- **атрибут;**
- **отношение;**
- **связка;**
- **знак объекта;**
- **ориентированная связка (упорядоченная связка);**
- **классическое отношение;**
- **неориентированная связка (неупорядоченная связка);**
- **реляционная структура;**
- **классическая математическая структура;**
- **неклассическая математическая структура;**
- **канторовское множество (классическое);**
- **мультимножество (неклассическое);**
- **классический кортеж;**
- **неклассический кортеж;**
- **классическое отношение;**
- **неклассическое отношение;**
- **алгебраическая структура (классическая реляционная структура);**
- **неклассическая реляционная структура;**
- **иерархическая реляционная структура.**

В самом общем виде каждая **математическая структура** (математическая конструкция) есть совокупность каких-либо объектов, связанных между собой тем или иным способом. Указанные объекты могут иметь самую разную природу. Это могут быть области каких-либо пространств. Соответствующие таким объектам математические структуры можно назвать геометрическими. Это могут быть числа. Такие математические структуры будем называть числовыми. Это могут быть животные, растения, здания, города, страны и т. д. Это могут быть также другие математические структуры.

Основными видами математических структур являются:
- множества,
- кортежи,
- отношения,
- реляционные структуры.

Каждое **множество** представляет собой математическую структуру, в состав которой входят связующие объекты:
- знак этого множества,
- объекты, являющиеся элементами этого множества.

При этом объекты, входящие в состав рассматриваемой математической структуры связываются между собой **связками принадлежности** (связями принадлежности, парами принадлежности). Каждая такая связка связывает знак множества с объектом, который является одним из элементов этого множества.

Особо подчеркнем то, что объекты, являющиеся элементами множества, могут иметь самую разную природу. Они могут быть предметами, явлениями, событиями, знаками предметов, явлений, событий, математическими структурами (множествами, кортежами, отношениями, реляционными структурами), знаками математических структур, текстами и т. д. Множество, <u>все</u> **(!)** элементы которого являются <u>знаками</u>, будем называть **нормализованным множеством.**

Кортеж представляет собой множество, в котором для некоторых его элементов дополнительно указываются их роли в рамках этого множества. Указание роли элемента множества (роли компонента кортежа) может быть осуществлено путем включения связки принадлежности (пары принадлежности), которая соответствует указанному элементу, в состав множества, которое как раз и определяет роль, соответствующую рассматриваемому элементу. Такое множество, определяющее некоторую роль, соответствующую некоторым элементам в рамках некоторых множеств (кортежей), будем называть **атрибутом.** Таким образом, каждый атрибут представляет собой множество всевозможных **(!)** таких связок принадлежности, которые связывают знаки множеств с теми элементами, которые в рамках этих множеств выполняют роль, соответствующую указанному атрибуту.

В самом общем случае **отношение** есть семейство однотипных (в том или ином смысле) множеств, имеющих мощность, большую, чем 1, или семейство знаков таких множеств. В первом случае отношение будем называть ненормализованным, во втором случае – нормализованным. Множество, являющееся элементом ненормализованного отношения, а также множество, знак которого является элементом нормализованного отношения, будем называть **связкой.** Так же, как и отношения, связки бывают ненормализованными и нормализованными. Элементами ненормализованной связки являются объекты, связываемые этой связкой. Элементами нормализованной связки являются знаки объектов, связываемых этой связкой. Тип связки (тип или смысл связи между объектами) задаётся (указывается) тем отношением, в состав которого эта связка входит. Связки могут быть кортежами. Такие связки будем называть **ориентированными связками.** Заметим при этом, что у **классических отношений** (у отношений традиционного, классического вида) все связки являются ориентированными. Связки, не являющиеся кортежами, будем называть **неориентированными связками.**

Реляционная структура представляет собой некоторое количество объектов, связанных между собой различными связками (связями), принадлежащими в общем случае нескольким **(!)** различным отношениям, на которые не накладывается никаких ограничений и которые могут иметь любой смысл.

Особо отметим то, что в рассмотренных видах математических структур нас будут интересовать не только их классические (традиционные) типы, но и неклассические (нетрадиционные, менее исследованные) типы, которые носят более сложный характер. Так, например, неклассические множества, которые будем называть мультимножествами, отличаются от классических (канторовских) множеств тем, что некоторые их элементы входят в состав множества многократно.

Неклассический кортеж отличается от классического либо тем, что некоторые его элементы выполняют одинаковую роль (т. е. имеют один и тот же атрибут), либо некоторые из элементов выполняют в рамках кортежа сразу несколько ролей (т. е. некоторые вхождения элементов в кортеж имеют несколько разных атрибутов).

Неклассическое отношение отличается от классического либо тем, что в его состав входят неклассические кортежи, либо тем, что входящие в его состав кортежи имеют разную мощность, либо тем, что входящим в его состав кортежам соответствуют разные наборы атрибутов.

Неклассическая реляционная структура отличается от классической реляционной структуры (алгебраической структуры) либо тем, что входящие в её состав отношения являются неклассическими, либо тем, что элементами ее связок являются другие связки этой же реляционной структуры, либо тем, что элементами её связок являются её же отношения, атрибуты, подструктуры.

Среди неклассических реляционных структур особую важность для нас имеют иерархические реляционные структуры (сложноструктурированные реляционные конструкции), т. к. именно они являются формальным уточнением понятия сложноструктурированной предметной области.

Иерархическая реляционная структура – это реляционная структура, в которой компонентами (элементами) некоторых связок являются множества, состоящие из элементов, входящих в состав этой реляционной структуры, другие связки этой реляционной структуры, отношения этой реляционной структуры, реляционные структуры, состоящие из объектов и связок этой реляционной структуры (такие структуры обычно называют подструктурами).

Примером иерархической реляционной структуры является структура, которая формально уточняет тот или иной вид соотношения между двумя заданными реляционными структурами. К таким соотношениям между реляционными структурами, в частности, относятся гомоморфизм и изоморфизм.

Синтаксическая структура и типология текстов.

Ключевые понятия:

- **текст**;
- **дискретный текст, элемент текста**;
- **символ**;
- **изображение символа (= элемент текста)**;
- **алфавит символов**;
- **предметная область текста**;
- **синтаксическая структура текста**;
- **связка принадлежности**;
- **связка инцидентности элементов текста**;
- **линейный текст**;
- **графовый текст, элемент графового текста**;
- **узел графового текста, связующий элемент графового текста**;
- **дуга (ориентированный связующий элемент графового текста – линия со стрелкой)**;
- **ребро (ориентированный связующий элемент графового текста – линия без стрелки с одного конца)**;
- **связка инцидентности элементов графового текста с ребрами или выходными дугами**;
- **связка инцидентности с элементов графового текста с входящими дугами**;

Рассмотрение способов изображения (представления, записи) математических структур и рассмотрение способов описания закономерностей математических структур предполагает использование некоторых понятий семиотики, таких, как **текст**, **синтаксическая структура текста**, **символ**, **семантика текста**, **знак**, **язык.**

Текст (информационная конструкция, языковая конструкция) – это объект, имеющий некоторую внутреннюю структуру и содержащий некоторую информацию о каком-то другом (описываемом) объекте. Мы будем рассматривать только **дискретные тексты**, которые устроены следующим образом:

- В тексте выделяются элементарные фрагменты (элементарные составляющие). При этом должна существовать достаточно простая процедура (для текстов, принадлежащих разным языкам, эта процедура может быть разной), позволяющая расчленить текст на элементарные составляющие (элементарные фрагменты);
- Множество элементарных фрагментов текста разбивается на специальные **попарно непересекающиеся** классы, которые называются **символами.** Таким образом, символ – это абстракция, представляющая собой такое множество изображений символов, которое считается множеством всевозможных изображений какого-то одного символа. Элементарную составляющую текста, являющуюся теоретико-множественным элементом некоторого символа ci, будем называть одним из возможных **изображений символа** ci, т. е. одним из возможных материальных воплощений символа ci, одним из возможных вхождений символа ci в текст. Множество символов, изображения которых входят в состав некоторого текста, будем называть **алфавитом** (алфавитом символов) этого текста;
- На множестве элементарных составляющих текста задаётся одно или несколько **отношений инцидентности**, определяющих те связи между этими элементарными составляющими, которые существенны для анализа смысла текста;
- Для определения семантики (смысла) текста для каждого его элементарного фрагмента достаточно знать только следующее:
  - изображением какого символа этот элементарный фрагмент является;
  - какими нужными нам связями это изображение связано с другими изображениями символов.

Таким образом, смысл дискретного текста абсолютно не изменится, если мы будем модифицировать вид любого его элементарного фрагмента при сохранении его принадлежности к соответствующему символу и при сохранении нужных нам его связей с другими элементарными фрагментами текста. Так, например, запись одного и того же текста различными людьми (разным почерком) абсолютно не меняет его смысл. Очевидно, что такое свойство дискретного текста обеспечивает его надёжность и помехоустойчивость при его хранении и передаче.

Итак, **текст** – это объект, имеющий некую внутреннюю структуру (внутреннее строение) и являющийся описанием в общем случае некоторого другого объекта, а в частном случае – самого себя. Описываемый объект, естественно, сам также имеет некую внутреннюю структуру (внутренне строение). Внутренняя структура описываемого объекта, собственно, и является непосредственным предметом описания. Математическую структуру, которая является формальным (математическим, строгим) уточнением того, что мы считаем структурой описываемого объекта, будем называть **предметной областью** для соответствующего текста. Другими словами предметная область текста – это математическая структура, которая является формальным уточнением того, что является предметом (объектом) описания для некоторого текста или для некоторой группы текстов. При этом будем говорить, что каждый такой текст является записью (формулировкой) того или иного свойства описываемой предметной области. Предметную область, описываемую некоторой группой текстов, будем также называть областью интерпретации для этой группы текстов.

Синтаксической структурой текста будем называть такую математическую структуру, которая является формальным (математическим, строгим) уточнением того, что является внутренней структурой (внутренним строением) этого текста, выявление (знание) которой необходимо для установления семантики указанного текста, т. е. для установления его смысла, для установления того, какую конкретную информацию содержит текст об описываемой им предметной области. Особо подчеркнем то, что об элементах текста, каковыми являются изображения символов, в рамках синтаксической структуры текста указывается только следующее:

- изображениями каких символов они являются;
- как они связаны с другими изображениями символов этого же текста (для каждого изображения символа должно быть указано, какие изображения символов являются для него соседями "слева" и какие изображения символов являются для него соседями "справа").

Таким образом, в состав синтаксической структуры текста входят:

- изображения символов;
- символы;
- связки **бинарного отношения принадлежности**, каждая из которых связывает некий символ (как множество) с одним из изображений этого символа (с одним из элементов указанного множества);
- **связки инцидентности** (соседства), каждая из которых связывает два изображения символа – первое из этих изображений считается "левым" (предшествующим) соседом по отношению ко второму, а второе изображение считается "правым" соседом по отношению к первому.

По виду синтаксической структуры тексты можно разбить на два класса:

- линейные тексты;
- графовые (нелинейные) тексты.

Линейный текст – это текст, в синтаксической структуре которого каждое изображение символа имеет не более одного "левого" соседа (предшествующего изображения символа) и не более одного "правого" соседа (последующего изображения символа). Таким образом, линейный текст представляет собой строку (цепочку) из изображений символов. Часто такой текст называют просто строкой символов, опуская слово "изображений". Для задания синтаксической структуры линейного текста понадобится только один тип связок инцидентности, которые задают последовательность символов в строке. Другими словами, для задания синтаксической структуры линейного текста требуется использование только одного отношения инцидентности.

Графовый текст – это текст, в синтаксической структуре которого существует по крайней мере одно изображение символа, которое имеет или более одного "левого" соседа, или более одного "правого" соседа, или то и другое.

Рассмотрим общий вид синтаксической структуры графового текста. Элементы графового текста (т. е. входящие с состав текста изображения символов) делятся на два класса:

- узлы (вершины);
- связующие элементы, к которым относятся дуги и ребра.

Кроме того, множества узлов может разбиваться на различные сорта (типы). Аналогично этому многосортными могут быть и дуги и ребра. Таким образом, алфавит символов графового текста может быть достаточно большим. Каждому символу здесь будет соответствовать некоторый сорт (тип) узла, дуги или ребра.

Каждый связующий элемент графового текста связывает либо два разных элемента, либо один элемент с самим собой (связующие элементы второго вида будем называть петлями). При этом дуги (в отличие от ребер) являются ориентированными связующими элементами, т. е. для двух элементов, связываемых дугой, важно дополнительно знать, в какой из этих элементов дуга входит и из какого элемента дуга выходит. Элементы, которые связываются (соединяются) связующим элементом, могут принадлежность разным типам в разных сочетаниях. Связующий элемент может соединять узел с узлом, узел со связующим элементом, связующий элемент со связующим элементом.

Для задания синтаксической структуры линейного текста было достаточного одного отношения инцидентности, связка которого соотносит два непосредственно соседствующих элемента текста (изображения символа), один из которых предшествует (в строке символов) другому. Для задания синтаксической структуры графового текста общего вида потребуется два отношения инцидентности – одно для выходящих дуг и рёбер, второе для входящих дуг. Связка первого отношения инцидентности связывает некий связываемый элемент (узел, дугу или ребро) с выходящей из него дугой или с ребром, связывающим этот (связываемый) элемент с каким-то другим элементом (или, возможно, с ним самим). Связка второго отношения инцидентности связывает некую дугу с неким связываемым элементом (узлом, дугой или ребром), в который указанная дуга входит.

Семантическая структура и семантическая типология текстов.

Ключевые понятия:

- **семантика текста**;
- **свойство предметной области**; *
- **знак**;
- **изображение знака (вхождений знака в текст)**;
- **синонимия изображений знаков**;
- **переменная**; **
- **область возможных значений переменной**;
- **сорт переменной**;
- **изображение переменной (вхождений переменной в текст)**;
- **семантическая сеть**;
- **разделители и ограничители (разделительные и ограничительные элементы текста)**;
- **свойство предметной области**; **
- **факт**;
- **закономерность**;
- **фактографическое высказывание**;
- **логическое высказывание**;
- **высказывание о существовании (негативное высказывание о существовании)**;
- **импликативное высказывание с квантором всеобщности**;
- **высказывание**;
- **истинное высказывание**;
- **ложное высказывание**;
- **негативное высказывание (высказывание, являющееся отрицанием какого-то другого высказывания)**;
- **позитивное высказывание (высказывание, не являющееся негативным)**;
- **нечёткое высказывание.**

Семантика текста (смысл текста, интерпретация текста) – это соотношение заданного текста с той предметной областью, которая описывается этим текстом, т. е. с той предметной областью, для которой указанный текст является записью (формулировкой) некоторого ее **свойства.** С формальной точки зрения семантика текста есть соотношение между двумя математическими структурами – между синтаксической структурой текста и предметной областью этого текста.

Элементарными семантическими значимыми фрагментами текста являются **знаки** и **переменные.**

Знак – это абстракция, представляющая собой с формальной точки зрения множество **(!)** всевозможных **(!)** объектов, обозначающих (представляющих) некий один и тот же **(!)** объект, который будем называть обозначаемым объектом (денотатом знака). Каждый обозначающий объект, входящий в указанное множество, будем называть одним из возможных изображений соответствующего знака. Таким образом, следует четко отличать понятие **изображения знака** (материализации знака, вхождения знака в текст) от самого понятия знака, которое абстрагируется от того, как знак изображен. Понятие знака учитывает только одно свойство объектов, являющихся его изображениями – свойство обозначать некоторый заданный объект.

Итак, знак – это абстракция, представляющая собой объект, обладающий свойством "обозначать" (представлять) некоторый другой объект (денотат знака) и рассматриваемый как объект, обладающий только этим свойством и никаким другим. Т. е. понятие знака предполагает рассмотрение объекта, обозначающего другой объект в аспекте только одного его свойства (свойства "обозначать"), абстрагируясь при этом от всех остальных его свойств, в частности, от особенностей его внутреннего строения. Рассмотрение объекта, обозначающего другой объект, без абстрагирования от всех остальных его свойств, будем называть **изображением знака** или вхождением знака в состав текста.

Если в состав текста входят два фрагмента текста, обозначающих один и тот же объект, будем говорить что указанные два фрагмента являются:

- разными изображениями одного и того же знака,
- разными вхождениями одного и того же знака,
- синонимичными изображениями знаков.

Изображение знака – это семантически элементарный фрагмент текста, обладающий свойством обозначать (представлять) какой-то объект (предмет) из описываемой предметной области.

Переменная – это обозначение произвольного **(!)** объекта из некоторого априори заданного множества. Указанное множество будем называть **областью возможных значений переменной.** Множество переменных, имеющих одну и ту же область возможных значений, будем называть **сортом переменных.** Переменные, областью возможных значений которых является семейство знаков всевозможных множеств, будем называть **универсальными переменными.**

О понятии переменной см. в

(Вольвачев Р. Т. 1986уч-ЭлемеМЛиТМ-с. 88-89; Столяр А. А. 1982кн-кМатемУвПП-с. 88-90; Виленкин Н. Я. . 1980уч-СовреОШКМ-с. 192-193;)

Особо подчеркнем то, что значениями переменных удобнее всего считать не сами объекты, а их знаки. Поэтому знаки объектов иногда называют константами, противопоставляя их переменным.

Важнейшими свойствами графовых текстов являются:

- возможность изображать знаки и переменные как изображения символов, причём, без расширения алфавита символов. Т. е. речь идет о достаточно простой возможности сделать семантически элементарные составляющие текста (изображения знаков и переменных) также и синтаксически элементарными составляющими текста (изображениями символов). Так, например, множеству всевозможных изображений всевозможных знаков можно поставить в соответствие один **(!)** символ. Но тогда разные изображения такого символа могут оказаться изображениями разных знаков;
- возможность устранить синонимию изображений знаков в рамках одного текста. Это означает, что в рамках такого текста два разных изображения знаков всегда **(!)** являются изображениями разных **(!)** знаков;
- возможность обходится без специальных средств структуризации текста (без разделительных и ограничительных элементов текста).

Графовые тексты, в которых реализованы все перечисленные выше возможности, будем называть семантическими графовыми текстами или просто **семантическими сетями.**

Важнейшим достоинством семантических сетей является сближение их синтаксической структуры и структуры описываемых ими предметных областей. В частности, для фактографического высказывания, представленного в виде семантических сетей, легко добиться изоморфизма **(!)** синтаксической структуры такой семантической сети структуры соответствующего ей фрагмента описываемой предметной области.

Свойства описываемой предметной области условно можно разбить на два типа:

- **факты**,
- **закономерности.**

Тексты, которые являются записью (формулировкой) фактов, имеющих место в описываемой предметной области, будем называть **фактографическими высказываниями.**

Тексты, которые являются записью (формулировкой) закономерностей описываемой предметной области будем называть **логическими высказываниями.**

Каждый факт представляет собой не что иное, как некоторый конкретный фрагмент предметной области. Таким образом, фактографическое высказывание есть констатация наличия в описываемой предметной области некоторого конкретного фрагмента (некоторой конкретной подструктуры) – некоторого множества объектов, связанных между собой некоторыми связями.

Простейшим видом семантики **фактографического высказывания**, т. е. простейшим видом соотношения между синтаксической структурой фактографического высказывания и структурой соответствующего ему фрагмента описываемой предметной области, является изоморфизм, т. е. полное совпадение формы (конфигурации) этих структур.

Среди логических высказываний можно, в частности, выделить:

- **высказывания о существовании**, каждое из которых утверждает о существовании в описываемой предметной области некоторого количества фрагментов (подструктур), удовлетворяющих указанным (сформулированным) в высказывании требованиям. Простейшим таким требованием является изоморфизм указанного в высказывании образца ("шаблона") с указанными выше фрагментами (подструктурами) описываемой предметной области;
- **высказывания о несуществовании**, каждое из которых утверждает о несуществовании в описываемой предметной области фрагментов (подструктур), удовлетворяющих указанным (сформулированным) в высказывании;
- **импликативные высказывания с квантором всеобщности**, каждое из которых утверждает то, что в описываемой предметной области для каждого **(!)** фрагмента (подструктуры), удовлетворяющего одним указанным в высказывании требованиям, существует другой фрагмент, который удовлетворяет другим также указанным в высказывании требованиям и связан с первым фрагментом указанным в высказывании способом.

Итак, **высказывание** – это правильно построенный (синтаксически корректный) повествовательный текст, обладающий истинным свойством. Это означает, что множество всевозможных таких текстов разбивается на два следующих класса:

- *быть истинным текстом*;
- *быть ложным текстом.*

Поскольку тексты, не являющиеся высказываниями, не могут быть ни истинными, ни ложными, указанные выше классы текстов будем называть несколько иначе:

- *"быть истинным высказыванием"* или просто *"истинное высказывание"*, *"true"*;
- *"быть ложным высказыванием"* или просто *"ложное высказывание"*, *"false"*;

О понятии высказывания см. в

(Вольвачев Р. Т. 1986уч-ЭлемеМЛиТМ-с. 7; Столяр А. А. 1982кн-кМатемУвПП-с. 88; Таран Т. А. 1998уч-ОсновДМ-с. 86; Поспелов Д. А. сост1994энц-Инфор-с. 50; Поспелов Д. А. 1982кн-ФантаИН-с. 54)

Говоря об истинности или ложности какого-либо высказывания, следует чётко отличать само истинностное свойство от того, известно ли оно, и от того, какое мнение по этому поводу имеют разные субъекты. Само истинностное свойство каждого высказывания в известной мере объективно, поскольку после того, когда чётко задана интерпретация высказывания, т. е. чётко определена предметная область, к которой относится высказывание, и чётко определена связь между входящими в высказывание константами и объектами, которые входят в состав указанной предметной области и обозначаются этими константами, тогда действительно независимо ни от чего высказывание может быть либо истинным, либо ложным и никаким другим (в частности, оно не может быть одновременно и истинным и ложным). Совсем другое дело, знаем ли мы, к какому из указанных классов относится то или иное высказывание, и какое мнение по этому поводу имеет тот или иной субъект. Одно и то же высказывание одним субъектом может трактоваться как истинное, другим субъектом – как ложное, а третьим субъектом – как высказывание неизвестной (этому субъекту) истинности, т. е. как высказывание, которое указанный субъект не знает (по каким-то причинам) к какому классу отнести – к классу истинных или к классу ложных высказываний. Такие высказывания неизвестной истинности будем называть также **нечёткими высказываниями.** Очевидно, что нечёткое высказывание со временем может "превратиться" либо в истинное, либо в ложное. Очевидно также, что установление объективной истинности или ложности высказывания далеко не всегда является простым делом. Даже при установлении истинности высказывания путем логического вывода делается весьма существенная оговорка – доказанное высказывание считается истинным, но при условии истинности некоторого множества исходных (в конечном счете аксиоматических) высказываний. Установление же истинности аксиоматических высказываний (аксиом) – это процесс весьма сложный.

Некоторые общие сведения о языках и, в частности, о формальных языках.

Ключевые понятия:

- **язык**;
- **синтаксис языка**;
- **правильно построенный текст**;
- **синтаксический метаязык**;
- **метаязык Бэкуса-Наура**;
- **подъязык**;
- **формальный язык**;
- **естественный язык**;
- **формальный фактографический язык**;
- **формальный логический язык**;
- **формула**;
- **фактографическая формула**;
- **замкнутая логическая формула**;
- **высказывательная форма**;
- **незамкнутая логическая формула**;
- **предикат**;
- **логическая формула.**

Каждый конкретный **язык** формально трактуется как некоторое множество всевозможных правильно построенных (синтаксических корректных) текстов, принадлежащих этому языку. При этом тексты языка должны обладать некоторой общностью принципов их синтаксического и семантического устройства.

Определение множества правильно построенных текстов будем называть **синтаксисом языка.** При этом язык ***lm***, на котором это определение записано, по отношению к языку ***li***, синтаксис которого описывается, считается синтаксическим метаязыком. Наиболее известным примером синтаксического метаязыка является **метаязык Бэкуса-Наура.**

Если каждое высказывание, принадлежащее языку ***lj***, принадлежит также и языку ***lk***, будем говорить, что язык ***lj*** является **подъязыком** (подмножеством) языка ***lk***. В этом случае будем также говорить, что язык ***lk*** является расширением (надмножеством) языка ***lj***. Заметим, в частности, что синтаксические метаязыки для языков, которые представляют наибольший интерес для представления знаний в интеллектуальных системах, являются подъязыками по отношению к последним.

Если для языка удается чётко сформулировать правила построения текстов (информационных конструкций), входящих в состав этого языка (т. е. строго определить понятие правильно построенного или синтаксически корректного текста этого языка) и если для этого удаётся чётко определить правила семантической интерпретации текстов, входящих в состав этого языка (в частности определить правила установления истинности или ложности этих текстов), то указанный язык будем называть **формальным языком.** Формальным языком противопоставляются **естественные языки**, синтаксис и семантика которых устроены намного сложнее, чем в формальных языках.

В данном учебном пособии нас будут интересовать, в основном, следующие классы формальных языков:

- **формальные фактографические языки** – формальные языки, предназначенные для записи фактографических высказываний;
- **формальные логические языки** – формальные языки, предназначенные для записи логических и фактографических высказываний.

Для каждого формального логического языка существует подъязык, являющийся формальным фактографическим языком.

Текст формального языка или осмысленный фрагмент такого текста будем называть **формулой.** Запись фактографического высказывания на формальном фактографическом языке или на формальном логическом языке будем называть **фактографической формулой.** Запись логического высказывания на формальном логическом языке будем называть **замкнутой логической формулой** (логической формулой без свободных переменных, формулой-высказыванием, формальным высказыванием).

Высказывательной формой (переменным высказыванием) будем называть текст, который становится высказыванием в результате замены некоторых переменных, входящих в этот текст, на какие-либо константы (в результате подстановки констант вместо переменных). Высказывательную форму, представленную на формальном логическом языке, будем называть **незамкнутой логической формулой** или логической формулой со свободными переменными.

См. (Поспелов Д. А. сост. 1994энц-ИнфорЭСиН-с. 53)

Каждая высказывательная форма превращается в высказывание, если вместо всех **(!)** свободных переменных высказывательной формы подставить возможные их значения. В результате такой подстановки мы получим либо истинное, либо ложное высказывание. Таким образом, каждая высказывательная форма, имеющая ***n*** свободных переменных, определяет некоторую ***n***-арную функцию, которая каждому **(!)** набору значений свободных переменных ставит в соответствие один из двух следующих возможных результатов:

- *быть истинным высказыванием*,
- *быть ложным высказыванием*.

Такую ***n***-арную функцию называют ***n***-арным **предикатом.**

См.

(Вольвачев Р. Т. 1986уч-ЭлемеМЛиТМ-с. 85-92; Кузнецов О. П. . 1988уч-ДискрМдИ-с. 80-82)

Все замкнутые логические формулы и незамкнутые логические формулы и только их будем называть **логическими формулами.**

Формальные языки, используемые в данном учебном пособии.

Ключевые понятия:

- **язык SCB**;
- **язык SC**;
- **язык SCL**;
- **метаязык Бэкуса-Наура**;
- **язык SCBs – линейная (строковая) модификация языка SCB**;
- **язык SCBg – графовая (графическая) модификация языка SCB**;

- **язык SCs**;
- **язык SCg**;
- **язык SCLs**;
- **язык SCLg.**

В данном ученом пособии используются три формальных языка, имеющих теоретико-множественную основу:

- фактографический язык **SCB** (Semantic Code Basic);
- язык **SC** (Semantic Code), являющийся расширением языка SCB и являющийся основой для построения различных логических языков и языков программирования;
- язык **SCL** (Semantic Code Logic), являющийся одним из возможных (но не единственно возможным) логических языков, построенных на основе языка SC.

Кроме этого, для описания синтаксиса линейных формальных языков используется формальный метаязык Бэкуса-Наура.

Язык SCL, как и язык SCB являются подъязыками языка SC. Это означает, что все тексты языка SCL и все тексты языка SCB являются текстами языка SC. В свою очередь язык SCB по отношению к языку SCL также является подъязыком, т. к. фактографические формулы (т. е. высказывания о конкретных соотношениях между конкретными объектами), являются частным видом формул .

Для каждого из перечисленных языков вводится две модификации – линейная и графовая. Линейная (строковая) модификация – это традиционное представление текста в виде строки (цепочки, последовательности) символов. Графовая модификация языков SCB, SC и SCL является способом графического представления текстов в виде рисунка, где объекты и понятия изображаются различными условными графическими обозначениями, а связи между ними – линиями, соединяющими эти условные обозначения. Линейные (строковые) модификации языков SCB, SC и SCL обозначим, соответственно, SCBs, SCs, SCLs. А графовые (графические) модификации этих языков обозначим SCBg, SCg, SCLg.

Возможности графической модели прежде всего зависят от изобразительной (семантической) мощности языков, лежащих в основе этой модели. Поэтому для языков SCB, SC и SCL, которые лежат в основе предлагаемого нами варианта графодинамической модели, совершенно логично выглядят следующие требования:

- максимально возможная унификация изобразительных средств, т. е. стремление к одинаковому изображению всего, что можно изобразить одинаковым образом;
- обеспечение возможности представления и описания не только классических математических структур, но и неклассических структур различного вида (в первую очередь – иерархических математических структур, которые являются способом формального, строго уточнения сложно-структурированных предметных областей);

поддержка рефлексии самого различного вида – обеспечение единства языка и метаязыка, обеспечение работы с рефлексивными математическими структурами, каждая из которых содержит саму себя (или знак самой себя) в качестве своего элемента.

1. Фактографический теоретико-множественный язык SCB (Semantic Code Basic), предназначенный для изображения (представления, записи) математических структур различного вида. Графический и символьный варианты языка SCB

1.1. Базовые понятия, лежащие в основе строгой (формальной) трактовки всевозможных (в т. ч. математических) структур

В данном подразделе будут рассмотрены понятия, перечисленные в табл. 1.1.1, табл. 1.1.2 и табл. 1.1.3. Основными из них являются такие понятия, как **множество, знак множества** и **изображение знака множества.** Далее по значимости идут такие понятия, как **пара принадлежности** и **предмет.** Пара принадлежности трактуется как 2-мощное ориентированное (упорядоченное) множество специального вида, имеющее мощность равную двум. Понятие предмета также сводится к понятию множества – каждый предмет заменяется множеством, состоящим только из этого предмета (такое множество будем называть предметным). Следующими по значимости являются такие понятия, как **система множеств** и **нормализованное множество.** Система множеств так же, как и пара принадлежности трактуется как множество частного вида и является способом формального уточнения трактовки всевозможных (в том числе и математических) структур. Нормализованные множества представляют собой множества, состоящие из знаков множеств, и являются для нас важнейшим видом множеств, к которым мы будем приводить все остальные (ненормализованные) множества за исключением предметных множеств.

В табл. 1.1.1 приведена базовая для нас типология <u>множеств</u> по трем следующим признакам:

- нормализованность множеств,
- мощность и ориентированность множеств,
- семантика множеств.

Более подробная типология множеств рассматривается нами в подразделе 2.

В табл. 1.1.2 приведена типология <u>знаков множеств</u>, в точности соответствующая рассмотренной выше типологии множеств. В свою очередь табл. 1.1.3 приведена в точности соответствующая этому типология <u>изображений знаков множеств</u>.

Таблица 1.1.1.

множество
* *нормализованное множество* * *ненормализованное множество*   * *почти нормализованное множество*

▪ *одно-мощное множество*
  ▪ *предметное множество / предмет*
▪ *пара*
  ▪ *простая ориентированная пара*
    ▪ *пара принадлежности*
    ▪ *пара непринадлежности*
    ▪ *пара нечеткой принадлежности*
  ▪ *неориентированная пара*
    ▪ *пара синонимии*
    ▪ *пара несинонимии*
    ▪ *пара нечеткой синонимии*
▪ *тройка*

Продолжение

- ***пара принадлежности***
- *узловое множество*
  - *предметное множество (предмет)*
  - *узловое непредметное множество*
    - *пара непринадлежности*
    - *пара нечеткой принадлежности*
    - *неориентированная пара*
      - *пара синонимии*
      - *пара несинонимии*
      - *пара нечеткой синонимии*
    - *семейство пар принадлежности*
    - *семейство узловых множеств*
      - *семейство предметных множеств*
      - *семейство узловых непредметных множеств*
    - *система множеств*

Таблица 1.1.2

знак множества

- *знак нормализованного множества*
- *знак ненормализованного множества*
  - *знак почти нормализованного множества*

- *знак одно-мощного множества*
  - *знак предметного множества (знак предмета)*
- *знак пары*
  - *знак простой ориентированной пары*
    - *знак пары принадлежности*
    - *знак пары непринадлежности*
    - *знак пары нечеткой принадлежности*
  - *знак неориентированной пары*
    - *знак пары синонимии*
    - *знак пары несинонимии*
    - *знак пары нечеткой синонимии*
- *знак тройки*

- ***знак пары принадлежности***
- *знак узлового множества*
  - *знак предметного множества (знак предмета)*
  - *знак узлового непредметного множества*
    - *знак пары непринадлежности*
    - *знак пары нечеткой принадлежности*
    - *знак неориентированной пары*
      - *знак пары синонимии*
      - *знак пары несинонимии*
      - *знак пары нечеткой синонимии*
    - *знак семейства пар принадлежности*
    - *знак семейства узловых множеств*
      - *знак семейства предметных множеств*
      - *знак семейства узловых непредметных множеств*
    - *знак системы множеств*

Таблица 1.1.3

изображение знака множества
* *изображение знака нормализованного множества*
* *изображение знака ненормализованного множества*
* *изображение знака почти нормализованного множества*
▪ *изображение знака одно-мощного множества*
▪ *изображение знака предметного множества (изображение знака предмета)*
▪ *изображение знака пары*
▪ *изображение знака простой ориентированной пары*
▪ *изображение знака пары принадлежности*
▪ *изображение знака пары непринадлежности*
▪ *изображение знака пары нечеткой принадлежности*
▪ *изображение знака неориентированной пары*
▪ *изображение знака пары синонимии*
▪ *изображение знака пары несинонимии*
▪ *изображение знака пары нечеткой синонимии*
▪ *изображение знака тройки*
• ***изображение знака пары принадлежности***
• *изображение знака узлового множества*
• *изображение знака предметного множества (изображение знака предмета)*
• *изображение знака узлового непредметного множества*
• *изображение знака пары непринадлежности*
• *изображение знака пары нечеткой принадлежности*
• *изображение знака неориентированной пары*
• *изображение знака пары синонимии*
• *изображение знака пары несинонимии*
• *изображение знака пары нечеткой синонимии*
• *изображение знака семейства пар принадлежности*
• *изображение знака семейства узловых множеств*
• *изображение знака семейства предметных множеств*
• *изображение знака семейства узловых непредметных множеств*
• *изображение знака системы множеств*

Множество – это "мысленная" **(!)** надстройка над некоторой группой объектов любой **(!)** природы, объединяющая эту группу объектов в некоторое мысленное (абстрактное) целое. Принципы (критерии) формирования множеств, т. е. признаки принадлежности тех или иных объектов к формируемому множеству, могут быть самыми различными.

Важно подчеркнуть то, что различные множества, выделяемые (формируемые) в рамках анализируемой (описываемой) предметной области, есть нечто субъективно (мысленно) привносимое. В природе множеств нет. Мы просто искусственно пытаемся зафиксировать факт сходства или факт целостности какой-то группы объектов. При анализе одной и той же области, один субъект "увидит" сходство или целостность каких-то объектов по одним признакам и сформирует одни множества, другой – другие. Следует подчеркнуть, что из любого набора объектов можно составить множество, элементами которого будут эти и только эти объекты. Т. е. множество – это достаточно условная, достаточно произвольная математическая структура (конструкция). И эффективность использования этой математической структуры при построении математических моделей различных предметных областей обеспечивается тем, насколько существенными являются общие свойства тех объектов, из которых составляется множество.

Существенно также подчеркнуть, что на вид объектов, являющихся элементами множеств не накладывается никаких ограничений. Элементами множеств могут быть всевозможные физические (материальные) объекты, явления, процессы. Элементами одних множеств также могут быть другие множества . Это позволяет над исходными выделенными объектами той или иной области мысленно надстраивать сложную, иерархическую **систему множеств**, которая как раз и задает структуру этой области.

Множество, элементом которого являются другие множества, называют множеством множеств или семейством множеств. Для обеспечения "благозвучности" терминов, использующих слово "множество", вместо этого слова можно использовать такие близкие по смыслу слова, как "семейство", "группа ", "набор", "совокупность", "класс", "тип", "вид".

Для того чтобы дать строгое теоретико-множественное уточнение понятия системы множеств необходимо ввести понятие **знака множества** и понятие **пары принадлежности.** После введения этих понятий систему множеств можно будет трактовать как множество специального вида.

Определение. **Знак множества** – это некий объект, главным свойством которого является обозначать, быть представителем некоторого конкретного множества. При этом сам облик и "внутреннее" устройство знака множества может быть самым различным **(!)**, т. е. является предметом индивидуального творчества автора знака и предметом его согласования с авторами других знаков и с "читателями" текстов, в которых используются эти знаки. Другими словами, понятие знака множества абстрагируется от того, как этот знак множества будет изображен (представлен, записан) в том или ином тексте. Следовательно, необходимо четко отличать **знак** какого-либо множества как абстракцию и конкретное **изображение знака**, т. е. конкретное представление (конкретное воплощение, конкретную материализацию, конкретную запись) указанного знака в некотором тексте, конкретное вхождение этого знака в текст. Таким образом, каждому знаку множества можно поставить в соответствие:

- множество, обозначаемое этим знаком;
- множество всевозможных **(!)** изображений (воплощений) этого знака.

Изображение (представление) знака множества – это его материализованное воплощение, входящее в состав некоторого материализованного текста. При этом в одном тексте может встречаться несколько вхождений (несколько изображений) одного и того же **(!)** знака. Для символьных (линейных) языков это вообще характеризуется ситуация, поскольку без множественного вхождения одного и того же знака в текст невозможно представить (изобразить) большое количество связей обозначаемого этим знаком объекта с другим объектами. При этом должен существовать простой способ, позволяющий для любых **(!)** двух изображений знаков установить являются они (1) изображениями одного и того же знака или (2) изображениями двух разных знаков.

К конкретным изображениям знаков в формальных языках предъявляются следующие очевидные требования:

- знаки, обозначающие разные объекты, должны легко **(!)** различаться;
- сходство знаков, обозначающих один и тот же объект (т. е. сходство разных вхождений одного итого же знака в один и тот же или разные тексты), должно быть легко **(!)** устанавливаемым:
- между пользователями соответствующего языка должна быть достигнута договоренность о принципах установления связи между знаком и объектом, который обозначается этим знаком, а для некоторых знаков эта связь должна быть оговорена конкретно.

Очевидно, что для каждого множества можно построить знак, обозначающий это множество. Как уже было отмечено при рассмотрении понятия множества, из любого набора объектов любой природы можно сформировать множество, элементами которого эти объекты являются, т. е. на природу и вид элементов множеств не накладывается никаких ограничений. Следовательно, элементами множеств могут быть как множества, так и знаки множеств.

Определение. Множество, каждый элемент которого является знаком множества, будем называть **нормализованным множеством.** Понятие нормализованного множества имеет для нас важное значение, т. к. нормализованное множество достаточно хорошо "подготовлено" к его изображению или описанию в виде текста того или иного языка. Такая "подготовленность" обусловлена тем, что в нормализованном множестве все его элементы являются знаками, которые вместе со знаком самого этого множества могут быть изображены произвольным образом в соответствии с требованиями любого языка. Ненормализованное множество – это множество, среди элементов которого имеется, по крайней мере, один объект, не являющийся знаком множества.

Определение. **Пара принадлежности** трактуется как множество частного вида, состоящее либо из двух элементов, один из которых считается знаком некоторого множества, а второй – одним из элементов указанного множества, либо из двух вхождений одного и того же элемента, который трактуется как знак некоторого множества, включающего в качестве одного из своих элементов знак самого себя. Пару принадлежности второго вида будем называть **петлей принадлежности.**

Итак, пара принадлежности – это связь двух (возможно совпадающих) объектов, один из которых (условно назовем его первым компонентом пары) в рамках этой пары играет роль знака некоторого множества, а второй (второй компонент пары) – роль непосредственно одного из элементов указанного выше множества (т. е. множества, обозначаемого первым компонентом пары принадлежности).

Объект, являющийся первым компонентом некоторой пары принадлежности, может быть вторым компонентом в рамках другой пары принадлежности. Аналогично этому, объект, являющийся вторым компонентом какой-либо пары принадлежности, в рамках другой пары принадлежности может быть первым компонентом.

Пусть дана пара принадлежности $\langle\, \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{e} \,\rangle$, где

s – первый компонент (знак некоторого множества);

e – второй компонент (непосредственно сам один из элементов множества, обозначаемого знаком ***s***).

Будем при этом также говорить, что указанная пара принадлежности:

- соединяет объект ***s*** (каковым может быть только знак некоторого множества) с объектом ***e*** (каковым может быть все что угодно);
- инцидентна объекту ***s*** и объекту ***e***;
- инцидентна слева объекту ***s*** и инцидентна справа объекту ***e***;
- проведена из объекта ***s*** в объект ***e***.

Пару принадлежности, вторым компонентом которой является знак **(!)** множества, будем называть **нормализованной парой принадлежности,** в противном случае – ненормализованной парой принадлежности. Очевидно, что нормализованная пара принадлежности есть пара принадлежности, являющаяся нормализованным множеством, т. к. первым компонентом пары принадлежности всегда является знак множества.

Следует четко отличать семантику введенных нами пар принадлежности, связывающих знак множества с объектом, который непосредственно сам **(!)** является одним из элементов этого множества, от семантики пар, связывающих знак множества со знаком **(!)** объекта, являющегося одним из элементов этого множества.

В частности, следует четко отличать нормализованную пару принадлежности, которая имеет вид

‹***знак множества* ━ *знак, являющийся элементом указанного множества***›

и указанную выше пару вида

‹***знак множества* ━ *знак объекта,***

являющегося элементом указанного множества›,

которая, строго говоря, парой принадлежности, в нашем понимании, не является и соответствует обычной математической записи вида $\boldsymbol{s} \ni \boldsymbol{e}$.

Завершая рассмотрение понятия пары принадлежности, отметим следующее. Поскольку каждая пара принадлежности является множеством (множеством специального вида) и поскольку для каждого множества можно построить (тем или иным способом) знак, обозначающий это множество, то соответственно этому, и для каждой пары принадлежности можно построить знак, обозначающий эту пару принадлежности. Таким образом, мы ввели понятие **знака пары принадлежности.** Знак пары принадлежности как и знак любого другого множества может быть элементом какого-либо множества, т. е. может быть вторым компонентом какой-либо пары принадлежности.

Определение. **Узловое множество** – это множество, не являющееся парой принадлежности. Узловое множество может быть **нормализованным узловым множеством** (т. е. состоящим только из знаков множеств) и **ненормализованным узловым множеством.** Узловое множество, как и любое другое множество, может иметь знак, который обозначает это узловое множество.

О п р е д е л е н и е . Элементом ненормализованного множества может быть либо некоторое множество, либо знак некоторого множества, либо объект, не являющийся ни множеством, ни знаком множества. Объект, который не является ни множеством, ни знаком множества, будем называть **предметом.** Чаще всего предметы – это материальные объекты (физические объекты, процессы, явления). Каждому предмету, как и каждому множеству можно поставить в соответствие некоторый знак. Такие знаки будем называть **предметными знаками.** Существенно при этом подчеркнуть, что предметный знак мы будем, строго говоря, трактовать не как знак соответствующего предмета, а как знак множества, состоящего из одного и однократно входящего в его состав элемента, каковым является указанный предмет. Такое специфическое множество будем называть **предметным множеством** и, соответственно, предметный знак будем иногда называть знаком предметного множества.

Из сказанного следует, что каждый рассматриваемый нами предмет мы фактически заменяем соответствующим ему предметным множеством и тем самым сводим понятие предмета к понятию множества. Очевидно, что все предметные множества являются ненормализованными. Очевидно также, что пара принадлежности, связывающая знак предметного множества (предметный знак) с элементом этого множества также является ненормализованной.

Поскольку предметное множество не является парой принадлежности, оно является частным видом узлового множества. Частным видом узлового множества также является **узловое непредметное множество,** т. е. узловое множество, не являющееся предметным. Узловое непредметное множество может быть как нормализованным, так и ненормализованным, а так же, как и все множества, может иметь знак.

Мощность множества – это суммарное количество вхождений **(!)** в это множество всех его элементов. Таким образом каждый элемент множества может входить в это множество однократно (т. е. один раз), двукратно (два раза), трехкратно (три раза) и т. д. Мощность множества определяется общим количеством пар принадлежности, выходящих из знака этого множества. Мощность нормализованного множества определяется общим количеством нормализованных пар принадлежности, выходящих из знака этого множества.

Семейство всевозможных множеств в соответствии со значением их мощности разбивается на следующие классы:

- ***пустые множества*** (0-мощные множества) – множества, не имеющие элементов;
- ***одно-мощные множества*** – множества, имеющие мощность, равную единице (это 1-элементные множества с однократным вхождением этого единственного элемента);
- ***пары*** (2-мощные множества) – множества, имеющие мощность, равную двум (это либо 1-элементные множества с двукратным вхождением этого единственного элемента, либо двухэлементные множества с однократным вхождением каждого элемента);
  - ***петли*** – 1-элементные множества с двукратным вхождением этого единственного элемента;
- ***тройки*** (3-мощные множества);
- и т. д. ;

Простую ориентированную пару (с не уточняемой семантикой) будем трактовать как ориентированное (упорядоченное) множество, состоящее

- либо из двух элементов, каждый из которых однократно входит в состав этого множества и при этом один из них считается первым элементом (первым компонентом) указанного множества, а другой считается вторым его элементом;
- либо из одного элемента, но двукратно входящего в состав определяемого множества, при этом одно вхождение рассматриваемого элемента считается первым вхождением, а другое – вторым вхождением.

Простую ориентированную пару второго вида будем называть простой ориентированной петлей. Как и любому другому множеству, ориентированной паре можно поставить в соответствие знак этой пары. Знаки простых ориентированных пар будем называть **дугами.**

К числу простых ориентированных пар относятся рассмотренные выше пары принадлежности, а также рассматриваемые ниже пары непринадлежности и пары нечеткой принадлежности.

Определение. Пара непринадлежности – это ориентированная пара, не являющаяся парой принадлежности.

Определение. Пара нечеткой принадлежности – это ориентированная пара, о которой достоверно не известно, является она парой принадлежности или нет.

Подчеркнем то, что пары непринадлежности и пары нечеткой принадлежности являются не только частным видом простых ориентированных пар, но и частным видом узловых непредметных множеств. Кроме того, частным видом узловых непредметных множеств является также **неориентированные пары**. Каждая неориентированная (неупорядоченная) пара есть множество, состоящее либо из двух однократно входящих в его состав элементов, либо из одного элемента двукратно входящего в его состав. Частными видами неориентированных пар являются **пары синонимии**, связывающие семантически эквивалентные (синонимичные) знаки, **пары несинонимии**, представляющие собой неориентированные пары, не являющиеся парами синонимии, а также **пары нечеткой синонимии**, представляющие собой неориентированные пары, о которых достоверно не известно, являются они парами синонимии или нет. Знаки неориентированных пар будем называть ребрами (например, ребрами синонимии, ребрами несинонимии, ребрами нечеткой синонимии).

Заметим, что введенные нами типы простых ориентированных пар являются частным видом кортежей, которые представляют собой ориентированные (упорядоченные) множества произвольной мощности, и которые подробно нами рассматриваются в подразделе 1.4.

Заметим, что каждому из введенных нами типов пар ставится в соответствие некоторое 2-мощное отношение:

- отношение принадлежности,
- отношение непринадлежности,
- отношение нечеткой принадлежности,
- отношение синонимии,
- отношение несинонимии,
- отношение нечеткой синонимии.

Каждое 2-мощное отношение трактуется нами как множество, каждым элементом которого является знак некоторой пары. Подробно 2-мощное отношение рассматриваются нами в п. 1.5.8.

Продолжим рассмотрение типов множеств, перечисленных нами в табл. 1.1.1.

Семейство пар принадлежности – это множество, каждым элементов которого является дуга принадлежности, т. е., знак некоторой пары принадлежности. Очевидно, что введенное выше отношение принадлежности является одним из семейств пар принадлежностей, так как представляет собой семейство всевозможных **(!)** пар принадлежностей.

Семейство узловых множеств – это множество, каждым элементом которого является знак некоторого множества.

Семейство предметных множеств – это множество, каждым элементом которого является знак некоторого предметного множества (т. е. знак некоторого предмета).

Семейство узловых непредметных множеств – это множество, каждым элементом которого является знак некоторого узлового непредметного множества.

Вернемся к введенному выше понятию системы множеств. Приведем теоретико-множественную трактовку этого понятия.

Определение. Система множеств – это множество, состоящее из некоторого количества узловых множеств или их знаков, а также пар принадлежности (или знаков этих пар), которые связывают между собой указанные выше узловые множества и/или их знаки. Каждая пара принадлежности, являющаяся элементом системы множеств, или пара принадлежности, знак которой является элементом системы множеств, непосредственно связывает следующие элементы системы множеств. Первым компонентом таких пар является знак некоторого узлового множества. Вторым компонентом таких пар может быть множество любого вида или его знак, т. е. это может быть:

- пара принадлежности или знак пары принадлежности;
- предмет, предметное множество или знак предметного множества;
- узловое непредметное множество или его знак.

Теперь поставим перед собой задачу нормализации системы множеств, т. е. задачу приведения системы множеств к некоторому каноническому виду, от которого достаточно легко можно перейти к тексту, изображающему (представляющему, записывающему) эту систему множеств. Рассмотрим произвольную систему множеств. Для каждой пары принадлежности, входящей в состав этой системы множеств, построим знак этой пары. Для каждого узлового множества, входящего в состав этой системы множеств, построим знак этого множества, а также построим пары принадлежности, связывающие этот знак со всеми элементами обозначаемого им множества. При этом, если какое-либо множество ***si***, входящее в рассматриваемую систему множеств, имеет в качестве одного из своих элементов некоторое другое множество ***sj***, каковым, в частности, может быть и пара принадлежности, то множество ***si*** преобразуем в ***si***▷, отличающегося от исходного тем, что в нем элементом является не само множество ***sj***, а знак (**!**) этого множества. Далее для каждого предмета, входящего в состав рассматриваемой системы множеств, построим знак соответствующего предметного множества. При этом, если какое-либо множество ***sm***, входящее в рассматриваемую систему множеств, имеет в качестве одного из своих элементов некоторый предмет ***sk***, то множество ***sm*** преобразуем во множество ***sm***▷, отличающегося от исходного тем, что в нем элементом является не сам предмет ***sk***, а знак предметного множества, соответствующего этому предмету, т. е. множества, единственным элементом которого является указанный предмет.

Если в результате рассмотренных выше преобразований исходной системы множеств:

- все множества, входящие в исходную систему множеств, будут иметь соответствующие им знаки;
- все построенные знаки множеств будут связаны парами принадлежности со всеми элементами соответствующих им множеств;
- все пары принадлежности вида

  ‹ ***множество sj*** *является элементом* ***множества si*** ›
  будут заменены парами принадлежности вида

  ‹ ***знак множества sj*** *является элементом* ***множества si***▷ ›;
- все предметы, входящие в исходную систему множеств, будут иметь соответствующие предметные знаки;
- все пары принадлежности вида

  ‹ ***предмет sk*** *является элементом* ***множества sm*** › за исключением пар, в которых множество ***sm*** является предметным множеством (т. е. унарным множеством, которое состоит только из соответствующего предмета), будут заменены парами вида

  ‹ ***знак предметного множества, соответствующего предмету sk***,

  является элементом ***множества sm***▷ ›,

то полученную систему множеств будем называть **нормализованной системой множеств** или почти нормализованным множеством.

О п р е д е л е н и е . Множество ***s*** является **почти нормализованным множеством** в том и только в том случае, если**:**

- множество ***s*** является ненормализованным;
- не существует ни одного элемента множества ***s***, который является множеством (т. е. элементами множества ***s*** могут быть только знаки множеств и предметы);
- каждый элемент множества ***s***, являющийся знаком ненормализованного множества, представляет собой знак пары принадлежности, соединяющей знак предметного множества с соответствующим предметом (т. е. других ненормализованных множеств в составе множества ***s*** нет);

- для каждого элемента множества ***s***, являющегося предметом, существует пара принадлежности, соединяющая указанный предмет со знаком соответствующего предметного множества, причем, знак указанной пары принадлежности, а также знак указанного предметного множества является элементами множества ***s***.

Очевидно, что каждую **(!)** систему множеств можно привести к нормализованному виду. Переход от ненормализованной к нормализованной системе множеств дает возможность строго трактовать систему множеств как множество специального вида, а именно, как множество, состоящее из следующих элементов:

- некоторого количества знаков узловых непредметных нормализованных множеств.
- некоторого количества предметных знаков,
- некоторого количества знаков нормализованных пар принадлежности,
- некоторого количества предметов,
- некоторого количества ненормализованных пар принадлежности, связывающих предметные знаки с соответствующими им предметами.

Подчеркнем, что все множества, знаки которых входят в состав нормализованной системы множеств, кроме предметных множеств и пар принадлежности, связывающих предметные знаки с предметами, являются нормализованными множествами.

Поскольку в состав нормализованной системы множеств могут входить предметы, нормализованная система множеств в общем случае не является нормализованным множеством.

Если из числа элементов нормализованной системы множеств исключить предметы, а также знаки пар принадлежности, вторыми компонентами которых являются предметы,
то мы получим нормализованную систему множеств, которая также является и нормализованным множеством. Такую систему множеств будем называть **полностью нормализованной системой множеств.** Таким образом, полностью нормализованная система множеств – это такая система множеств, все элементы которой являются знаками множеств (либо предметных множеств, либо узловых непредметных нормализованных множеств, либо нормализованных пар принадлежности).

Полностью нормализованную систему множеств мы будем рассматривать как семантическую структуру текста, который является изображением (представлением, записью) структуры той или иной описываемой области (описываемого мира).

Очевидно, что полностью нормализованную систему множеств можно изобразить (представить, записать) в виде текста некоторого языка. Очевидно, что создание такого языка предполагает:

- выработку условных правил изображения (построения) знаков множеств, не являющихся парами принадлежности,
- выработку условных правил изображения знаков пар принадлежности (явным или неявным образом),
- выработку правил изображения (записи) самих пар принадлежности – для каждой пары принадлежности, входящей в изображаемую нормализованную систему множеств, должны быть указаны:
  - знак этой пары принадлежности,
  - знак некоторого узлового множества,
  - объект, являющийся непосредственно одним из элементов указанного узлового множества.

Очевидно, выработка правил изображения знаков множеств и, в частности, знаков пар принадлежности не составляет большого труда, т. к. на формирование любых знаков никаких принципиальных ограничений не накладывается – эти ограничения обуславливаются исключительно условностями того или иного языка. А вот при изображении пары принадлежности может возникнуть проблема, если вторым компонентом пары принадлежности (элементом множества) является не знак какого-либо множества, а предмет. Дело в том, что знак вполне может быть фрагментом текста, тогда, как предмет для любого текста всегда есть нечто внешнее и, соответственно, не может непосредственным образом входить в состав текста.

Следовательно, для нормализованной системы множеств мы можем изобразить (записать) все пары принадлежности, кроме ненормализованных, т. е. кроме тех, которые связывают предметные знаки с предметами, соответствующими этим знакам. Но это совершенно нормальное явление, когда связь между знаками предметов и обозначаемыми предметами из "внешнего" описываемого мира осуществляется дополнительными "внеязыковыми" средствами.

Итак, нормализованная система множеств в отличие от полностью нормализованной системы множеств в полном объеме не может быть изображена в виде текста из-за ненормализованных пар принадлежности. Таким образом, изобразить (представить, записать) в виде некоторого текста можно только полностью нормализованную систему множеств.

При этом существенно подчеркнуть то, что в силу внеязыкового характера связи между предметными знаками и соответствующими им предметами переход от нормализованной системы множеств к полностью нормализованной системе множеств путем исключения предметов и знаков инцидентных им пар принадлежности из состава нормализованной системы множеств не приводит к потере информации с точки зрения текста, изображающего систему множеств.

Тот факт, что в число элементов множества, представляющего собой полностью нормализованную систему множеств, мы включаем не сами пары принадлежности, а их знаки, дает нам возможность достаточно легко расширять полностью нормализованную систему множеств, добавляя в нее знак самой этой системы множеств, знаки различных фрагментов этой системы множеств и, соответственно этому, знаки пар принадлежности, связывающих добавленные знаки с их элементами.

1.2. Основные положения языка SCB (Semantic Code Basic)

О п р е д е л е н и е . **Язык SCB** – это фактографический язык, обеспечивающий представление (изображение и запись) всевозможных математических структур путем трактовки каждой такой структуры как полностью нормализованной системы множеств. А каждая полностью нормализованная система множеств однозначно задается множеством троек принадлежности, которые имеют следующий вид: ‹ ***v***, ***e***, ***g*** ›, где

v – знак нормализованного множества, не являющегося парой принадлежности (знак узлового непредметного множества),

e – один из элементов множества ***v***, каковым может быть только знак некоторого множества, поскольку множество ***v*** является нормализованным,

g – знак нормализованной пары принадлежности, проведенной из знака ***v*** в знак ***e***.

Знак **(!)** нормализованной пары принадлежности в языке SCB будем называть **дугой принадлежности.**

Знак узлового множества, т. е. множества, не являющегося парой принадлежности, в языке SCB будем называть **узлом.** При этом будем отличать **предметные узлы,** которые являются предметными знаками (знаками предметных множеств), и **непредметные узлы,** которые являются знаками нормализованных узловых непредметных множеств.

Тексты языка SCB будем называть **SCB-текстами** или SCB-конструкциями.

Элементарные фрагменты **SCB-текста** будем называть **SCB-элементами.** К числу SCB-элементов относятся **дуги принадлежности** и узлы (как предметные узлы, так и непредметные узлы). Никаких других SCB-элементов не существует.

Каждый SCB-элемент является "синтаксически" элементарным (поскольку его "внутренняя" структура в языке SCB не требует уточнения), а также семантически значимым (поскольку каждый SCB-элемент представляет собой знак **(!)** некоторого множества).

Узловые непредметные множества в языке SCB могут состоять из знаков множеств того или иного типа. Соответственно этому можно говорить о типологии знаков узловых непредметных множеств, а, следовательно, и о типологии **непредметных узлов.** Согласно этому среди непредметных узлов можно выделить:

- непредметные узлы, являющиеся знаками различных множеств, состоящих только из знаков пар принадлежности;
- непредметные узлы, являющиеся знаками различных множеств, состоящих только из знаков узловых множеств (т. е. множеств, не являющихся парами принадлежности), и в частности
  - непредметные узлы, являющиеся знаками различных множеств, состоящих только из знаков предметных множеств (т. е. из предметных знаков);
  - непредметные узлы, являющиеся знаками различных множеств, состоящих только из знаков узловых непредметных множеств (т. е. множеств, не являющихся парами принадлежности и не являющихся предметными множествами);
- непредметные узлы, являющиеся знаками различных систем множеств напомним, что каждая система множеств есть множество, в состав которого входят как знаки узловых множеств, так и знаки пар принадлежности.

На основании введенных понятий языка SCB тройка принадлежности ‹ ***v***, ***e***, ***g*** › будет трактоваться следующим образом:

v – некоторый непредметный узел;

e – знак некоторого множества, который представляется в виде некоторого SCB-элемента и который является одним из элементов множества, обозначаемого узлом ***v***. Подчеркнем, что SCB-элемент ***e*** может быть как узлом, так и дугой принадлежности;

g – дуга принадлежности, проведенная из узла ***v*** в SCB-элемент ***e***.

При изображении рассматриваемой тройки принадлежности на языке SCB будем также говорить, что:

- дуга принадлежности ***g*** выходит из узла ***v*** и входит в SCB-элемент ***e***;
- дуга ***g*** инцидентна справа узлу ***v*** (т. е. является непосредственно правым соседом узла ***v***) и инцидентна слева SCB-элементу ***e*** (т. е. является непосредственно левым соседом SCB-элемента ***e***);
- узел ***v*** инцидентен слева дуге принадлежности ***g***;
- SCB-элемент ***e*** инцидентен справа дуге принадлежности ***g***;
- узел ***v*** и дуга принадлежности ***g*** инцидентны друг другу, т. к. непосредственно соседствуют;
- SCB-элемент ***e*** и дуга принадлежности ***g*** инцидентны друг другу;
- узел ***v*** и SCB-элемент ***e*** смежны друг другу, т. е. соединены дугой принадлежности.

Подчеркнем, что при представлении тройки принадлежности ‹ ***v***, ***e***, ***g*** › в языке SCB <u>не изображение</u> SCB-элемента ***e*** считается элементом множества ***v***, а сам <u>знак</u> **(!)**, которым является указанный SCB-элемент ***e***.

Таким образом, следует четко отличать <u>сам знак</u> (как некую абстракцию) от <u>изображения</u> (представления, вхождения) этого знака в том или ином тексте (в частности, в SCB-тексте). Так, например, один и тот же знак в рамках одного и того же текста (информационной конструкции) может быть изображен несколько раз, т. е. может иметь несколько вхождений. Это означает, что два разных (похожих или совсем не похожих) изображения могут быть изображениями одного и того же знака. Такие изображения будем называть <u>синонимичными</u>.

Уже на данном этапе рассмотрения языка SCB можно сформулировать некоторые свойства синтаксически и семантически корректных SCB-конструкций.

Свойство 1. Дуга принадлежности не может выходить из дуги принадлежности, т. к. в языке SCB связь знака пары принадлежности с элементами этой пары задается не другими парами принадлежности, а связью инцидентности. Из данного свойства следует, что дуга принадлежности не может выходить из самой себя.

Свойство 2. Дуга принадлежности не может выходить из предметного узла.

Свойство 3. <u>Если</u> дуга принадлежности выходит из узла неопределенного типа, <u>то</u> этот узел следует трактовать как непредметный, преобразовав тип этого узла соответственным образом, т. е. дуга принадлежности не может выходить из узла неопределённого типа.

Свойство 4. <u>Если</u> дуга принадлежности выходит из SCB-элемента неопределенного типа, <u>то</u> этот SCB-элемент следует трактовать как непредметный узел, преобразовав соответствующим образом, тип этого SCB-элемента. Т. е. дуга принадлежности не может выходить из SCB-элемента неопределённого типа.

Свойство 5. Дуга принадлежности не может входить в саму себя.

Примечание. Из 5-го и 1-го свойства следует, что дуга принадлежности не может быть инцидентна самой себе. Таким образом, третий компонент тройки принадлежности (***g***) не может совпадать ни с первым компонентом (т. к. узел не может совпадать с дугой принадлежности), ни со вторым компонентом. Т. е. дуга принадлежности не может входить сама в себя и не может выходить сама из себя.

Свойство 6. Дуга принадлежности может входить в SCB-элемент любого типа (в другую дугу принадлежности, в предметный узел, в непредметный узел, в узел неопределенного типа, в SCB-элемент неопределенного типа). При этом удаление или добавление дуги принадлежности, входящей в SCB-элемент, не меняет семантики этого SCB-элемента.

Свойство 7. Из двух инцидентных SCB-элементов один обязательно должен быть дугой принадлежности – либо дугой, выходящей из инцидентного ей SCB-элемента, либо дугой, входящей в этот элемент. Следовательно, два разных узла не могут быть инцидентны друг другу и, в частности, SCB-элемент не может быть инцидентен сам себе.

Примечание. Из 7-го, 5-го и 1-го свойства следует, что SCB-элемент любого типа не может быть инцидентен сам себе.

Свойство 8. Пусть SCB-элемент ***ei*** инцидентен слева SCB-элементу ***ej*** и пусть здесь ***ej*** является дугой принадлежности. Тогда ***ei*** является непредметным узлом и, соответственно, не может быть дугой принадлежности. В этом случае будем говорить, что дуга ***ej*** выходит из узла ***ei***.

Свойство 9. Пусть SCB-элемент ***ei*** инцидентен слева SCB-элементу ***ej*** и пусть здесь ***ei*** является дугой принадлежности. Тогда ***ej*** может быть SCB-элементом любого типа (как узлом, так и дугой принадлежности). В этом случае будем говорить, что дуга ***ei*** входит в элемент ***ej***.

Свойство 10. SCB-элемент, из которого дуга принадлежности выходит, и SCB-элемент, в который дуга принадлежности входит, могут совпадать. Такую дугу принадлежности будем называть **SCB-петлей.**

Примечание. Таким образом, первые два компонента тройки принадлежности могут совпадать. Это будет означать, что множество ***v*** в качестве одного из своих элементов имеет знак самого себя. Очевидно, что эта ситуация существенно отличается от ситуации, когда множество ***v*** в качестве одного из своих элементов имеет не свой знак, а само себя. Правда, такая ситуация в нормализованных системах множеств невозможна.

Свойство 11. В SCB-конструкциях могут встречаться также **кратные дуги** принадлежности, т. е. дуги принадлежности, которые выходят из одного и того же SCB-элемента и входят в другой, но совпадающий для этих дуг SCB-элемент.

Свойство 12. В SCB-конструкциях могут также встречаться **встречные дуги** принадлежности.

Свойство 13. Для каждой дуги принадлежности существует один и только один узел, являющийся по отношению к этой дуге инцидентным слева, а также один и только один SCB-элемент, являющийся по отношению к этой дуге инцидентным справа. Т. е. каждая дуга принадлежности выходит из одного узла и входит только в один SCB-элемент. Это свойство следует из того, что дуга принадлежности является знаком пары принадлежности, т. е. знаком множества, состоящего только из двух элементов – из элемента, инцидентного слева от этой дуги принадлежности, и элемента, инцидентного справа от неё.

Рассмотрим узлы частного вида – узлы, являющиеся знаками текстов (информационных конструкций), закодированных (представленных) тем или иным способом и относящихся к тому или иному языку.

Любую дискретную информационную конструкцию можно закодировать (представить, изобразить) в виде SCB-текста, в котором предметными узлами являются знаки элементарных (атомарных, неделимых) фрагментов (символов) кодируемой информационной конструкции.

Сейчас нам важно знать, что все дискретные информационные конструкции и соответствующие им языки можно свести к языку SCB. Но, несмотря на такую возможность, далеко не всегда это целесообразно, поскольку привычные способы кодирования информационных конструкций могут оказаться нагляднее и могут иметь развитые средства обработки. Таким образом, одной и той же информационной конструкции может соответствовать несколько узлов, соответствующих разным способам кодирования этой информационной конструкции. Подчеркнем, что указанные узлы не являются синонимичными, т. к. формально они обозначают разные объекты. Таким образом, следует четко отличать синонимию самих узлов и синонимию различных информационных конструкций. В языке SCB синонимичные узлы отождествляются (логически склеиваются).

Определение. Итак, если имеется узел, обозначающий некоторую информационную конструкцию не на языке SCB, то указанную информационную конструкцию будем называть **содержимым** указанного узла.

Простейшим примером информационной конструкции является запись числа в некоторой системе счисления.

1.3. Ядро графического языка SCBg (Semantic Code Basic graphical)

В самом языке SCB способ изображения SCB-элементов при представлении (записи) троек принадлежности не уточняется. Всё это уточняется в рамках различных модификаций (вариантов) языка SCB. Рассмотрим две таких модификации – графическую модификацию (графический язык SCBg – Semantic Code Basic graphical) и символьную модификацию (символьный язык SCBs – Semantic Code Basic symbolic).

Способ изображения SCB-элементов в языке SCBg приведено в табл. 1.3.1.

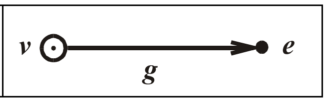
Таблица 1.3.1. Алфавит графических примитивов, используемых для изображения основных типов SCB-элементов в графическом языке SCBg (см. табл. 1.1.3)

• изображение знака множества (изображение SCB-элемента не уточняемого типа)	
• изображение знака пары принадлежности (изображение дуги принадлежности)	
• изображение знака узлового множества (изображение узла не уточняемого типа)	
• изображение знака предметного множества (изображение предметного узла)	
• изображение знака узлового непредметного множества (изображение непредметного узла)	
• изображение знака пары непринадлежности (изображение дуги непринадлежности)	
• изображение знака пары нечеткой принадлежности (изображение дуги нечеткой принадлежности)	
• изображение знака пары синонимии (изображение ребра синонимии)	
• изображение знака пары несинонимии (изображение ребра несинонимии)	
• изображение знака пары нечеткой синонимии (изображение ребра нечеткой синонимии)	
• изображение знака неориентированной пары (изображение ребра неуточняемого типа)	
• изображение знака простой неориентированной пары (изображение дуги неуточняемого типа)	
• изображение знака семейства пар принадлежности	
• изображение знака семейства узловых множеств	
• изображение знака семейства предметных множеств	
• изображение знака семейства узловых непредметных множеств	
• изображение знака системы множеств	

В языке SCBg SCB-элементы неуточняемого типа изображаются в виде закрашенного маленького кружка, узлы – в виде большого кружка, а дуги принадлежности – отрезком линии со стрелкой на одном из его концов, указывающей направление SCB-дуги. В кружок, изображающий узел, могут быть помещены условные обозначения типа узла (вертикальные, горизонтальные, наклонные и прочие черточки в различных комбинациях).

Представление (изображение) троек принадлежности в языке SCBg выглядит следующим образом. Перечислим пять основных вариантов.

Вариант 1.

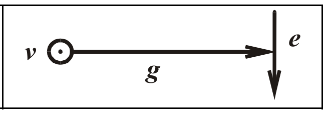


Здесь первый (левый) кружок с точкой изображает непредметный узел неуточняемого типа (знак узлового непредметного множества), являющийся первым компонентом (***v***) изображаемой тройки принадлежности.

Маленьким кружком изображается знак множества неуточняемого типа, т. е. элемент SCB-текста неуточняемого типа (либо дуга принадлежности, либо узел), если, конечно, SCB-элемент ***e*** таковым является.

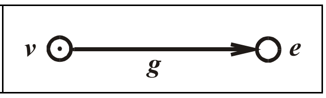
Дуга принадлежности ***g*** в языке SCBg изображается в виде линии со стрелкой. При этом указанная линия может иметь любую форму, но без пересечений. Пересекаться могут только линии, изображающие различные дуги принадлежности.

Вариант 2.



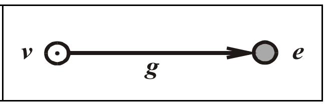
Этот вариант имеет место, если SCB-элемент ***e*** является знаком некоторой пары принадлежности.

Вариант 3.



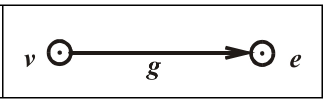
Незаштрихованный кружок изображает узел неуточняемого типа, являющийся знаком узлового множества неуточняемого типа (либо знаком предметного множества, либо знаком узлового непредметного множества), если, конечно, ***e*** таковым знаком является.

Вариант 4.



Заштрихованный кружок изображает узел, являющийся предметным знаком предметного множества, если ***e*** таковым знаком является.

Вариант 5.



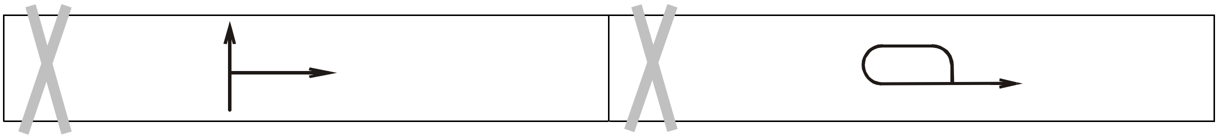
В данном варианте изображения тройки принадлежности второй компонент изображаемой тройки принадлежности (***e***) также является непредметным узлом неуточняемого типа. Поэтому он также изображается в виде кружка с точкой.

На самом деле количество вариантов изображения троек принадлежностей намного больше, т.к. изображение непредметного узла (кружок с точкой) может быть заменено на кружки с разными "внутренностями", уточняющими тип непредметного множества.

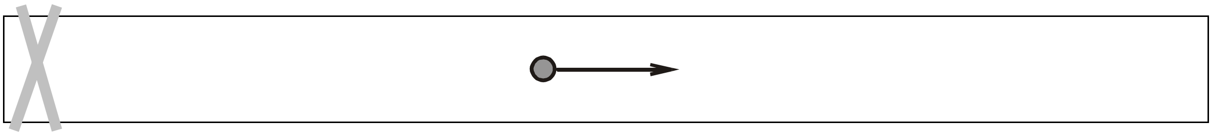
Текст (конструкция) языка SCBg представляет собой совокупность изображений троек принадлежности с физическим склеиванием синонимичных SCBg-элементов, обозначающих одно и то же множество.

Проиллюстрируем на языке SCBg перечисленные выше общие свойства языка SCB, являющегося надъязыком по отношению к языку SCBg.

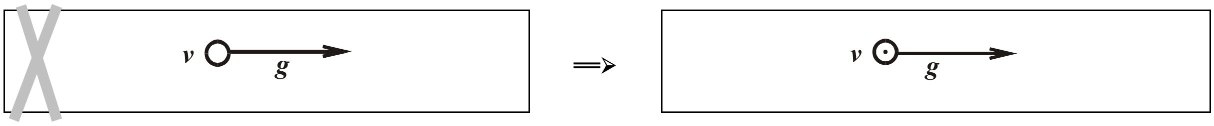
Свойство 1. Дуга принадлежности не может выходить из дуги принадлежности и, в частности из самой себя, т.е. запрещена конструкция вида



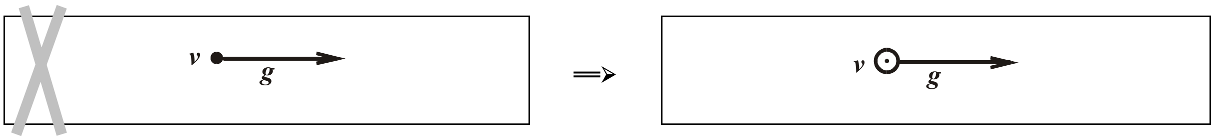
С в о й с т в о   2 . Дуга принадлежности не может выходить из предметного узла.



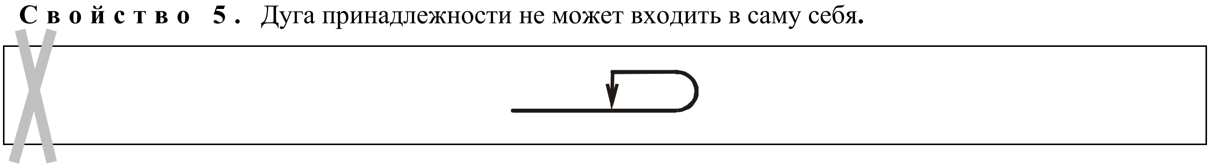
С в о й с т в о   3 . Дуга принадлежности не может выходить из узла неопределённого типа.



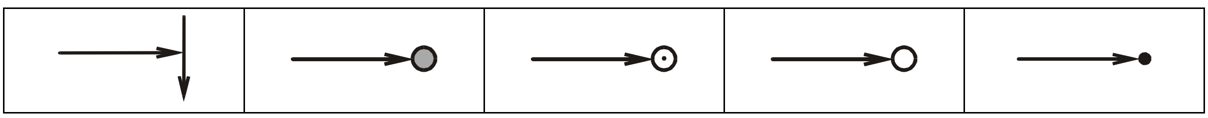
С в о й с т в о   4 . Дуга принадлежности не может выходить из SCB-элемента неопределённого типа.



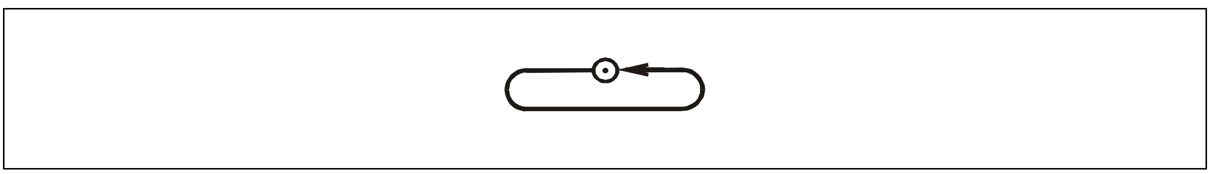
С в о й с т в о   5 . Дуга принадлежности не может входить в саму себя.



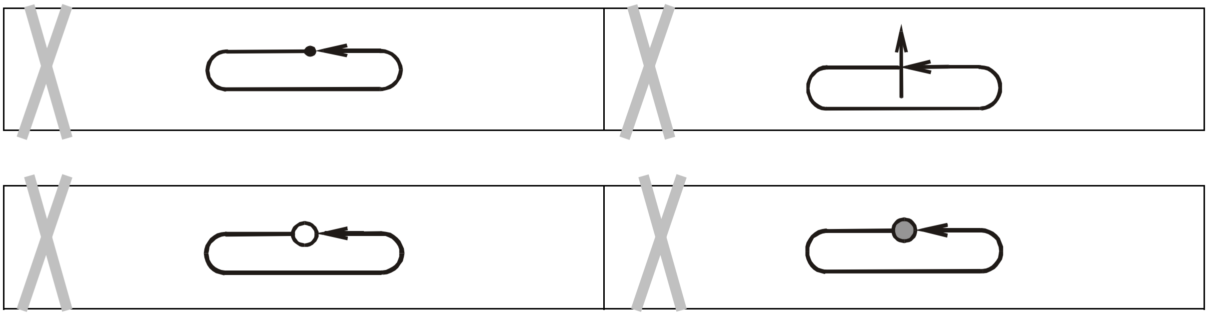
С в о й с т в о   6 . Дуга принадлежности может входить в SCB-элемент любого типа. Т. е. могут существовать конструкции вида



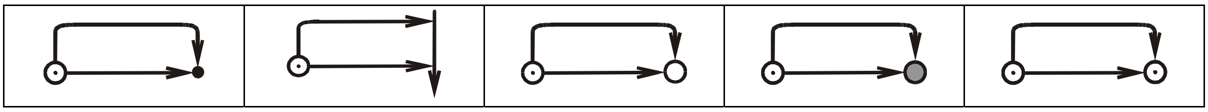
С в о й с т в о   1 0 . SCB-элемент, из которого дуга принадлежности выходит, и SCB-элемент, в который дуга принадлежности входит, могут совпадать. Т. е. может существовать конструкция вида



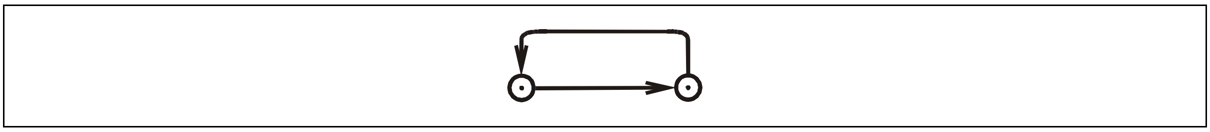
Но в силу свойств 1-4 не могут существовать конструкции вида



Свойство 11. В SCB-конструкциях могут встречаться также кратные SCB-дуги. Т.е. могут существовать конструкции вида



Свойство 12. В SCB-конструкциях могут также встречаться встречные SCB-дуги



Узел, имеющий известное содержимое, в графическом языке SCBg изображается в виде замкнутой линии, которая ограничивает изображение информационной конструкции, являющейся этим содержимым. Очевидно, что в данном случае содержимое узла должно быть визуально воспроизводимо, т.е. может быть изображено на листе бумаги. Таким содержимым может быть символьный текст какого-либо естественного или искусственного языка. Таким содержимым может быть рисунок, фотография, карта, схема чертеж, нотная запись какого-либо музыкального произведения. Содержимым может быть закодированный звуковой сигнал (музыкальное произведение, речевое сообщение), но такое содержимое нет необходимости изображать в визуальной (графической) форме.

1.4. Средства обеспечения наглядности SCBg-текстов

Наглядность SCBg-текста в первую очередь обеспечивается тем, насколько удачно автор текста разместит на листе бумаги или экране монитора графические изображения узлов и дуг принадлежности. Удачное размещение, в частности, приводит к сокращению числа пересечений линий, изображающих дуги принадлежности, а также к упрощению формы этих линий (в идеальном случае указанные линии должны быть отрезками, соединяющих SCB-элементов).

К числу дополнительных мер, обеспечивающих повышение наглядности SCBg-текста, можно отнести:

- расширение алфавита графических примитивов, используемых для изображения SCB-элементов и указывающих тип изображаемого SCB-элемента. В частности, желательно иметь графические примитивы, которые соответствуют различным типам непредметных узлов (см. табл. 1.2.3.1);
- введение нескольких копий изображения одного и того же SCB-элемента, т. е. допущение многократного вхождения (в текст) изображений одного и того же знака. Это означает, что в SCB-текста могут встречаться синонимичные SCBg-элементы;
- введение неявно изображаемых дуг принадлежности, а именно, дуг принадлежности, неявно проводимых из непредметного узла, изображенного замкнутой линией, во все SCB-элементы, изображенные внутри этой замкнутой линии (см. рис. 1.2.3.1);
- увеличение размера "контактной зоны" изображения узла, если этот узел имеет большое количество инцидентных дуг принадлежности (см. рис. 1.2.3.3);
- введение неявно изображаемых дуг принадлежности, проводимых из узлов, идентификаторы которых помечены звездочкой, в SCB-элементы, которым указанные идентификаторы со звездочкой приписаны (см. рис. 1.2.3.4).

Синонимичные SCBg-элементы необходимо явно указать. Это осуществляется путем приписывания синонимичным SCBg-элементам одного и того же идентификатора, который считается символьным эквивалентом (символьным вариантом изображения) соответствующего SCB-элемента. Поскольку два синонимичных SCBg-элемента семантически представляют собой изображения одного и того же знака, они могут быть логически склеены. Подчеркнем при этом, что возможность в языке SCBg склеивать синонимичные SCBg-элементы не только логически и "физически" придает этому языку хорошие "ассоциативные" свойства, т.е. возможность поиска нужный информации по связям. Для языка SCBg по умолчанию **(!)** считается, что два разных SCB-элемента считаются изображениями разных SCB-элементов.

Примечание. Следует отличать:

- синонимичные SCB-элементы, которые имеют обычно разные идентификаторы и которые являются разными знаками, но одного и того же **(!)** множества;
- синонимичные SCBg-элементы, которые имеют одинаковые идентификаторы и которые являются изображениями одного и того же SCB-элемента, т.е. являются разными изображениями (разными вхождениями в SCB-текст) одного и того же знака;
- синонимичные вхождения идентификаторов), которые представляют собой одинаковые **(!)** строки символов и которые являются изображениями одного и того же SCB-элемента, т.е. являются разными вхождениями в SCBs-текст) одного и того же знака.

Синонимичные SCB-элементы указываются с помощью специальных пар синонимии (см. табл. 1.1.1 и табл. 1.2.2.1). Знаки множеств, связываемые каждой такой парой либо имеют разные идентификаторы, либо не имеют идентификаторов для обоих знаков, либо не имеют идентификатора для одного из них. Подчеркнем при этом, что по умолчанию SCB-элементы считаются несинонимичными, т.е. пары несинонимии (пары неравенства знаков) в основном, указываются по умолчанию **(!)**. Это значит, что, если какие-либо два SCB-элемента не связаны друг с другом парой синонимии (парой равенства знаков), то эти два SCB-элемента считаются связанными парой несинонимии.

Примечание. Два синонимичных SCB-элемента обозначают равные множества (а, точнее, одно и то же множество). Хотя обратное не является верным – два равных множества (т.е. множества, состоящие из одинаковых элементов) могут считаться разными объектами и, следовательно, обозначаться разными несинонимичными SCB-элементами.

Следовательно, пару, связывающую два синонимичных SCB-элемента (два равных знака), следует отличать от пары, которая связывает знаки двух равных множеств. Равные множества, если они вводятся, считается разными объектами и поэтому их знаки не могут быть равными (синонимичными). Следует при этом подчеркнуть, что равные множества следует вводить только в случае особой необходимости – для представления кратных или встречных связок, принадлежащих одному отношению.

В языке SCBg приписывание идентификаторов SCB-элементам, изображаемым в SCBg-конструкциях, не является обязательным. В этом возникает необходимость только тогда, когда изображение одного и того же SCB-элемента несколько раз входит в одну или разные SCBg-конструкции, например, на разных листах. В этом случае приписывание разным SCB-элементам одинаковых идентификаторов является указанием того, что они являются изображениями одного и того же SCB-элемента.

Каждому из перечисленных типов SCB-элементов ставятся в соответствие неточные варианты этих элементов. Изображение неточных SCB-элементов неуточняемого типа и неточных узлов от изображения их точных вариантов в языке SCBg отличается только (**!**) тем, что окружность заменяется на правильный пятиугольник, а "внутренности" остаются теми же.

Примерами неточных SCB-узлов являются:

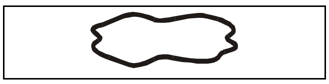
- неточное число (либо искомое, либо заданное в некотором диапазоне точности);
- неточное физическое лицо (некто);
- неточный "неодушевленный" предмет (нечто).

Неточная дуга принадлежности – это дуга, у которой не известен или узел, из которого она выходит, и / или SCB-элемент, в который она входит.

Итак, неточный (неопределенный) SCB-элемент – это знак объекта (предмета или множества), о котором очень мало известно и есть большая вероятность того, что он окажется синонимичным другому известному SCB-элементу, тому о котором имеется достаточно много информации, которая, в частности, может задавать этот SCB-элемент однозначно (**!**) или, как говорят, может идентифицировать указанный SCB-элемент.

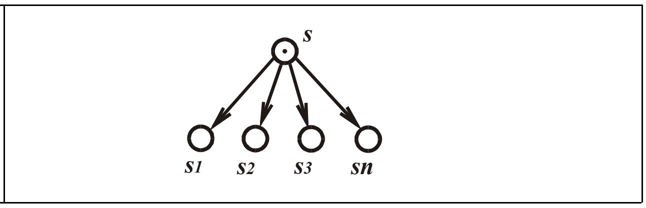
Примечание. Кроме перечисленных в данной таблице в алфавит графических примитивов языка SCBg входят:

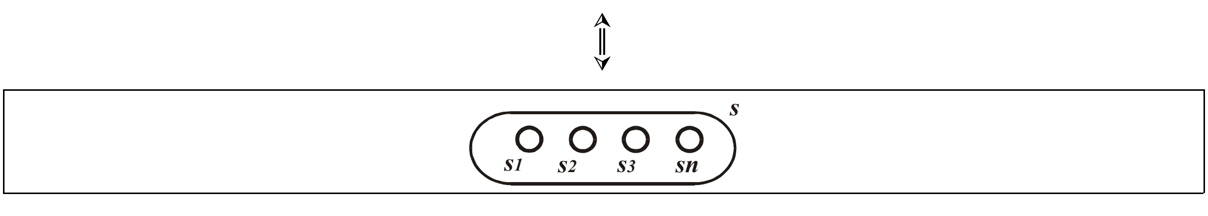
- замкнутые линии, изображающие либо узлы с явно указываемым содержимым, либо непредметные узлы, обозначающие множества SCB-элементов, изображенных внутри этих замкнутых линий;



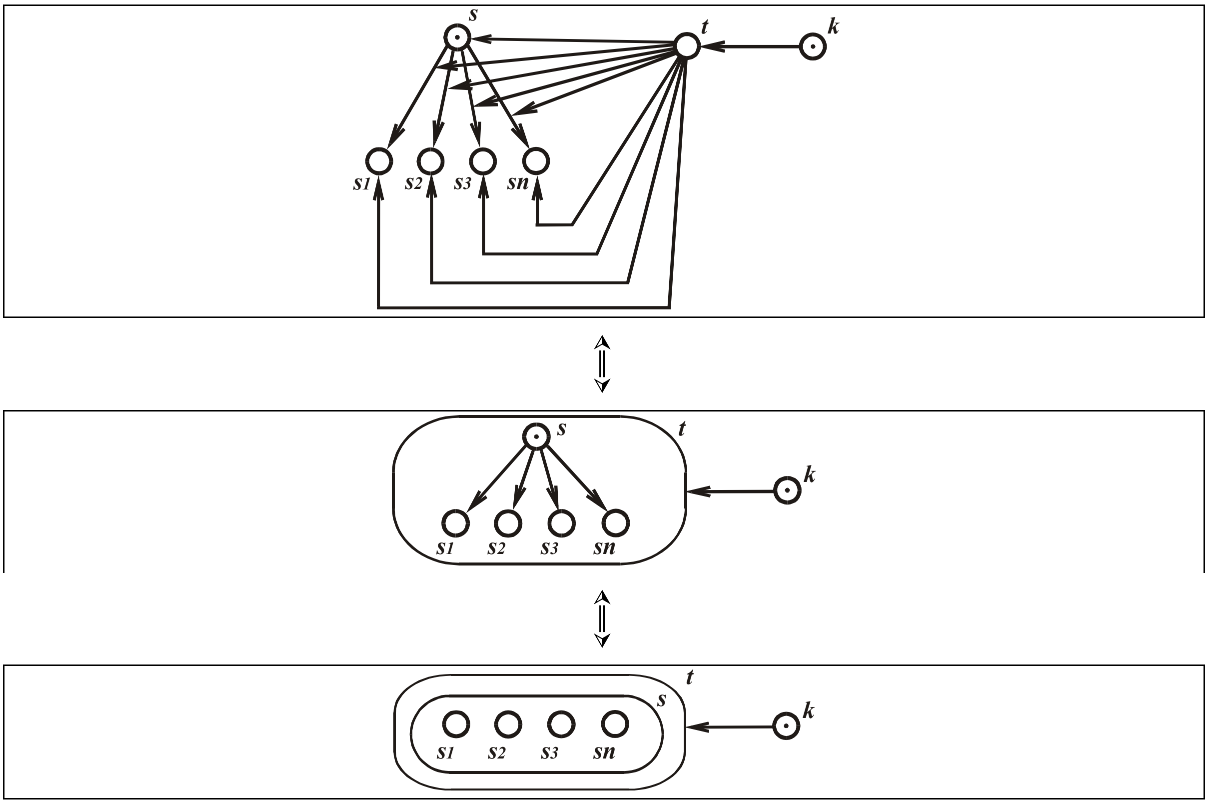
- толстые линии, увеличивающие размер "контактной зоны" узлов, т.е. зоны, с которой соприкасаются изображения входящих и выходящих дуг принадлежности.

Рис. 1.4.1. Три примера, иллюстрирующих правила введения изображения непредметных SCB-узлов в языке SCBg в виде замкнутых линий



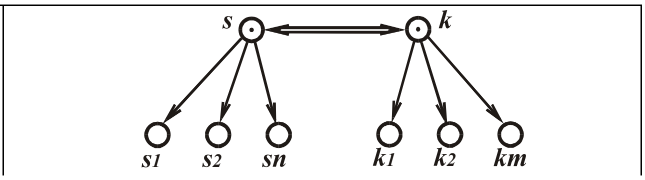


Продолжение **р и с у н к а 1 . 4 . 1 .**



П р и м е ч а н и е . Замкнутая линия изображает знак множества всех тех и только тех знаков множеств, которые являются полностью нормализованной системой множеств, изображение которой ограничено замкнутой линией. При этом линия, изображающая дугу принадлежности, замкнутая линия изображающая непредметный узел, должны полностью входить внутрь области, ограниченной замкнутой линией.

Р и с . 1 . 4 . 2 . Пример иллюстрации использования ребер синонимии



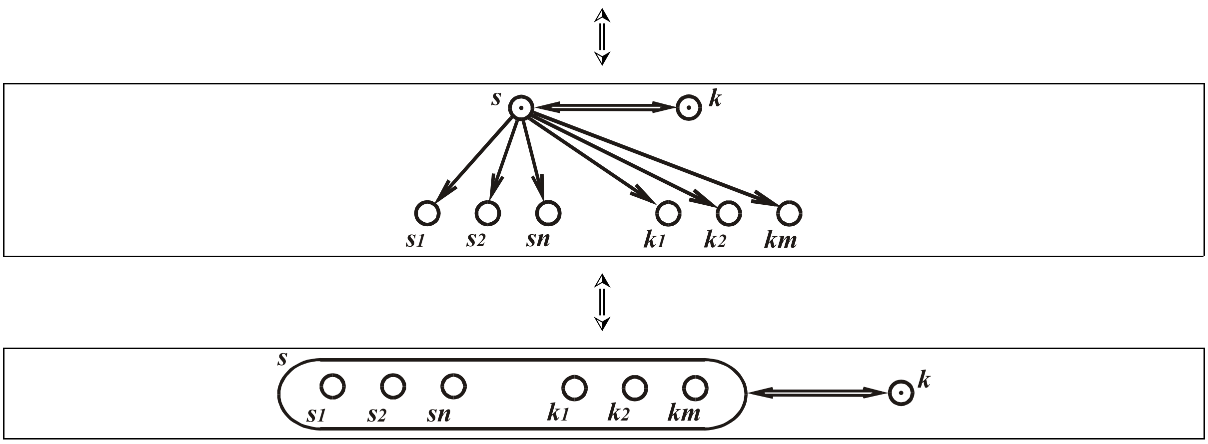
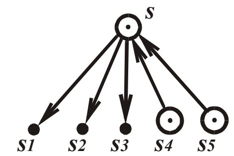
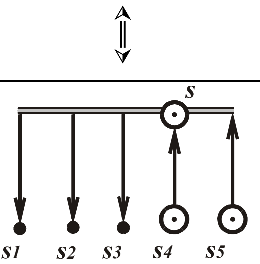


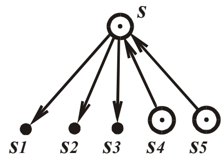
Рис. 1.4.3. Пример иллюстрации увеличения "контактной зоны" SCB-узла с помощью толстых линий

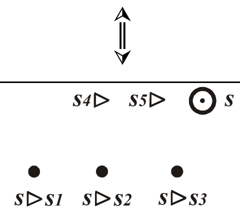




Примечание. Увеличение "контактной зоны" изображения узла (*s*) целесообразно тогда, когда узел (*s*) имеет большое количество инцидентных ему дуг принадлежности.

Рис. 1.4.4. Пример иллюстрации правила введения неявно изображаемых SCB-дуг, проводимых из SCB-узлов, идентификаторы которых помечены звёздочкой





Итак, явное указание типа изображаемого SCB-элемента в языке SCBg осуществляется либо путем использования графического примитива, который соответствует типу изображаемого SCB-элемента, либо явного изображения дуги принадлежности, которая связывает изображаемый SCB-элемент со специальным узлом, который является знаком всевозможных SCB-элементов соответствующего типа. В связи с этим введем ряд специальных узлов, которые соответствуют некоторым графическим примитивам, приведенным в таблице.

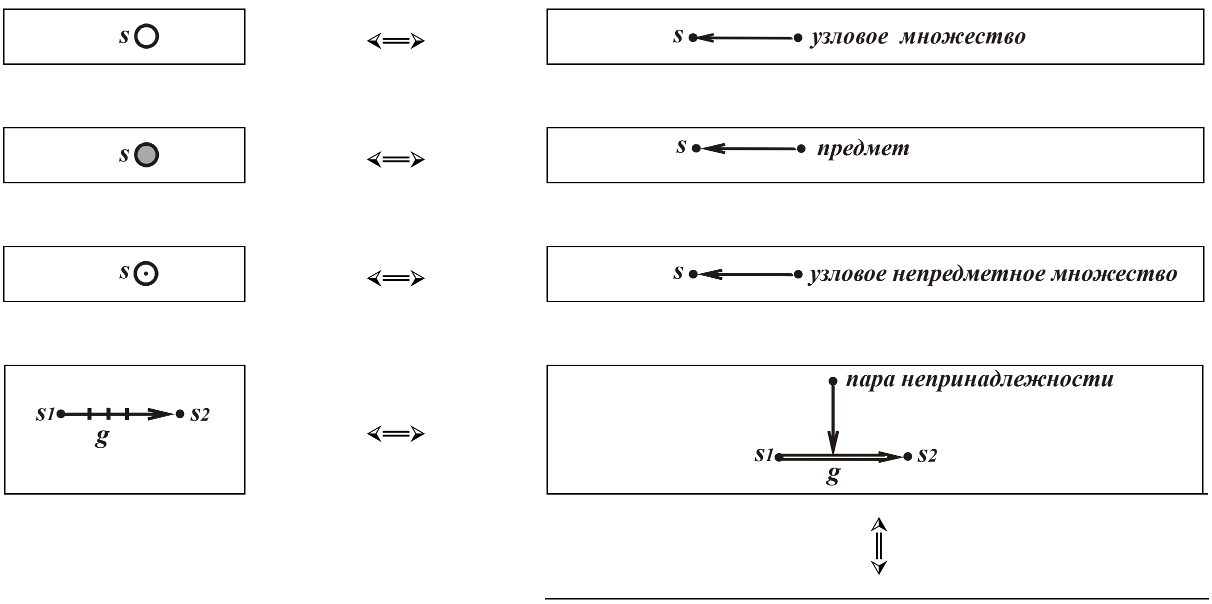
Особо подчеркнем то, что из перечисленных в табл.1.2.2.1 типов SCB-элементов базовыми следует считать два первых – знаки множеств неуточняемого типа и знаки пар принадлежности. Для того, чтобы все остальные типы SCB-элементов свести к указанным двум типам, достаточно каждому небазовому типу SCB-элементов поставить в соответствие специальный SCB-элемент, являющийся знаком всех SCB-элементов соответствующего типа и только их.

Такие SCB-элементы будем называть **ключевыми SCB-элементами.** Каждому ключевому SCB-элементу поставим в соответствие уникальный идентификатор взаимно однозначно соответствующий идентифицируемому ключевому SCB-элементу. Общие правила построения идентификаторов SCB-элементов смотри в 1.2.5, а сейчас просто перечислим идентификаторы нужных нам ключевых элементов:

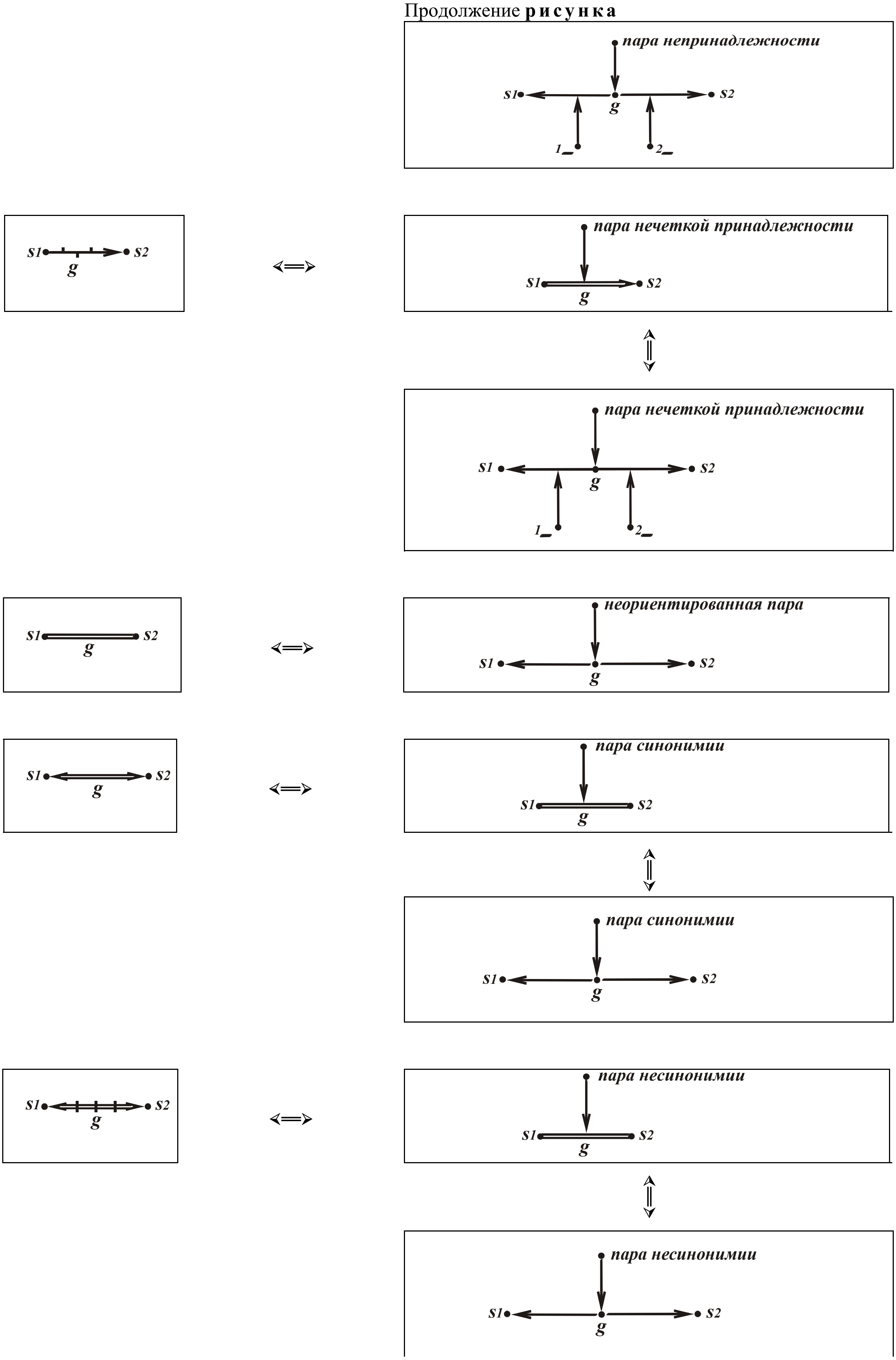
- ***пара принадлежности*** (быть знаком пары принадлежности) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков <u>всевозможных</u> пар принадлежности и только их;
- ***узловое множество*** (быть знаком узлового множества) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков <u>всевозможных</u> узловых множеств и только их;
- ***предмет*** (быть знаком предметного множества) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков <u>всевозможных</u> предметных множеств и только их;
- ***узловое непредметное множество*** (быть знаком узлового непредметного множества) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков <u>всевозможных</u> узловых непредметных множеств и только их;

- ***пара непринадлежности*** (быть знаком пары непринадлежности) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных пар непринадлежности и только их;
- ***пара нечеткой принадлежности*** (быть знаком пары нечеткой принадлежности) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных пар нечеткой принадлежности и только их.
- ***неориентированная пара*** (быть знаком неориентированной пары) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных неориентированных пар и только их.
- ***пара синонимии*** (быть знаком пары синонимии) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных пар синонимии и только их.
- ***пара несинонимии*** (быть знаком пары несинонимии) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных пар несинонимии и только их.
- ***пара нечеткой синонимии*** (быть знаком пары нечеткой синонимии) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных пар нечеткой синонимии и только их.
- ***семейство пар принадлежности*** (быть знаком семейства пар принадлежности) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных семейств пар принадлежности и только их.
- ***семейство узловых множеств*** (быть знаком семейства узловых множеств) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных семейств узловых множеств и только их.
- ***семейство предметных множеств*** (быть знаком семейства предметных множеств) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных семейств предметных множеств и только их.
- ***семейство узловых непредметных множеств*** (быть знаком семейства узловых непредметных множеств) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных семейств узловых непредметных множеств и только их.
- ***система множеств*** (быть знаком системы множеств) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных систем множеств и только их.
- ***простая ориентированная пара*** (быть знаком простой ориентированной пары) – это идентификатор SCB-элемента, обозначающего множество знаков всевозможных простых ориентированных пар и только их.

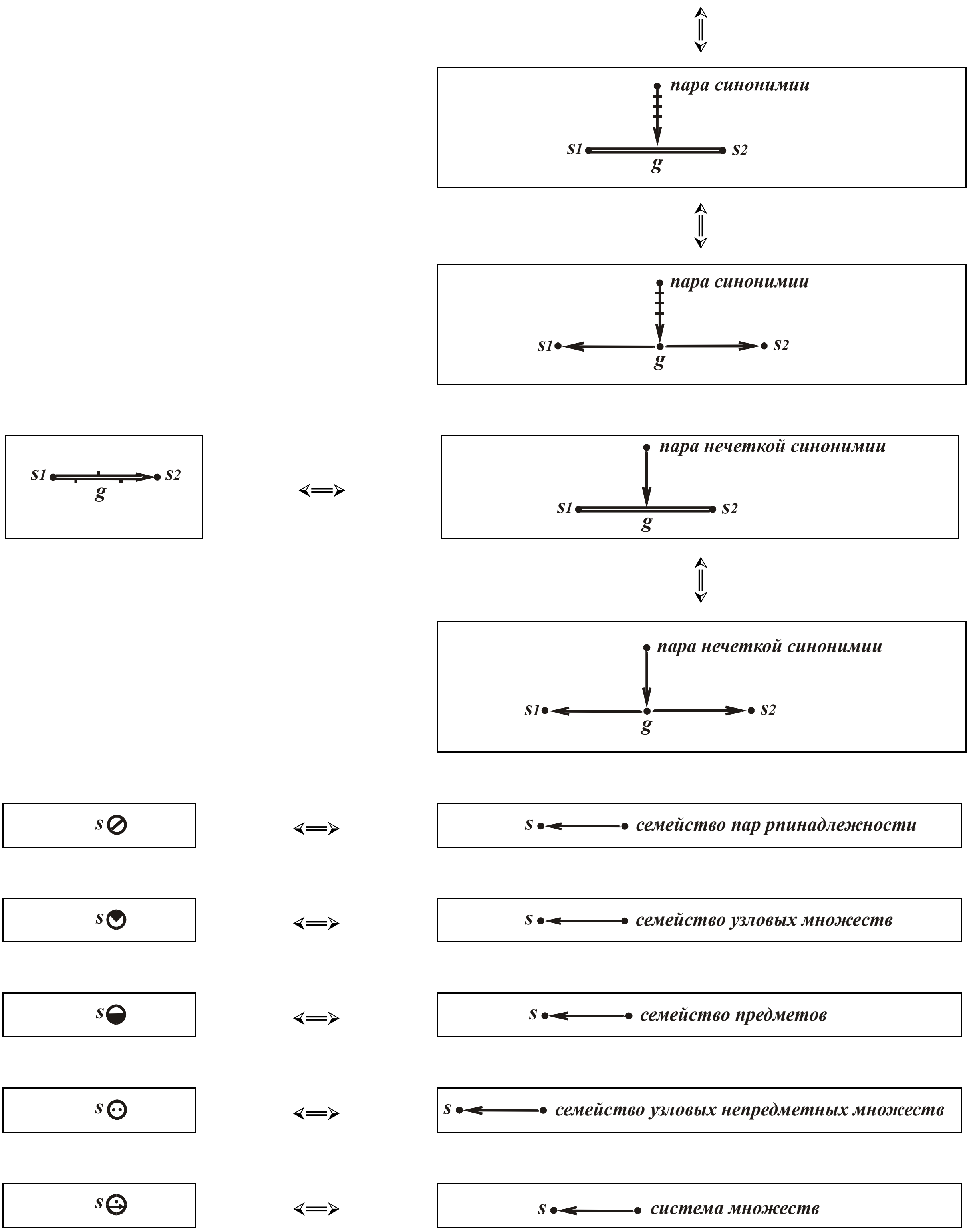
Теперь приведем правила приведения различных типов SCB-элементов к знакам множеств неуточняемого типа и к знакам пар принадлежности.

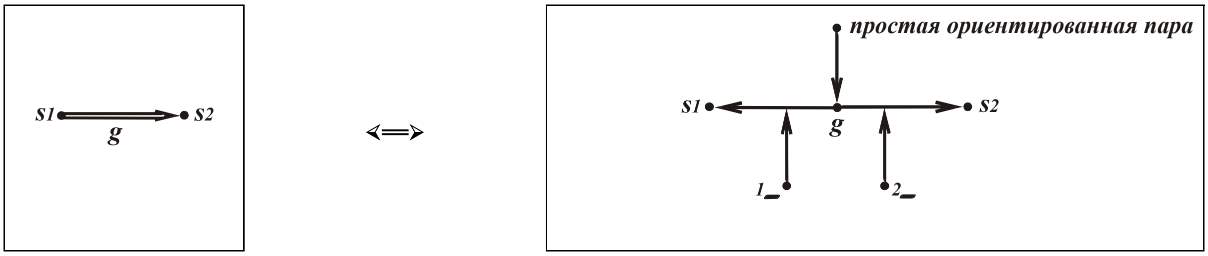


Продолжение **р и с у н к а**



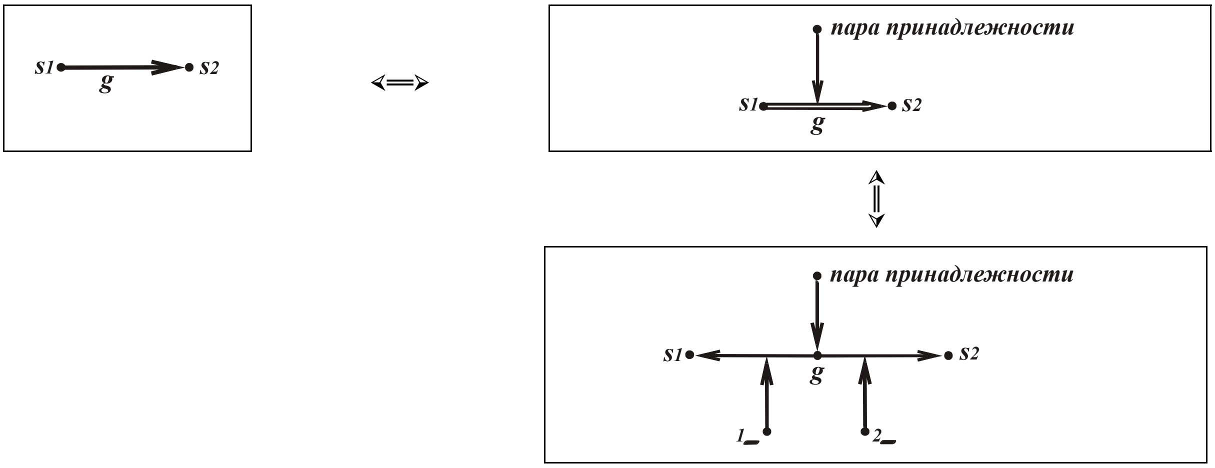
Продолжение **р и с у н к а**





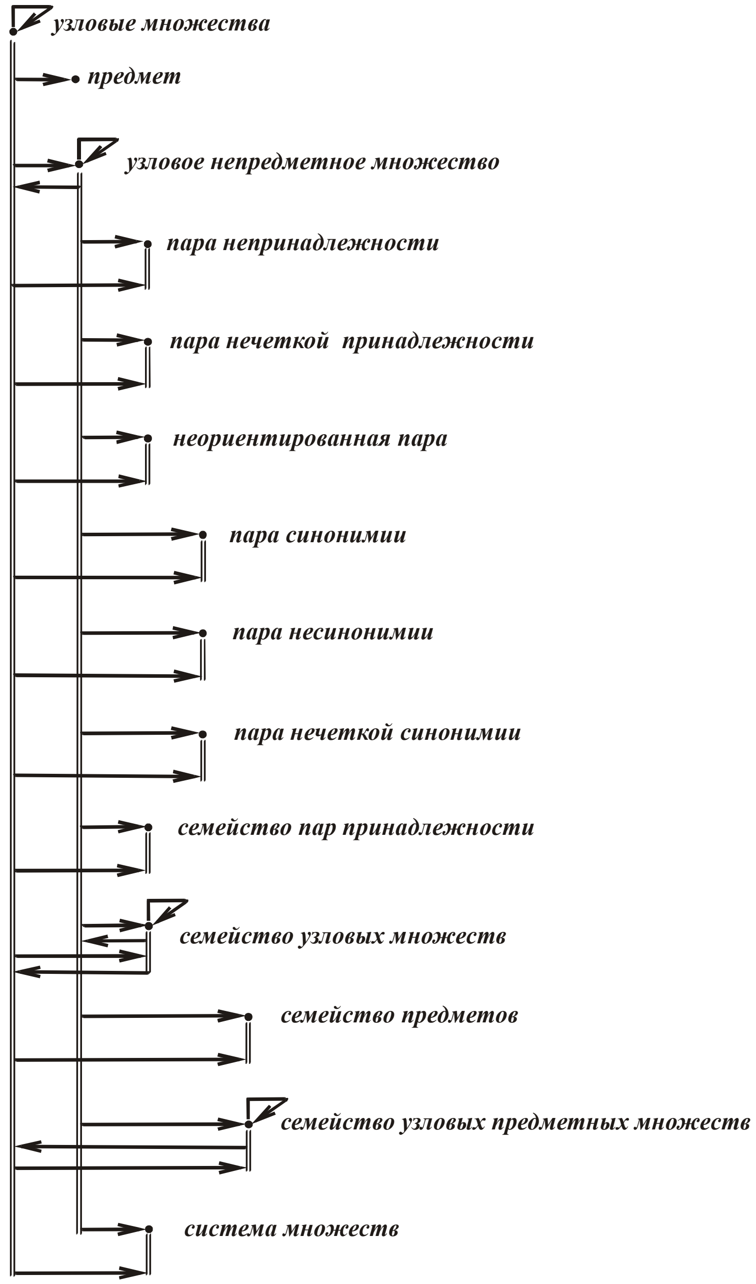
Здесь SCB-элемент с идентификатором “ 1_ ” является знаком множества <u>всевозможных</u> знаков пар принадлежности, связывающих знаки ориентированных (упорядоченных) множеств с первыми элементами этих множеств. Аналогично этому SCB-элемент с идентификатором “ 2_ ” задает вторые элементы ориентированных множеств. Подробнее об этом в подразделе 1.4.

Теперь также приведем несколько правил эквивалентных преобразований изображений пар принадлежности в языке SCBg.



Т.е. здесь осуществляется тривиальное сведение пар принадлежности к парам принадлежности с более "узкой" семантикой.

Заметим также, что введенные нами ключевые SCB-элементы связаны между собой целым рядом пар принадлежности. Перечислим их:



Примечание. Пары принадлежности не следует путать с парами отношения теоретико-множественного включения (см. п. 1.5.11)

1.5. Ядро символьного языка SCBs (Semantic Code Basic symbolic)

Рассмотрим изображение тройки принадлежности в символьной модификации языка SCB, т.е. в языке SCBs (Semantic Code Basic symbolic).

Перечислим несколько <u>эквивалентных</u> (**!**) вариантов такого изображения.

Вариант 1	$\boldsymbol{v \succ- g;\ g \succ- e;}$
Вариант 2	$\boldsymbol{g -\prec v;\ g \succ- e;}$
Вариант 3	$\boldsymbol{v \succ- g;\ e -\prec g;}$
Вариант 4	$\boldsymbol{g -\prec v;\ e -\prec g;}$
Вариант 5	$\boldsymbol{g \succ- e;\ v \succ- g;}$
Вариант 6	$\boldsymbol{e -\prec g;\ v \succ- g;}$
Вариант 7	$\boldsymbol{g \succ- e;\ g -\prec v;}$
Вариант 8	$\boldsymbol{e -\prec g;\ g -\prec v;}$

Здесь разделитель “ $\succ-$ ” и разделитель “ $-\prec$ ” будем называть **связками инцидентности**, а разделитель “ **;** ” будем называть разделителем SCBs-предложений. Первым и последним символом каждого разделителя и ограничителя языка SCBs являются <u>пробелы</u>. При этом допускается произвольное количество пробелов до и после разделителя или ограничителя языка SCBs.

Символами $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{e}$ здесь изображены идентификаторы соответствующих SCB-элементов, т. е. символьные варианты изображения (в виде строк символов) тех знаков множеств, которые эквивалентны (синонимичны) соответствующим SCB-элементам. Эквивалентные (синонимичные) знаки – это знаки, обозначающие одно и то же. Для языка SCB и его модификаций – это знаки, обозначающие одно и то же множество, т. к. в указанных языках нет ничего, кроме множеств и их знаков. Кроме того, указанные три идентификатора $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{e}$ соответствуют SCB-элементам разного типа. Идентификатор $\boldsymbol{v}$ соответствует непредметному узлу (знаку узлового непредметного множества). Идентификатор $\boldsymbol{g}$ соответствует дуге принадлежности (знаку пары принадлежности). Идентификатор $\boldsymbol{e}$ соответствует SCB-элементу, тип которого может быть любым.

SCBs-конструкцию вида $\boldsymbol{ei \succ- ej}$ будем называть элементарной SCBs-конструкцией 1-го вида.

SCBs-конструкцию вида $\boldsymbol{ej -\prec ei}$ будем называть элементарной SCBs-конструкцией 2-го вида.

Элементарные SCBs-конструкции могут быть элементарными SCBs-предложениями, соответственно 1-го и 2-го вида. Справедливо следующее эквивалентное преобразование элементарных

SCBs-предложений 1-го вида в элементарные SCBs-предложения 2-го вида и наоборот

$$\boxed{\boldsymbol{ei \succ- ej}} \qquad \prec\!\!=\!\!=\!\!\succ \qquad \boxed{\boldsymbol{ej -\prec ei}}$$

Кроме того, <u>эквивалентным преобразованиям</u> SCBs-текста является <u>любая перестановка предложений</u>. Результатом указанных эквивалентных преобразований SCBs-текстов и являются перечисленные выше восемь вариантов изображения троек принадлежности.

Элементарные SCBs-конструкции описывают инцидентность (соседство) SCB-элементов. Соответственно этому, SCBs-конструкция $\boldsymbol{ei \succ- ej}$ или эквивалентная ей конструкция $\boldsymbol{ej -\prec ei}$ трактуется следующим образом:

- SCB-элемент $\boldsymbol{ei}$ инцидентен слева SCB-элементу $\boldsymbol{ej}$;
- SCB-элемент $\boldsymbol{ej}$ инцидентен справа SCB-элементу $\boldsymbol{ei}$.

По аналогии с рассмотрением ядра языка SCBg рассмотрим то, как выглядят основные свойства языка SCB в рамках языка SCBs, являющегося подъязыком по отношению к SCB.

Свойство 1. Дуга принадлежности не может выходить из дуги принадлежности и, в частности, не может выходить из самой себя. Т. е., если gi и gj являются идентификаторами дуг принадлежности, то SCBs эквивалентные конструкции вида

$\boxed{gi \succ\!- gj}$ или эквивалентная ей конструкция вида $\boxed{gj -\!\prec gi}$

означают не то, что дуга принадлежности gj выходит из дуги принадлежности gi, а то, что дуга принадлежности gi входит в дугу принадлежности gj (первая из указанных трактовок считается некорректной).

Следствие свойств 1. 5. 7. SCB элемент любого типа не может быть инцидентен сам себе. Т.е. некорректными считаются следующие SCBs-конструкции:

$\boxed{e \succ\!- e}$ $\boxed{e -\!\prec e}$

Свойство 13. <u>Если</u> g есть идентификатор некоторой дуги принадлежности, <u>то</u> существует только один SCB-элемент v, для которого справедлива SCBs-конструкция вида:

$\boxed{v \succ\!- g}$ или эквивалентная ей конструкция вида $\boxed{g -\!\prec v}$

а также существует только один SCB-элемент e, для которого справедлива SCBs-конструкция вида:

$\boxed{g \succ\!- e}$ или эквивалентная ей конструкция вида $\boxed{e -\!\prec g}$

Свойство 14. SCB-узлы не могут быть инцидентны друг другу (!) SCB-элемент не может быть инцидентен самому себе, т. е. некорректно

$\boxed{ei \succ\!- ej}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{ej -\!\prec ei}$

Каждому SCB-узлу можно поставить в соответствие <u>содержимое</u> этого узла. Содержимым узла может быть любая информационная конструкция, (в частности любой файл) обозначаемый этим узлом.

Если узел является знаком представления некоторого числа в некоторой системе счисления, то, очевидно, что содержимым этого узла соответственно считать представление указанного числа в указанной системе счисления.

Если узел является знаком некоторого текста, то, очевидно, что содержимым этого узла естественно считать сам указанный текст.

В языке SCBs приписывание узлу соответствующего содержимого выглядит следующим образом:

v = /" t "/; где

v – идентификатор некоторого узла;

t – непосредственно сам символьный текст (цепочка символов), который является содержимым узла v;

Косая черта с кавычкой используется как ограничитель (ограничитель текста, являющегося содержимым).

Еще один вариант:

v=/" t "/;

v = t

Здесь информационная конструкция ***t*** может быть не только символьным текстом, но также рисунком, фотографией и т. д.

Комментарий в текст языка SCBs можно вставлять в любом месте, ограничивая его левый ограничитель “ /* ” и правый ограничитель “ */ ”.

1.6. Правила формирования идентификаторов SCB-элементов

SCB-идентификатор (идентификатор SCB-элемента) – это класс одинаковых строк символов, каждая из которых является элементарным семантически значимым фрагментом SCB-текста. В указанный класс строк символов входят всевозможные **(!)** строки символов, совпадающие с некоторой условно заданной строкой. С семантической точки зрения каждый SCB-идентификатор есть символьное изображение соответствующего (идентифицируемого) SCB-элемента, т. е. символьное изображение знака того множества, которое обозначается указанным SCB-элементом. Таким образом, идентификатор SCB-элемента есть не что иное, как имя множества, обозначаемого этим SCB-элементом.

Идентификаторы SCB-элементов формируются по следующим принципам:

- каждому SCB-элементу ставится в соответствие не более одного идентификатора (идентифицироваться могут как знаки узловых множеств, так и знаки пар принадлежности);
- у некоторых SCB-элементов идентификаторы могут отсутствовать;
- каждому идентификатору соответствует один и только один идентифицируемый им SCB-элемент.

Следует четко отличать сам идентификатор как класс одинаковых строк символов от вхождения этого идентификатора в соответствующие фрагменты текста. Один и тот же идентификатор может входить в состав текста несколько раз.

В языке SCBs запрещена **(!)** омонимия идентификаторов, т. е. разные вхождения одного и того же идентификатора не могут (например, в зависимости от контекста) быть семантическим эквивалентом разных SCB-элементов. Поэтому при вводе в базу знаний некоторого SCBs-текста автор этого текста должен:

- гарантировать отсутствие омонимии в рамках построенного им SCBs-текста;
- убедится в том, что каждый идентификатор, используемый как имеющийся в базе знаний, так и во вводимом SCBs-тексте, имеет одинаковую семантическую трактовку, соответственно и в имеющейся базе знаний и во вводимом SCBs-тексте.

Каждый SCBs-текст, автор которого гарантирует отсутствие омонимии (в рамках этого текста), имеет специальный признак начала (каковым является ограничитель “ ***Begin*** ”) и специальный признак конца (каковым является ограничитель “ ***End;*** ”). Кроме того, в таком тексте (после “ ***Begin*** ”) указывается ФИО автора, дата создания SCBs-текста и точка с запятой.

Синонимия идентификаторов в языке SCBs разрешена. Но синонимия идентификаторов должна быть явно указана с помощью предложений вида:

$$ei = ej;$$

Это предложение означает, что идентификатор ***ei*** синонимичен (семантически эквивалентен) идентификатору ***ej***. Другими словами, оба эти идентификатора изображают один и тот же SCB-элемент. Указанное предложение (со знаком равенства) можно так же трактовать как указание на "склеивание" SCB-элемента с идентификатором ***ei*** и SCB-элемента с идентификатором ***ej***.

Если в SCBs-тексте необходимо подчеркнуть отсутствие синонимии похожих идентификаторов (например, ***ei*** и ***ej***), используются предложения с разделителем “ **–** ”, имеющие вид:

$$ei - ej;$$

SCB-идентификаторы можно классифицировать по целому ряду признаков.

- откуда заимствован идентификатор:
  - русскоязычные идентификаторы,
  - англоязычные идентификаторы,
  - условные обозначения;
- наличие сокращений:
  - аббревиатурные идентификаторы (всевозможные сокращения),
  - неаббревиатурные идентификаторы;

* семантика идентификатора:
  * имена собственные,
  * имена нарицательные;
* наличие вхождений других идентификаторов:
  * простые идентификаторы (атомарные),
  * сложные идентификаторы (составные, производные, неатомарные) – это SCB-идентификаторы, в состав которых входят SCB-идентификаторы, соответствующие другим SCB-элементам.

Итак, SCB-идентификатор – это строковое (!) изображение знака некоторого множества, т.е. изображение знака в виде строки (последовательности) символов, принадлежащих тому или иному алфавиту. Идентификаторы называют также именами, термами, символьными обозначениями.

Простой SCB-идентификатор – это некоторое словосочетание, в состав которого не входят разделители и ограничители языка SCBs. Заметим, что пробелы и символы подчеркивания не являются разделителями языка SCBs.

Примечание. Некоторые разделители и ограничители языка SCBs состоят из нескольких символов. Некоторые специальные символы, используемые в таких разделителях и ограничителях, могут использоваться и в простых идентификаторах. Например, дефис.

Суть сложного идентификатора (неатомарного, составного, производного идентификатора) – это описание того, как идентифицированный SCB-элемент связан с другими уже идентифицированными (!) SCB-элементами. При этом указанные идентифицированные элементы могут иметь как простые, так и сложные (!) идентификаторы. Сложный идентификатор иногда называют выражением (арифметическим выражением, теоретико-множественным выражением), сложным (неатомарным, составным, производным) именем, сложным (неатомарным, составным, производным) термом. Элементарными составляющими сложных идентификаторов являются:

* простые идентификаторы,
* имена функций (эти имена, строго говоря, идентификаторами не считаются),
* обозначения 2-мощных операций,
* разделители, используемые при формировании сложных идентификаторов,
* ограничители, используемые при формировании сложных идентификаторов.

Ниже при рассмотрении проблемы сокращения словаря (набора) используемых простых идентификаторов (см. пункт 1.7), а также при рассмотрении теоретико-множественных соотношений (см. подраздел 2 и пункт 2.3.11) и числовых соотношений (см. пункт 2.3.14) мы введем некоторые конкретные правила построения сложных идентификаторов.

Перечислим некоторые "стилистические правила" построения простых идентификаторов SCB-элементов.

Правило 1. Простые идентификаторы должны строиться на основе русскоязычного или англоязычного словаря так, что бы те, кто знает русский или английский язык, могли достаточно легко понять смысл идентификаторов, т. е. могли достаточно легко "прочитать" SCBs-текст.

Правило 2. Простые SCB-идентификаторы, являющиеся именами нарицательными, пишутся с маленькой буквы, а SCB-идентификаторы, являющиеся именами собственными, пишутся с большой буквы.

Имя нарицательное — это "апелляция" к свойству всех элементов именуемого (обозначаемого) множества и только их, т. е. к свойству всех тех и только тех объектов, которые являются элементами именуемого множества. Имя собственное — это апелляция к свойству (смыслу) самого именуемого (обозначаемого) множества как единого целого или к смыслу знака этого множества.

Правило 3. Если строка ⋖ *имя нарицательное* ⋗ есть простой SCBs-идентификатор, построенный как имя нарицательное и начинающийся словом “ ***знак*** ” или словами “ ***быть знаком*** ”, то этот идентификатор семантически эквивалентен (синонимичен) идентификатору, построенному как имя собственное по следующей "схеме":

Знак множества всех тех /*всевозможных*/ ***и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторый*** /*некоторую, некоторое*/ ***< имя нарицательное >*** /*в соответствующем падеже*/

Примеры к правилу 3. Приведём в качестве примеров имена нарицательные и имена собственные, которые являются идентификаторами узлов, задающих те типы SCB-элементов, каждому из которых соответствует свой графический примитив в языке SCBg (см. табл.1.6.1.).

Таблица 1.6.1.

	***пара принадлежности*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару принадлежности***;
	***узловое множество*** = ***множество, не являющееся парой принадлежности*** /* Запятая не может входить в идентификатор */ = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторое узловое множество*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторое множество, не являющееся парой принадлежности***
	***предмет*** = ***одно-мощное ненормализованное множество*** = ***Предметное множество*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторое предметное множество***;
	***узловое непредметное множество*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторое множество, не являющееся парой принадлежности узловое непредметное множество***;
	***пара непринадлежности*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару непринадлежности***;
	***пара нечеткой принадлежности*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару нечеткой принадлежности***;
	неориентированная пара = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую неориентированную пару***;
	***пара синонимии*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару синонимии***;
	***пара несинонимии*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару несинонимии***;

Продолжение **таблицы**

	пара нечеткой синонимии = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару нечеткой синонимии***;
	семейство пар принадлежности = ***множество <u>знаков</u> пар принадлежности*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторое множество знаков пар принадлежности***;
	семейство узловых множеств = ***множество знаков узловых множеств*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторое множество знаков узловых множеств***;
	семейство предметов = ***множество знаков предметных множеств*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторое множество знаков предметных множеств***;
	семейство узловых непредметных множеств = ***множество знаков узловых непредметных множеств*** = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторое множество знаков непредметных множеств***;
	система множеств = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторое множество знаков системы множеств***;
	простая ориентированная пара = ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую простую ориентированную пару***;

Правило 4. <u>Если</u> строка < *имя нарицательное* > есть простой SCB-идентификатор, который построен как имя нарицательное и начинается словами "***быть знаком***" или словом "***знак***", либо включает слово "***знак***" как главное определяемое слово, <u>то</u> этот идентификатор семантически эквивалентен (синонимичен) идентификатору, построенному как имя собственное по следующей "схеме":

Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых <u>является</u> < *имя нарицательное* > /* в соответствующем падеже */

Примеры к правилу 4.

знак пары принадлежности **= *Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых <u>является</u> знаком пары принадлежности*;**
знак предметного множества **= *предметный знак*** **= *Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых <u>является</u> предметным знаком*;**

Правило 5. Поскольку SCB-элементы являются знаками и, поскольку язык SCB оперирует множествами, состоящими только из знаков множеств (за исключением предметных множеств), слово "***знак***" в простых идентификаторах SCB-элементов можно опускать.

Примеры к правилу 5.

<u>знак</u> пары принадлежности **= *пара принадлежности*;**
= *<u>Знак</u> множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару принадлежности* **= *Множество всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару принадлежности*;**

Правило 6. Правило замены в простых идентификаторах словосочетания "***всех тех и только тех знаков*** (***объектов***), ***каждый из которых обозначает*** (***является***) ***некоторым*** (***некоторой***)" на слово "***всевозможных***".

Пример к правилу 6.

Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару принадлежности **= *Знак множества <u>всевозможных</u> знаков пар принадлежности*;**

Правило 7. Правило преобразования в простых идентификаторах словосочетания "***множество всевозможных***" во множественное число.

Пример к правилу 7.

множество всевозможных пар принадлежности **= *пары принадлежности*;**

Правило 8. Правило исключения слова "***некоторых***" после слова "***множество***". Т. е. после слова "***множество***" <u>по умолчанию</u> (**!**) подразумевается слово "***некоторых***", а не слово "***всевозможных***".

Пример к правилу 8.

множество знаков пар принадлежности **= *множество знаков <u>некоторых</u> пар принадлежности*** **– *множество знаков <u>всевозможных</u> пар принадлежности***

Правило 9. Правило исключения слова “*быть*“ из имени нарицательного.

Примеры к правилу 9.

быть парой принадлежности **=** ***пара принадлежности***;
быть знаком пары принадлежности **=** ***знак пары принадлежности***;

Проиллюстрируем перечисленные правила формирования простых SCB-идентификаторов в языке SCBs на примере множества идентификаторов, синонимичных идентификатору “***пара принадлежности***“:

пара принадлежности

= ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару принадлежности***
/* результат преобразования имени нарицательного в эквивалентное имя собственное */

= ***Знак множества всевозможных знаков пар принадлежности***
/* результат замены словосочетания **“ *всех тех и только тех* . . . , *которые*** ” */

= ***Множество всевозможных знаков пар принадлежности***
/* результат исключения слова **“ *знак*** ” */

= ***Множество всевозможных пар принадлежности***
/* результат исключения слова “ ***знак*** ” */

= ***Пары принадлежности***
/* результат преобразования слова “ ***множество*** ” во множественное число */

= ***быть парой принадлежности***

= ***быть знаком пары принадлежности***

= ***знак пары принадлежности***

= ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых является знаком некоторой пары принадлежности***

Примечание. Замена имени нарицательного на имя собственное меняет семантику идентификатора.

Пример замены имени нарицательного на имя собственное.

Пара принадлежности – пара принадлежности;

Здесь имя собственное **“*Пара принадлежности*”** обозначает какую-то одну конкретную пару принадлежности в отличии от имени нарицательного **“*пара принадлежности*”.**

Если необходимо таким путем идентифицировать несколько конкретных пар принадлежности, то для каждой такой пары в идентификатор необходимо вводить дополнительный индивидуальный признак, например:

Пара принадлежности 1
Пара принадлежности 2
и т. д.

П р и м е р замены имени собственного на имя нарицательное.

Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару принадлежности – ***Знак множества всех тех и только тех знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару принадлежности***;

Здесь второй идентификатор (имя нарицательное) является знаком множества, состоящее <u>из одного</u> **(!)** элемента, каковым является знак, изображаемый первым идентификатором. Дело в том, что здесь в имени нарицательном явно указывается такое свойство, каким обладает только один объект.

Примечание. Замена в идентификаторе словосочетаний "<u>всех тех и только тех</u>" на слово "<u>некоторых</u>" меняет семантику идентификатора.

П р и м е р :

Знак множества <u>всех тех и только тех</u> знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару принадлежности /* имя нарицательное */ – ***Знак множества <u>некоторых</u>***, /* т.е. не всех */ ***знаков, каждый из которых обозначает некоторую пару принадлежности***;

Здесь множество, обозначаемое вторым идентификатором, содержит больше одного элемента в отличие от множества, обозначаемого первым идентификатором.

Примечание. Следует также помнить о том, что добавление к имени нарицательному слова "множество" меняет смысл идентификатора.

П р и м е р :

Множество всевозможных пар принадлежности = ***пара принадлежности*** – ***множество пар принадлежности***;
Множество всевозможных треугольников = ***треугольник*** – ***множество треугольников***;

Приведем для некоторых ранее введённых идентификаторов синонимичные им англоязычные и аббревиатурные идентификаторы:

Т а б л и ц а 1.6.2. Англоязычные и аббревиатурные SCB-идентификаторы основных понятий языка SCB

Русскоязычный идентификатор		Англоязычный идентификатор		Аббревиатурный идентификатор
пара принадлежности	=	***arc***;		
узловое множество	=	***node***;		
предметное множество	=	***object***	=	***obj***;
узловое непредметное множество	=	***set***;		

Продолжение **т а б л и ц ы 1 . 6 . 2 .**	
множество знаков пар принадлежности	***= setArc;***
множество знаков узловых множеств	***= setNode;***
множество знаков предметных множеств	***= setObj;***
множество знаков узловых непредметных множеств	***= setSet;***
система множеств	***= Str;***
сложноструктурированная система множеств	***= strStr;***

При формировании идентификатора SCB-элемента может быть условным образом указан тип соответствующего SCB-элемента. Приведем некоторые правила построения условных обозначений, используемых в качестве простых SCB-идентификаторов.

Т а б л и ц а 1 . 6 . 3 . Условные обозначения, используемые в качестве SCB-идентификаторов

Идентификатор SCB-узла, обозначающего множество SCB-элементов соответствующего типа		"Шаблон" условного обозначения для SCB-элемента указанного типа
Неуточняемый SCB-элемент	–≻	***e-*** ≺ *строка* ≻; /* без пробелов */
arc	–≻	***g-*** ≺ *строка* ≻;
node	–≻	***v-*** ≺ *строка* ≻;
obj	–≻	***o-*** ≺ *строка* ≻;
set	–≻	***s-*** ≺ *строка* ≻;
setArc	–≻	***sg-*** ≺ *строка* ≻;
setNode	–≻	***sv-*** ≺ *строка* ≻;
setObj	–≻	***so-*** ≺ *строка* ≻;
setSet	–≻	***ss-*** ≺ *строка* ≻;
str	–≻	***c-*** ≺ *строка* ≻;
strStr	–≻	***cc-*** ≺ *строка* ≻;

1.7. Правила приведения SCBs-текста к более лаконичному виду

Как уже было отмечено, текст языка SCBs есть последовательность предложений, которая изображает некоторое множество троек принадлежности.

Очевидно, что с помощью рассмотренных выше SCBs-конструкций 1-го и 2-го вида можно изобразить (представить) любое множество троек принадлежности, имеющих любую конфигурацию связи между собой (эти конфигурации, в частности, задаются тем, какие элементы изображаемых троек принадлежности совпадают между собой). Тем не менее, для обеспечения более лаконичного изображения множества троек принадлежности, кроме указанных выше типов конструкций, введем еще несколько видов, каждому из которых можно поставить в соответствие некоторое правило лаконизации (правило сокращения). Каждое из таких правил приводит либо к сокращению числа <u>вхождений</u> идентификаторов в состав текста, либо вообще к сокращению общего числа вводимых идентификаторов.

П р а в и л о 1 . Правило изображения неидентифицируемой (неименуемой) SCB-дуги.

В языке SCBs совсем не обязательно вводить идентификатор каждой SCB-дуги. В частности, в этом нет никакой необходимости, если в SCB-дугу не входит другая SCB-дуга. В таком случае тройка принадлежности будет выглядеть следующим образом (покажем два эквивалентных варианта)

$v \succ - g$;	$g \succ - e$;
$g - \prec v$;	$g \succ - e$;
$v \succ - g$;	$e - \prec g$;
$g - \prec v$;	$e - \prec g$;
$g \succ - e$;	$v \succ - g$;
$e - \prec g$;	$v \succ - g$;
$g \succ - e$;	$g - \prec v$;
$e - \prec g$;	$g - \prec v$;

$\Longleftrightarrow$

$v - \succ e$;	Вариант 1
$e \prec - v$;	Вариант 2

Здесь разделитель “ $- \succ$ ” и разделитель “ $\prec -$ ” будем называть **связками принадлежности.** Их следует отличать от **связок инцидентности** (“ $\succ -$ ” и “ $- \prec$ ”).

Первую из перечисленных SCBs-конструкций будем называть элементарной SCBs-конструкцией 3-го вида, а вторую – элементарной SCBs-конструкцией 4-го вида.

Справедливо следующее эквивалентное преобразование

$v - \succ e$;	$\Longleftrightarrow$	$e \prec - v$;

Приведём семантическую трактовку указанных элементарных SCBs-конструкций 3-го и 4-го вида:

- SCB-элемент ***e*** принадлежит множеству ***v***, т.е. множеству, обозначаемому SCB-элементом ***v***, каковым согласно свойствам языка SCB может быть только непредметный SCB-узел;
- SCB-элементы ***v*** и ***e*** связаны парой принадлежности, выходящей из SCB-элемента ***v*** и входящей в SCB-элемент ***e***;
- SCB-элементы ***v*** и ***e*** связаны SCB-дугой, выходящей из SCB-элемента ***v*** и входящей в SCB-элемент ***e***.

П р а в и л о 2 . Правило сокращения числа вхождений идентификаторов.

Если какое-либо SCBs-предложение завершается некоторой связкой и некоторым идентификатором, с которого начинается какое-либо другое предложение, то эти предложения можно соединить в одно, "склеивая" указанные вхождения указанного идентификатора.

П р и м е р ы к п р а в и л у 2 .

$v \succ- g \;;\; g \succ- e \;;$	$\Leftrightarrow$	$v \succ- g \succ- e \;;$
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
$e -\prec g \;;\; g -\prec v \;;$	$\Leftrightarrow$	$e -\prec g -\prec v \;;$

$vi -\succ vj \;;\; vj -\succ e;$	$\Leftrightarrow$	
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$
$e \prec- vj \;;\; vj \prec- vi \;;$	$\Leftrightarrow$	$e \prec- vj \prec- vi \;;$

$ei = ej \,;\, ej = ek \;;$	$\Leftrightarrow$	$ei = ej = ek \;;$

$vi -\succ e;\; e \prec- vk \;;$	$\Leftrightarrow$	$vi -\succ e \prec- vk \;;$

П р а в и л о 3 . Правило сокращения числа вхождений идентификаторов.

Если в нескольких элементарных SCBs-предложениях одного вида совпадают первые или вторые идентификаторы, то их вхождения можно склеить.

П р и м е р к п р а в и л у 3 .

$v -\succ e_1;\; v -\succ e_2; \ldots;\; v -\succ en;$	$\Leftrightarrow$	$v -\succ e_1,\; e_2, \ldots,\; en;$

П р а в и л о 4 . Кроме сокращения числа вхождений, используемых в тексте идентификаторов, целесообразно также сокращать и само количество используемых простых идентификаторов. Далеко не для каждого SCB-элемента изображаемой SCB-конструкции целесообразно вводить уникальный (простой) идентификатор. Простые идентификаторы целесообразно вводить для SCB-узлов, которые соответствуют тем или иным понятиям (такие SCB-узлы мы будем называть ключевыми), но для остальных SCB-элементов целесообразно вводить не простые, а сложные идентификаторы. Каждый сложный идентификатор состоит из нескольких идентификаторов, каковыми могут быть как простые, так и сложные. Сложные идентификаторы строятся по принципу определения обозначаемого множества. Перечислим некоторые типы сложных идентификаторов.

$(v -\succ e)$	– это обозначение SCB-дуги, которая проведена из SCB-узла с именем v в SCB-элемент с именем e.
$\{\, e_1,\, e_2,\, \ldots en \}$	– это обозначение SCB-узла, являющегося знаком множества, в состав которого в качестве элементов входят все те, и только те знаки, которые изображаются SCB-элементами с именами e_1, e_2, … en.

[…]	– это обозначение SCB-узла, являющегося знаком системы множеств, которая представлена в виде SCBs-текста, ограниченного указанными квадратными скобками.
‹ … ›	– обозначается SCB-узел, являющийся знаком кортежа

П р а в и л о 5 .

Кроме SCB-идентификаторов, которые взаимно однозначно соответствуют идентифицируемым SCB-элементам, в языке SCBs используются строки символов, которые взаимно однозначно соответствуют некоторым типам пар и являются способом изображения знаков пар того или иного типа. Очевидно, что такое символьное изображение знаков пар является омонимичным, поскольку разные вхождения одинаковых строк символов такого вида в SCB-текст являются изображениями знаков в общем случае <u>разных</u> (!) пар. Перечислим используемые в языке SCBs такого рода способы изображения знаков пар.

Т а б л и ц а 1 . 7 . 1 .

изображение знака простой ориентированной пары	═≻	≺═
изображение знака пары принадлежности	−≻	≺−
изображение знака пары непринадлежности	−≻	≺−
изображение знака пары нечеткой принадлежности	~≻	≺~
изображение знака пары включения множества	⊃	⊂
изображение знака пары невключения множества	–	⊄
изображение знака неориентированной пары	=	
изображение знака пары синонимии	≠	
изображение знака пары несинонимии	–	
изображение знака пары нечеткой синонимии	~=	
изображение знака пары равенства множеств	–	
изображение знака пары неравенства множеств	–	
изображение знака пары эквивалентности множеств по набору элементов	–	
изображение знака пары неэквивалентности множеств по набору элементов	–	
изображение знака пары пересекающихся множеств	–	
изображение знака пары непересекающихся множеств	–	

2. Представление основных математических структур на языке SCB

2.1. Типология множеств и их представления на языке SCB

Как было отмечено в подразделе, язык SCB обеспечивает представление (изображение, запись, задание) только нормализованных множеств, т.е. множеств, элементами которых являются знаки множеств. Но это, как тоже было отмечено, не снижает семантической мощности языка SCB, т.к. любое множество легко преобразуемо к нормализованному виду.

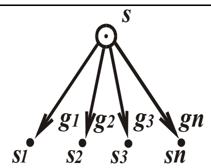
Пусть имеется некоторое множество s, состоящее из элементов s_1, s_2, $\ldots s_n$ s_1.

Следует отличать само множество s от знака этого множества, который является условно формируемым представителем обозначаемого им множества во всевозможных текстах (см. подраздел 1.1).

Следует также отличать само множество s от системы множеств, которая является представлением множества s и которая является множеством, включающим в себя в качестве элементов:

- все элементы множества s ;
- знак множества s ;
- знаки всех пар принадлежности, связывающих знак множества s с его элементами.

Приведем пример представления (изображения, записи, задания) на языке SCBg узлового непредметного множества, т.е. множества не являющегося парой принадлежности и не являющегося предметным множеством.

<u>**В а р и а н т 1**</u> (с явным изображением дуг, выходящих из узла s):	

Здесь:

- узел с идентификатором s есть знак некоторого нормализованного множества, представлением (изображением) коего является данная SCBg-конструкция.
- SCB-элементы с идентификаторами s_1, s_2, $\ldots s_n$ есть такие знаки множеств, которые являются элементами множества s. Указанные знаки могут быть предметными узлами (т.е. знаками унарных ненормализованных множеств), дугами принадлежности (т.е. знаками пар принадлежности), непредметными узлами (т.е. знаками нормализованных множеств, не являющимися парами принадлежности).

На языке SCBs рассматриваемая SCB-конструкция выглядит следующим образом.

В а р и а н т 1 (именуемые дуги принадлежности):

$$s \succ- g_1 \succ- s_1 \; ; \; s \succ- g_2 \succ- s_2 \; ; \; s \succ- g_3 \succ- s_3 \; ; \; \ldots \; ; \; s \succ- g_n \succ- s_n \; ;$$

В а р и а н т 2 (неименуемые SCB-дуги):

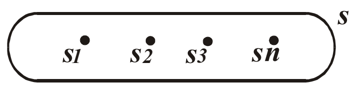
$$s -\!\succ s_1 \; ; \; s -\!\succ s_2 \; ; \; s -\!\succ s_3 \; ; \; \ldots \; ; \; s -\!\succ s_n \; ;$$

В а р и а н т 3

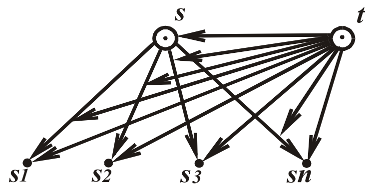
$$s -\!\succ s_1 \, , s_2 \, , s_3 \, , \; \ldots \; , s_n \; ;$$

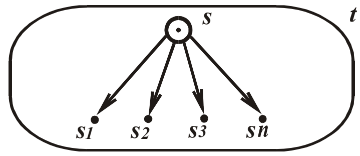
В а р и а н т   4

$s = \{ s_1 , s_2 , s_3 , \dots , sn \} ;$

<u>В а р и а н т 2</u> (с неявным изображением SCB-дуг, выходящих из узла *s*):	

П р и м е р   1 . 3 . 1 . Теперь в качестве примера рассмотрим явное изображение на языке SCBg множества, которое представляет собой систему множеств, которая является представлением множества ***s***. Обозначим эту систему множеств идентификатором ***t.***

В а р и а н т 1	

В а р и а н т 2	

Теперь приведем несколько вариантов изображения рассматриваемой SCB-конструкции на языке SCBs.

В а р и а н т   1

$s \succ- g_1 \succ- s_1 ;\ s \succ- g_2 \succ- s_2 ;\ s \succ- g_3 \succ- s_3 ;\ \dots ;\ s \succ- gn \succ- sn ;$

$t \succ- gs \succ- ss\ t \succ- gs_1 \succ- s_1 ;\ t \succ- gs_2 \succ- s_2 ;\ t \succ- gs_3 \succ- s_3 ;\ \dots ;\ t \succ- gsn \succ- sn ;$

$t \succ- gg_1 \succ- g_1 ;\ t \succ- gg_2 \succ- g_2 ;\ t \succ- gg_3 \succ- g_3 ;\ \dots ;\ t \succ- ggn \succ- gn ;$

В а р и а н т   2

$s \succ- g_1 \succ- s_1 ;\ s \succ- g_2 \succ- s_2 ;\ s \succ- g_3 \succ- s_3 ;\ \dots ;\ s \succ- gn \succ- sn ;$

$t -\succ s ;\ t -\succ s_1 ;\ t -\succ s_2 ;\ t -\succ s_3 ;\ \dots ;\ t -\succ sn ;$

$t -\succ g_1 ;\ t -\succ g_2 ;\ t -\succ g_3 ;\ \dots ;\ t -\succ gn ;$

В а р и а н т   3

$s \succ- g_1 \succ- s_1 ;\ s \succ- g_2 \succ- s_2 ;\ s \succ- g_3 \succ- s_3 ;\ \dots ;\ s \succ- gn \succ- sn ;$

$t -\succ s, s_1 , s_2 , s_3 , \dots , sn , g_1 , g_2 , g_3 , \dots , gn ;$

В а р и а н т   4

$s \succ- g_1 \succ- s_1 ;\ s \succ- g_2 \succ- s_2 ;\ s \succ- g_3 \succ- s_3 ;\ s \succ- gn \succ- sn ;$

$t = \{ s,\ s_1 ,\ s_2 ,\ s_3 ,\ s_n ,\ g_1 ,\ g_2 ,\ g_3 ,\ \dots\ , g_n \}$;

Вариант 5

$t \ -\succ s,\ s_1 ,\ s_2 ,\ s_3 ,\ \dots,\ s_n ,\ (s \ -\succ s_1),\ (s \ -\succ s_2),\ (s \ -\succ s_3),\ \dots,\ (s \ -\succ s_n)$;

Вариант 6

$t = \{ s,\ s_1 ,\ s_2 ,\ s_3 ,\ \dots,\ s_n ,\ (s \ -\succ s_1),\ (s \ -\succ s_2),\ (s \ -\succ s_3),\ \dots,\ (s \ -\succ s_n) \}$;

Вариант 7

$t = [\ s \ \succ- g_1 \succ- s_1 \ ;\ s \ \succ- g_2 \succ- s_2 \ ;\ s \ \succ- g_3 \succ- s_3 \ ;\ \dots\ ;\ s \ \succ- g_n \succ- s_n \ ]$;

Вариант 8

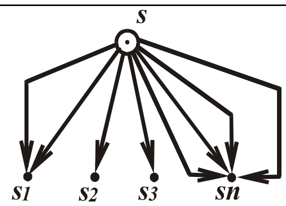
$t = [\ s \ -\succ s_1 \ ;\ s \ -\succ s_2 \ ;\ s \ -\succ s_3 \ ;\ \dots\ ;\ s \ -\succ s_n \ ]$;

Вариант 9

$t = [\ s \ -\succ s_1 ,\ s_2 ,\ s_3 ,\ \dots\ ,\ s_n \ ]$;

Вариант 10

$t = [\ s = \{ s_1 ,\ s_2 ,\ s_3 ,\ \dots\ ,\ s_n \}]$;

Пример 1.3.2. Представление на языке SCBg-множества с кратными элементами (с неоднократным) вхождением некоторых элементов.	

Здесь знак, изображенный SCB-элементом s_1 входит в качестве элемента во множество, знак которого изображен SCB-элементом s как минимум двукратно.

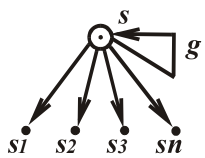
Знак s_2 является как минимум однократным элементом множества s ;

Знак s_3 является как минимум однократным элементом множества s;

Знак s_n является как минимум четырехкратным элементом множества s.

На языке SCBs рассмотренная SCB-конструкция выглядит следующим образом:

$$s \ -\succ s_1 ,\ s_1 ,\ s_2 , s_3 ,\ \dots,\ s_n,\ s_n,\ s_n,\ s_n$$

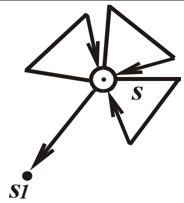
Пример 1.3.3. Представление на SCBg рефлексивного множества:	

Здесь петлевая SCB-дуга g означает, что одним из элементов множества s является знак самого этого множества.

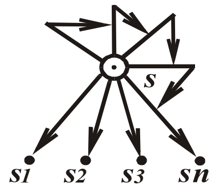
На языке SCBs рассмотренная SCB-конструкция выглядит следующим образом:

$$s \;{-}{>}\; s, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$$

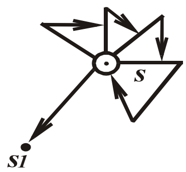
Приведем еще несколько примеров "экзотических" множеств:

П р и м е р 1 . 3 . 4 . Рефлексивное множество с многократным вхождением знака самого себя	

$s \;{-}{>}\; s_1 , s , s , s;$

П р и м е р 1 . 3 . 5 .	

$s \;{-}{>}\; s_1 , s_2 , s_3 , \ldots , s_n , (s \;{-}{>}\; s_n) , (s \;{-}{>}\; (s \;{-}{>}\; s_n)) , (s \;{-}{>}\; (s \;{-}{>}\; (s \;{-}{>}\; s_n))) , (s \;{-}{>}\; (s \;{-}{>}\; (s \;{-}{>}\; (s \;{-}{>}\; s_n))));$

П р и м е р 1. 3. 6.	

$s \;{-}{>}\; s_1 , s , (s \;{-}{>}\; s) , (s \;{-}{>}\; (s \;{-}{>}\; s)) , (s \;{-}{>}\; (s \;{-}{>}\; (s \;{-}{>}\; s)));$

Перейдем к рассмотрению типовых множеств.

По признакам нормализованности множества можно разбить на два следующих класса (см. подраздел 1.1):

- нормализованные множества (множества, все элементы которых являются знаками множеств);
- ненормализованные множества (множества, среди элементов которых имеется хотя бы один, не являющийся знаком какого-либо множества);

Напомним, что в языке SCB явно представить (изобразить) можно только нормализованное множество. При этом вспомним также, что любое ненормализованное множество можно привести к нормализованному виду (см. подраздел 1.1).

По признаку " является или не является множество парой принадлежности " разбиваются на два следующих класса:

- пары принадлежности;
- узловые множества (т.е. множества, не являющиеся парами принадлежности).

В свою очередь, семейства узловых множеств разбивается на следующие классы:

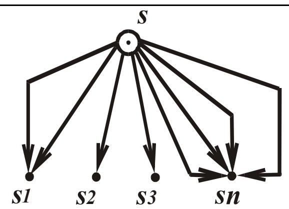
- предметные множества (унарные ненормализованные множества);
- узловые непредметные множества;

В свою очередь семейство узловых непредметных нормализованных множеств разбиваются на:

- множества состоящие из знаков пар принадлежности;
- множества состоящие из знаков узловых множеств;
- полностью нормализованные системы множеств (т.е. множества, состоящие из знаков пар принадлежности и знаков узловых множеств).

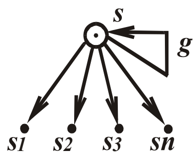
По признаку наличия многократного вхождения элементов множества делятся на:

- множества без кратных элементов (т.е. множества, все элементы которых входят в эти множества однократно – такие множества называются канторовскими (Таран Т.А., 1998 кн. с. 6);
- множества с кратными элементами (т.е. множества, некоторые элементы которых входят в эти множества многократно).

П р и м е р 1 . 3 . 7 . Множество с кратными элементами	

По признаку вхождения в число элементов множества, как самого себя, множества делятся:

- рефлексивные множества (множества, которые включают в число своих элементов собственные знаки);
- нерефлексивные множества.

П р и м е р 1 . 3 . 8 . Представление на SCBg рефлексивного множества	

Важнейшей измеряемой (числовой) характеристикой множества является **мощность множества** – общее количество всех вхождений всех элементов множества. По этому признаку множества делятся на:

- одно-мощные множества (мощность таких множеств равна 1), т.е. множества, которые состоят из одно и однократно входящего в его состав элемента;
- 2-мощные множества (мощность таких множеств равна 2);
- 3-мощные множества и т.д.

Мощность нормализованного множества в языке SCB определяется количеством дуг принадлежности, выходящих из знака этого множества.

Понятие "мощность множества" позволяет выделить еще целый ряд классов множеств. Перечислим идентификаторы, обозначающие эти классы:

- семейство множеств одинаковой мощности (быть семейством множеств одинаковой мощности);
- семейство множеств неодинаковой мощности (в состав каждого такого семейства входит по крайней мере два множества с различной мощностью).

В свою очередь, множество знаков, обозначающих всевозможные семейства множеств одинаковой мощности, разбиваются на следующие подклассы:

- семейство одно-мощных множеств;
- семейство 2-мощных множеств;
- семейство 3-мощных множеств и т.д.

Можно также говорить еще об одной измеряемой характеристике множеств – количестве элементов. Очевидно, что, если множество кратных элементов не имеет, то его мощность и количество его элементов совпадают.

Согласно рассматриваемой характеристике, в семействе всевозможных множеств можно выделить следующие классы множеств:

- 1-элементные множества (множества, состоящие из одного элемента – не путать с унарными множествами);
- 2-элементные множества и т.д.

На основании свойства "мощность множества" и свойства "количество элементов множества" можно выделить также следующие классы множеств:

- конечно-арные множества (множества, мощность которых является конечным числом);
- бесконечно-арные множества (∞ - арные множества);
- конечно-элементные множества;
- бесконечно-элементные множества (∞ - элементные множества).

Очевидно, что:

- могут существовать конечно-элементные, но ∞ - арные множества;
- не существует множеств, которые являются ∞ - элементными, но конечно- арными;
- каждое ∞ - элементное множество является ∞ - арным.

Множество являющееся конечно-арным и, соответственно, конечно-элементным, будем называть **конечным множеством.** Множество являющееся ∞ - арным или ∞ - элементным будем называть **бесконечным множеством.**

Упражнение 1.3.1. Существуют ли конечно-мощные, но ∞ - элементные множества?

Конечные множества, знаки которых входят в состав SCB-текста делятся на два важных класса:

- конечные множества частично представленные **(!)** в текущем состоянии SCB-текста – для каждого такого множества в текущем состоянии SCB-текста присутствуют <u>не все</u> дуги принадлежности, выходящие из знака этого множества и входящие в его элементы;
- конечные множества <u>полностью</u> представленные в <u>текущем</u> состоянии SCB-текста – для каждого такого множества в текущем состоянии SCB-текста присутствуют <u>все</u> дуги принадлежности, выходящие из знака этого множества и входящие в его элементы.

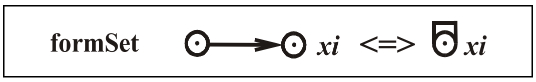
Упражнение 1.3.2. Могут ли бесконечные множества быть полностью представлен ными?

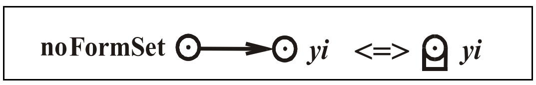
Примечание: В процессе переработки информации состояние SCB-текста может меняться. Изменение состояния SCB-текста сводится к появлению новых SCB-элементов (в частности, новых дуг принадлежности и узлов), а также к удалению (стиранию) имеющихся SCB-элементов. В результате этого некоторые конечные частично представленные множества могут стать полностью представленными (если будут сгенерированы все элементы некоторого множества и все дуги принадлежности выходящие из знака этого множества), а также некоторые полностью представленные множества могут стать частично представленными (если будут удалены некоторые дуги принадлежности, выходящие из знака полностью представленного множества). Все это должно учитываться при преобразовании SCB-текста.

Для явного указания принадлежности множества к классу полностью или частично представленных конечных множеств введем:

- знак множества всех знаков полностью представленных (в текущем состоянии SCB-текста) множеств – припишем ему идентификатор **formSet**;
- знак множества всех знаков частично представленных конечных множеств – припишем ему идентификатор **noFormSet.**

Соответственно этому внесем в графическую модификацию языка SCB два новых примитива:





Рассмотрим на языке SCB систему понятий, определяющую рассмотренную выше типологию множеств.

Пусть даны два множества — множество *s1* и множество *s2*. Рассмотрим то, как могут соотноситься между собой эти множества, и то, как эти отношения записываются в языке SCBs:

Т а б л и ц а 1 . 3 . 1 . Описание соотношений между множествами в языке SCBs

s1 —≻ *s2* *s2* ≺— *s*	знак множества *s2* является одним из элементов множества *s1*.
s1 —≻ *s2* *s2* ≺— *s1*	знак множества *s2* <u>не</u> (!) является одним из элементов множества *s1*.
s2 —≻ *s1* *s1* ≺— *s2*	знак множества *s1* является одним из элементов множества *s2*.
s2 —≻ *s1* *s1* ≺— *s2*	знак множества *s1* <u>не</u> (!) является одним из элементов множества *s2*.
s1 ⊇ *s2* *s2* ⊆ *s1*	множество *s2* является нестрогим подмножеством множества *s1*, т.е. <u>каждый</u> (!) элемент множества *s2* является также элементом множества *s1*. При этом количество вхождений каждого элемента во множество *s2* <u>не</u> (!) превышает количества вхождений <u>этого же</u> элемента во множество *s1*.
s1 ⊉ *s2* *s2* ⊈ *s1*	множество *s2* <u>не</u> (!) является нестрогим подмножеством множества *s1*.
s2 ⊇ *s1* *s1* ⊆ *s2*	множество *s1* является нестрогим подмножеством множества *s2*.
s2 ⊉ *s1* *s1* ⊈ *s2*	множество *s1* <u>не</u> (!) является нестрогим подмножеством множества *s2*.
s1 ⊃ *s2* *s2* ⊂ *s1*	множество *s2* является строгим подмножеством множества *s1*, т.е. каждый элемент множества *s2* является элементом множества *s1*, при этом существует по крайней мере один элемент множества *s1*, не являющийся элементом множества *s2* либо имеющий во множестве *s2* меньшее количество вхождений.
s1 ¯ *s2* *s2* ⊄ *s1*	множество *s1* <u>не</u> (!) является строгим подмножеством множества *s2*.
s2 ⊃ *s1* *s1* ⊂ *s2*	множество *s1* является строгим (собственным) подмножеством множества *s2*.

s2 ‾ *s1* *s1* ⊄ *s2*	множество *s1* <u>не</u> **(!)** является строгим подмножеством множества *s2*.
s1 — *s2* *s2* — *s1*	множество *s1* и множество *s2* равны, т.е. каждый элемент множества *s1* является элементом множества *s2* и наоборот. При этом, если какой-либо элемент в одно из этих множеств входит многократно, то в другое множество он входит столько же раз.
s1 — *s2* *s2* — *s1*	множество *s1* и множество *s2* <u>не</u> **(!)** равны.
s1 ‾ *s2* *s2* ‾ *s1*	множество *s1* и множество *s2* содержат одни и те же элементы, но, возможно, с разной кратностью.
s1 ‾ *s2* *s2* ‾ *s1*	существует по крайней мере один элемент множества *s1*, не являющийся элементом множества *s2*, или наоборот.
s1 — *s2* *s2* — *s1*	множество *s1* и множество *s2* являются пересекающимися множествами, т.е. множествами у которых имеется по крайней мере один общий элемент.
s1 — *s2* *s2* — *s1*	множество *s1* и множество *s2* <u>не</u> **(!)** являются пересекающимися множествами.

Примечание. Следует отличать:

- SCB-элементы, которые являются знаками <u>разных</u> **(!)**, но <u>равных</u> **(!)** множеств (т.е. фактически являются знаками разных объектов);
- <u>синонимичные</u> SCB-элементы, которые являются <u>разными</u> **(!)** знаками, но <u>одного и того же</u> **(!)** множества (т.е. разными знаками одного и того же объекта). См. п. 1.2.3.

Подчеркнем при этом, что введение в формальные тексты равных множеств необходимо проводить н весьма аккуратно – делать это тогда, когда без этого действительно трудно обойтись.

Кроме того, из двух заданных множеств можно формировать новые множества с помощью ряда теоретико-множественных операций. Рассмотрим некоторые из этих операций и приведем используемые в языке SCBs способы идентификации (обозначения) множеств, формируемых с помощью указанных теоретико-множественных операций.

Т а б л и ц а 1.3.2. Сложные идентификаторы SCB-элементов, формируемые с помощью теоретико-множественных операций

(*s1* — *s2*)	Множество, являющееся результатом <u>объединения</u> множеств *s1* и *s2*. В это множество входят все те и только те элементы, которые являются либо элементами множества *s2*, либо элементами множества *s1*. При этом, если некий элемент *x* входит в состав одного из указанных множеств *n* - кратно, а в состав другого *m* - кратно (причем *m* ≥ *n*), то в состав множества (*s1* — *s2*) указанный элемент будет входить *m* - кратно. Кратность, равная нулю означает отсутствие вхождений элемента во множество.
(*s2* — *s1*)	
(*s1* — *s2*)	Множество, являющееся результатом <u>пересечения</u> множеств *s1* и *s2*. В это множество входят все те и только те элементы, которые являются как элементами множества *s1* , так и элементами множества *s2*. При этом, если некий элемент *x* входит в состав одного из указанных множеств *n* - кратно, а в состав другого *m* - кратно (причем *m* ≥ *n*), то в состав множества (*s1* — *s2*) указанный элемент будет входить *n* - кратно.
(*s2* — *s1*)	
(*s1* – *s2*)	Множество, являющееся результатом <u>разности</u> множеств *s1* и *s2*. В это множество входят все те и только те элементы множества *s1*, которые <u>не</u> (!) являются элементами множества *s2*.
(*s1* Δ *s2*)	Множество, являющееся результатом <u>симметрической разности</u> множеств *s1* и *s2*. В это множество входят все те и только те элементы множества (*s1* — *s2*), которые <u>не</u> (!) являются элементами множества (*s1* — *s2*). Очевидно, что сложные имена вида (*s1* Δ *s2*) всегда синонимичные сложным именам вида (*s2* — *s1*) – (*s1* — *s2*).
(*s2* Δ *s1*)	
(*s1* — *s2*)	Множество, являющееся результатом <u>соединения</u> множеств *s1* и *s2*. В это множество входят все те и только те элементы, которые являются либо элементами множества *s1*, либо элементами множества *s2*. При этом, если некий элемент *x* входит в состав одного из указанных множеств *n* - кратно, а в состав другого *m* - кратно, то в состав множества (*s1* — *s2*) указанный элемент будет входить (*n* + *m*) - кратно.
(*s2* — *s1*)	

О п р е д е л е н и е . Будем говорить, что множество *s1* и множество *s2* являются разбиением множества *s* на два подмножества, в том и только том случае, если:

1) *s* = (*s1* — *s2*) /* здесь знак равенства указывает на синонимию имени */;

2) *s1* – *s2*;

О п р е д е л е н и е . Будем говорить, что множество является результатом приведения множества к канторовскому виду, в том и только том случае, если:

1) *s1* ⁻ *s2*;

2) *s2* ≺— ***канторовское множество*** /* множество без кратных элементов */;

Итак, мы введем в язык SCBs:

1) целый ряд новых разделителей (—≻, ≺—, ⊇, ⊆, ⊉, ⊈, ⊃, ⊂, ⁻ , ⊄, –, – , ⁻ , ⁻ , –, –, — , — , \, Δ , —);

2) новые виды SCBs-предложений с разделителями (—≻, ≺—, ⊇, ⊆, ⊉, ⊈, ⊃, ⊂, ⁻ , ⊄, –, – , ⁻ , ⁻ , –, –, —);

3) новые виды сложных (производных) имен, которые по определенным правилам (в частности с помощью разделителей — , —, \ , Δ) конструируются из других имен. В состав сложных имен непосредственно могут входить другие имена. Но любое сложное в конечном счете сводится к простым именам (которые в языке SCBs называются идентификаторами), а также к некоторому набору разделителей и ограничителей (скобок разного вида). О мотивах введения сложных имен в язык SCBs см. в 4-ом правиле лаконичного изображения SCBs-текстов (пункт 1.2.6).

В п. 1.5.11 будет рассмотрено то, как трактуются в графическом языке SCBg введенные нами понятия, отражающие различные соотношения между множествами. В частности, будет рассмотрено то, каким SCBg-конструкциям соответствует рассмотренное выше "теоретико-множественное" расширение языка SCBs.

2.2. Понятие кортежа. Атрибуты элементов кортежа. Представление кортежей на языке SCB. Типология кортежей

2.2.1. Понятие кортежа и атрибута

Определение. **Кортеж** – это множество, у которого каждому вхождению каждого его элемента явно или неявно (по умолчанию) ставится в соответствие некоторый атрибут, указывающий роль этого вхождения элемента в рамках рассматриваемого кортежа. Формально атрибут вхождений элементов в кортежи – это множество знаков пар принадлежности, связывающих знаки кортежей с такими вхождениями их элементов, которые в рамках указанных кортежей выполняют некоторую одинаковую роль. **Кортеж** – это множество, для которого существенным является не только набор вхождений элементов в это множество, но и дополнительное явное указание роли (атрибута) в рамках этого множества хотя бы одного вхождения какого-либо его элемента. Кортежи также называют ролевыми структурами, упорядоченными наборами, упорядоченными множествами, ориентированными множествами, векторами, ***n*** - ками. В частном случае атрибуты могут быть числовыми. В кортеже с числовыми атрибутами все вхождения его элементов нумеруются от 1 до некоторого ***n***.

Числовой атрибут – это условный порядковый номер вхождения элемента в кортеж. Количество всех вхождений в состав кортежа всех его элементов, т. е. мощность кортежа будем также называть **арностью кортежа**. Элемент кортежа, имеющий в рамках этого кортежа атрибут ***ai***, будем называть ***ai*** -элементом (***ai*** –компонентом) этого кортежа.

Один и тот же объект может быть элементом разных кортежей. При этом в рамках разных кортежей этот объект может иметь разные атрибуты.

Множество, не являющееся кортежем, будем называть **неориентированным множеством.**

Принципиальным свойством атрибутов является то, что указание того, к какому атрибуту относится та или иная пара принадлежности, выходящая из знака кортежа, задает семантику соответствующего кортежа, поскольку каждый атрибут задает определенную роль вхождений элементов в рамках кортежей. Из этого, в частности, следует то, что в отличие от неориентированных множеств (т. е. множеств, не являющихся кортежами) кортежи с совпадающими элементами, но с несовпадающими атрибутами вхождений этих элементов считаются разными кортежами.

Один и тот же элемент в рамках одного кортежа может выполнять сразу несколько ролей, что соответствует нескольким вхождениям этого элемента, принадлежащим разным атрибутам. Каждому атрибуту, как и любому другому множеству, можно поставить в соответствие знак этого атрибута. Знак атрибута есть не что иное, как относительное понятие, определяющее свойство какого-либо объекта, имеющее место по отношению к каким-то другим объектам. Примеры знаков атрибутов: ***“ быть сыном ”***, ***“ быть суммой ”***, ***“ быть слагаемым ”***.

При идентификации знаков атрибутов в языке SCBs введем следующее

Правило. Последним символом идентификатора знака атрибута в языке SCBs должен быть символ подчеркивания.

Примеры.

сын_ = быть сыном_;
дочь_ = быть дочерью_;
отец_ = быть отцом_;
мать_ = быть матерью_;
непосредственный потомок_ = быть непосредственным потомком_;
посредственный предок_ = быть посредственным предком_;
потомок_ = быть потомком_;
предок_ = быть предком_;

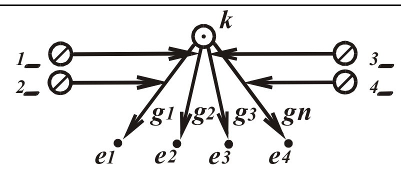
сумма_ = быть суммой_;
слагаемое_ = быть слагаемым_;
произведение_ = быть произведением_;
сомножитель_ = быть сомножителем_;
старший по возрасту_ = быть старшим о возрасту_;
max_ = быть максимальным числом_;
min_ = быть минимальным числом_;
1_ = быть первым компонентом кортежа_;
2_ = быть вторым компонентом кортежа_;

Примечание. Последние два атрибута и аналогичные им будем называть числовыми атрибутами или порядковыми числами. Они указывают условный номер вхождения элементов (компонентов) в состав соответствующих кортеже.

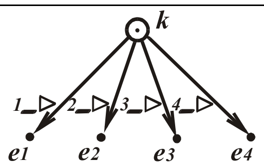
2.2.2. Примеры кортежей и их представление в языках SCBg и SCBs

Пример 2.2.2.1. 4-арный (т.е. имеющий мощность, равную 4) классический кортеж с числовыми атрибутами без кратных элементов (т.е. при отсутствии многократного вхождения в состав кортежа хотя бы одного его элемента).

Приведем несколько вариантов изображения на языке SCBg.

Вариант 1.	

Здесь ***k*** – знак кортежа, а e_1, e_2, e_3, e_4 – элементы этого кортежа.

Вариант 2.	

Идентификатор с "треугольником", приписываемый графическому изображению какого-либо SCB-элемента (в данном случае – изображению SCB-дуги) – это идентификатор SCB-узла, из которого проведена SCB-дуга в указанный SCB-элемент.

Подчеркнем, что идентификатор с "треугольником" совсем не обязательно должен быть идентификатором знака атрибута (именем атрибута). Более того, идентификатор с "треугольником" совсем не обязательно должен приписываться изображениям только SCB-дуги – это могут быть изображения SCB-узлов, а также SCB-элементов неуточняемого типа (см. рис.).

На языке SCBs это будет выглядеть следующим образом.

Вариант 1.

$k \succ- g_1 \succ- e_1$; $k \succ- g_2 \succ- e_2$; $k \succ- g_3 \succ- e_3$; $k \succ- g_4 \succ- e_4$;

*1_* $-\succ q_1$; *2_* $-\succ q_2$; *3_* $-\succ q_3$; *4_* $-\succ q_4$;

В а р и а н т 2 .

$1\_ \rightarrow (k \rightarrow e_1)$; $2\_ \rightarrow (k \rightarrow e_2)$; $3\_ \rightarrow (k \rightarrow e_3)$; $4\_ \rightarrow (k \rightarrow e_4)$;

В а р и а н т 3 .

$k = \langle 1\_ : e_1,\ 2\_ : e_2,\ 3\_ : e_3, 4\_ : e_4 \rangle$;

В а р и а н т 4 .

$k = \langle e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4 \rangle$;

Здесь числовые атрибуты подразумеваются по умолчанию.

В примере 2 . 2 . 2 . 2 показан классический кортеж с числовыми атрибутами. Это наиболее распространенный вид кортежей.

О п р е д е л е н и е . Кортеж будем называть классическим кортежем в том и только том случае

если он обладает следующими свойствами:

1) каждому вхождению элемента в состав кортежа (т.е. каждой SCB-дуге, выходящей из знака кортежа) соответствует один и только один атрибут;
2) не существует двух различных вхождений разных элементов или одного и того же элемента в состав кортежа, отмеченных одним и тем же атрибутом.

О п р е д е л е н и е . Кортеж будем называть **классическим кортежем с числовыми атрибутами** в том и только в том случае
если
1) кортеж является классическим;
2) в кортеже используются только числовые атрибуты от ***1_*** до ***n_*** , где ***n*** – мощность кортежа, т.е. кол-во SCB-дуг, выходящих из знака кортежа.

Пара принадлежности, введенная нами в подразделе 1.1, является примером классического кортежа, который имеет мощность, равную 2, (т.е. является 2-мощным множеством) и которому соответствуют атрибуты "***быть знаком множества***" и "***быть непосредственно элементом множества***".

Существенное отличие пар принадлежности от других кортежей, не являющихся парами принадлежности, заключается в том, что в языках SCB, SCBg и SCBs представление пар принадлежности (см. пункт 1.2.2 и пункт 1.2.4) и представление кортежей, не являющихся парами принадлежности, (см. пример 2 . 2 . 2 . 3) осуществляется принципиально разным образом. Связь знака пары принадлежности с элементами этой пары изображается инцидентностью соответствующих SCB-элементов. В то время, как связь знака кортежа, не являющегося парой принадлежности, с элементами этого кортежа изображается смежностью соответствующих SCB-элементов, т.е. помощью SCB-дуги, соединяющей эти SCB-элементы.

Введем SCB-узел, обозначающий множество знаков всевозможных кортежей, не являющихся парами принадлежности. В языке SCBg этот узел можно изобразить либо с помощью графического примитива ⊙ , либо с помощью графического примитива ⊙ .

Указанному SCB-узлу примем идентификатор "***кортеж***" (***быть кортежем***). При этом введем следующее **п р а в и л о :**

кортеж ⊙⟶⊙ ***ki***	⟸⟹	***кортеж_*** ▷ ⊙ ***ki***	⟸⟹	⊖ ***ki***

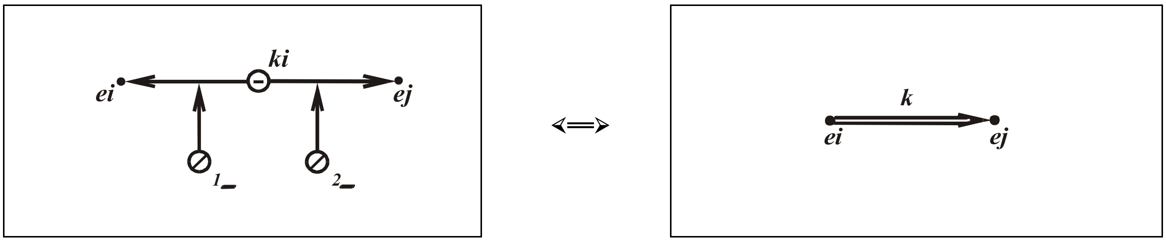
т.е. новый графический примитив ⊖ явно указывает принадлежность изображаемого SCB-узлом, который имеет идентификатор "***кортеж***".

Для более компактного изображения в языке SCBg 2-мощных классических кортежей (пар), не являющихся парами принадлежности, введем в язык SCBg ещё один графический примитив – **двойную линию** со стрелкой на одном конце. Такая двойная линия является изображением знака 2-мощного кортежа, не являющегося парой принадлежности.

Знак **(!)** 2-мощного кортежа будем называть **дугой.** Следовательно, двойная линия со стрелкой – это изображение дуги, не являющейся SCB-дугой (знаком пары принадлежности).

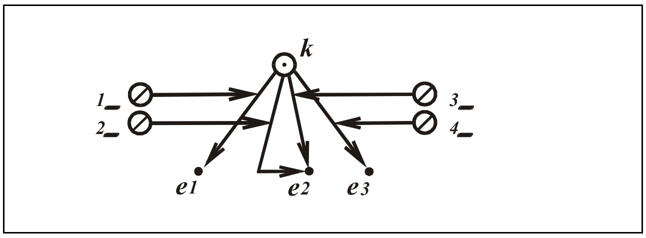
Таким образом, для языка SCBg можно ввести следующее

Правило компактного изображения 2-мощных классических кортежей (ориентированных пар):



Пример 2.2.2.2. Четырех-арный классический кортеж (четверка) с числовыми атрибутами и с кратными элементами (с многократным вхождением по крайней мере одного элемента).

На языке SCBg:



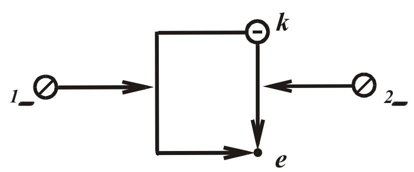
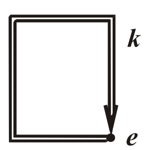
Здесь SCB-элемент ***e2*** входит двукратно в состав кортежа ***k*** (один раз под атрибутом ***2_***, а второй раз – под атрибутом ***3_***).

На языке SCBs :

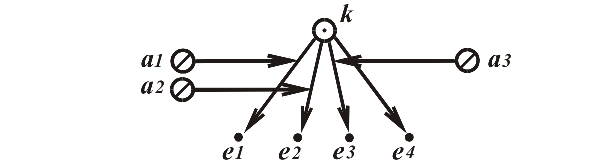
$k = \langle\ 1\_ : e_1,\ 2\_ : e_2,\ 3\_ : e_2, 4\_ : e_3\ \rangle$; Или : $k = \langle\ e_1,\ e_2,\ e_2,\ e_3\ \rangle$;

Примечание: Подчеркнем, что в классическом кортеже допустимо многократное вхождение элементов.

Пример 2.2.2.3. 2-мощный классический кортеж (пара) с кратным вхождением элемента. Такую пару будем называть **петлей.**

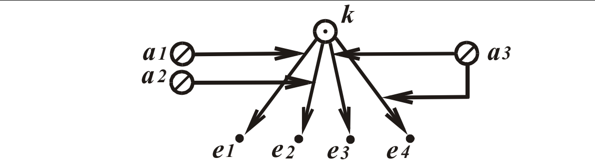
Вариант 1:	**Вариант 2:**
	

П р и м е р 2 . 2 . 2 . 4 . Кортеж с неявно заданным атрибутом (атрибутом **по умолчанию**).



здесь отсутствие указания атрибута для вхождения SCB-элемента e_4 *в* кортеж k означает не отсутствие атрибута у этого вхождения, а то, что этот неявно указываемый (т.е. указываемый по умолчанию) атрибут отличен от атрибутов a_1, a_2, a_3.

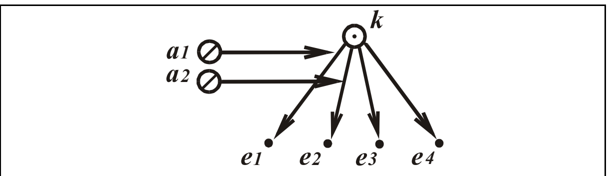
П р и м е р 2 . 2 . 2 . 5 . Кортеж, в котором несколько вхождений элементов имеют одинаковые атрибуты.



Здесь вхождения SCB-элементов e_3 и e_4 в кортеж k имеют одинаковый атрибут a_3.

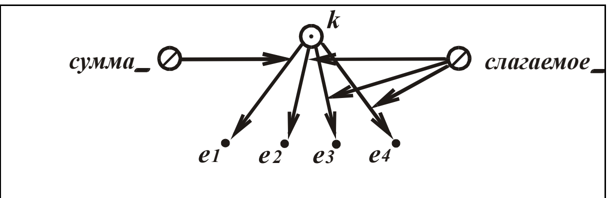
Примечание: Если несколько вхождений элементов в кортеж не имеют явно указываемого атрибута, то считается, что указанные вхождения имеют один и тот же задаваемый по умолчанию атрибут, отличающийся от всех остальных атрибутов, используемых в данном кортеже. Например:

П р и м е р 2 . 2 . 2 . 6 .



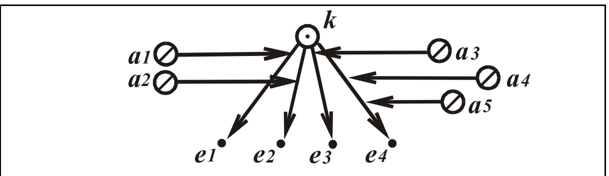
Конкретной иллюстрацией кортежей рассматриваемого вида является кортеж, связывающий сумму некоторых чисел с соответствующими слагаемыми.

П р и м е р 2 . 2 . 2 . 7 .



Очевидно, что противопоставлять друг другу различные слагаемые (например, нумеровать их) нет никакой необходимости.

П р и м е р 2 . 2 . 2 . 8 . Кортеж, в котором, по крайней мере, одно вхождение какого-либо элемента имеет несколько различный атрибутов



Здесь вхождение элемента e_4 в кортеж k имеет два атрибута (атрибут a_4 и атрибут a_5).

2.2.3. Типология кортежей

Поскольку кортежи являются множествами специального вида, их можно классифицировать по всем общим признакам классификации множеств, которые приведены в подразделе 1.3. Согласно этому можно выделить:

1) по признаку кратности элементов:
   - кортежи без кратных элементов,
   - кортежи с кратными элементами (т.е. кортежи, каждого из которых имеется, по крайней мере, один элемент, который входит в состав кортежа более, чем однократно) – см. пример 2 . 2 . 2 . 2 ;

2) по признаку рефлексивности:
   - нерефлексивные кортежи,
   - рефлексивные кортежи (т.е. кортежи, каждый из которых включает в число элементов знак самого себя). Очевидно, что рефлексивные кортежи являются достаточно редким видом кортежей;
3) по мощности:
   - 2-мощные кортежи (пары),
   - тернарные кортежи (тройки),
   - 4-арные кортежи (четверки),
   - 5-арные кортежи (пятерки),

   и т.д.

О п р е д е л е н и е . Знаки 2-мощных кортежей (пар) будем называть дугами.

Различные варианты соотношения вхождений элементов в кортежи и соответствующих им атрибутов позволяют выделить следующие классы кортежей:
1) по признаку наличия неявно указываемых атрибутов
   - кортежи, у которых каждому вхождению элемента соответствует по крайней мере один явно указываемый атрибут,
   - кортежи, у которых имеется, по крайней мере, одно вхождение какого-либо элемента с неявно указываемым атрибутом (т.е. с атрибутом, указываемым по умолчанию);
2) по признаку наличия атрибутов у компонентов кортежа
   - кортежи, у которых каждому вхождению каждого элемента соответствует один и только один атрибут (явно или неявно указываемый),
   - кортежи, у которых имеется, по крайней мере, одно вхождение какого-либо элемента, которому соответствует несколько явно указываемых атрибутов;
3) по признаку однозначности атрибутов у компонентов кортежа
   - кортежи, у которых не существует двух таких вхождений каких-либо элементов, которым соответствует один и тот же явно или неявно задаваемый атрибут (кортежи без симметрии),
   - кортежи, у которых имеется, по крайней мере, два таких вхождения каких-либо элементов, которым соответствует один и тот же явно или неявно задаваемый атрибут (кортежи с симметрией).

Важнейшим классом кортежей являются классические кортежи. Соответственно этому можно выделить класс **неклассических кортежей**, т.е. кортежей, не являющихся классическими.

По виду атрибутов можно выделить:
- кортежи с нечисловыми атрибутами,
- кортежи со смешанными (числовыми и нечисловыми) атрибутами.

По виду элементов кортежей можно выделить:
- кортежи, элементами которых являются предметные знаки;
- кортежи, элементами которых являются знаки узловых непредметных множеств;
- кортежи, являющиеся знаками систем множеств;
- кортежи, элементами которых являются числа;
- кортежи, среди элементов которых имеются знаки кортежей (такие кортежи будем называть метакортежами).

2.2.4. Резюме к подразделу 2.2

Примечание 1. 2-мощные кортежи (пары) почти всегда являются классическими кроме тех случаев, когда какое-либо вхождение какого-либо элемента 2-мощного кортежа имеет несколько явно указываемых атрибутов, а также случаев, когда оба вхождения элементов в 2-мощный кортеж имеют одинаковые атрибуты.

Примечание 2. Если в классическом кортеже один из соответствующих ему атрибутов будет задаваться по умолчанию, то это не превращает указанный кортеж в неклассический.

Примечание 3. Любой кортеж, все атрибуты которого заданы явно, можно заменить на эквивалентный **(!)** кортеж, в котором один из указанных атрибутов **(любой!)** задается неявно (по умолчанию).

Примечание 4. Любой кортеж с нечисловыми или смешанными атрибутами можно заменить на эквивалентный **(!)** кортеж с числовыми атрибутами, "пронумеровав" исходные атрибуты.

Примечание 5. Могут существовать кортежи, состоящие из одинаковых элементов, но при наличии хотя бы одного элемента, который входит в разные кортежи под разными атрибутами. Такие по разному ориентированные кортежи (т.е. кортежи, являющиеся равными множествами, но с разным распределением ролей их элементов) будем называть **встречными кортежами.** Примерами встречных кортежей являются **встречные пары**, например, встречные пары принадлежности и соответствующие им встречные SCB-дуги. Примерами встречных пар также являются:

- пара, указывающая наличие канала передачи информации из пункта ***a*** в пункт ***b***, и пара, указывающая наличие канала передачи информации из пункта ***b*** в пункт ***a*** (далеко не все пункты имеют двустороннюю связь),
- пара, указывающая наличие гомоморфизма из структуры ***a*** в структуру ***b***, и пара, указывающая наличие гомоморфизма из структуры ***b*** в структуру ***a*** (далеко не для каждой пары гомоморфных структур имеет место обратный гомоморфизм).

Примечание 6. Могут существовать кортежи, которые состоят из одинаковых элементов с одинаковыми атрибутами. Такие кортежи будем называть равными или **кратными кортежами.** Примерами кратных кортежей являются кратные пары, например, кратные пары принадлежности и соответствующие им кратные SCB-дуги.

Примечание 7. Могут существовать вырожденные кортежи, в которых все вхождения элементов имеют одинаковые атрибуты.

Примечание 8. Могут существовать кортежи, в которых атрибуты вхождений его элементов однозначно **(!)** задаются типами этих элементов. В таких кортежах атрибуты можно явно не указывать. В качестве примера таких кортежей можно привести 2-мощный кортеж с атрибутами:

- быть знаком точки, которая лежит на прямой, знак которой является другим компонентом кортежа;
- быть знаком прямой, на которой лежит точка, знак которой является другим компонентом кортежа.

Очевидно, что первым из указанных атрибутов могут обладать только геометрические точки, а вторым – только прямые. Следовательно, если множество "***быть точкой***" и множество "***быть прямой***" будут введены явно, то указанные выше атрибуты можно явно не вводить.

Примечание 9. С формальной точки зрения каждый атрибут есть множество, каждый элемент которого является знаком пары принадлежности. При этом не видно оснований считать ложным обратное утверждение. Другими словами, каждое семантически осмысленное множество, состоящее из знаков пар принадлежности, можно считать атрибутом для соответствующих кортежей. Таким образом, любое множество при соответствующем рассмотрении можно трактовать как кортеж. Поэтому противопоставление неориентированных множеств и кортежей выглядит весьма условно. Неориентированное множество можно трактовать как множество, для элементов которого пока **(!)** не выявлено различия в роли этих элементов в рамках этого множества.

Примечание 10. В математической литературе обычно имеют дело с классическими кортежами, использующими числовые атрибуты и изображаемыми в этой литературе следующим образом

$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ где:
x_1 – 1-й компонент кортежа,
x_2 – 2-й компонент,
x_n – n-й компонент.

2.3. Понятие отношения. Представление отношений на языке SCB. Типология отношений: классические и неклассические отношения, 2-мощные, тернарные отношения, предельные виды отношений (булеаны, декартовы произведения, множества всевозможных сочетаний, перестановок, размещений, шкалы множеств), алгебраические функции и операции. Классические отношения как подмножества декартовых произведений

2.3.1. Обобщение традиционной (классической) трактовки отношений – отношение общего вида

Каждое отношение общего вида, т.е. отношение, понимаемое в широком смысле слова, представляет собой некоторое семейство однотипных в каком-то смысле множеств. В состав отношений могут входить неупорядоченные множества кортежей. В частности, каждое отношение классического вида представляет собой множество классических кортежей, имеющих одинаковую арность и использующих одинаковые наборы атрибутов. Переходя от множеств, в частности, кортежей, входящих в состав отношения, к их нормализованным эквивалентам и переходя от трактовки отношения как семейства знаков множеств к его трактовке как семейства знаков (**!**) множеств, получим нормализованный эквивалент отношения.

О п р е д е л е н и е . **Нормализованное отношение** – это множество знаков нормализованных множеств, каковыми, в частности, могут быть кортежи. Нормализованное отношение можно трактовать как иерархическую конструкцию, состоящую из следующих уровней:

- знак самого отношения;
- знаки нормализованных множеств, являющиеся элементами отношения (указанные множества могут быть как неупорядоченными множествами, так и кортежами);
- знаки атрибутов, используемых для указания роли элементов в кортежах, знаки которых являются элементами отношения;
- знаки множеств, являющиеся элементами множеств, знаки которых являются элементами отношения.

Множества, знаки которых находятся на третьем уровне указанной иерархической конструкции, могут быть либо нормализованными, либо ненормализованными, но тогда обязательно унарными (**!**). Как уже отмечалось (см. подраздел 1.1) при нормализации множеств можно оперировать только одним видом ненормализованных множеств – унарными ненормализованными множествами, которые названы непредметными множествами.

Особо подчеркнем то, что некоторые знаки, входящие в состав рассмотренной выше многоуровневой конструкции, могут принадлежать сразу нескольким уровням. Так, например, знак отношения может быть элементом кортежа или неориентированного множества, входящего в состав этого же отношения. Кроме того, знак кортежа или неориентированного множества, входящего в состав отношения, может быть элементом как самого этого кортежа или неориентированного множества (см. рефлексивное множество), так и другого кортежа или неориентированного множества, входящего в состав этого же отношения.

Входящие в состав отношения кортежи и неориентированные множества будем называть **связками** этого отношения. Другими словами, связка – это множество, знак которого принадлежит какому-либо нормализованному отношению. Термин "связка" здесь неслучаен, т.к. каждое множество (в частности, кортеж), знак которого входит в состав нормализованного отношения, представляет собой описание некоторой конкретной связи между объектами, знаки которых являются элементами связки. При этом тип (семантика) указанной связи определяется отношением, элементом которого является знак соответствующей связки.

В языке SCBg для изображения ориентированных связок (т.е. связок, являющихся кортежами) чаще всего используется графический примитив $\ominus$ (см. пункт 1.4.2).

Для изображения знаков неориентированных связок (т.е. связок, являющихся неориентированными множествами) введем еще один графический примитив ⦶.

Для сравнения рассмотренной широкой трактовки отношений приведём определение узкой (классической) трактовки отношений. Отношения, соответствующие такой трактовке, будем называть классическими.

Определение. Классическое нормализованное отношение – это множество знаков нормализованных классических (**!**) кортежей, имеющих одинаковую (**!**) мощность и использующих одинаковые (**!**) атрибуты.

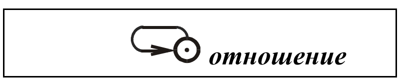
Переход от узкой (классической) трактовки отношений к широкой трактовке – это допущение использования в качестве связок не только классических, но и неклассических кортежей, а также неориентированных кортежей, и неориентированных множеств, допущение неодинаковой мощности связок и допущение использования разных атрибутов в разных кортежах.

Примерами отношений общего вида можно считать следующие множества, введенные нами в подразделах 1.1, 2 и 2.3:

- пара принадлежности – это отношение, элементами которого являются знаки всевозможных пар принадлежности (в связи с этим вместо имени нарицательного "***пара принадлежности***" можно использовать эквивалентное имя собственное "***Отношение принадлежности***");
- узловое непредметное множество;
- система множеств;
- множество пар принадлежности;
- множество узловых множеств;
- множество без кратных элементов;
- множество с кратными элементами;
- рефлексивное множество;
- нерефлексивное множество;
- унарное множество, 2-мощное множество, тернарное множество и т.д.;
- 1-элементное множество, 2-элементное множество и т.д.;
- конечное множество, бесконечное множество;
- кортеж;
- неориентированное множество.

Введем специальный SCB-узел с идентификатором ***"отношение"***. Этот узел обозначает множество знаков всевозможных нормализованных отношений (нормализованность отношений в языке SCB подразумевается по умолчанию). Кроме того, в языках SCBg дополнительно введем еще один графический примитив ⊗ для изображения знаков конкретных отношений. Введение указанного графического примитива соответствует следующему **правилу:**

Очевидно, что, если подразумевать широкую трактовку понятия отношения, то множество с именем ***"отношение"*** также следует отнести к числу отношений, т.е. имеет место



2.3.2. Типология отношений, в основе которой лежит базовая типология множеств (принадлежность к числу кортежей, наличие кратных вхождений элементов, рефлексивность, мощность)

Анализ принадлежности связок отношений к числу кортежей позволяет выделить следующие классы отношений:

* **ориентированные отношения** – отношения, все **(!)** связки которых являются кортежами;
* **неориентированные отношения** – отношения, все **(!)** связки которых являются неориентированными множествами;
* **частично ориентированные отношения** – отношения, среди связок которых встречаются как кортежи, так и неориентированные множества.

Анализ наличия кратных вхождений элементов в связки отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

* отношения, все **(!)** связки которых являются множествами, имеющими кратное вхождение элементов;
* отношения, некоторые связки которых являются множествами, имеющими кратное вхождение элементов;
* отношения, все **(!)** связки которых не являются множествами, имеющими кратное вхождение элементов.

Анализ наличия кратных связок , входящих в состав отношения, позволяет выделить следующие классы отношений:

* отношения, имеющие кратные (равные) связки;
* отношения, не имеющие кратных (равных) связок.

Примечание. Формально отношение не может быть множеством с кратным вхождением каких-либо элементов. Кратные связки отношения оформляются не путем многократного вхождения знака связки в состав отношения, а путем копирования соответствующей связки, т.е. путём включения знаков равных **(!)** неориентированных множеств или равных **(!)** кортежей. Таким образом в SCB-тексте могут встречаться равные множества или равные кортежи, но только в том случае, если их знаки являются элементами одного и того же **(!)** отношения. Целесообразность такого решения обусловлена тем, что равные связки отношения могут иметь разные **(!)** дополнительные характеристики (например, разные весовые характеристики соответствующих связей).

Кроме кратных (равных) связок могут существовать также встречные связки, т.е. связки, являющиеся встречными кортежами.

Напомним, что **встречные кортежи** – это кортежи, состоящие из одинаковых элементов, по крайней мере один из которых входит в разные (встречные) кортежи под разными атрибутами – см. подраздел 2.2.4.

Анализ наличия встречных связок, входящих в состав отношения, позволяет выделить следующие классы отношений:

* отношения, имеющие встречные связки;
* отношения, в которых встречные связки отсутствуют.

Анализ рефлексивности самих отношений позволяет выделить следующие классы отношений:

* отношения, являющиеся рефлексивными множествами (знаками таких отношений имеют петлевую пару принадлежности) – это хоть и экзотический, но вполне реальный класс отношений;
* отношения, не являющиеся рефлексивными множествами.

Анализ рефлексивности связок отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

* отношения, все **(!)** связки которых являются рефлексивными множествами;
* отношения, некоторые связки которых являются рефлексивными множествами;
* отношения, все **(!)** связки которых не являются рефлексивными множествами.

Анализ мощности самих отношений позволяет выделить следующие классы отношений:

* конечные отношения (отношения, являющиеся конечными множествами);
* бесконечные отношения (отношения, являющиеся бесконечными множествами).

Анализ мощности связок отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

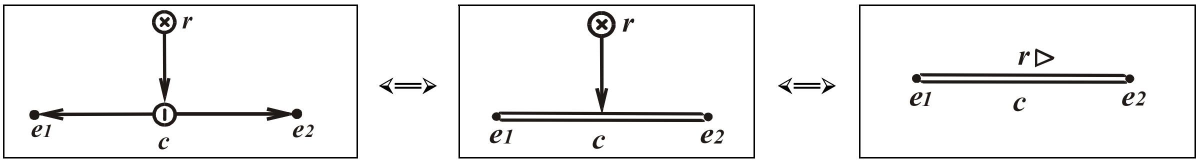
* отношения со связками одинаковой мощности;
* отношения со связками неодинаковой мощности (в каждом таком отношении существует по крайней мере две связки, имеющих разную мощность).

В свою очередь, семейство отношений со связками одинаковой мощности разбиваются на следующие подклассы:

- 2-мощные отношения – отношения, все связки которых являются 2-мощными множествами, мощность которых равна 2 (в частности, 2-мощными кортежами или ориентированными парами);
- тернарные отношения;
- 4-арные отношения;
- и т.д.

В связи с вышесказанным, отношениям со связками одинаковой мощности можно поставить в соответствие числовую характеристику – “***арность отношения***”.

Для наглядности изображения 2-мощных неориентированных связок в языке SCBg введем следующее **п р а в и л о :**



Здесь SCB-узел ***c***, обозначающий 2-мощную неориентированную связку, принадлежащую отношению ***r***, вместе с выходящими из этого узла SCB-дугами заменяется на жирную линию без стрелок. Знак 2-мощной неориентированной связки будем называть **ребром.** Таким образом в язык SCBg для более наглядного изображения ребер вводится ещё один графический примитив – жирная линия без (**!**) стрелок. Напомним, что для наглядного изображения дуг, не являющихся SCB-дугами (знаками пар принадлежности), в язык SCBg был введен специальный графический примитив – двойная линия со стрелкой на одном конце.

2.3.3. Типология отношений, в основе которой лежит специальная типология кортежей, входящих в состав отношения, а также анализ соотношения между кортежами, принадлежащими одному отношению, и используемыми в них атрибутами

О п р е д е л е н и е . **Схемой отношения** ***r*** будем называть множество знаков всех тех и только тех атрибутов, которые используются в кортежах отношения ***r*** . Строгую формальную трактовку понятия схемы отношения как метаотношения, заданного на множестве всевозможных отношений см. в п. 1.5.13.

Примечание 1. Если в кортежах отношения используется атрибут, задаваемый по умолчанию, то в схеме этого отношения знак этого атрибута должен быть явно (**!**) указан, а также явно отнесен к числу элементов специального множества, обозначаемого SCB-узлом с идентификатором "***атрибут по умолчанию***". "***атрибут по умолчанию***" есть знак множества знаков всевозможных атрибутов, каждый из которых может (но не обязательно !) задаваться по умолчанию.

Примечание 2. В состав отношения ***r*** могут входить не только знаки кортежей, но и знаки неориентированных (**!**) множеств.

Примечание 3. Атрибут, знак которого входит в схему отношения ***r***, может использоваться не (**!**) в каждом кортеже, который входит в состав отношения ***r***.

Каждый атрибут есть не что иное, как 2-мощное ориентированное отношение, являющееся подмножеством (**!**) базового для языка SCB Отношения принадлежности.

В качестве примера схемы отношения приведем схему тернарного классического отношения сложения. Эта схема представляет собой множество, включающее в себя знаки следующих атрибутов:

- ***быть суммой (сумма_);***
- ***быть 1-м (слагаемое1_) слагаемым***;
- ***быть 2-м (слагаемое2_) слагаемым.***

Примечание 4. Строго говоря, любое неориентированное множество можно “превратить” в кортеж, “подметив” какую-то особенность хотя бы одного из элементов этого множества по сравнению с другими его элементами. Поэтому, когда вводится какое-либо ориентированное отношение необходимо явно (**!**) перечислить те атрибуты, которые в этом отношении учитываются, т.е. необходимо для каждого неориентированного отношения явно указывать его схему. Это значит, что все атрибуты, не указанные в схеме отношения, при анализе этого отношения будут игнорироваться. Таким образом, могут существовать неориентированные отношения, включающие в себя кортежи (в этом случае атрибуты этих кортежей вообще не учитываются). Некоторые кортежи могут входить в разные отношения, в которых используются разные (!) схемы (для 1-го отношения в этом кортеже будут учитываться одни атрибуты, а для 2-го отношения – другие).

Анализ включения атрибута, задаваемого по умолчанию, в состав схемы отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, использующие атрибут, задаваемый по умолчанию;
- отношения, не использующие атрибут, задаваемый по умолчанию.

Анализ того, в каждой ли связке отношения используются все (!) атрибуты из схемы этого отношения, позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, все (!) связки которых используют одинаковые атрибуты;
- отношения, у которых имеется по крайней мере две связки с различными наборами атрибутов.

Анализ соотношения вхождений элементов в связки отношения и соответствующих им атрибутов позволяет выделить следующие классы отношений:

1)
   - отношения, в каждой (!) связке которых каждому (!) вхождению элемента соответствует один и только один атрибут;
   - отношения, в каждой (!) связке которых существует по крайней мере одно вхождение какого-либо элемента, которому соответствует несколько (!) атрибутов;
   - отношения, в некоторых (!) связках которых каждому вхождению элемента соответствует один и только один атрибут, а в некоторых (!) связках которых существует по крайней мере одно вхождение какого-либо элемента, которому соответствует несколько атрибутов;

2)
   - отношения, в каждой (!) связке которых не (!) существует двух таких вхождений элементов, которым соответствует один и тот же атрибут;
   - отношения, в каждой (!) связке которых существует по крайней мере два таких вхождения элементов, которым соответствует один и тот же атрибут;
   - отношения, в некоторых (!) связках которых не существует двух таких вхождений элементов, которым соответствует один и тот же атрибут, а в некоторых (!) связках которых существует по крайней мере два таких вхождения элементов, которым соответствует один и тот же атрибут.

О п р е д е л е н и е . Множество r будем называть **коммутативным отношением** для атрибутов ai и aj в том и только том случае, если справедливо следующее:

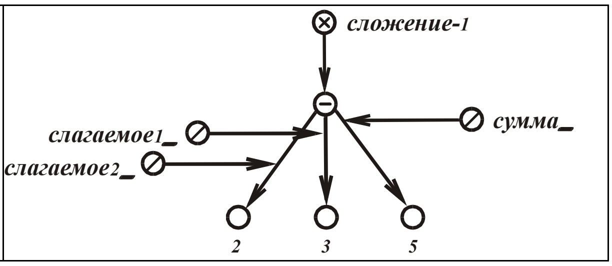
- множество r является ориентированным отношением, в схему которого входит атрибут ai и атрибут aj;
- кортеж отношения r может содержать не более одного элемента под атрибутом ai и не более одного элемента под атрибутом aj;
- если в кортеж отношения r входит элемент под атрибутом ai, то в этот же кортеж входит элемент под атрибутом aj и наоборот;
- если в кортеж отношения r входит элемент xi под атрибутом ai и элемент xj под атрибутом aj, то в отношение r будет входить кортеж, в который элемент xi входит под атрибутом ai, а элемент xj – под атрибутом aj. При этом все остальные элементы указанных кортежей совпадают и входят в эти кортежи под одинаковыми атрибутами.

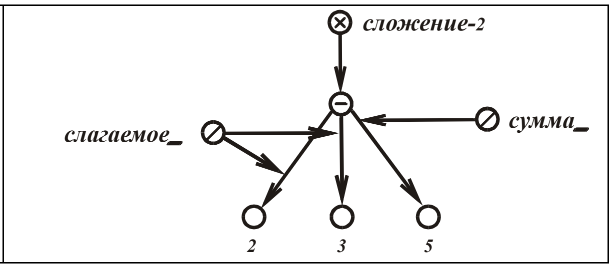
Примечание 4. Если отношение r является коммутативным для атрибутов ai и aj, то от отношения r можно перейти к эквивалентному отношению r^* путем

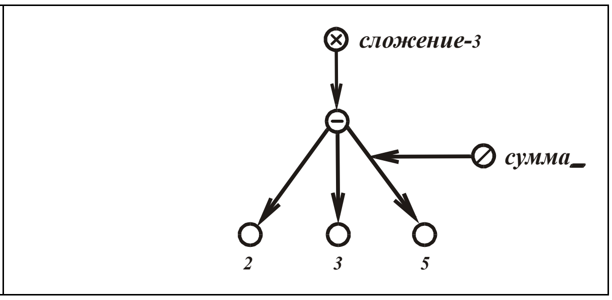
1) ликвидации любого из двух встречных кортежей, которые отличаются только двумя компонентами, имеющими атрибуты ai и aj причем, ai – компонент одного из указанных кортежей совпадает с aj – компонентом другого;
2) склеивания знаков атрибутов ai и aj.

В результате этого эквивалентного преобразования сокращается количество связок отношения и количество используемых атрибутов.

Приведем в качестве **п р и м е р а** несколько вариантов отношения сложения.

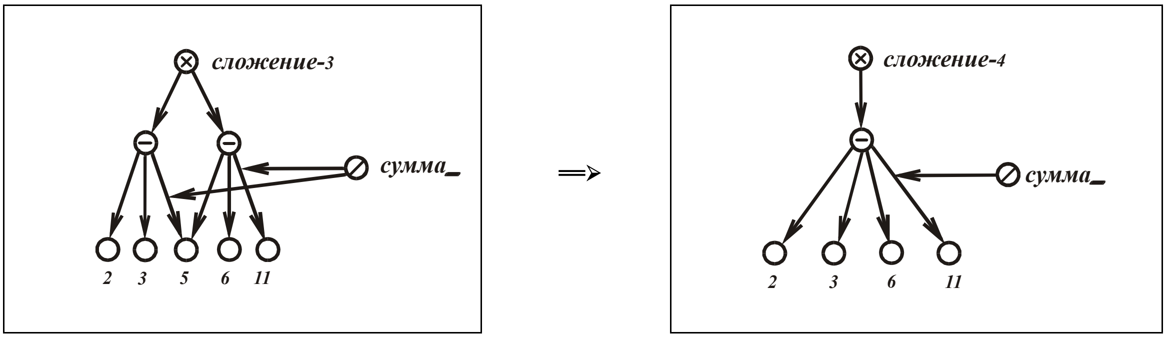
В а р и а н т 1 . Классическое тернарное коммутативное отношение с атрибутами ***“слагаемое1_”***, ***“слагаемое2_”***, ***”сумма_”.***	

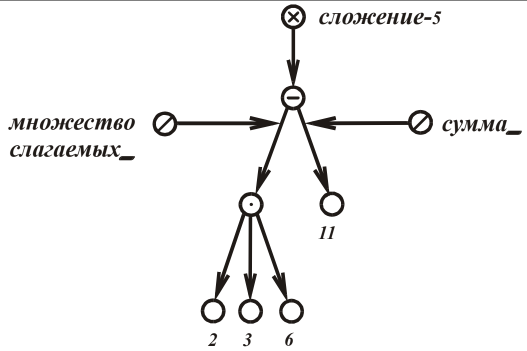
В а р и а н т 2 . Неклассическое тернарное ориентированное отношение, в каждом кортеже которого используется два атрибута: ***“слагаемое_”***, ***”сумма_”.***	

В а р и а н т 3 . Неклассическое тернарное ориентированное отношение, отличающееся от отношения ***“сложение-2”*** только тем, что в каждом его кортеже используется один атрибут по умолчанию и один атрибут явно (***“сумма_”***)	

Очевидно, что для компактности изображения SCB-текстов здесь задавать по умолчанию целесообразнее атрибут ***“слагаемое_”***, а не атрибут ***“сумма_”***, т.к. каждый кортеж рассматриваемого отношения имеет <u>несколько</u> компонентов с атрибутом ***“слагаемое_”*** и только <u>один</u> компонент с атрибутом ***“сумма_”.***

В а р и а н т 4 . Неклассическое ориентированное отношение, кортежи которого имеют мощность от 3 и выше



В а р и а н т 5 . Классическое <u>2-мощное</u> **(!)** отношение с атрибутами ***“сумма_”*** и ***”множество слагаемых_”***	

В а р и а н т 6 . 2-мощное ориентированное отношение, отличающееся от отношения ***“сложение-5”*** тем, что в нем один из атрибутов задается по умолчанию.

2.3.4. Типология отношений, в основе которой лежит понятие проекции и понятие области определения

О п р е д е л е н и е . **Область определения** отношения ***r*** – это множество <u>всех тех и только тех</u> объектов, которые являются элементами связок отношения ***r***. Строгая формальная трактовка понятия области определения как метаотношения будет рассмотрена ниже в п. 1. 5. 13.

О п р е д е л е н и е . **Унарная проекция** (домен) отношения ***r*** по атрибуту ***ai*** – это множество <u>всех тех и только тех</u> объектов, которые являются такими элементами связок отношения ***r***, вхождения которых в эти связки имеют атрибут ***ai***.

Примечание. Унарная проекция отношения по заданному атрибуту <u>не</u> требует того, чтобы связки указанного отношения имели только один элемент с указанным атрибутом. Таких элементов может быть сколько угодно.

Примечание. Очевидно, что все элементы каждой унарной проекции отношения ***r*** являются также элементами области определения этого отношения.

О п р е д е л е н и е . **Проекция** отношения ***r*** по атрибутам $a_1, a_2, \ldots, a_m$, – это множество знаков <u>всех тех и только тех</u> кортежей, которые строятся из кортежей отношения ***r*** путём удаления всех вхождений элементов, которые имеют атрибуты, <u>не</u> совпадающие с указанными выше атрибутами $a_1, a_2, \ldots, a_m$, а также путем последующего устранения кратности кортежей (из семейства кратных кортежей в указанном множестве кортежей должен оставаться один представитель).

Очевидно, что неунарная проекция заданного отношения ***r*** также является отношением, причем, ориентированным отношением со схемой $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Анализ соотношения унарных проекций каждого отношения позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, в каждом из которых унарные проекции являются <u>попарно непересекающимися</u> множествами, т.е. множествами, которые не имеют общих элементов;
- отношения, в которых имеется по крайней мере две унарные проекции с общими элементами;
- отношения, в каждом из которых <u>все</u> **(!)** унарные проекции <u>совпадают</u>.

Примечание. Ориентированное отношение с попарно непересекающимися унарными проекциями можно заменить на эквивалентное неориентированное отношение путем замены явно указываемых атрибутов исходного отношения на явное указание принадлежности элементов связок отношения к соответствующей унарной проекции. Например, ориентированное отношение, связки которого имеют смысл ”точка ***t*** лежит на прямой ***p***” можно заменить на эквивалентное отношение, связки которого имеют смысл “геометрические объекты ***t*** и ***p*** инцидентны друг другу”. Если при этом дополнительно будет указано к какому классу геометрических объектов (к классу точек или к классу прямых) относятся объекты ***t*** и ***p***, то очевидно будет какой из указанных объектов на каком находится (прямая не может лежать на точке!).

Анализ того, какая <u>теоретико-множественная</u> связь имеет место между областью отношения и самим отношением, позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, у которых знак <u>каждой</u> **(!)** связки является элементом их области определения, (каждое такое отношение является подмножеством собственной области определения) элементами некоторых связок такого отношения являются знаки связок <u>этого же</u> **(!)** отношения;
- отношения, у которых знаки <u>некоторых</u> (не всех) связок являются элементами их области определения, (каждое такое отношение пересекается с собственной областью определения, но не является её подмножеством);
- отношения, знаки связок которых не входят в состав области определения этих отношений.

Анализ того, входит или нет знак отношения в состав собственной области определения, позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, у которых некоторые связки содержат в качестве хотя бы одного из своих элементов знак самого этого отношения;
- отношения, у которых нет связок, содержащих в качестве элемента знак самого этого отношения.

Содержательный анализ области определения отношений позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения над множествами – в область определения каждого такого отношения входят знаки <u>всевозможных</u> **(!)** множеств;
- отношения над кортежами – в область определения каждого такого отношения входят знаки всевозможных кортежей; при этом в состав каждой связки такого отношения входит знак по крайней мере одного кортежа, т.е. элементами рассматриваемых связок являются знаки других связок;
- отношения над отношениями того или иного типа – в область определения каждого такого отношения входят знаки всевозможных отношений соответствующего типа; при этом в состав каждой связки такого отношения входит знак по крайней мере одного отношения;
- отношения над числами;
- геометрические отношения (над физическими объектами);
- темпоральные отношения (над физическими объектами).

2.3.5. Типология отношений, в основе которой лежит понятие функциональной зависимости

О п р е д е л е н и е . Будем говорить, что отношение ***r*** имеет **функциональную зависимость** атрибутов { ay_1, …, ay_m } от **атрибутов** { ax_1,…, ax_n } в том и только том случае, <u>если</u>**:**

- указанные множества атрибутов не имеют общих элементов;
- все перечисленные атрибуты входят в схему отношения ***r*** ;
- в отношении ***r*** <u>не</u> существует двух таких кортежей, у которых бы совпадали элементы, имеющие атрибуты из множества { ax_1, …, ax_n }, но <u>не</u> совпадали элементы имеющие атрибуты из множества { ay_1, …, ay_m }.

Другими словами, те элементы кортежа, входящего в отношение ***r***, которые имеют атрибуты из множества { ax_1 , …, ax_n }, <u>однозначно</u> **(!)** определяют другие элементы этого же кортежа, имеющие атрибуты из множества {ay_1 , …, ay_m}. См. (Мейер Д. 1987 кн. Теория Р Б Д-с.51). Атрибуты из множества { ax_1 , …, ax_n } будем называть атрибутами аргументов функциональной зависимости, а атрибуты из множества { ay_1 , …, ay_m } будем называть атрибутами результата функциональной зависимости. Минимальное число атрибутов аргументов и атрибутов результата равно 1.

Анализ наличия функциональных зависимостей в отношениях позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения без функциональных зависимостей;
- отношения с одной функциональной зависимостью;
- отношения с несколькими функциональными зависимостями.

О п р е д е л е н и е . Функциональную зависимость атрибутов { ay_1 , …, ay_m } от атрибутов { ax_1 , …, ax_n } в рамках отношения ***r*** будем называть **ключевой функциональной зависимостью** в том и только в том случае, <u>если</u>**:**

- В схеме отношения ***r*** не существует ни одного атрибута, который бы не принадлежал либо множеству { ay_1, …, ay_m }, либо множеству { ax_1, …, ax_n }.

Множество атрибутов аргументов ключевой функциональной зависимости иногда называют ключом заданного отношения.

Из приведенного определения следует, что для любых двух различных кортежей ***ki*** и ***kj***, входящих во множество ***r***, существует атрибут ***axe*** из множества { ax_1 , …, ***axn*** } такой, что элемент кортежа ***ki*** с атрибутом ***axe*** не совпадает с элементом кортежа ***kj*** , имеющим тот же атрибут. Другими словами, в отношении ***r*** не существует двух таких кортежей, в которых бы совпадали элементы с атрибутами из множества { ax_1 , …, ***axn*** } и не совпадали элементы, имеющие остальные атрибуты. См. (Мейер Д. 1987 кн-Теория РБД-с.13). Это означает, что для кортежей, принадлежащих отношению ***r***, элементы, имеющие атрибуты из множества { ax_1 , …, ***axn*** }, однозначно определяют все остальные элементы кортежа, т.е. однозначно определяет весь кортеж.

Анализ наличия ключевых функциональных зависимостей в отношениях позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, не имеющие ключей;
- отношения с одним ключом;
- отношения с несколькими ключами.

Определение. Ключевую функциональную зависимость отношения ***r*** от аргументов { ay_1 , …, ***aym*** } будем называть **функцией** в том и только в том случае, если:

- количество аргументов результатов этой ключевой зависимости равно 1 – обозначим этот единственный атрибут результата функциональной зависимости через ***ay*** ;
- в каждом кортеже отношения ***r*** существует не более одного компонента с атрибутом ***ay*** ;
- проекция отношения ***r*** по атрибутам ax_1 , …, ***axn*** в случае, если количество указанных атрибутов больше 1, представляет собой декартово произведение.

Примечание. Определение декартова произведения см. в п. 1.5.7.

Функцией ***n*** - арного отношения будем называть **(*n* - *1*)** - арной функцией.

Заметим, что каждая функциональная зависимость 2-мощного ориентированного (**!**) отношения является ключевой функциональной зависимостью, а также функцией.

Анализ наличия функций в отношениях позволяет выделить следующие классы отношений:

- отношения, не имеющие функций;
- отношения, имеющие одну функцию;
- отношения, имеющие несколько функций.

2-мощные ориентированные отношения, которым соответствует две различных функции, будем называть **взаимно однозначными отношениями.**

Определение. Функцию отношения ***r*** будем называть **алгебраической операцией** в том и только том случае, если:

- отношение ***r*** принадлежит к классу отношений, у которых все унарные проекции (все домены) совпадают (см. п. 2.3.4).

2.3.6. Классические отношения, их представление и типология

Понятие классического нормализованного отношения было дано выше (см. определение в пункте 1.5.2).

Важной особенностью классического отношения является то, что его можно представить в виде таблицы , столбцы которой соответствуют используемым атрибутом, а строки – кортежам, входящим в состав отношения. Элементы кортежей в этой таблице представляются именами (идентификаторами) соответствующих объектов. Таблицы указанного вида являются основой для реляционных моделей баз данных (Мейер Д. 1997кн-Теори РБД). Поэтому эти таблицы иногда называют реляционными.

Упражнение 1.5.6.1. Построить реляционные таблицы фрагментов (подмножеств) некоторых отношений, например, отношения сложения, отношения умножения, генсалогических отношений, отношения, связывающего страны с их столицами, отношения, связывающего выполняемые проекты с их исполнителями и т.д.

Каждое классическое отношение есть множество знаков классических кортежей, имеющих одинаковую мощность и одинаковые атрибуты.

Классическим отношениям противопоставляются **неклассические отношения**, в состав которых могут входить:

- как кортежи, так и неориентированные множества;
- множества разной мощности;
- как классические, так и неклассические кортежи;
- кортежи, использующие разные **(!)** наборы атрибутов.

Классические отношения в математической литературе обычно называют просто отношениями. Неклассические отношения не являлись предметом серьезного анализа, т. к. они легко представимы в виде эквивалентных отношений классического вида. Но, поскольку в интеллектуальных системах важное значение имеет не только факт представимости, но и удобство (в частности, компактность) представления, некоторые классические отношения в памяти интеллектуальных систем целесообразно представлять в виде эквивалентных неклассических отношений.

2.3.7. Отношения предельного вида

Каждое конкретное отношение, относящееся к классу **"*отношение предельного вида*"**, представляет собой семейство знаков всевозможных **(!)** множеств, удовлетворяющих какому-то конкретному требованию (свойству). К такому классу отношений, в частности, можно отнести:

- семейство знаков всевозможных **(!)** классических кортежей, (1) каждый из которых использует один и тот же (заданный) набор атрибутов, для которого фиксируется (задается), во-первых, набор атрибутов и, во-вторых, набор множеств, однозначно **(!)** соответствующих указанному набору атрибутов. При этом каждый **(!)** из указанных выше классических кортежей должен удовлетворять следующим требованием: (1) использует все те и только те атрибуты, которые указаны выше, и (2) каждый компонент кортежа является элементом того из указанных выше множеств, которое соответствует атрибуту, которым отмечен этот компонент;
- множество всевозможных **(!)** классических кортежей ("предельный" характер этого отношения заключается в том, что оно является объединением всевозможных **(!)** классических отношений);
- множество всевозможных кортежей (не обязательно классических) – это отношение представляет собой объединение всевозможных ориентированных отношений.

Список такого рода конкретных отношений можно продолжить. Но, кроме таких "отношений предельного вида", существует целый ряд классов отношений предельного вида. К таким классам отношений можно отнести декартовы произведения, множества всевозможных сочетаний без повторений, шкалы множеств.

Декартовы произведения (прямые произведения)

Определение. Отношение $\boldsymbol{d}$ является **декартовым произведением** в том и только том случае, если:

1) отношение $\boldsymbol{d}$ является классическим;
2) в состав отношения $\boldsymbol{d}$ входит каждый **(!)** кортеж вида $\langle \boldsymbol{a_1} : \boldsymbol{x_{1i}},\ \boldsymbol{a_2} : \boldsymbol{x_{2i}},\ \dots,\ \boldsymbol{a_n} : \boldsymbol{x_{ni}} \rangle$ где:
    - $\boldsymbol{x_{1i}}$ есть элемент множества, являющегося унарной проекцией отношения $\boldsymbol{d}$ по атрибуту $\boldsymbol{a_1}$,
    - …
    - $\boldsymbol{x_{ni}}$ есть элемент множества, являющегося унарной проекцией отношения $\boldsymbol{d}$ по атрибуту $\boldsymbol{a_n}$.

Приложение. Из данного определения следует, что в состав отношения $\boldsymbol{d}$ не входят неориентированные множества (т.к. это отношение является классическим), а также не входят никакие другие кортежи кроме тех, которые указаны выше.

Добавление кортежей приведет либо к нарушению классического характера отношения d либо к расширению множеств являющихся его унарными проекциями.

Очевидно, что каждому **(!)** классическому отношению можно поставить в соответствие целое семейство декартовых произведений, являющихся надмножествами этого классического отношения. При этом очевидно, что в указанном семействе декартовых произведений существует **минимальное декартово произведение**, т.е. такое декартово произведение, которое является подмножеством всех **(!)** остальных декартовых произведений, входящих в это семейство. Для каждого классического отношения существует единственное минимальное декартово произведение. Классическое отношение и соответствующее ему минимальное декартово произведение имеют одинаковые атрибуты и для каждого атрибута – совпадающие унарные проекции. Каждое декартово произведение, является надмножеством задаваемого классического отношения, но не являющееся для этого классического отношения минимальным декартовым произведением, имеет по крайней мере одну унарную проекцию, которая является надмножеством соответствующей унарной проекции (т.е. проекции по тому же атрибуту) заданного классического отношения. Остальные унарные проекции рассматриваемого декартова произведения либо совпадают с соответствующими унарными проекциями заданного классического отношения, либо являются их надмножествами, но никогда не могут быть их подмножествами.

Упражнение 2.3.7.1. Могут ли существовать разные классические отношения, у которых совпадают минимальные декартовы произведения. Если да, то приведите примеры.

Заметим, что классическое отношение можно определить как отношение, для которого существует декартово произведение, подмножеством которого это отношение является.

Пусть отношения d представляет собой 2-мощное декартово произведение, пусть a_1 и a_2 – атрибуты, используемые отношением d, и пусть x_1 есть унарная проекция отношения d по атрибуту a_2. Введем следующее условное обозначение 2-мощного декартова произведения $d = x_1(a_1) \times x_2(a_2)$

Тернарное декартово произведение будем обозначать следующим образом $x_1(a_1) \times x_2(a_2) \times x_3(a_3)$.

Аналогичным образом обозначаются декартовы произведения любой другой арности.

Примечание. Указанные условные обозначения декартовых произведений разрешено использовать в языке **SCBs**.

Множества всевозможных перестановок

Рассмотрим классическое отношение, у которого:

- отсутствуют связки с кратными вхождениями элементов,
- все **(!)** его связки являются встречными друг другу, т.е. являются кортежами, имеющими одинаковые элементы, но входящими в кортежи под различными атрибутами.

Примечание. Поскольку рассматриваемое отношение является классическим, кратные связки в нем отсутствуют.

Очевидно, что у такого отношения все **(!)** элементы его области определения входят в состав каждого **(!)** его кортежа. Очевидно также, что для заданной области определения существует несколько отношений, обладающих указанными выше свойствами. Но существует одно, которое можно считать "отношением предельного вида" и которое будем называть множеством всех перестановок из заданного набора элементов.

Определение. Отношение p будем называть множеством всевозможных **перестановок** в том и только том случае, если оно обладает следующими свойствами:

- является классическим отношением;
- не имеет связок с кратными вхождениями элементов;
- все **(!)** его связки являются встречными друг другу (т.е. любые две связки отношения p являются встречными кортежами);

- каждый **(!)** встречный кортеж любого **(!)** кортежа, входящего в отношение ***p***, также входит в состав отношения ***p***.

Очевидно, что отношение, принадлежащее к классу множеств всевозможных перестановок однозначно определяется: (1) своей областью определения и (2) своей схемой, т.е. набором используемых атрибутов. Т.е. для построения отношения рассматриваемого класса достаточно знать его область определения и его схему.

При этом заметим, что мощность области определения для каждого класса совпадает с количеством используемых в нем атрибутов.

Заметим также, что, если для заданного канторовского множества ***s*** построить его ***n*** - ную декартову степень (где ***n*** есть мощность множества ***s***) и после этого исключить все **(!)** кортежи, имеющие кратные элементы, то полученное отношение будет принадлежать к классу множеств всевозможных перестановок.

Булеаны

Рассмотрим семейство неориентированных **(!)** отношений, не имеющих кратных связок и не имеющих связок с кратными вхождениями элементов. Для такого семейства отношений можно построить минимальное "отношение предельного вида", являющиеся подмножеством для всех отношений, удовлетворяющих указанным выше свойствам. Для этого достаточно **(1)** построить множество, являющееся результатом объединения областей определения всех отношений, входящих в состав заданного семейства неориентированных отношений, **(2)** для построенного множества построить семейство всевозможных **(!)** его подмножеств. Указанное "отношение предельного вида" будем называть **булеаном.**

Множества всевозможных сочетаний с повторениями (полные семейства сочетаний с повторениями)

Рассмотрим семейство ***m***-арных неориентированных отношений, не имеющих кратных связок и не имеющих связок с кратными вхождениями элементов. Для такого семейства отношений также можно построить минимальное "отношение предельного вида", т.е. минимальное отношение, являющееся надмножеством для всех отношений, удовлетворяющих указанным выше свойствам. Для этого необходимо (1) построить множество, являющееся объединения областей определения всех отношений, входящих в состав заданного семейства неориентированных отношений, (2) для построенного множества построить семейство всевозможных **(!)** его подмножеств, имеющих мощность, равную ***m***. Указанное "отношение предельного вида" будем называть множеством сочетаний из заданного множества по ***m*** элементов.

2.3.8. Типология 2-мощных отношений и связи между ними

Среди 2-мощных отношений можно выделить:

- 2-мощные отношения без функций
- 2-мощные отношения с одной функцией
- взаимно однозначные 2-мощные отношения (2-мощные отношения с двумя функциями)

- рефлексивные
- иррефлексивные
- частично рефлексивные

- симметричные
- антисимметричные
- частично симметричные

- транзитивные
- антитранзитивные
- частично транзитивные

- отношения эквивалентности (рефлексивные, симметричные, транзитивные).
- отношения предпорядка (рефлексивные и транзитивные).
- отношения частичного порядка (рефлексивные, антисимметричные, транзитивные).
- отношения линейного порядка.

Функциональные (однозначные) 2-мощные отношения – это 2-мощные отношения, для которых существуют, по крайней мере, одна унарная функция, т.е. по крайней мере один атрибут являющийся ключом.

К числу 2-мощных ориентированных отношений, использующих числовые атрибуты *1_* (быть 1-м компонентом кортежа) и *2_* (быть 2-м компонентом кортежа), относятся следующие уже рассмотренные нами выше базовые отношения языка SCB:

- Отношение принадлежности (множество знаков всевозможных пар принадлежности);
- Отношение непринадлежности (множество знаков всевозможных пар непринадлежности);
- Отношение нечеткой принадлежности (множество знаков всевозможных пар нечеткой принадлежности);
- Универсальное 2-мощное ориентированное отношение с атрибутами *1_* и *2_* (Множество знаков всевозможных ориентированных пар неуточняемого типа).

Отношение *r* является рефлексивным 2-мощным отношением в том и только в том случае, если:

1) оно является 2-мощным отношением со схемой { ***ai*** , ***aj*** };
2) для каждого **(!)** ***x*** из области определения отношения ***r*** кортеж ‹ ***ai*** : ***x***, ***aj*** : ***x*** › принадлежит этому отношению.

Примеры рефлексивных 2-мощных отношений: отношение с именем “***включение множеств***” (см. подраздел **Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

Отношение *r* является иррефлексивным 2-мощным отношением в том и только в том случае, если:

1) оно является 2-мощным отношением;
2) в рамках отношения *r* не существует ни одного кортежа, элементы (компоненты) которого бы совпадали.

Частично рефлексивные 2-мощные отношения (встречаются петли).
Симметричные 2-мощные отношения – пары на ребра!!
Антисимметричные 2-мощные отношения.
Частично симметричные 2-мощные отношения.
Транзитивные отношения.

Антитранзитивные (для каждых $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$, не существует $x_1 \rightarrow x_3$)
Частично транзитивные.

Отношения эквивалентности (рефлексивные, симметричные, транзитивные).
Отношения предпорядка (рефлексивные и транзитивные).
Отношения частичного порядка (рефлексивные, антисимметричные, транзитивные).
Отношения линейного порядка.

О п р е д е л е н и е . Отношение ***r*** является отношением **линейного порядка** в том и только в том случае, если:

1) оно является отношением частичного порядка с атрибутами ***ai*** и ***aj*** ;
2) для любых двух разных элементов (***x*** и ***y***) из области определения отношения ***r*** имеет место принадлежность отношению ***r*** либо кортежа ‹ ***ai*** : ***x***, ***aj*** : ***y***›, либо кортежа ‹ ***ai***:***y***, ***aj***:***x***›. Т. е. любые два элемента из области определения отношения ***r*** сравнимы.

Множество знаков всевозможных пар принадлежности, которое будем называть отношением принадлежности, является для языка SCB базовым отношением, с помощью которого в языке SCB осуществляется представление всех математических структур (множеств, кортежей, отношений). Таким образом, язык SCB осуществляет представление математических структур (в частности отношений) путем их сведения к отношению принадлежности. Оно является 2-мощным ориентированным отношением частично транзитивным и далее по классификации частично симметричным, частично рефлексивным.

Отношение принадлежности относится к классу 2-мощных отношений, знаки пар которого представляются в языке SCB специальным образом – в виде SCB-дуг.

Специальным видом 2-мощных отношений являются 2-мощные ориентированные отношения, являющееся подмножествами отношения принадлежности. Эти отношения не следует путать с атрибутами, которые также являются подмножествами отношения принадлежности.

2.3.9. Множества всевозможных соответствий как метаотношение, заданное на множестве всевозможных 2-мощных ориентированных отношений. Частные виды соответствий как подмножества метаотношения “соответствие” (быть соответствием)

Каждое конкретное соответствие между двумя множествами будем трактовать как тернарный кортеж, связывающий:

1) знак некоторого 2-мощного отношения – этому знаку присваивается атрибут “***отношение_***” (быть отношением – в данном случае речь идет только о 2-мощных отношениях);
2) знак пары, связывающий знак одного из заданных множеств со знаков соответствующего ему атрибута, используемого в указанном выше 2-мощном отношении – в этой паре используется атрибут “***атрибут_***” (быть атрибутом), а второй атрибут задается по умолчанию;
3) знак аналогичной пары связывающей знак второго из заданных множеств со знаком соответствующего ему атрибута.

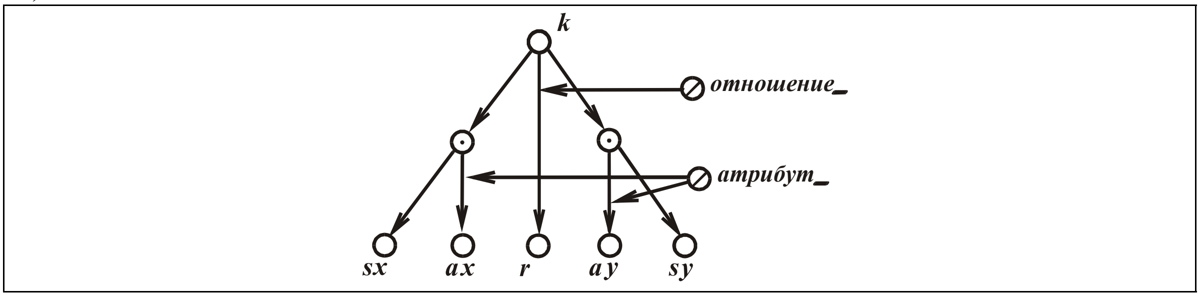
Множество знаков всевозможных конкретных соответствий есть не что иное, как одно из метаотношений, заданных на множестве всевозможных 2-мощных отношений (множество всевозможных 2-мощных отношений входит в область определения указанного метаотношения). Рассматриваемому метаотношению присвоим имя “***соответствие***” (быть соответствием).

О п р е д е л е н и е . Кортеж ***k*** задает соответствие между множеством ***x*** и множеством ***y***, т.е. имеет место

соответствие ⊗——►⊖ ***k***

в том и только том случае, если:

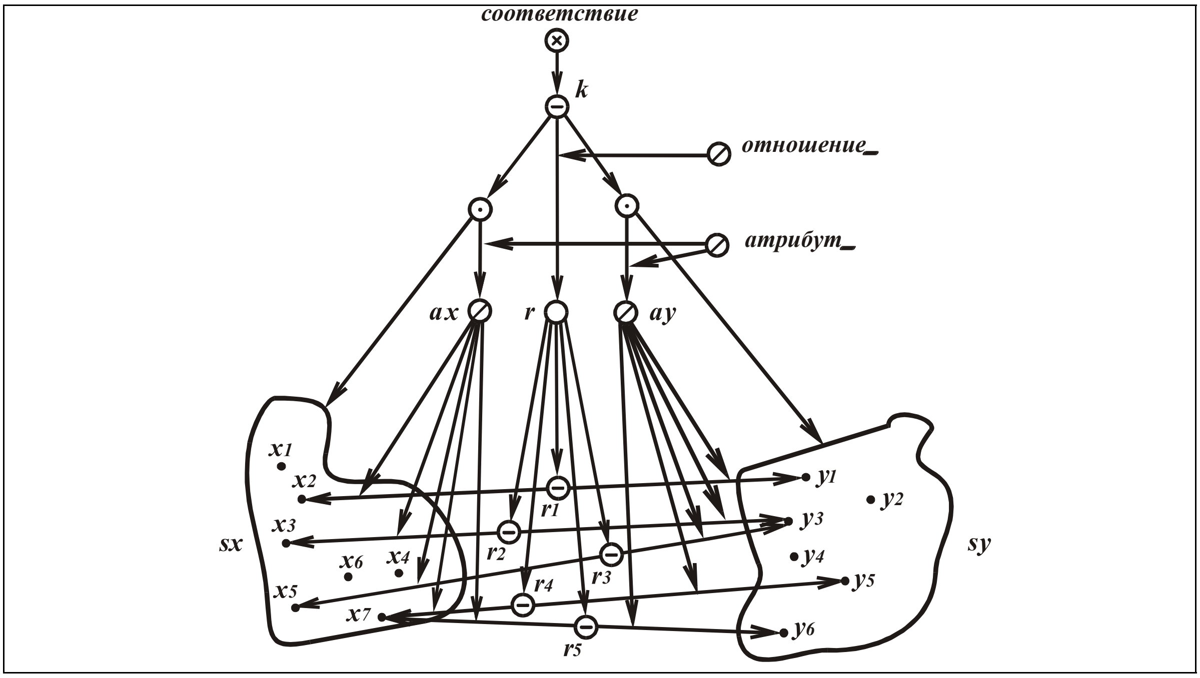
1) имеет место



2) ***r*** – 2-мощно ориентированное отношение с атрибутами ***ax*** и ***ay***;
Здесь ***k*** – знак конкретного соответствия между множеством ***sx*** и ***sy***,
sx – множество прообразов
sy – множество образов
r – отношение соответствия

3) $r \subseteq x(ax) \times y(ay)$

Пример соответствия между множеством и множеством (см. Таран Т.А. рис 3.1)

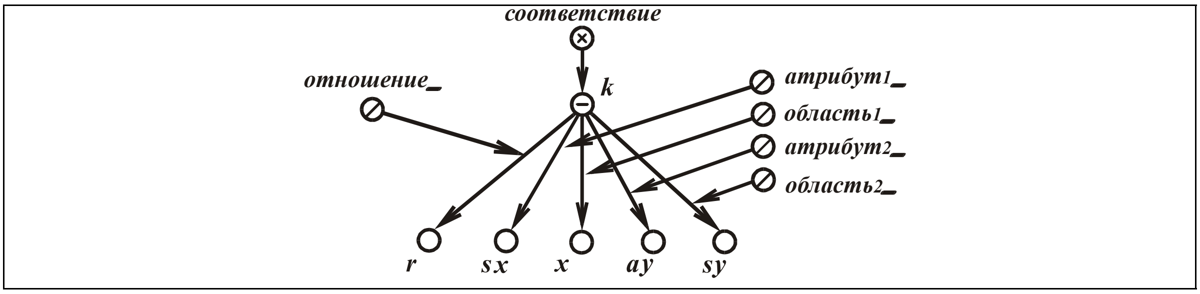


Примечание 1. В общем случае <u>не</u> все элементы множества ***x*** и множества ***y*** должны быть элементами области определения отношения ***r***. И, соответственно этому, <u>не</u> все элементы множества ***x*** должны быть элементами проекции отношения ***r*** по атрибуту ***ax*** (см. x_1, x_4, x_6), а также <u>не</u> все элементы множества ***y*** должны быть элементами проекции отношения ***r*** по атрибуту ***ay*** (см. y_2, y_4).

Примечание 2. Одному элементу множества ***x*** может соответствовать <u>несколько</u> **(!)** элементов множества ***y*** (см. элемент x_7 и пары r_4 и r_5). Аналогично этому, одному элементу множества ***sy*** может соответствовать несколько элементов множества ***x*** (см. элемент y_3 и пары r_2 и r_3).

Примечание 3. Множество ***x*** и множество ***y*** могут иметь общие элементы (в частности, одно из них может быть подмножеством другого) и даже могут совпадать.

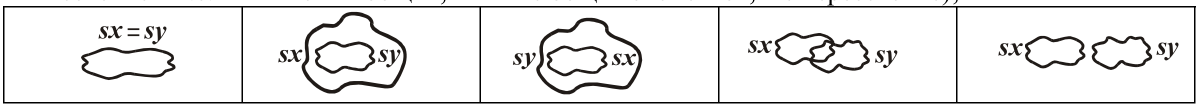
Примечание 4. Кортеж отношения "***соответствие***" (***быть соответствием***) можно было бы сделать 5-арным, явно включив в число его элементов знаки множеств ***x*** и ***y***, а также знаки атрибутов ***ax*** и ***ay***. Но тогда пришлось бы вводить дополнительные атрибуты для увязывания ***ax*** с ***x*** и ***ay*** с ***y***, например следующим образом:



Но у построенного таким образом отношения "***соответствие*** " для каждого (!) кортежа ***k*** будет существовать встречный – компоненты кортежа с атрибутами "***атрибут1_***" и "***область1_***" могут быть заменены местами с компонентами имеющими атрибуты "***атрибут2_***" и "***область2_***". Это обусловлено тем, что в соответствии между множествами ***sx*** и ***sy*** нет асимметрии.

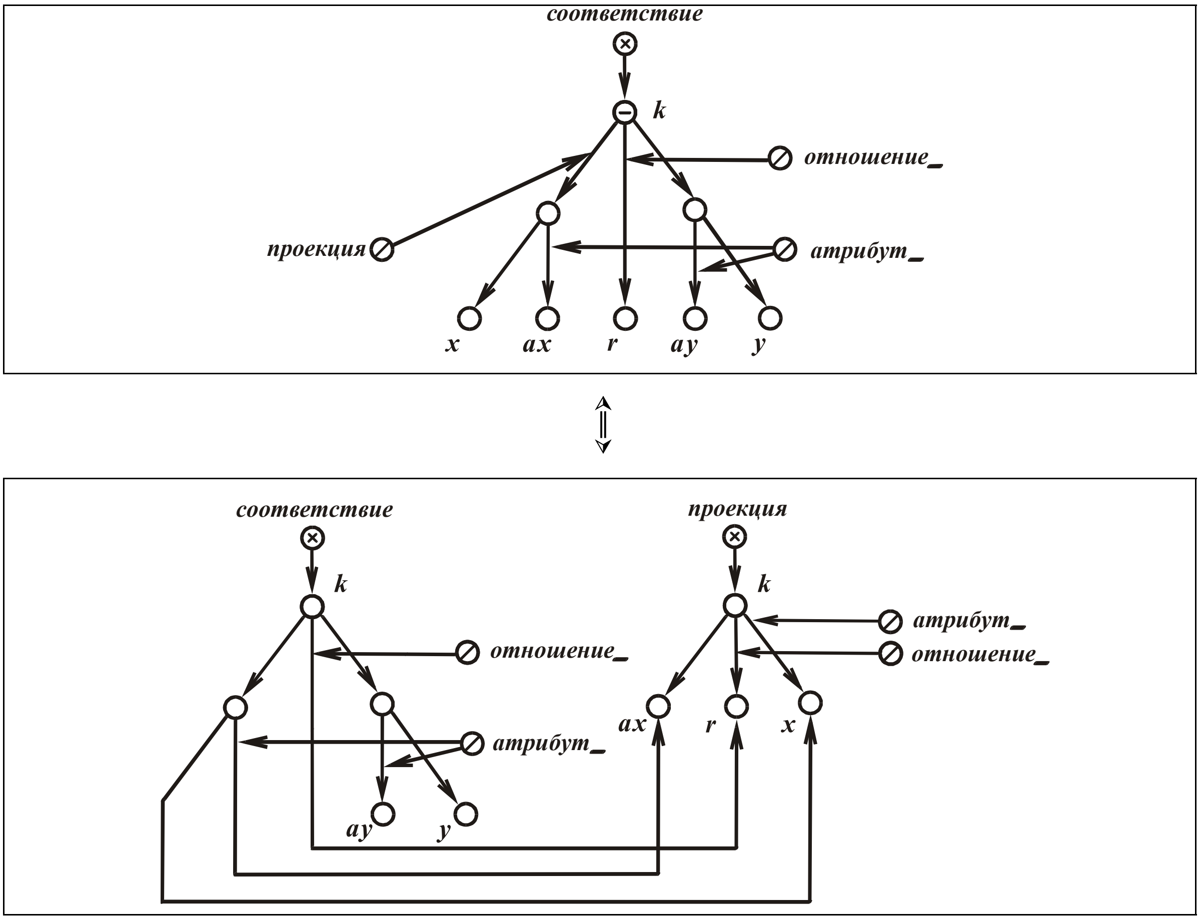
Типология соответствий определяется следующими факторами:

- как соотносятся между собой множество ***x*** и множество ***y*** (равенство, включение, строгое пересечение – т.е. наличие как общих, так и не общих элементов, не пересечение);

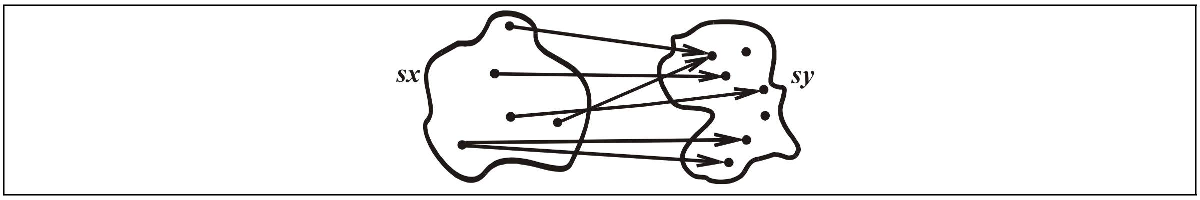


- как соотносятся множества ***x*** и ***y*** с унарными проекциями отношения ***r*** по соответствующим атрибутам (указанные множества могут совпадать с соответствующими унарными проекциями, а могут быть их подмножествами);
- имеются ли функциональные зависимости у отношения ***r*** , а если да, то сколько (одна или две).

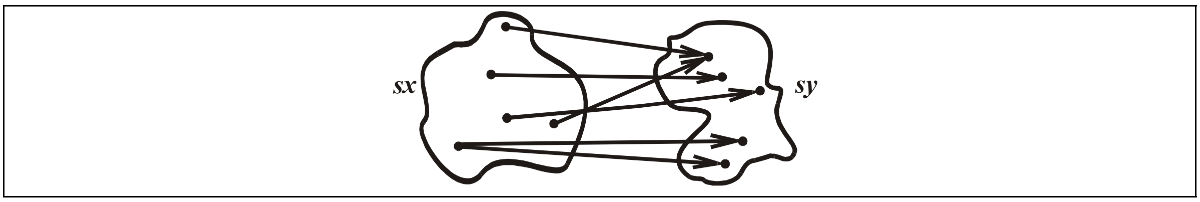
Определение. Отображением множества ***x*** на множество ***y***, будем называть такое соответствие между множеством ***x*** и множеством ***y***, в котором множество ***x*** является унарной проекцией соответствующего **2**-мощного отношения ***r*** по соответствующему атрибуту (***ax***), а не надмножеством указанной унарной проекции.



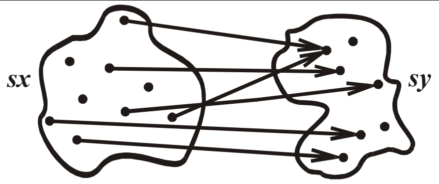
Примечание. Подчеркнем, что и с формальной стороны каждое конкретное отображение **(*k*)** является таким же соответствием, т.е. метаотношение **"*отображение*"** (***быть отображением***) является подмножеством (частным случаем) метаотношения "***соответствие***" (***быть соответствием***). Правда во вспомогательных кортежах метаотношение **"*отображение*"**, связывающее отображаемые множества с соответствующими им атрибутами, используется дополнительный атрибут **"*проекция_*"**(***быть проекцией***). Пример отображения (Таран Т.А. 1998 рис.3.2).



О п р е д е л е н и е . Сюръекцией множества ***x*** и множества ***y*** будем называть такое соответствие между множеством ***x*** и множеством ***y***, которое является одновременно отображением множества ***x*** на множество ***y*** , а также отображением множества ***y*** на множество ***x*** (пример см.Таран Т.А. рис.3.3).



О п р е д е л е н и е . Функциональным соответствием (однозначным соответствием) из множество ***x*** (с атрибутом ***ax***) во множество ***y*** (с атрибутом ***ay***), будем называть такое соответствие между множеством ***x*** (с атрибутом ***ax***) и множеством ***y*** (с атрибутом ***ay***), у которого входящее в его состав **2**-мощное ориентированное отношение ***r*** имеет ключ, каковым является атрибут ***ax***. Это значит, что компонент с атрибутом ***ax*** в кортеже, принадлежащему отношению ***r***, однозначно **(!)** определяет этот кортеж и, следовательно, однозначно определяет компонент с атрибутом ***ay*** в указанном кортеже. Т.е. каждому ***xi*** из множества ***x*** соответствует не более одного ***yi*** из множества ***y***.



О п р е д е л е н и е . Взаимно функциональным соответствием множества ***x*** и множества ***y*** (между множествами ***x*** и ***y***) будем называть такое соответствие между множествами ***x*** и ***y***, которое является одновременно функциональным соответствием как от множества ***x*** во множество ***y***, так и от множества ***y*** во множество ***x***.

О п р е д е л е н и е . Функциональным отображением множества ***x*** на множество ***y*** будем называть такое соответствие между ***x*** и ***y***, которое:

- является отображением множества ***x*** на множество ***y***;
- является функциональным соответствием из множества ***x*** **(!)** на множество ***y*** **(!)**.

О п р е д е л е н и е . Инъекцией множества ***x*** во множество ***y*** будем называть такое соответствие между ***x*** и ***y*** ,которое:

- является отображением множества ***x*** на множество ***y***;
- является функциональным соответствием из множества ***y*** **(!)** во множество ***x*** **(!)**.

О п р е д е л е н и е . Функциональной суръекцией из множества ***x*** во множество ***y*** будем называть такое соответствие между ***x*** и ***y*** , которое:

- является отображением ***x*** на ***y***;
- является отображением ***y*** на ***x***;
- является функциональным соответствием из ***x*** в ***y***.

Примечание. Если соответствие является функциональной суръекцией из ***x*** в ***y***, то оно является суръекцией и инъекцией множества ***y*** **(!)** во множество ***x*** **(!)**.

Примечание. Функциональную сюръекцию из множества ***x*** в множество ***y*** также называют биекцией множества ***y*** **(!)** во множество ***x*** **(!)**.

О п р е д е л е н и е . Взаимно однозначное отображение (***bj*** – однозначное отображение) ***sx*** в ***sy***:

- взаимно однозначное соответствие ***sx*** и ***sy*** ;
- отображает ***sx*** на ***sy***.

О п р е д е л е н и е . Взаимно однозначная сюръекция:

- взаимно однозначное соответствие ***x*** и ***y*** ;
- сюръекция ***x*** и ***y*** .

2.3.10. Типология тернарных отношений и связи между ними.

Среди тернарных отношений можно выделить:

- Тернарные отношения с одной функцией (2-мощной)
- Тернарные отношения с двумя функциями (2-мощными)
- Тернарные отношения с тремя функциями (2-мощными)
- Коммутативные
- Некоммутативные
- Ассоциативные
- Неассоциативные

У п р а ж н е н и е 2 . 3 . 1 0 . 1 . Являются ли указанные функции, соответствующие тернарным отношениям, операциями?

Ассоциативное тернарное отношение – это отношение, у которого для каждой пары кортежей вида
‹ $a_1 : x$, $a_2 : y$, $a_3 : xy$ › ‹ $a_1 : xy$, $a_2 : z$, $a_3 : xyz$ ›

имеются кортежи вида ‹ $a_1 : y$, $a_2 : z$, $a_3 : yz$ › ‹ $a_1 : x$, $a_2 : yz$, $a_3 : yz$ ›

Упражнение 2.3.10.2. Может ли быть ассоциативность без коммутативности?

К числу метаотношений, заданных на множестве тернарных отношений относится метаотношение ***“дистрибутивность”.***

Упражнение 2.3.10.3. Может ли коммутативное отношение быть неассоциативным?

2.3.11. Отношения над множествами произвольного вида

Каждое отношение, принадлежащее к классу отношений над множествами, характерно тем, что в его область определения входят знаки всевозможных множеств.

В подразделе 2 были рассмотрены основные соотношения между множествами, а также было рассмотрено описание этих соотношений в языке SCBs. Сейчас мы рассмотрим трактовку этих соотношений в графическом реляционном языке SCBg. Для этого необходимо всем основным теоретико-множественным соотношениям поставить в соответствие определенные отношения над множествами.

К числу 2-мощных отношений над множествами принадлежит отношения, которым поставим в соответствие следующие идентификаторы:

- ***включение множества***
  - = ***быть включением одного множества*** /* подмножества */ ***в другое*** /* надмножество */
  - = ***Множество всевозможных ориентированных пар, каждая из которых связывает некоторое множество с его подмножеством***
  - = ***теоретико-множественное включение***;
- ***строгое включение множества***
  - = ***быть строгим включением одного множества*** /* собственного подмножества */ ***в другое*** /* надмножество */
  - = ***Множество всевозможных ориентированных пар, каждая из которых связывает некоторое множество с его собственным подмножеством***
  - = ***теоретико-множественное строгое включение***;
- ***равенство множеств***
  - = ***быть равными множествами***
  - = ***Множество всевозможных неориентированных пар, каждая из которых связывает равные друг другу множества***
  - = ***теоретико-множественное равенство***;
- ***эквивалентность множеств по совпадению элементов***
  - = ***множества с одинаковыми элементами***
  - = ***быть парой множеств, имеющих одинаковые элементы***
  - = ***Множество всевозможных неориентированных пар, каждая из которых связывает множества с одинаковыми элементами***;
- ***пересекающиеся множества***
  - = ***быть парой пересекающихся множеств***
  - = ***Множество всевозможных неориентированных пар, каждая из которых связывает два пересекающихся множества***;

Нельзя также забывать, что к числу 2-мощных отношений над множествами относятся следующие базовые (!) для языка SCB отношения:

SCB

- ***Отношение принадлежности***
  = ***Множество всевозможных знаков пар принадлежности***;
- ***Отношение непринадлежности***
  = ***Множество всевозможных знаков пар не являющихся парами принадлежности***
  = ***Множество всевозможных знаков пар непринадлежности.***

В языке SCB знак пары принадлежности называется SCB-дугой) и изображается (в языке SCBg) линией со стрелкой. В языке SCB знак пары непринадлежности будем называть **негативной SCB-дугой** и изображать (в языке SCBg) перечеркнутой линией со стрелкой. Следует особо подчеркнуть то, что отношение непринадлежности является удобным средством представления (изображения) множеств, каждое из которых состоит из каких угодно элементов, кроме не элементов некоторого заданного множества. Множество указанного вида будем называть отрицанием заданного множества, дополнением заданного множества до некоторого условного универсального множества или негативным множеством по отношению к заданному множеству. Итак, принадлежность некоторого элемента ***x*** множеству, которое является отрицанием (универсальным дополнением) множества ***s*** изображается в языке SCB путем проведения пары непринадлежности из ***s*** в ***x***. Таким способом, в частности, представляются и отрицательные отношения:

- невключение множества,
- не быть строгим включением множества,
- неравенство множеств,
- не быть множествами с одинаковыми элементами,
- непересекающиеся множества.

К числу тернарных отношений над множествами принадлежат отношения, которым поставим в соответствие следующие идентификаторы:

- ***объединение множеств***
  = ***множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два множества с результатом их объединения***
  = ***теоретико-множественное объединение***;
- ***соединение множеств***
  = ***множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два множества с результатом их соединения***;
- ***разбиение множества***
  = ***множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два непересекающихся (!) множества с результатом их объединения***;
- ***пересечение множеств***
  = ***множество ориентированных троек, каждая из которых связывает некоторые два множества с результатом их пересечения***
  = ***теоретико-множественное пересечение***;
- ***разность множеств***
  = ***множество ориентированных троек, каждой из которых связывает некоторые два множества*** /* уменьшаемое и вычитаемое */ ***с их разностью***
  = ***теоретико-множественная разность***;
- ***симметрическая разность множеств***
  = ***множество ориентированных троек, каждой из которых связывает некоторые два множества с их симметрической разностью***
  = ***теоретико-множественная симметрическая разность.***

Подчеркнем, что некоторые из перечисленных отношений целесообразно обобщить, разрешив использование связок произвольной мощности. Так, например,

- отношение **равенство множеств** будем трактовать как множество неориентированных связок, каждая из которых представляет собой семейство из произвольного числа равных друг другу множеств;

- отношение **множество с одинаковыми элементами** будем трактовать как множество неориентированных связок, каждая из которых представляет собой семейство из <u>произвольного</u> числа множеств, имеющих по крайней мере один общий для их всех элемент;
- отношение **объединение множеств** будем трактовать как множество ориентированных связок, каждая из которых связывает некоторый набор из <u>произвольного</u> числа множеств с результатом их объединения;
- отношение **соединение множеств** будем трактовать как множество ориентированных связок, каждая из которых связывает некоторый набор из <u>произвольного</u> числа множеств с результатом их соединения;
- отношение **разбиение множества** будем трактовать как множество ориентированных связок, каждая из которых связывает некоторый набор из <u>произвольного</u> числа <u>попарно непересекающихся</u> множеств с результатом их объединения;
- отношение **пересечение множеств** будем трактовать как множество ориентированных связок, каждая из которых связывает некоторый набор из <u>произвольного</u> числа множеств с результатом их пересечения.

Кроме этого введем ещё одно отношение со связками различной мощности:

- отношение **попарно непересекающиеся** множества, которое будем трактовать как множество неориентированных связок, каждая из которых представляет собой семейство из <u>произвольного</u> числа попарно <u>не</u>пересекающихся множеств. Заметим, что 2-мощный вариант связок рассматриваемого отношения является вырожденным и может быть выражен с помощью отношения <u>не</u>принадлежности, т.е. путем отрицания принадлежности этой связки к отношению **пересекающегося множества.**

О п р е д е л е н и е отношения "***включение множества***". Будем говорить, что

k ≺— ***включение множества*** в том и только в том случае, если:

1) ***k*** = ‹ ***над_***: ***s1*** , ***под_***: ***s2*** › ; т.е. ***k*** – есть 2-мощный кортеж с атрибутами ***над_***(быть надмножеством) и ***под_***(быть подмножеством);
2) для <u>каждой</u> **(!)** конструкции вида ***s2*** —≻ ***x*** существует конструкция вида ***s1*** —≻ ***x***, т.е. каждый элемент множества является элементом множества ***s1***. А, точнее, каждому <u>вхождению</u> **(!)** какого-либо элемента во множество ***s2*** соответствует вхождение этого же элемента во множество ***s1***.
3) для каждого ***x*** количество конструкций вида ***s2*** —≻ ***x*** <u>не превышает</u> количества конструкций вида ***s1*** —≻ ***x***. Т.е. каждый элемент множества ***s1*** <u>либо</u> вообще не входит в число элементов множества ***s2*** , <u>либо</u> входит с меньшей кратностью, либо входит с равной кратностью (но не с большей кратностью).

В рамках кортежа, принадлежащего отношению "***включение множества***", компонент с атрибутом "***над_***" будем называть надмножеством, а компонент с атрибутом "***под_***" – подмножеством.

Отношение **включение множеств** является: 1) 2-мощным, 2) ориентированным, 3) классическим, 4) без функций, 5) рефлексивным, 6) антисимметричным, 7) транзитивным.

О п р е д е л е н и е отношения "***строгое включение множества***". Будем говорить, что ***k*** ≺— ***строгое включение множества*** в том и только в том случае, если:

- ***k*** = ‹ ***над_***: ***s1*** , ***под_***: ***s2*** › ;
- ***k*** ≺— ***включение множества***;
- существует по крайней мере один элемент x, для которого справедливо следующее:
  - ***s1*** —≻ ***x*** ;
  - <u>либо</u> не существует конструкций вида ***s2*** —≻ ***x***;

    <u>либо</u> количество конструкций вида ***s1*** —≻ ***x*** , больше, чем количество конструкций вида ***s2*** —≻ ***x*** (т.е. число позитивных SCB-дуг, проведенных из ***s1*** в ***x***, больше числа позитивных SCB-дуг, проведенных из ***s2*** в ***x***).

Обобщение метаотношения "***включение множества***" – неориентированное **(!)** метаотношение "семейство вложенных множеств".

О п р е д е л е н и е метаотношения “***семейство вложенных множеств***”. Конструкция вида [***k*** ≺— ***семейство вложенных множеств*** **;**] эквивалентна конструкции следующих высказываний**:**

- Существует по крайней мере одна конструкция вида [***k*** —≻ **_*x1***, **_*x2*** **;**]
- Если существует конструкция вида [***k*** —≻ **_*x1***, **_*x2*** **;**],
- то справедливо следующее дизъюнктивное высказывание**:**
  - либо существует конструкция вида [***включение множества*** —≻ (***над_*** **:** **_*x1***, ***под_*** **:** **_*x2***) **;**]
  - либо существует конструкция вида [***включение множества*** —≻ (***над_*** **:** **_*x2***, ***под_*** **:** **_*x1***) **;**]

О п р е д е л е н и е . Минимальным в семействе вхождений множеств будем называть такое множество, которое включено во все остальные множества указанного семейства**.**

О п р е д е л е н и е отношения “***равенство множеств***”**.**

Будем говорить, что ***k*** ≺— ***равенство множеств*** в том и только в том случае, если**:**

1) ***k*** **=** {***s1***, ***s2***, **…**, ***sn***}**;**
2) для каждой **(!)** пары **(!)** множеств (***si*** , ***sj***) из семейства множеств {***s1***, ***s2***, **…**, ***sn***} имеет место следующее:
   - **‹ *над_* : *si*, *под_* : *sj* › ≺— *включение множества*;**
   - **‹ *над_* : *sj*, *под_* : *si* › ≺— *включение множества*;**

Т.е. равные множества – это множества, состоящие из одинаковых элементов, каждый из которых имеет **одинаковое** количество вхождений во все указанные множества**.**

О п р е д е л е н и е отношения “***множество с одинаковыми элементами***”**.**

Будем говорить, что ***k*** ≺— ***множество с одинаковыми элементами*** в том и только в том случае, если:

- ***k*** **=** {***s1***, ***s2***, **…**, ***sn***}**;**
- для каждой **(!)** пары **(!)** множеств (***si*** , ***sj***) из семейства множеств {***s1*** , ***s2*** , **…**, ***sn***} имеет место следующее:
  - для каждой структуры вида ***si*** —≻ ***x*** существует структура вида ***sj*** —≻ ***x***, т.е. каждый элемент множества ***si*** является также и элементом множества ***sj*** (при этом кратность вхождения этого элемента в ***si*** и в ***sj*** не учитывается)
  - для каждой структуры вида ***sj*** —≻ ***x*** существует структура вида ***si*** —≻ ***x*.**

О п р е д е л е н и е отношения “***пересекающегося множества***”**.**

Будем говорить, что ***k*** —≻ ***пересекающееся множество*** в том и только в том случае, если:

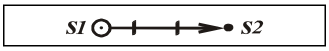
- ***k*** **=** {***s1***, ***s2***, **…**, ***sn***}**;**
- существует ***x*** такой, что для каждого множества ***si*** из семейства {***s1***, ***s2***, **…**, ***sn***} имеет место конструкция ***si*** —≻ ***x*.**

О п р е д е л е н и е отношения “***отношение непринадлежности***”**.**

SCB

Будем говорить, что знак ориентированной (упорядоченной) пары < ***s1*** , ***s2*** > является элементом отношения непринадлежности, в том и только в том случае, если не существует ни одной пары принадлежности вида ***s1*** —≻ ***s2*.**

Пары ***отношения непринадлежности*** будем называть парами непринадлежности и изображать SCBg-конструкциями вида



SCB

и SCBs-конструкциями вида

s1 —≻ ***s2*** **;**	≺═≻	***s2*** ≺— ***s1*** **;**

О п р е д е л е н и е отношения “***объединения множеств***”. Будем говорить, что $\boldsymbol{k \prec\!-}$ ***объединение множеств*** в том и только в том случае, если:

1) $\boldsymbol{k = \langle s_1, s_2, \ldots, sn}$, ***объединение_***: $\boldsymbol{sm \rangle}$;
2) для каждой конструкции вида $\boldsymbol{si \ -\!\succ \ e}$ (где $\boldsymbol{si}$ есть элемент множества $\boldsymbol{k}$, не отмеченный атрибутом “***объединение_***”) существует конструкция $\boldsymbol{sm \ -\!\succ \ e}$;

для каждой конструкции вида $\boldsymbol{sm \ -\!\succ \ e}$ существует множество $\boldsymbol{si}$ из семейства $\{\boldsymbol{s_1, s_2, \ldots, sn}\}$ такое, что $\boldsymbol{si \ -\!\succ \ e}$;
для каждого $\boldsymbol{e}$ имеет место следующее:
<u>пусть</u> $\boldsymbol{x_1}$ есть кратность вхождения некоторого заданного элемента $\boldsymbol{e}$ во множество $\boldsymbol{s_1}$ (т.е. количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{s_1}$) $\boldsymbol{x_2}$ – количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{s_2}$, …, $\boldsymbol{xn}$ – количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{sn}$ и пусть $\boldsymbol{xmax}$ максимальное из этих чисел, <u>тогда</u> количество вхождений указанного элемента $\boldsymbol{e}$ во множество $\boldsymbol{sm}$ равняется $\boldsymbol{xmax}$.

Примечание. Если элемент х не входит в число элементов множества $\boldsymbol{si}$, то количество вхождений этого элемента в указанное множество считается равным нулю.

О п р е д е л е н и е отношения “***соединение множеств***”.

Будем говорить, что $\boldsymbol{k \prec\!-}$ ***соединение множеств*** в том и только в том случае, если:

1) $\boldsymbol{k = \langle s_1, s_2, \ldots, sn}$, ***соединение_***: $\boldsymbol{sm \rangle}$;
2) для каждой конструкции вида $\boldsymbol{si \ -\!\succ \ e}$ (где $\boldsymbol{si}$ есть множество из семейства$\{\boldsymbol{s_1, s_2, \ldots, sn}\}$) существует конструкция $\boldsymbol{sm \ -\!\succ \ e}$;
3) для каждой конструкции вида $\boldsymbol{sm \ -\!\succ \ e}$ существует множество $\boldsymbol{si}$ из семейства $\{\boldsymbol{s_1, s_2, \ldots, sn}\}$ такое, что $\boldsymbol{si \ -\!\succ \ e}$;
4) для каждого $\boldsymbol{e}$ имеет место следующее:
   <u>пусть</u> $\boldsymbol{x_1}$ – количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{s_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ – количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{s_2}, \ldots, \boldsymbol{xen}$ – количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{sn}$,

   <u>тогда</u> количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{sm}$ Равно $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

О п р е д е л е н и е отношения “***разбиение множеств***”.

Будем говорить, что $\boldsymbol{k \prec\!-}$ ***разбиение множеств*** в том и только в том случае, если:

1) $\boldsymbol{k = \langle s_1, s_2, \ldots, sn}$, ***объединение_***: $\boldsymbol{sm \rangle}$; $\boldsymbol{k \prec\!-}$ ***объединение множеств***;
2) для каждой пары множеств $\{\boldsymbol{si}, \boldsymbol{sj}\}$ из семейства $\{\boldsymbol{s_1, s_2, \ldots, sn}\}$ имеет место следующее:
   - не существует $\boldsymbol{e}$ такого, что $\boldsymbol{si \ -\!\succ \ e}$; $\boldsymbol{sj \ -\!\succ \ e}$; Т.е. не существует общих элементов у множеств $\boldsymbol{si}$ и $\boldsymbol{sj}$.

О п р е д е л е н и е отношения “***пересечение множеств***”.

Будем говорить, что $\boldsymbol{k \prec\!-}$ ***пересечение множеств*** в том и только в том случае, если:

1) $\boldsymbol{k = \langle s_1, {}_2, \ldots, sn}$, ***пересечение_***: $\boldsymbol{sm \rangle}$;
2) для каждой конструкции вида $\boldsymbol{s_1, s_2, \ldots, sn \ -\!\succ \ e}$ существует конструкция вида $\boldsymbol{sm \ -\!\succ \ e}$
3) и наоборот: из $\boldsymbol{sm \ -\!\succ \ e}$ следует $\boldsymbol{s_1, s_2, \ldots, sn \ -\!\succ \ sm}$
4) для каждого $\boldsymbol{e}$, являющегося элементом множества $\boldsymbol{sm}$ имеет место следующее:
   <u>пусть</u> $\boldsymbol{x_1}$ – количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{s_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ – количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{s_2}$, … , $\boldsymbol{xn}$ – количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{sn}$, $\boldsymbol{xmin}$ – минимальное из перечисленных чисел,
   <u>тогда</u> количество вхождений $\boldsymbol{e}$ в $\boldsymbol{sm}$ равно $\boldsymbol{xmin}$.

О п р е д е л е н и е отношения “***разность множеств***”.

Будем говорить, что $\boldsymbol{k \prec\!-}$ ***разность множеств*** в том и только в том случае, если:

1) $\boldsymbol{k = \langle}$ ***уменьшаемое_***: $\boldsymbol{s_1}$, ***вычитаемое_***: $\boldsymbol{s_2}$, ***разность_***: $\boldsymbol{s_3 \rangle}$;

2) для каждой конструкции вида s_1 −≻ ***e*** ; s_2 −≻ ***e***; существует <u>одна</u> **(!)** и только одна конструкция вида s_3 −≻ ***e***; Т.е. каждый элемент множества s_1, не являющийся элементом множества s_2, входит в число элементов множества s_3, причем указанный элемент входит в s_1 и в s_3 с <u>одинаковой</u> кратностью;

3) и наоборот из s_3 −≻ ***e*** следует одна и только <u>одна</u> структура вида s_1 −≻ ***e*** ; s_2 −≻ ***e***. Если ***e*** входит в s_1 с кратностью ***m***, а в s_2 с кратностью ***n*** (***m*** > ***n***), то он входит в s_3 с кратностью ***m - n***;

О п р е д е л е н и е отношения "***симметрическая разность множеств*** ".

Будем говорить, что ***k*** ≺− ***симметрическая разность множеств*** в том и только в том случае, если существует конструкция вида:

k = ‹ s_1 , s_2 , ***разность_***: s_3 ›;

‹ s_1 , s_2 , ***объединение_***: ***sy*** › ≺− ***объединение множеств***;

‹ s_1 , s_2 , ***пересечение_***: ***sp*** › ≺− ***пересечение множеств***;

‹ ***уменьшаемое_***: ***sy*** , ***вычитаемое_***: ***sp*** , ***разность_***: s_3 > ≺− ***разность множеств***;

О п р е д е л е н и е отношения "***попарно непересекающиеся множества***".

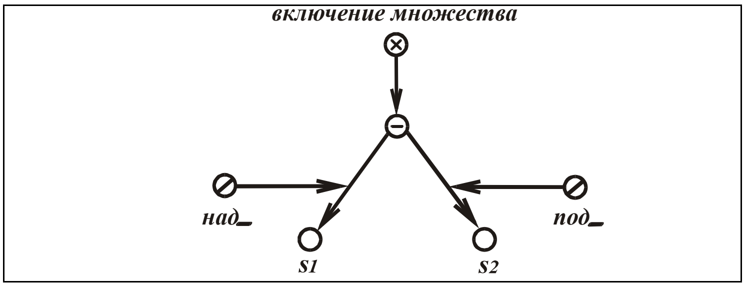
Будем говорить, что ***k*** ≺− ***попарно непересекающиеся множества*** в том и только в том случае, если:

1) ***k*** = {s_1 , s_2 , …, ***sn***};
2) для <u>каждой</u> (!) пары (!) множеств {***si*** , ***sj***} из семейства множеств {s_1 , s_2 , …, ***sn***} имеет место следующее:
   - <u>не</u> существует ***e*** такого, что ***si*** −≻ ***e***; ***sj*** −≻ ***e***; Т.е. не существует общих элементов у множеств ***si*** и ***sj***.

В подразделе были введены специальные SCBs-конструкции, описывающие различные соотношения между множествами. Рассмотрим перевод этих SCBs-конструкций на язык SCBg и, соответственно, на ядро языка SCBg.

$s_1 \supseteq s_2$

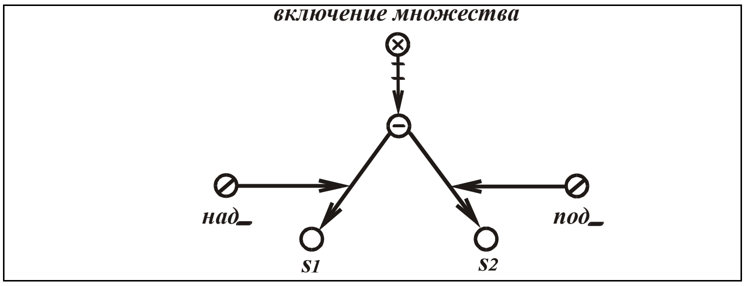
≺═≻



⇕

включение множества −≻ ‹ ***над_***: s_1 , ***под_***:s_2 ›

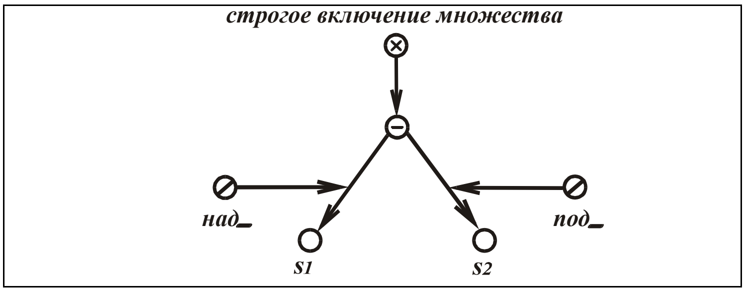
$s_1 \not\supseteq s_2$ $\Longleftrightarrow$



$\Updownarrow$

включение множества −≻ ‹ ***над_***: *s1* , ***под_***:*s2* ›

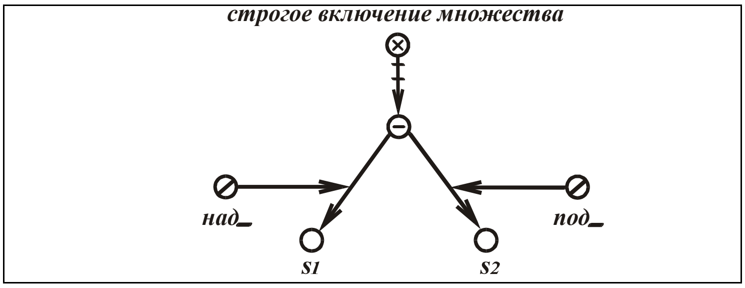
$s_1 \supset s_2$ $\Longleftrightarrow$



$\Updownarrow$

строгое включение множества −≻ ‹ ***над_***: *s1* , ***под_***:*s2* ›

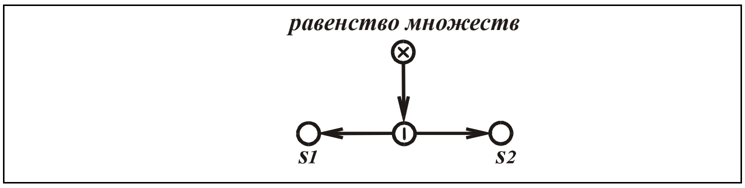
s1 ‾ *s2* $\Longleftrightarrow$



$\Updownarrow$

строгое включение множества −≻ ‹ ***над_***: *s1* , ***под_***:*s2* ›

s1 − *s2* $\Longleftrightarrow$

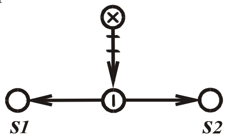


$\Updownarrow$

равенство множеств −≻ { *s1* , *s2* }

$s_1 - s_2$ ⟺

равенство множеств

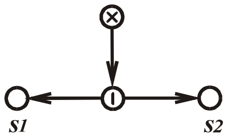


⇕

равенство множеств −≻ $\{ s_1, s_2 \}$

$s_1\ ^{-}\ s_2$ ⟺

множества с одинаковыми элементами

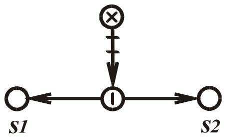


⇕

множества с одинаковыми элементами −≻ $\{ s_1, s_2 \}$

$s_1 - s_2$ ⟺

множества с одинаковыми элементами

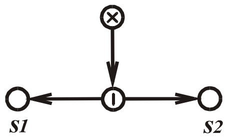


⇕

множества с одинаковыми элементами −≻ $\{ s_1, s_2 \}$

$s_1 - s_2$ ⟺

пересекающиеся множества

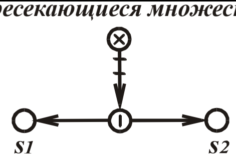


⇕

пересекающиеся множества −≻ $\{ s_1, s_2 \}$

⟺

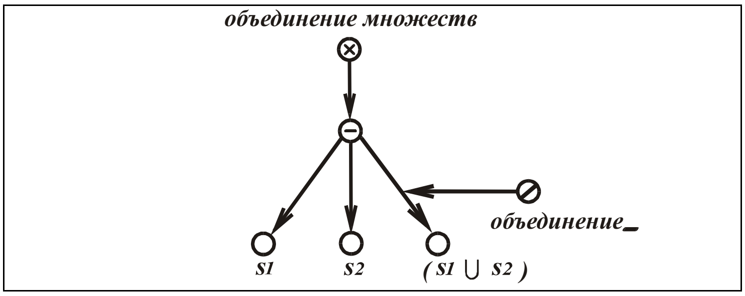
пересекающиеся множества



$s_1 - s_2$

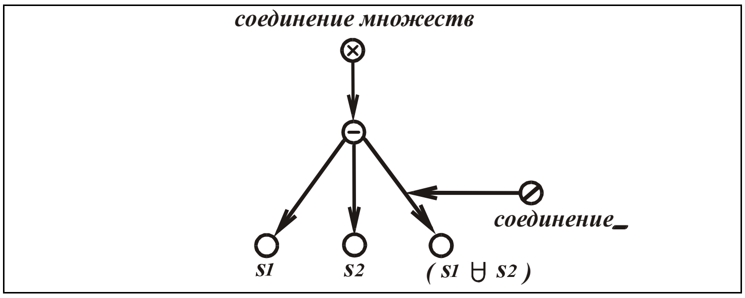
пересекающиеся множества $\rightarrowtail$ { *s1*, *s2* }

s1 — *s2* $\Longleftrightarrow$



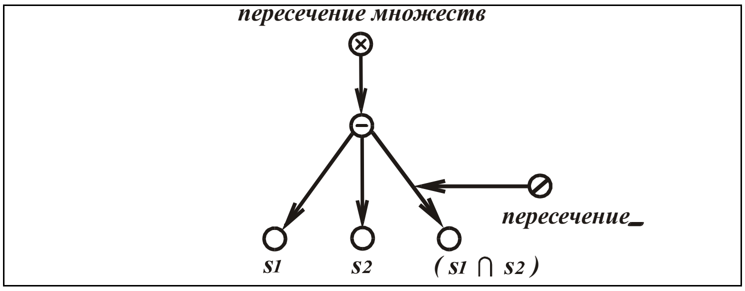
объединение множеств $\rightarrowtail$ ‹ *s1*, *s2*, ***объединение_***:(*s1* — *s2*)›

s1 — *s2* $\Longleftrightarrow$



соединение множества $\rightarrowtail$ ‹ *s1*, *s2*, ***соединение _***:(*s1* — *s2*) ›

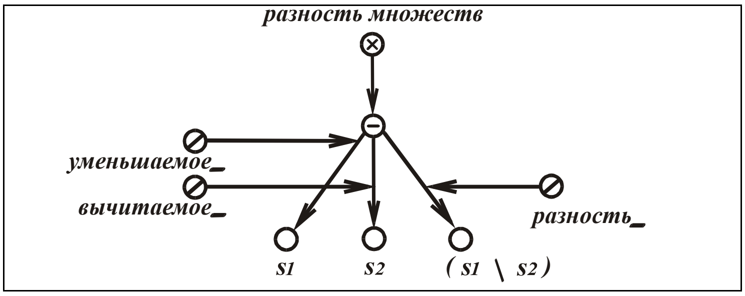
s1 — *s2* $\Longleftrightarrow$



пересечение множеств $\rightarrowtail$ ‹ *s1*, *s2*, ***пересечение_***:(*s1* — *s2*) ›

s1 – s2

⟺

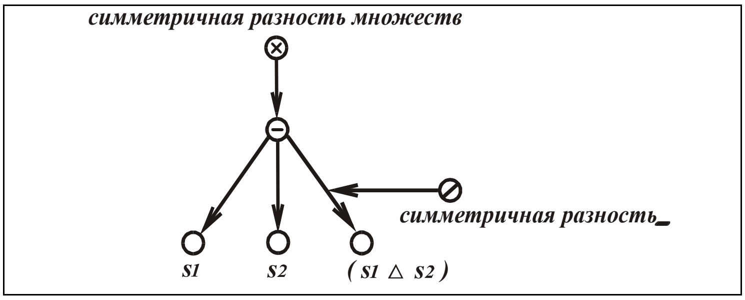


⇕

разность множеств –> ‹ ***уменьшаемое_***: *s1* ,
вычитаемое_: *s2* , ***разность_***: (*s1* – *s2*) ›

s1 △ s2

⟺



⇕

симметричная разность множеств –> ‹ *s1* , *s2* ,
симметричная разность_: (*s1* △ *s2*) ›

Примечание. Следует четко отличать:

- Отношение синонимии (множество знаков пар синонимии, множество знаков пар равенства знаков);
- Отношение эквивалентности множеств по набору элементов;
- Отношение равенства множеств (множество знаков пар равенства множеств);
- Отношение равенства кортежей;
- Отношение равномощности множеств (отношение эквивалентности множества по мощности);
- Отношение эквивалентности множеств по количеству элементов.

Завершая рассмотрение отношений над множествами приведем некоторые свойства введенных нами отношений:

включение множества ⊃ ***строгое включение множества***;

строгое включение множества – ***равенство множеств***;

равенство множеств ⊃ ***множества с одинаковыми элементами***;

разбиение множества ⊂ ***объединение множеств***;

разбиение множества ⊂ ***соединение множеств***;

объединение множеств – ***соединение множеств***.

Упражнение 2.3.11.1. Могут ли пересекаться два ориентированных отношения, которые имеют <u>разные</u> схемы (разные наборы атрибутов)?

Р е ш е н и е : Да, поскольку каждое отношение, "зная" свою схему имеет возможность учитывать только свои атрибуты, т.е. атрибуты, входящие в его схему. Поэтому связки разных отношений, являющиеся равными множествами, целесообразно "склеивать" независимо от распределения атрибутов. При этом надо внимательно следить за теми атрибутами, которые являются общими для отношений, связки которых склеиваются. Связки, являющиеся равными множествами и даже равными кортежами, целесообразно сохранять только в рамках одного отношения (кратные связки, встречные связки – см. пункт 2.3.2).

2.3.12. Отношения над кортежами произвольного вида

Отношение ”***включение кортежа***”. Кортеж ***ki*** включает в себя кортеж ***kj*** (т.е. является его подкортежем) в том и только том случае, если каждый элемент кортежа ***kj*** входит в кортеж ***ki*** под тем же атрибутом.

Отношение ”***пересечение кортежей***”. Кортеж ***ke*** является результатом пересечения кортежей ***ki*** и ***kj*** в том и только в том случае, если каждый элемент кортежа ***ke*** входит в кортеж ***ki*** и кортеж ***kj*** под тем же атрибутом.

Отношение ”***равенство кортежей***”.

Будем говорить, что кортеж ***ki*** равен кортежу ***kj*** в том и только том случае, если:

1) указанные кортежи являются равными множествами;
2) существует взаимно однозначное соответствие, которое каждому вхождению элемента в кортеж ***ki*** ставит в соответствие вхождение этого же элемента, но в кортеж ***kj***, причем, с теми же атрибутами и, наоборот, каждому вхождению элемента в кортеж ***kj*** ставит в соответствие вхождение этого же элемента кортеж ***ki***, причем, с теми же атрибутами.

Напомним, что вхождение элемента в кортеж может вообще не иметь атрибута, может иметь один атрибут, может иметь несколько атрибутов.

В языке SCB два равных кортежа, не являющиеся парами принадлежности, считаются совпадающими, т.е. считаются одним и тем же кортежем. Поэтому в тексте языка SCB не могут присутствовать разные SCB – узлы, являющиеся знаками равных кортежей. Такие SCB – узлы должны быть склеены.

Единственный вид кортежей, которые в языке SCB могут не совпадать, – это пары принадлежности. Двум равным парам принадлежности в языке SCB соответствуют кратные SCB – дуги.

2.3.13. Отношения над отношениями

Понятие отношений над отношениями было нами введено в пункте 1.5.4. Будем считать, что отношение ***r*** относится к классу отношений над отношениями (к классу метаотношений) в том и только том случае, если:

1) в область определения отношения ***r*** входят либо знаки всевозможных отношений, либо знаки отношений некоторого класса;
2) в состав каждой связки отношения ***r*** входит знак некоторого отношения.

Анализ области определения метаотношений позволяет выделить следующие классы таких отношений:

- отношения над всевозможными отношениями;
- отношения над классическими отношениями;
- отношения над ориентированными отношениями;
- отношения над неориентированными отношениями;
- отношения над 2-мощными ориентированными отношениями;
- отношения над 2-мощными неориентированными отношениями и т.д.

Выше при рассмотрении типологии отношений мы ввели целый ряд понятий, формальное уточнение которых требует введения <u>метаотношений</u>, соответствующих этим понятиям. К числу указанных понятий относятся такие понятия, как схема отношения(см. пункт 2.3.3), проекция (см. пункт 2.3.4), функциональная зависимость, ключевая функциональная зависимость, функция, алгебраическая операция (см. пункт 2.3.5). Перейдем к более строгому определению этих понятий, приближая тексты самих определений к их записи на формальном логическом языке, который будет построен на основе языка SCB и рассмотрен нами в разделе 2.

Определение. Метаотношение ”***схема отношения*** ”, являющееся уточнением понятия схемы отношения. Множество k принадлежит метаотношению ”***схема отношения*** ”, т.е. имеет место

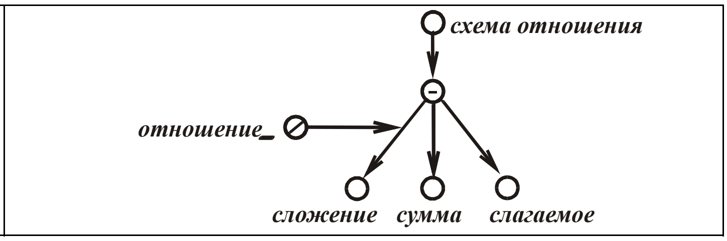
$k \prec-$ ***схема отношения*** в том и только том случае, если:

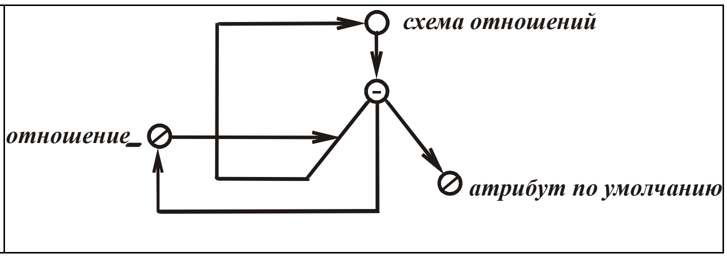
1) множество k является кортежем;
2) существует структура вида: **[** $k \; -\!\succ$ ***отношение_*: *ri*** **]**
   где ri – знак множества, трактуемого в рамках кортежа как некое рассматриваемое ориентированное отношение,
   отношение_ – знак атрибута, указывающего на рассматриваемые отношения;
3) все остальные элементы кортежа ***ki*** отмечаются атрибутом, задаваемым по умолчанию, и трактуются как знаки атрибутов, используемых в кортежах ориентированного отношения ***ki***,– указанные знаки атрибутов будем называть элементами схемы отношения ***ki***;
4) в кортеже ki перечислены <u>все</u> **(!)** элементы схемы отношения ri, т.е. все атрибуты, используемые в этом отношении. При этом, если в отношении ri используется атрибут, задаваемый по умолчанию, то он должен быть явно **(!)** указан следующим образом:
   $ki \; -\!\succ$ ***атрибут по умолчанию***, где ”***атрибут по умолчанию***” знак атрибута, задаваемого по умолчанию;
5) никаких других элементов кортеж ki не содержит.

Примечание 1. Метаотношение “***схема отношения***” можно было бы определить и по другому:

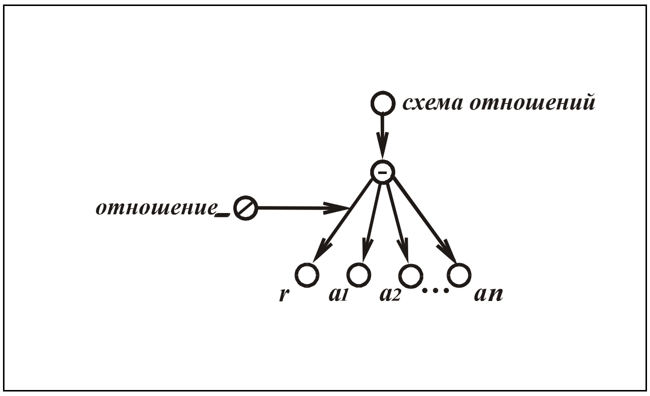
- без атрибута, задаваемого по умолчанию, т.е. с явным введением атрибута “***быть_элементом_схемы_отношения***”;
- трактовать это метаотношение как 2-мощное с явным введением знака схемы рассматриваемого отношения.

Примечание 2. Кортеж может входить в состав нескольких отношений с разными **(!)** схемами. Это означает, что в кортежах, принадлежащих заданному отношению, могут использоваться не только атрибуты, входящие в схему этого отношения. Но такие атрибуты в рамках указанного отношения не учитываются. Из всего этого следует также то, что атрибут, задаваемый по умолчанию, соответствует либо тем элементам кортежей, рассматриваемого отношения, которые не отмечены атрибутами, входящими в схему <u>этого</u> **(!)** отношения, т.е. элементам кортежей, которые вообще никаким атрибутом не отмечены, либо тем элементам кортежей, которые отмечены только атрибутами, не входящими в схему рассматриваемого отношения.

Пример. Схема отношения сложения (сумма, слагаемые):	

Пример. Схема метаотношения “***быть схемой отношения***”:	

Уточнением понятия <u>схемы отношения</u> (см. в пункте 2.3.3) является метаотношение с именем ***”схема_отношения”*** (быть схемой отношения), связки которого являются кортежами, которые имеют мощность от 2 и выше и которые используют атрибут ***”отношение_”*** (быть отношением) и атрибут, задаваемый по умолчанию. Связка отношения ***”схема отношения”*** имеет вид:

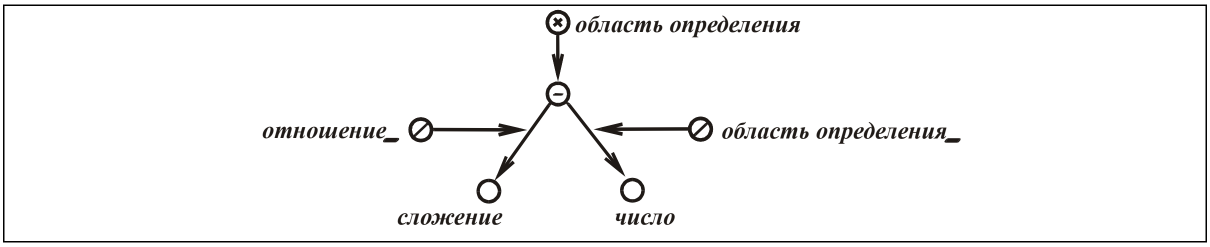


Здесь ***r*** – знак некоторого отношения
a_1, a_2, …, a_n – знаки всех тех и только тех атрибутов, которые используются в связках отношения ***r***.

Определение метаотношения "***область определения***", являющегося уточнением понятия области определения (см. в пункте 2.3.4). Будем утверждать, что ***k*** ≺− ***область определения***, в том и только в том случае, если:

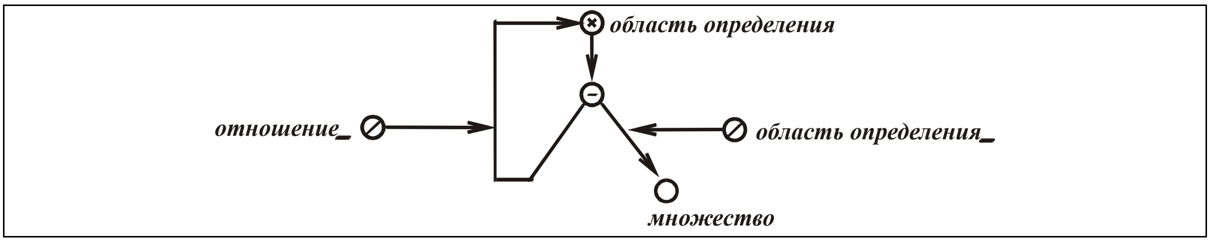
1) что ***k*** =‹ ***соотношение_*: *r* , *область определения_*: *p*** ›;
2) для каждой структуры вида ***r*** −≻ ***c*** −≻ ***x***, существует структура вида ***p*** −≻ ***x***, т.е. каждый элемент каждой связки отношения ***r*** является элементом множества ***p***;
3) и наоборот, для каждой структуры вида ***p*** −≻ ***x*** существует структура вида ***r*** −≻ ***c*** −≻ ***x***;

Пример связки метаотношения "*область определения*":



т.е. областью определения отношения "***сложение***" является множество всевозможных чисел.

П р и м е р связки метаотношения "*область определения* ":



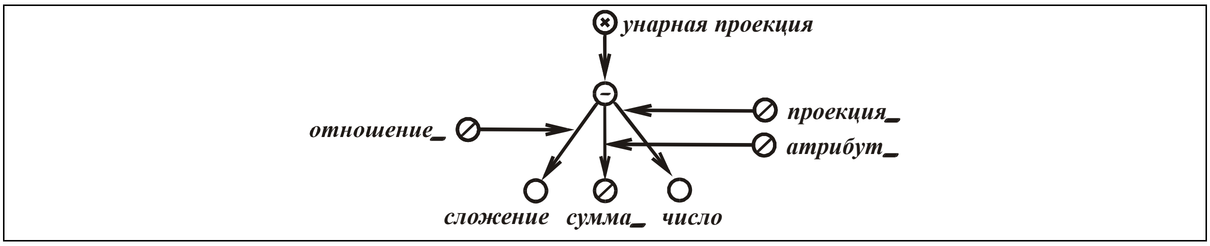
т.е. областью определения отношения "***область определения***" является множество знаков всевозможных множеств (куда входят, в частности, и знаки отношений).

Определение метаотношения "***унарная проекция***", являющегося уточнением понятия унарной проекции.

Будем утверждать, что ***k*** ≺− ***унарная проекция***, в том и только том случае, если:
1) ***k*** =< ***отношение_*: *r* , *область определения_*: *p*, *атрибут_* : *a*** >;
2) для каждой структуры вида ***r*** −≻ ***c*** −≻ ***a* : *x***, существует структура вида ***p*** −≻ ***x***, т.е. каждый элемент каждой связки отношения ***r*** , имеющий атрибут ***a***, является элементом множества ***p***
3) и наоборот, для каждой структуры вида ***p*** −≻ ***x***, существует структура ***r*** −≻ ***c*** −≻ ***a* : *x***;

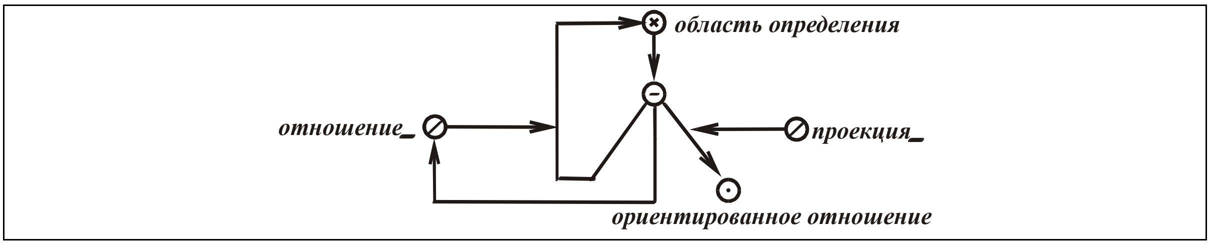
4) $p \prec-$ канторовское множество, т.е. p не содержит кратных элементов, следовательно, не существует такого y, что $p -\succ y, y$.

П р и м е р связки метаотношения "*унарная проекция*":



т.е. унарной проекцией отношения "***сложение***" по атрибуту "***сумма_***" является множество всевозможных чисел.

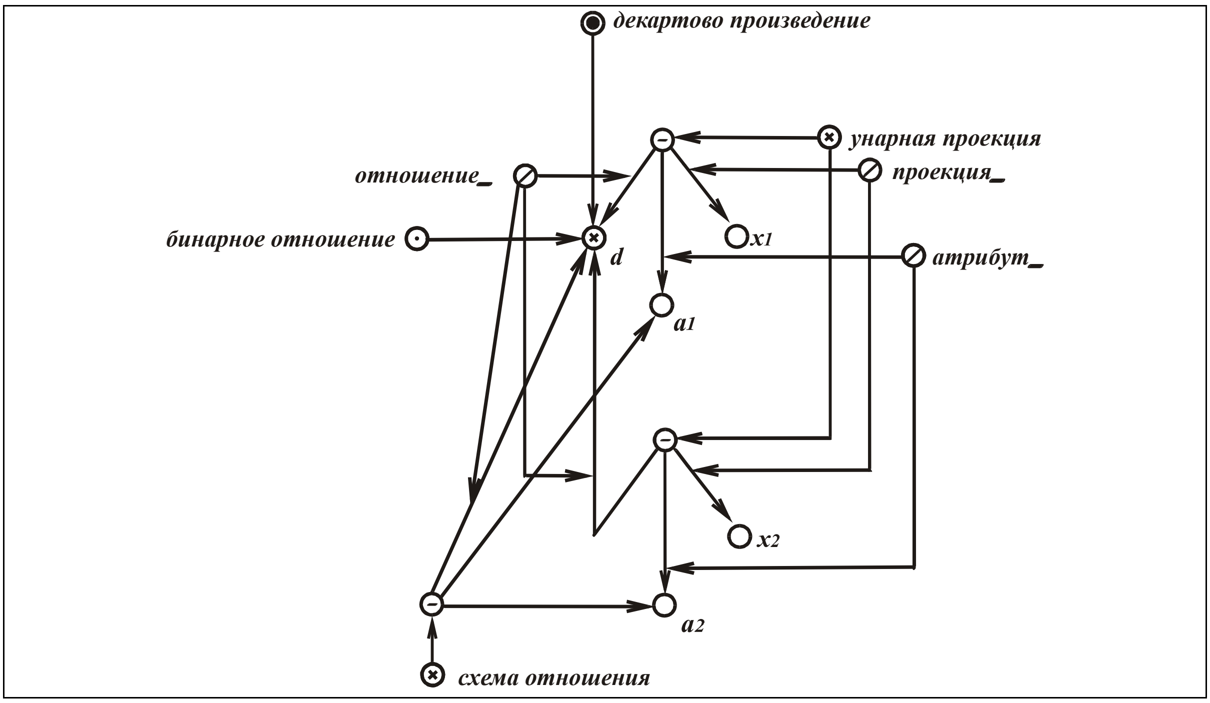
П р и м е р связки метаотношения "***унарная проекция***":



т.е. унарной проекцией отношения ***"унарная проекция "*** по атрибуту "***отношение_***" является множество знаков всевозможных ориентированных отношений (для неориентированных отношений проекцию получить невозможно, т.к. в этих отношениях нет атрибутов).

В пункте 2.3.7 в язык SCBs был введен способ условного обозначения декартовых произведений (с помощью метаотношения ***"схема отношения "*** и метаотношения ***"унарная проекция "*** можно построить SCBg-конструкцию, эквивалентную указанному обозначению декартовых произведений).

$(x_1(a_1) \times x_2(a_2)) = d$



Определение метаотношения ***“проекция”***, являющегося уточнением понятия неунарной проекции. Будем утверждать, что ***k*** ≺− ***проекция***, в том и только том случае, если:

1) ***k*** −≻ ***отношение_: r***, ***проекция_: p***, ***k*** −≻ ***атрибут_: a1***, ***атрибут_: a2***, …, ***атрибут_: a***;
2) для каждой структуры вида, ***r*** −≻ ***c***, в которой каждой структуре *k* −≻ ***атрибут_: ai***, соответствует структура ***c*** −≻ ***ai*** **:** ***x***, (т.е. в кортеже ***c*** используются <u>все</u> **(!)** атрибуты, перечисленные в кортеже ***k***);

<u>Существует одна и только одна</u> структура вида:

- ***p*** −≻ ***cj***, для которой:
  - <u>каждой</u> структуре вида ***r*** −≻ ***c*** −≻ ***aj*** **:** ***y***, ***k*** −≻ ***атрибут_: aj***, соответствует структура ***cp*** −≻ ***aj*** **:** ***y***, (т.е. в кортеж ***cp*** включаются все компоненты кортежа ***c***, имеющие атрибуты перечисленные в кортеже ***k***);
    - а также каждой структуре вида ***cp*** ≻− ***gj*** ≻− ***y***, соответствует структура вида ***aj*** −≻ ***gj***, ***r*** −≻ ***c*** −≻ ***aj*** **:** ***y***, ***k*** −≻ ***атрибут_: aj***, (т.е. в кортеж ***cp*** включая только компоненты кортежа ***c***, имеющие атрибуты, перечисленные в кортеже ***k***).

3) и, наоборот, для каждой структуры вида ***p*** −≻ ***cp***, существует структура вида:
   - ***r*** −≻ ***c***, для которой:
     - Имеет место то, что <u>каждой</u> структуре вида ***r*** −≻ ***c*** −≻ ***aj*** **:** ***y***, ***k*** −≻ ***атрибут_: aj***, соответствует структура ***cp*** −≻ ***aj*** **:** ***y***, (т.е. в кортеж ***cp*** включаются все компоненты кортежа ***c***, имеющие атрибуты, перечисленные в кортеже ***k***);
   - Имеет место то, что <u>каждой</u> структуре ***cp*** ≻− ***gj*** ≻− ***y***, соответствует структура ***aj*** −≻ ***gj***, ***r*** −≻ ***c*** −≻ ***aj*** **:** ***y***, ***k*** −≻ ***атрибут_: aj***, (т.е. в кортеж ***cp*** включаются только компоненты кортежа ***c***, имеющие атрибуты, перечисленные в кортеже ***k***);
4) <u>не существует</u> такого *z*, что ***p*** −≻*z*, *z*, (т.е. ***p*** не содержит кратных элементов и, следователь но, является канторовским множеством);
5) <u>для каждой</u> структуры вида ***p*** −≻ ***z1***, ***z2***, справедлива следующая структура {***z1***, ***z2***} ≺− равенство кортежей, (т.е. множество ***p*** представляет собой отношение, не имеющее кратных связок).

О п р е д е л е н и е метаотношения ***“функциональная зависимость”***. Менее строгое определение этого понятия см. в пункте 2.3.5. Будем утверждать, что ***k*** ≺− ***функциональная зависимость***, в том и только том случае, если:

1) ***k*** −≻ ***отношение_: r***; ***k*** −≻ ***аргумент_: ax1***, … , ***k*** −≻ ***аргумент_: axn***; ***k*** −≻ ***результат_: ay1***, … , ***k*** −≻ ***результат_: ayn***;
2) не существует структуры вида ***k*** −≻ ***аргумент_: axi***, ***результат_: axi***;
3) не существует структуры вида ***k*** ≻− ***gj*** ≻− ***axi***; ***аргумент_***; ***результат_***−≻: ***gj***;
4) для каждой структуры вида:
   - ***r*** −≻ ***c1***, ***c2***, для которой:
     - каждой структуре вида ***k*** −≻ ***аргумент_: axi***, <u>соответствует</u> то, что каждый ***c1*** −≻ ***ax1*** **:** ***xi***; ***c2*** −≻ ***ax1*** **:** ***xi***; для каждой структуры ***c1*** −≻ ***axi*** **:** ***xi***; <u>имеет</u> место структура ***c2*** −≻ ***axi*** **:** ***xi***; (т.е. каждый компонент кортежа, отмеченный атрибутом, который входит в число аргументов функциональной зависимости и совпадает с комп. кортежа, и имеет тот же атрибут)
       - каждой структуре ***k*** −≻ ***аргумент_: axi***; ***c2*** −≻ ***axi*** **:** ***xi***; ***c1*** −≻ ***axi*** **:** ***xi***; имеет место то, что:
         - каждой структуре ***k*** −≻ ***результат_: ayi*** **:** ***yi***; ***c2*** −≻ ***ayi*** **:** ***yi***;

Конструкция вида [***k*** ≺− ***функциональная зависимость***;] эквивалентна конструкции вида [***k*** −≻ ***отношение_: r*** ;], у которой:

- существует по крайней мере одна конструкция вида [***k*** —≻ ***аргумент_*: *axi*** ;];
- существует по крайней мере одна конструкция вида [***k*** —≻ ***результат_*: *ayi*** ;];
- не существует ни одной конструкции вида вида [***k*** —≻ ***аргумент_*: *axi*, *результат_*: *axi*** ;];
- не существует ни одной конструкции вида вида [***k*** ≻— ***gj*** ≻— ***axi*, *аргумент_*, *результат_*** —≻ ***gj*** ;];
- если существует конструкция вида [***r*** —≻ ***c₁*, *c₂***;] , у которой:
  - если существует конструкция вида [***k*** —≻ ***аргумент_*: *axi***;], то справедливо следующее высказывание:
    - то конструкция вида [***c₁*** —≻ ***axi*: *xi***;], взаимно однозначно эквивалентна конструкция вида [***c₂*** —≻ ***axi*: *xi***;];

то, справедливо следующее высказывание:

- если существует конструкция вида [***k*** —≻ ***результат_*: *ayi***;], справедливо следующее высказывание:
  - конструкция вида [***c₁*** —≻ ***ayi*: *xi***] взаимно однозначно эквивалентна конструкции вида [***c₂*** —≻ ***ayi*: *xi***;].

О п р е д е л е н и е метаотношения “***ключевая функциональная зависимость***”. Менее строгое определение этого понятия см. в пункте 2.3.5.

Конструкция вида [***k*** ≺— ***ключевая функциональная зависимость*** ;]
эквивалентна конструкции вида

[***k*** —≻ ***функциональная зависимость*** ; ***k*** —≻ ***отношение_*: *r*** ; ***схема отношения*** —≻ ***kc*** ;
kc —≻ ***отношение_*: *r*** ;],

для которой справедливо импликативное высказывание:
- если существует конструкция вида

  [***k*** —≻ ***атрибут_*: *a*** ;] ,
  то справедливо строгое дизъюнктивное высказывание:
  - либо существует конструкция вида

    [***k*** —≻ ***аргумент_*: *a*** ;]
    либо существует конструкция вида

    [***k*** —≻ ***результат_*: *a*** ;]

О п р е д е л е н и е метаотношения “***функция***”.

Конструкция вида [***k*** ≺— ***функция*** ;]
эквивалентна конструкции вида

[***k*** —≻ ***ключевая функциональная зависимость*** ; ***k*** —≻ ***отношение_*: *r***; ***результат_*** —≻ ***ay*** ;]
у которой:
- существует единственная конструкция вида

[***k*** —≻ ***результат_*: *ai*** ;]
- если дана конструкция вида

  [***k*** —≻ ***c*** ;],
  то существует единственная конструкция вида

  [***c*** —≻ ***ay*** : ***yi*** ;]
- если дана конструкция вида

[***проекция*** $-\succ$ ***kp*** $-\succ$ ***отношение_***: ***r*** ; ***проекция_***: ***p*** ;]
у которой:

- существует конструкция вида

  [***kp*** $-\succ$ ***атрибут_***: ***ai*** ; ***атрибут_***: ***aj*** ;]
  /* Т.е. существует по крайней мере проекция отношения два атрибута, по которым берется */
  /* проекция отношения ***r***. Следовательно, речь идет о неунарной проекции. */

- конструкция вида

  [***kp*** $-\succ$ ***атрибут_***: ***ax*** ;]
  эквивалентна конструкции вида
  [***kp*** $-\succ$ ***аргумент_***: ***ax*** ;]
  /* Т.е. каждый атрибут, по которому берется проекция отношения ***r***, является */
  /* атрибутом-аргументом функциональной зависимости. И наоборот. */

то справедлива конструкция вида
[***p*** $\prec-$ ***декартово произведение***;]

Упражнение 2.3.13.1. Можно ли говорить о неунарной проекции неклассического отношения.

Упражнение 2.3.13.2. Можно ли говорить о функциональной зависимости для неклассического отношения.

Упражнение 2.3.13.3. Существует ли хотя бы одно отношение, которому соответствует несколько (**!**) функциональных зависимостей (несколько ключей), или несколько функций, или несколько операций. Если да, то приведите примеры.

Упражнение 2.3.13.4. Чем отличаются:

- функциональная зависимость от ключевой зависимости,
- ключевая зависимость от функции,
- функция от операции.

К числу метаотношений над классическими отношениями (т.е. к числу метаотношений, которые не распространяются на область всевозможных отношений), в частности, относятся:

- метаотношение “***минимальное декартово произведение***” – это метаотношение, которое является подмножеством метаотношения “включение множества” и которое связывает каждое классическое отношение с таким декартовым произведением, которое является его минимальным надмножеством (т.е. таким декартовым произведением, для которого не существует другое декартова произведения, которое было бы подмножеством первого и надмножеством рассматриваемого классического отношения);
- метаотношение “***дополнение до декартова произведения***” – это метаотношение, которое является подмножеством метаотношения “***разбиение множества***” и которое связывает каждое с его минимальным декартовым произведением и с разностью минимального декартова произведения и рассматриваемого классического отношения;
- метаотношение “***соединение отношений***” – это тернарное метаотношение каждый кортеж которого связывает два классических отношения, имеющих один общий атрибут, с классическим отношением, каждый кортеж которого есть результат объединения одного из кортежей, принадлежащих первому исходному отношению, и одного из кортежей, принадлежащих второму исходному отношению (при этом в объединяемых кортежах компоненты, имеющие общий для исходных отношений атрибут, должны совпадать).

Очевидно, что для каждого классического отношения существует для него единственное минимальное декартово произведение и единственное дополнение до этого минимального декартова произведения.

Очевидно так же, что, если два соединяемых классических отношения будут являться, соответственно, ***m***-арным и ***n***-арным, то классическое отношение, полученное в результате их соединения по указанному (общему) атрибуту, будет **(*m + n - 1*)**-арным.

Очевидно так же, что если взять проекцию отношения, полученного в результате соединения отношений $r1$ и $r2$, по всем атрибутам, входящим в схему отношения $r1$, то получим само это отношение $r1$.

Метаотношения над 2-мощными классическими отношениями рассматривались нами выше. Перечислим некоторые из них:

- метаотношение "***произведение 2--мощных отношений***" – это метаотношение, каждый кортеж которого имеет вид ‹ { *r1* , *a1* }, { *r2* , *a2* }, ***произведение_***: *r3* ›, где *r1* , *r2* , *r3* – 2-мощные классические отношения с одинаковыми схемами – { *a1* , *a2* }, при этом конструкция *r3* ⁻ ≻ ‹ *a1* : *x1* , *a2* : *x2* › имеет место тогда и только тогда, когда существует *z* такой, что *r1* –≻
- ‹ *a1* : *x1* , *a2* : *z* ›; *r2* –≻ ‹ *a1* : *z* , *a2* : *x2* › (см. Таран Т.А.1998уч-Основ Д М-с.15);
- метаотношение "***транзитивное замыкание***" (см.Таран Т.А.1998уч-Основ Д М-с.16);
- метаотношение "***соответствие***" и различные подмножества этого метаотношения.

2.3.14. Отношение над числами. Типология чисел

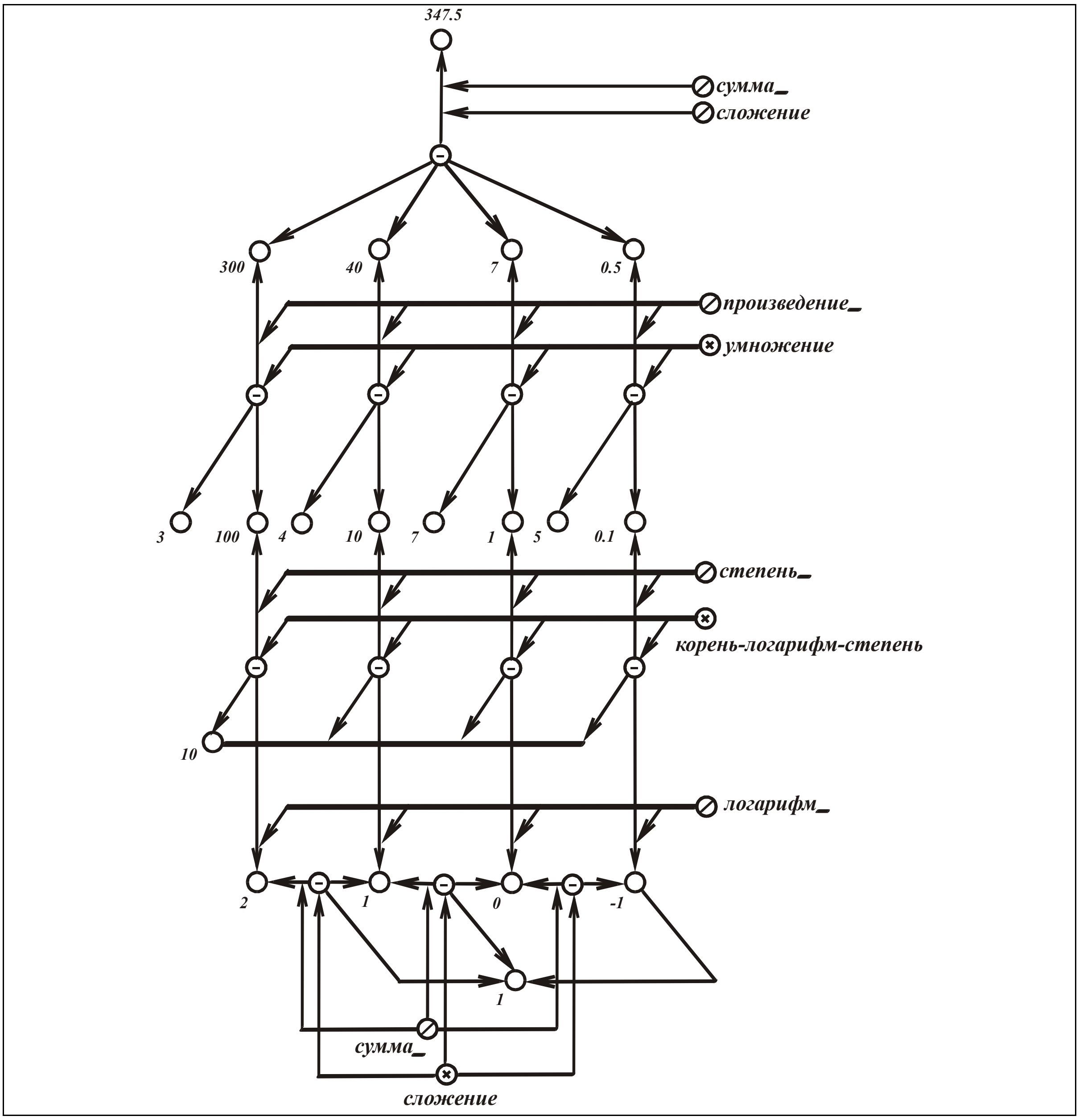
К числу отношений, заданных на множестве чисел можно отнести:

- ***порядок чисел*** – 2-мощное ориентированное отношение с атрибутами ***меньше_или_равно_*** и ***больше_или_равно***;
- ***строгий_порядок_чисел*** – 2-мощное ориентированное отношение с атрибутами ***меньше_*** и ***больше_***;
- ***сложение*** – ориентированное отношение со связками разной мощности (но не менее 3) и с атрибутами ***сумма_*** и ***слагаемое_*** (последний атрибут может задаваться по умолчанию);
- ***умножение*** – ориентированное отношение со связками разной мощности (но не менее 3) и с атрибутами ***произведение_*** и ***сомножитель_*** (последний атрибут может задаваться по умолчанию);
- ***корень-логарифм-степень*** – классическое тернарное отношение с атрибутами ***корень_*** (основание), ***логарифм_*** (показатель степени), ***степень_*** (результат возведения в степень);
- ***факториал*** – классическое 2-мощное отношение с атрибутами ***факториал_*** и ***основание_***;
- ***sin*** – классическое 2-мощное отношение с атрибутами ***sin_*** и ***arc_*** (аналогично вводится другие тригонометрические отношения **cos, tg, ctg, …**).

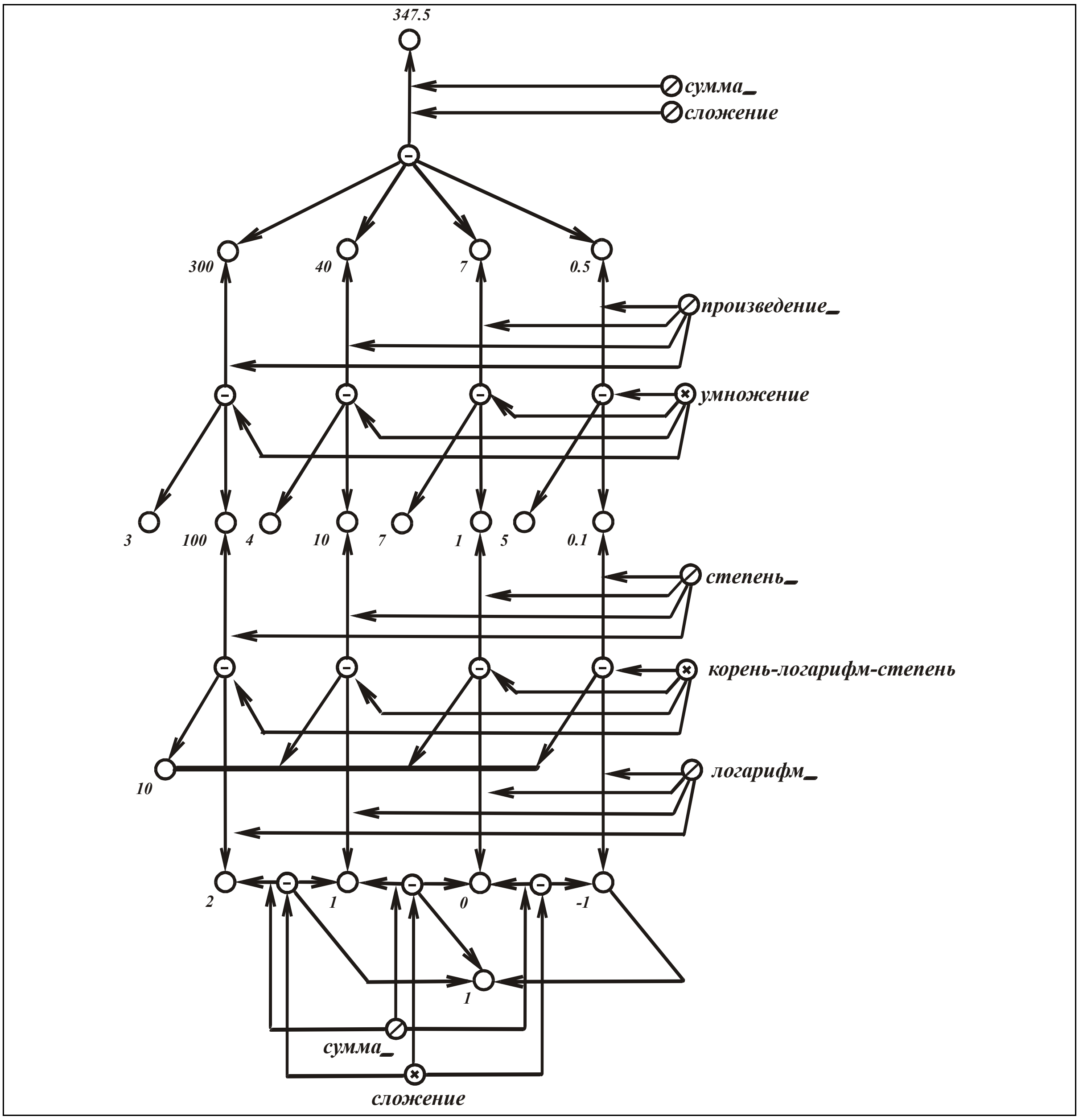
Примечание. Следует четко отличать числовые отношения и действия, направленные на вычисление неизвестных чисел, связанных указанными отношениями между собой и с известными числами. В частности, элементарным таким действием является вычисление неизвестного числа, для которого существует кортеж одного из указанных отношений, связывающий вычисляемое число только с известными числами. При этом одному отношению может соответствовать несколько таких действий. Например, отношению "***сложение***" соответствует действие сложения и действие вычитания. Отношению "***корень-логарифм-степень***" – действие взятие корня, действие взятие логарифма, действие возведения в степень.

Формально вычисление неизвестного числа заключается в построении представления этого числа в той или иной системе счисления. Так, например представление числа в десятичной системе счисления – это рассмотрение его как суммы чисел, каждое из которых является произведением десятичной цифры (т.е. натурального числа в диапазоне от 0 до 9) на число, являющееся результатом возведения числа 10 в целую степень.

В качестве примера приведем запись на языке SCB представление числа 347.5 в десятичной системе счисления. Напомним, что представление числа x в позиционной (в частности, в десятичной) системе счисления есть его разложение на слагаемые следующего вида $x = \sum_i x_i \times a^i$, где i целое число, a – натуральное число, являющееся основанием (базисом) системы счисления (для десятичной системы – это число 10), xi – натуральное число, находящееся в интервале $0 \le xi \le (a - 1)$.



Здесь в отношении ***корень-логарифм-степень*** атрибут ***корень_*** (основание) указано по умолчанию**.**



Здесь в отношении ***корень-логарифм-степень*** атрибут ***корень_*** (основание) указано по умолчанию.

Нетрудно заметить, что с позиции языка SCB суть представления чисел в той или иной системе счисления заключается в построении взаимооднозначного (**!**) соответствия между представляемыми числами и такими SCB-текстами (конструкциями), в которых используется конечное (**!**) количество заранее известных (одних и тех же, зафиксированных) для каждой системы счисления SCB-узлов. Указанные узлы будем называть ключевыми узлами соответствующей системы счисления. Для десятичной системы счисления такими ключевыми узлами является:

- знаки натуральных чисел в интервале от 0 до 9 включительно (десятичные цифры);
- знак числа 10 (основание десятичной системы счисления);
- знаки отношений ***сложения***, ***умножения***, ***корень-логарифм-степень***;
- знаки атрибутов ***сумма_*** , ***произведение_*** , ***корень_*** , ***логарифм_*** , ***степень_*** .

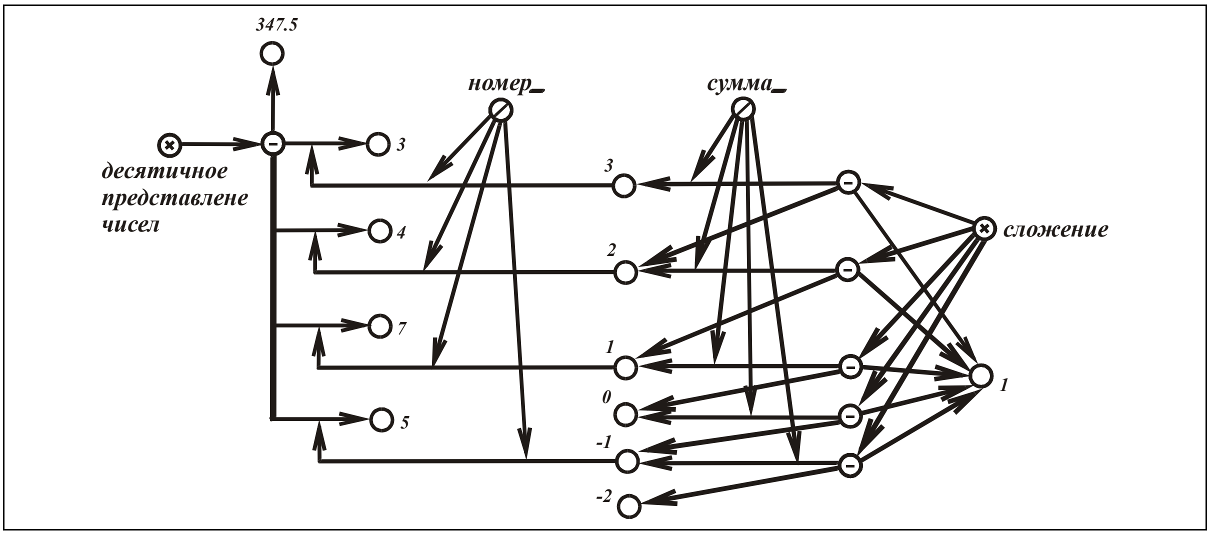
Итак, теоретико-множественная трактовка (на основе понятий языка SCB) десятичного представления заданного числа есть построение SCB-конструкции указанного выше вида (конструкции, которая однозначно задает представляемое число) и привязка этой конструкции к перечисленным выше ключевым узлам. Привязка сводится к выявлению в построенной конструкции узлов, синонимичных ключевым узлам, и к последующему склеиванию таких синонимичных узлов.

Принципиальными здесь являются следующие обстоятельства:

1. Указанная привязка есть не что иное, как процедура ввода информации, являющейся десятичным представлением некоторого числа и записанной на языке SCB. Имеется в виду ввод информации в память системы, где хранящаяся там информация также представлена на языке SCB. Т.е. ввести информацию в такую память – это построить некоторую SCB – конструкцию (SCB-текст) и склеить некоторые ее SCB-узлы с узлами, уже хранящимися в памяти.
2. Ключевые узлы, к которым осуществляется привязка вводимой информации заданного вида должны быть заранее известны (!!) и, соответственно, количество их должно быть конечным (!).
3. После привязки вводимого SCB-текста к ключевым узлам некоторые неключевые узлы вводимого текста могут оказаться синонимичными тем узлам, которые уже присутствуют в текущем состоянии памяти, и, следовательно, должны подлежать склеиванию с последними. Но принципиальным здесь является то, что такого рода синонимия может быть выявлена формальными средствами без участия субъекта, который инициирует ввод информации.

Очевидно, что десятичное представление числа в языке SCB можно также трактовать как кортеж специального отношения "***быть десятичным представлением***", заданного на множестве десятичных цифр (т.е. натуральных чисел от 0 до 9) и использующего атрибуты, задающие номер соответствующего разряда в десятичном представлении.

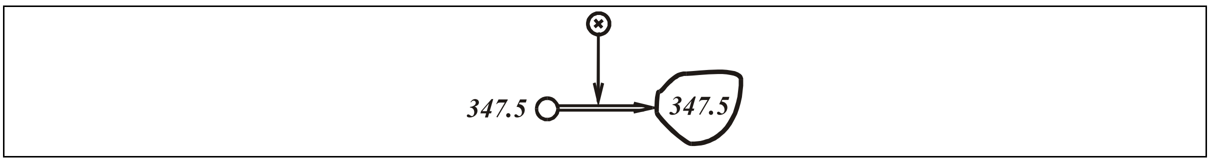
В качестве примера приведем представление числа 347.5 с помощью указанного специального отношения.



Примечание. Понятие порядкового номера расширяется на область всех целых чисел, т.к. порядковым номером может быть не только натуральное число, но и целое отрицательное число. При этом порядковый номер для отношения "***быть десятичным представлением числа***" суть не что иное, как номер соответствующего десятичного разряда.

Примечание. Представляемое число здесь указывается с помощью атрибута, задаваемого по умолчанию.

Но, учитывая, что десятичное представление чисел легко и однозначно изображается в виде цепочки символов, это представление можно изображать в виде содержимого SCB-узла. При этом SCB-узел, обозначающий число, и SCB-узел, содержимое которого является символьным изображением десятичного представлением этого числа, связанным отношением "***символьное изображение десятичного представления***"



Числовые отношения: отношения над числами, отношения множествами чисел, отношение над числовыми отношениями.

2.3.15. Понятие измерения и теоретико-множественная трактовка чисел

Рассматривая теоретико-множественную трактовку семантики чисел, следует отметить, что изначально число появилось как результат измерения какого-либо параметра (свойства, характеристики) у некоторого объекта. Таким образом, процедура измерения – это установление некоторого соответствия между множеством исследуемых объектов (исследуемых на предмет анализа определенного параметра, свойства, характеристики) и некоторым множеством чисел. Процедура измерения одного и того же параметра могут быть различными (разными могут быть единицы измерения, разными могут быть точки привязки к числовой шкале). Множество чисел, являющихся результатами измерения заданного (!) параметра по заданной (!) процедуре измерения, будем называть шкалой измерения указанного параметра по указанной процедуре.

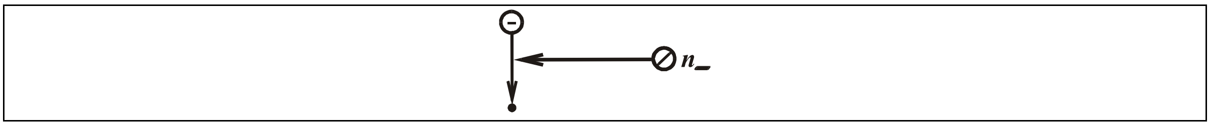
Очевидно, что каждое число может входить в несколько (!) шкал измерения. Таким образом все множество чисел можно считать интегрированной шкалой измерения, представляющей собой объединение всевозможных шкал. Для того, чтобы не вводить специального 2-мощного ориентированного отношения, связывающего числа с исследуемыми объектами (исследуемыми в целях измерения заданного параметра), используем базовое отношение (отношение принадлежности). Для этого достаточно трактовать каждое число как множество всевозможных объектов, для которых указанное число является результатом измерения какого-либо параметра.

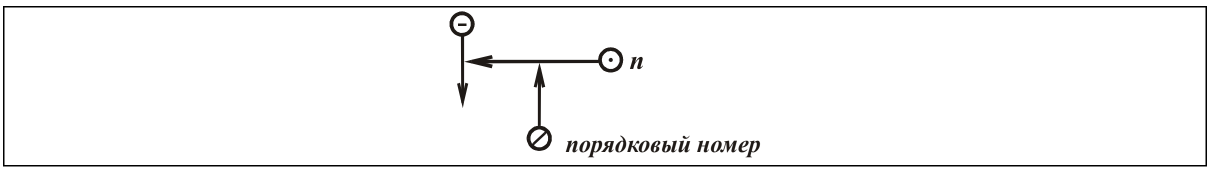
Множество пар принадлежности, выходящих из знаков чисел, разбивается на подмножества, каждое из которых соответствует тому или иному измеряемому параметру. Таким образом каждый измеряемый параметр трактуется как множество знаков пар принадлежности, связывающих числа с объектами, которые обладают указанными параметром (свойством). В свою очередь множество пар принадлежности, выходящих из узлов, обозначающих измеряемые параметры, разбивается на подмножества, каждое из которых соответствует той или иной процедуре измерения.

К числу измеряемых параметров, в частности, относятся:

- порядковый номер элемента кортежа,
- множитель множества (количество пар принадлежности, выходящих из знака множества),
- количество элементов множества.

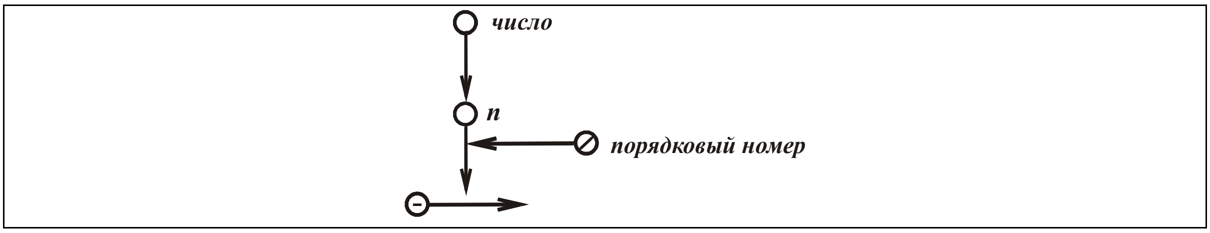
Одним из важнейших измеряемых параметров является порядковый номер элемента кортежа. Измеряемым объектом здесь является пара принадлежности, проведенная из знака кортежа. Замена числовых атрибутов (*1_*, *2_*, …) на числа (!), указывающие порядковые номера, дает возможность манипулировать этими номерами как любыми другими числами. Напомним, что числовые атрибуты, строго говоря, числами не являются. Итак, числовой атрибут ***n_*** есть множество знаков всех тех и только тех пар принадлежности, которые выходят из знаков кортежей и входят в элементы кортежей, имеющие в рамках этих кортежей порядковый номер ***n***.





Все, о чем говорилось выше, имеет отношение к изменению скалярных (!) параметров. Но кроме скалярных параметров, есть векторные параметры, результатом измерения которых являются не числа, а кортежи (!) чисел.

Измеряемые параметры
- длина, площадь, объем
- угол
- масса
- длительность (во времени)
- температура
- влажность
- давление
- сила тока, напряжение, сопротивление, индуктивность, емкость.

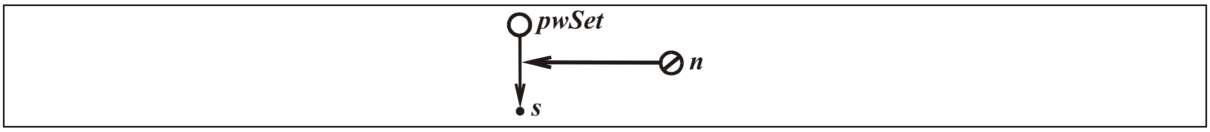


П р и м е р ы измеряемых параметров:
- порядковый номер (числовые атрибуты)
- температура
- масса
- объем, площадь, длина, расстояние
- отрезок времени
- отметка времени
- координаты на местности
- скорость (по отношению к указываемому объекту)
- ускорение
- величина угла

Измерение
Температура
- по Цельсию
- по Фаренгейту

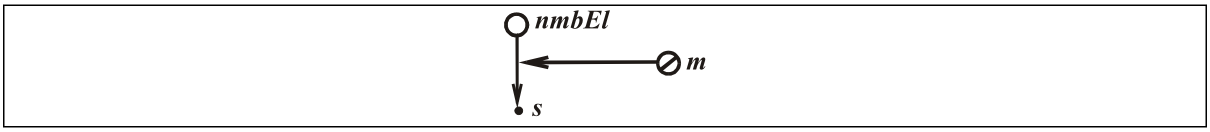
Величина угла
- в градусах
- в радианах

Параметр "***мощность множества***" будем также идентифицировать синонимичными идентификатором "***pwSet***" (power set). Приведем пример:



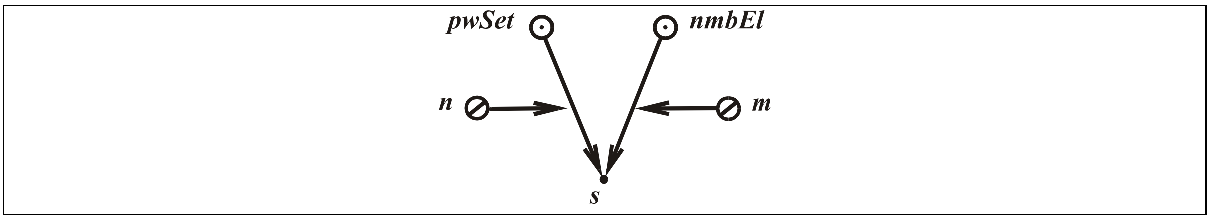
Эта конструкция означает, что мощность (***pwSet***) множества ***s*** равна числу ***n***. При этом число ***n***, очевидно, принадлежит множеству натуральных чисел.

Параметр "***количество элементов*** " (количество элементов множества) будем также идентифицировать синонимичным идентификатором "***nmbEl*** " (number elements). Приведем пример.



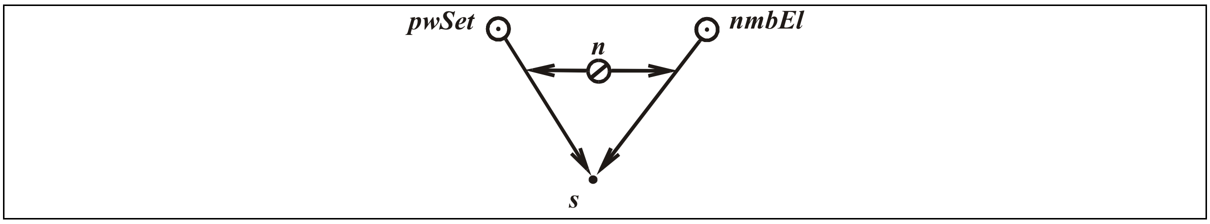
Эта конструкция означает, что количество элементов множества ***s*** равно числу ***m***.

Если множество ***s*** имеет многократное вхождение каких-либо элементов, то имеет место конструкция

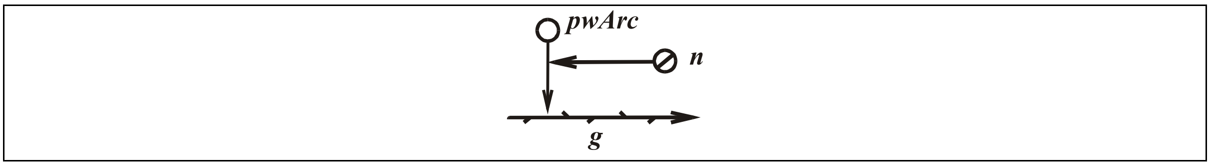


где числа n и m не совпадают.

Если же множество s не имеет кратных элементов (т.е. является канторовским), то имеет место следующая конструкция



Пример "***вес пары принадлежности***" (сила пары принадлежности, мощности SCB-дуги, вес SCB-дуги) будем также идентифицировать синонимичным идентификатором "***pwArc***". Приведем пример:

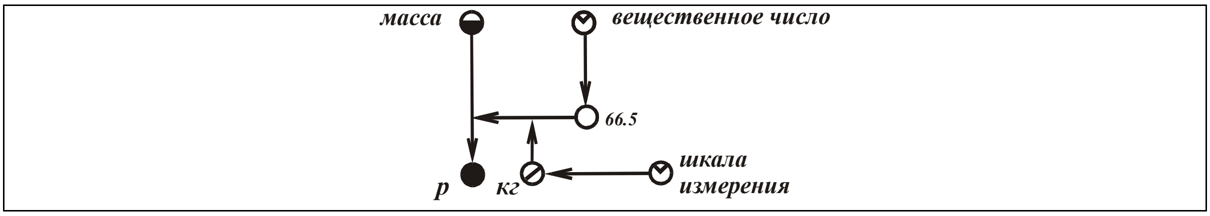


Эта конструкция означает, что вес пары принадлежности g равна числу n.

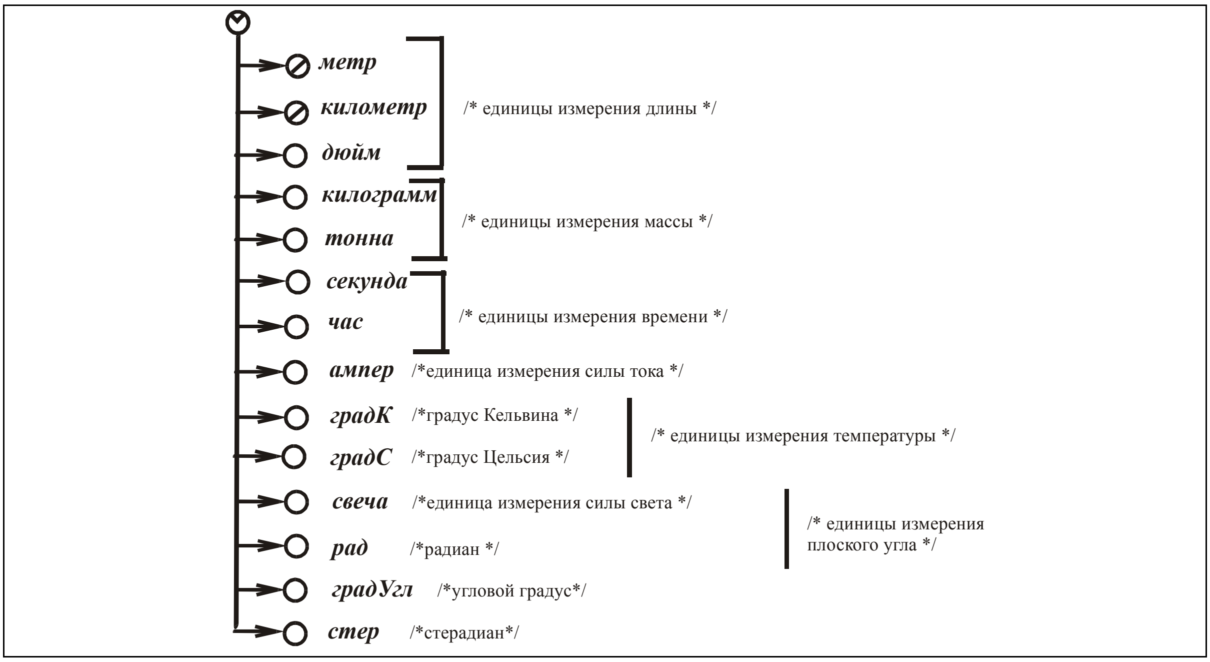
При этом:

- если $x = 0$, то SCB-дуга g негативна;
- если $x = 1$, то SCB-дуга g позитивна;
- если $0 < x < 1$, то SCB-дуга g считается нечетной с весом x (здесь число x также будем называть степенью нечеткости, степенью достоверности, степенью размерности дуги g);
- если $x = n$ (где n – число большее z), то SCB-дуга g считается позитивной n-кратной дугой (здесь число n будем также называть кратностью дуги g).

Приведем пример записи результата измерения массы физического тела.

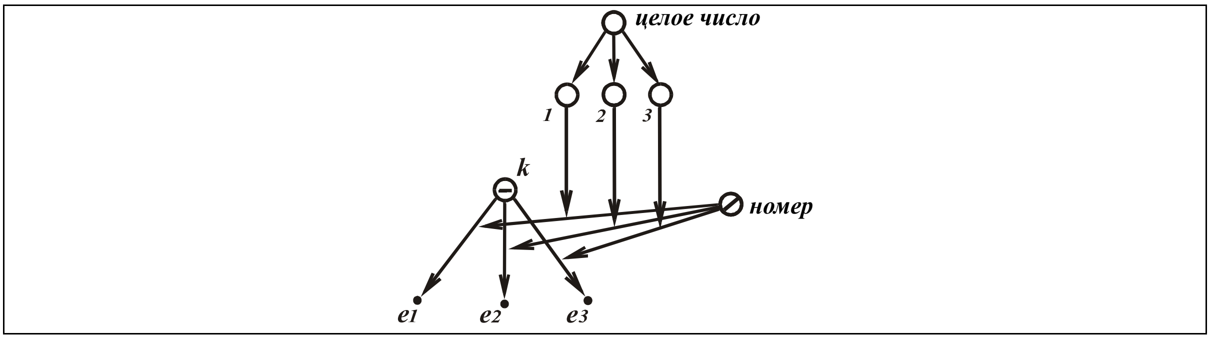


Эта конструкция означает, что масса физического тела p равна 66.5 кг. Здесь введено ключевое понятие "***шкала измерения***" (быть шкалой измерения), которая обозначает множество знаков всевозможных шкал измерения. Заметим при этом следующее. То, что называют единицами измерения есть простейший вид шкал измерения.



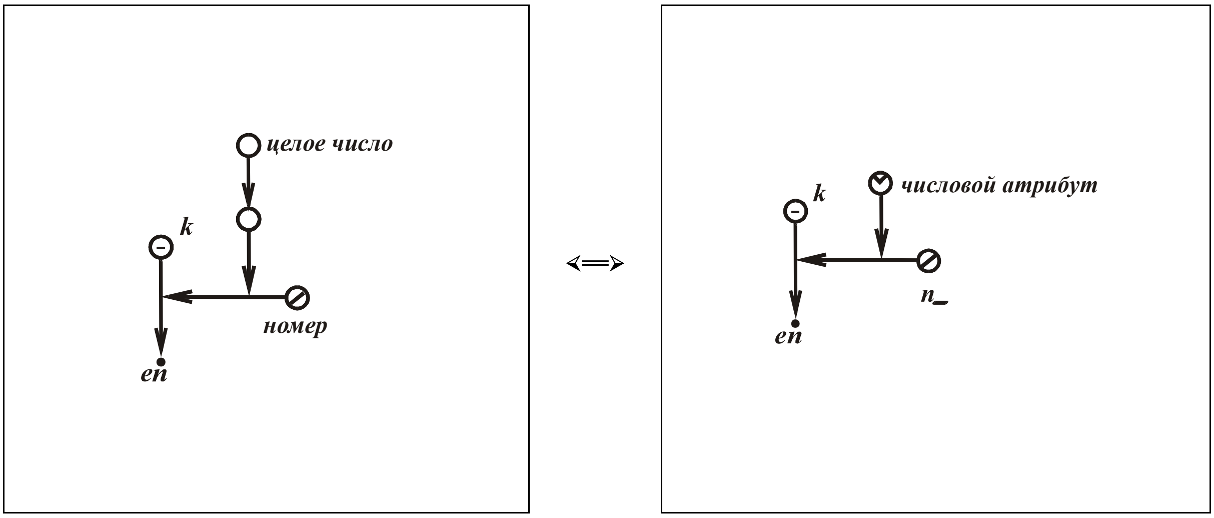
Примечание. Далеко не для всех измеряемых параметров (измеряемых характеристик) необходимо дополнительно указывать шкалу измерения. Это необходимо только тогда, когда измеряемому параметру соответствует несколько (**!**) шкала измерения. Примерами параметров, каждому из которых соответствует единственная (**!**) шкала измерения, являются параметры: ***pwSet***, ***nmbEl***, ***pwArc***.

Приведем пример записи результата "***измерения***" порядкового номера элемента в кортеже.



Эта конструкция означает, что в рамках кортежа ***k*** элемент ***e_1*** имеет 1-й номер, элемент ***e_2*** – 2-й номер, а элемент ***e_3*** – 3-й номер. Заметим, что числа, указывающие номера элементов в кортежах, могут быть не только натуральными (т.е. положительными целыми числами), но и отрицательными целыми числами. Кроме того, номер элемента кортежа может быть нулевым. Следовательно, числа, указывающие номера элементов в кортежах, в общем случае относятся к классу целых чисел, а не к классу натуральных чисел. В качестве примера см. представление чисел в позиционных системах счисления.

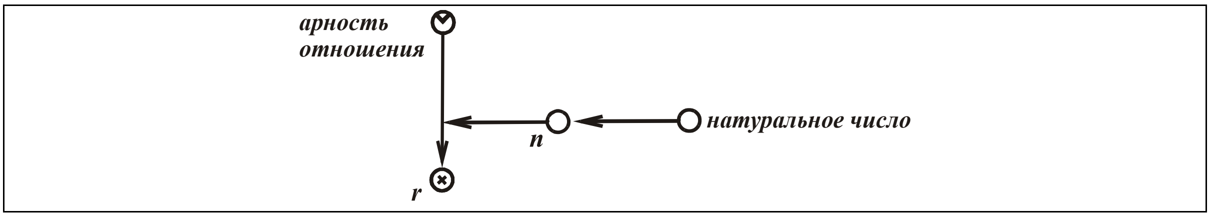
Нетрудно заметить, что между понятием порядкового номера элемента в кортеже и понятием числового атрибута имеет место следующее соотношение.



Такая “***замена***” числовых атрибутов на числа дает возможность описывать соотношения между номерами элементов кортежей с использованием всего многообразия числовых отношений.

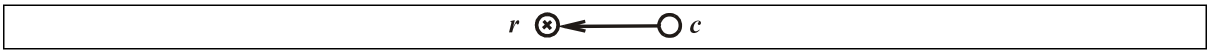
Примечание. Далеко не в каждом кортеже используется нумерация его элементов. Т.е. элементы далеко не каждого кортежа обладают свойством иметь порядковый номер.

Приведем пример записи результата “***измерения***” арности отношения.

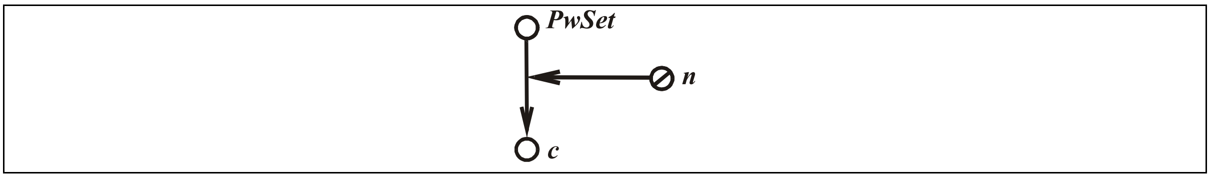


Эта конструкция означает, что отношение ***r*** является ***n***-арным отношением, т.е. представляет собой <u>семейство ***n***-арных множеств</u> (множеств, мощность которых равна ***n***). Заметим, что далеко не каждое отношение обладает свойством иметь арность отношения. Этим свойством обладают <u>те и только те</u> отношения, каждое из которых представляет собой семейство множеств одинаковой мощности. Т.е. понятие “***арность отношения***” понятие “***семейство множеств одинаковой мощности***” являются синонимами.

Нетрудно заметить также, что приведенная выше SCB-конструкция эквивалентна утверждению о том, что для <u>каждого элемента</u> с множества ***r***, т.е. для каждой конструкции вида



имеет место конструкция вида

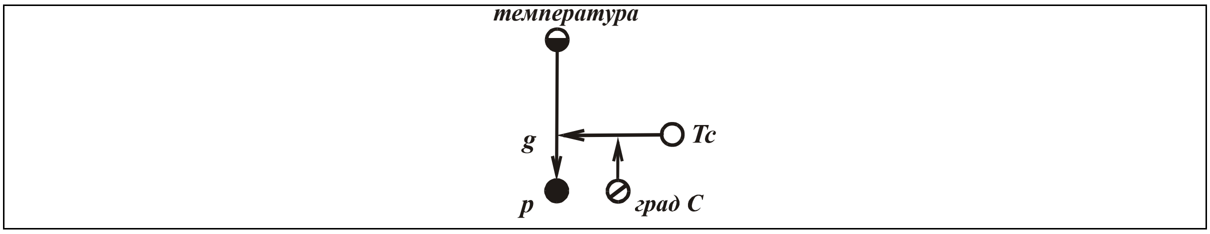


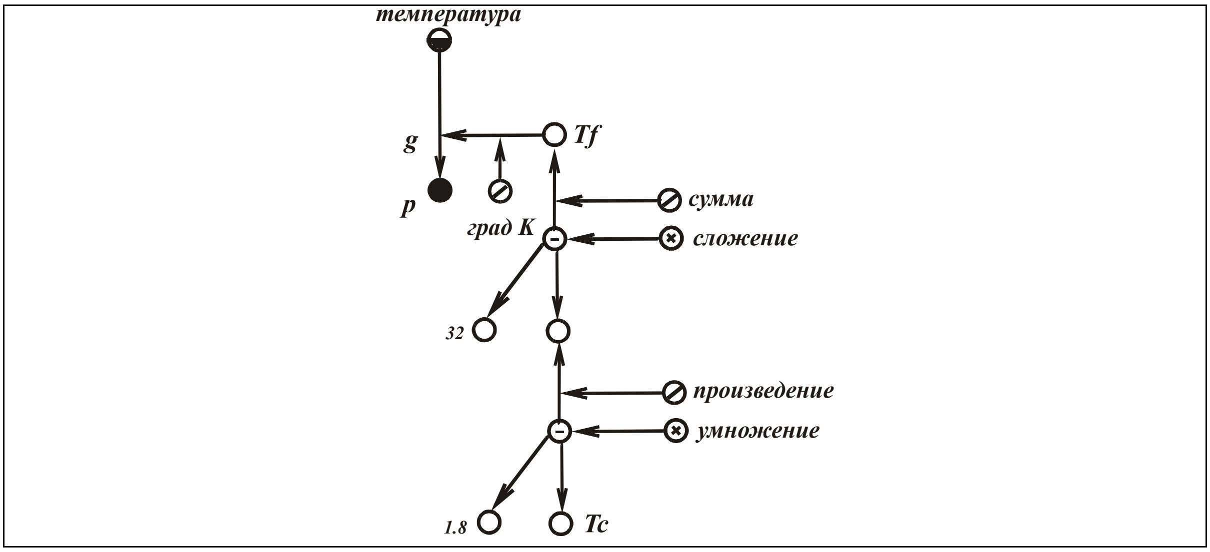
Температурная шкала Цельсия и температурная шкала Фаренгейта связаны между собой следующим соотношением $t_f = 1.8*t_c + 32$, где

t_c – отметка температуры по шкале Цельсия

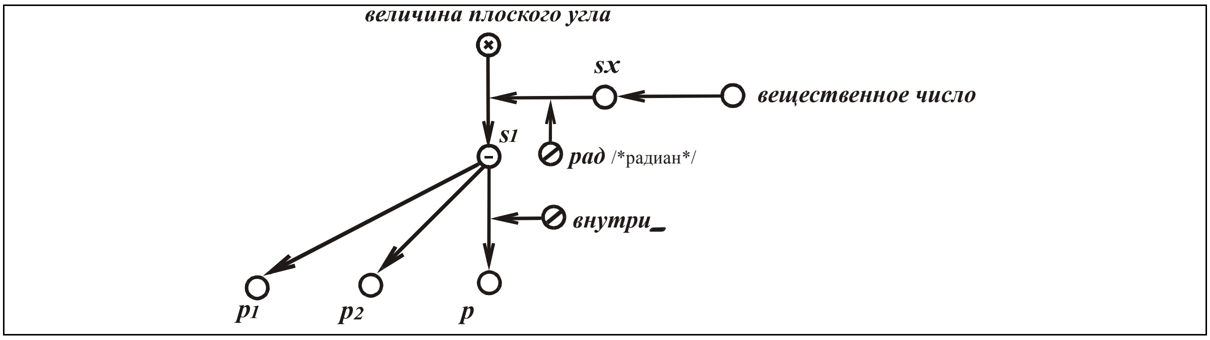
t_f – отметка температуры <u>того же</u> (**!**) предмета ***p***, но по шкале Фаренгейта.

На языке SCB указанное соотношение выглядит следующим образом





Приведем пример записи результата измерения величины плоского угла в радианах. Измеряемым объектом здесь можно считать тернарный кортеж, состояний из трех геометрических фигур, лежащих на одной плоскости. При этом две из этих фигур являются либо отрезками, либо прямыми, либо лучами, а третья фигура трактуется как фигура, лежащая внутри измеряемого угла. Собственно измеряемым углом здесь является один из четырех углов, образованных пересекающимися прямыми, на которых лежат указанные выше отрезки или лучи.

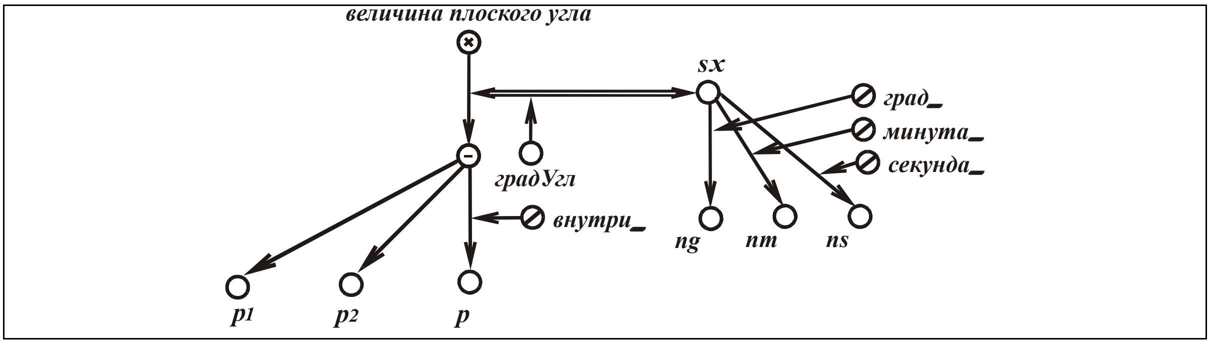


Эта конструкция означает, что число ***x*** есть результат измерения (в радианах) величины плоского угла, который составлен геометрическими фигурами p_1 и p_2 (каковыми могут быть прямые, лучи, отрезки, множества лежащих на одной прямой точек) и внутри которого находится геометрическая фигура ***ф***.

Если измерение величины числового угла осуществляется в угловых градусах, то результатом измерения будет уже не число, а тернарный кортеж чисел, компонентами которого являются:

- целое число в диапазоне от 0 до 360, указывающее количество угловых градусов;
- целое число в диапазоне от 0 до 60, указывающее количество угловых минут;
- целое число в диапазоне от 0 до 60, указывающее количество угловых секунд.

Приведем пример записи результата такого измерения.



Примечание. Особое внимание обратим на то, что результат измерения с парой “***измеряемый параметр – измеряемый объект*** “ связан здесь ориентированной парой, которая парой принадлежности не является. Такого рода результаты измерения будем называть векторными, противопоставляя их рассмотренным выше скалярным.

Для этого достаточно трактовать каждый измеряемый параметр как множество объектов, для которых указанный параметр имеет смысл. При этом множество знаков пар принадлежности, связывающих знаки измеряемых параметров с измеряемыми объектами, расчленяется на подмножествами, каждому из которых ставится в соответствие общее число, являющееся результатом измерений указываемого параметра у указываемого объекта. Указанные подмножества пар принадлежности могут пересекаться из-за возможного использования разных шкал измерения (в частности, разных единиц измерения) при измерении одного и того же параметра у одного и того же объекта. Таким образом каждое конкретное число можно трактовать как знак соответствующего множества пар принадлежности, связывающих измеряемые параметры с измеряемыми объектами.

2.3.16. Геометрические отношения, описывающие различные связи в пространстве

Геометрические отношения практикуют всевозможные предметы как области пространства независимо от их физической сущности. Предметы, трактуемые как области пространства, обычно называют геометрическими фигурами. При этом следует отличать:

- трактовку геометрической фигуры как некоего цельного объекта, как фрагмента (части) пространства, как некоторого предмета, в котором осуществляется абстрагирование от их физической сущности;
- трактовку геометрической фигуры как множества геометрических точек, составляющих эту фигуру.

Геометрические точки здесь считаются элементарными геометрическими фигурами, для которых отсутствуют геометрические фигуры, являющиеся их частями.

Геометрические фигуры можно классифицировать:

1) по размерности
   - 0-мерные геометрические фигуры (геометрические точки),
   - одномерные геометрические фигуры,
   - двумерные геометрические фигуры,
   - трехмерные геометрические фигуры;
2) по связности:
   - связные геометрические фигуры,
   - несвязные геометрические фигуры.

К отношениям, заданным на множестве знаков геометрических фигур, относятся:

- целое-часть (включение в пространстве);
- разбиение на пространственные части;
- пространственная смежность (соседство, соприкосновение);
- отношение, связывающее ***n***-мерные геометрические фигуры с (***n - 1***)-мерными фигурами, которые являются границей по отношению к первым;
- отношение, связывающее геометрические фигуры с их частями, находящимися внутри.

2.3.17. Темпоральные отношения, описывающие связи во времени

Темпоральные отношения описывают соотношение предметов, процессов, явлений, событий во времени.

К числу темпоральных отношений относятся:

- включение во времени (процесс и этап этого процесса);
- смежность во времени (следовать сразу за);
- раньше–позже (возможно, через некоторый промежуток времени);
- разбиение во времени (разбиение процесса на подпроцессы, этапы, стадии).

2.3.18. Специальные отношения языка SCB

Специальными отношениями языка SCB являются:
базовые отношения языка SCB:

- Отношение принадлежности;
- Отношение непринадлежности;
- Отношение нечеткой принадлежности;
- Множество всевозможных ориентированных пар с атрибутами *1_* (быть 1-м компонентом) и *2_* (быть 2-м компонентом);
- Множество всевозможных неориентированных пар;
- отношения, соответствующие базовым измеряемым параметрам:
- ***pwSet*** – семейство множеств, обладающих свойством "***иметь мощность***" (очевидно, что в это семейство входят все множества);
- ***pwEl*** – семейство множеств, обладающих свойством "***иметь какое-то количество отличающихся друг от друга элементов***" (очевидно также, что и в это семейство входят все множества);
- ***nmEl*** – семейство пар принадлежности, связывающих знаки кортежей с их нумеруемыми компонентами;
- отношения, в область определения которых входят SCB-узлы, содержимым которых являются символьные конструкции (тексты или фрагменты текстов символьных языков):
- Отношение, кортежи которого связывают SCB-элементы с текстами-комментариями на естественном языке;
- Отношение, кортежи которого связывают SCB-элементы с текстами-определениями на естественном языке;
- Отношение "***синтаксическая эквивалентность***";
- Отношение "***семантическая эквивалентность***".

Отношение "***синтаксическая эквивалентность***" – 2-мощное неориентированное отношение, каждая связка которого связывает два SCB-узла, содержимым которых являются информационные конструкции, имеющие абсолютно одинаковый вид. Эти конструкции могут принадлежать одному и тому же языку или разным языкам. Особое значение имеют синтаксически одинаковые конструкции, имеющие разный смысл.

Каждая связка 2-мощного неориентированного отношения "***семантическая эквивалентность***" связывает либо SCB-узел, обозначающий атомарное или неатомарное высказывание, представленное на языке SC (SCL), с SCB-узлом, содержимым которого является записанный на каком-либо языке текст, семантически эквивалентный указанному выше высказыванию, либо два SCB-узла содержимым которых являются семантически эквивалентные тексты, записанные на одном и том же языке или на разных языках.

Следует отличать синонимию знаков от семантической эквивалентности разных текстов.

2.4. Понятие реляционной структуры. Представление реляционных структур на языке SCB. Типология реляционных структур: классические и сложноорганизованные реляционные структуры

2.4.1. Понятие реляционной структуры

В приведенных выше подразделах 1-го раздела были рассмотрены такие математические структуры, как множества, кортежи, отношения. При этом нас интересовал:

- переход от классических (кантовских) множеств к неклассическим и введение обобщенного понятия множества, включающего в себя как классические, так и неклассические множества;
- переход от классических кортежей к неклассическим и введение обобщенного понятия кортежа, включающего в себя как классические его варианты;
- переход от классических отношений к неклассическим и введение обобщенного понятия отношения, включающего в себя как классические, так и неклассические его варианты.

В данном подразделе мы рассмотрим обобщение таких математических понятий как алгебраическая система, алгебраическая модель, алгебра. Объединение переменных классов математических структур назовем **классической реляционной структурой.**

Каждая классическая реляционная структура (конструкция) включает в себя:

- некоторое семейство классических отношений, которое будем называть сигнатурными отношениями реляционной структуры (при этом некоторым отношениям из указанного семейства могут быть поставлены в соответствие функции или алгебраические операции);
- некоторое семейство специально выделенных множеств, которые будем называть **сигнатурными множествами реляционной структуры** (заметим, что сигнатурные множества в реляционной структуре могут отсутствовать, заметим также, что семейство сигнатурных множеств и отношений реляционной структуры будем называть сигнатурой реляционной структуры);
- некоторое множество, которое будем называть **носителем реляционной структуры** и которое представляет собой нестрогое надмножество объединения всех указанных выше сигнатурных множеств реляционной структуры, а также областей определения всех указанных выше сигнатурных отношений, входящих в состав классической реляционной структуры.

Переход от классических реляционных структур к неклассическим и соответствующее этому введению обобщенного понятия реляционной структуры осуществляется по следующим направлениям:

- использование отношений в область определения каждого из которых входят знаки связок этого же отношения и/или знаки связок других отношений этой же реляционной структуры и/или знаки самих этих отношений (т.е. речь идет о связках, описывающих связки между другими связями, а также между отношениями);
- использование отношений, в область определения которых входят знаки реляционных структур (в частности, и знак той реляционной структуры, в состав которой эти отношения входят);
- использование в составе реляционной структуры не только классических, но и неклассических отношений;
- ослабление требования о том, чтобы сигнатурное множество реляционной структуры было подмножеством множества-носителя реляционной структуры для неклассической реляционной структуры на базе ее множества-носителя строится универсум, включающий в себя (1) все элементы этого носителя, которые будем называть первичными элементами универсума реляционной структуры и (2) вторичные элементы универсума этой реляционной структуры, которые представляют собой знаки всевозможных неориентированных множеств и кортежей, составленных из первичных и/или вторичных элементов реляционной структуры; после этого считается, что элементами реляционной структуры являются не все элементы ее сигнатурных множеств, а только те, которые оказались элементами универсума реляционной структуры – чаще всего первичными элементами;
- ослабления требования о том, чтобы область определения неунарного отношения реляционной структуры была подмножеством множества-носителя реляционной структуры (в число элементов неклассической реляционной структуры включаются не все связки ее неунарных отношений, а только те, которые оказались вторичными элементами универсума реляционной структуры).

Итак, в состав реляционной структуры общего вида входят:

- знаки множества-носителя (множества первичных элементов) реляционной структуры;
- знаки сигнатурных множеств реляционной структуры;
- знаки сигнатурных отношений реляционной структуры;
- знаки атрибутов, входящих в схемы отношений реляционной структуры;
- те элементы сигнатурных множеств реляционной структуры, которые являются элементами универсума этой структуры;
- знаки атрибутов, используемых для построения таких вторичных элементов реляционной структуры, которые являются элементами унарных отношений этой реляционной структуры;
- те знаки связок сигнатурных отношений реляционной структуры, которые являются вторичными элементами универсума этой реляционной структуры;
- промежуточные вторичные **(!)** элементы реляционной структуры – это элементы, которые не входят в число вышеперечисленных элементов реляционной структуры и являются элементами множеств, обозначаемых вышеуказанными вторичными элементами реляционной структуры (т.е. теми вторичными элементами универсума **(!)** реляционной структуры, которые являются элементами сигнатурных множеств и отношений этой реляционной структуры); при этом, если промежуточный вторичный элемент реляционной структуры одним из своих элементов имеет вторичный элемент универсума этой реляционной структуры, не попавший в вышеназванные классы элементов реляционной структуры, то этот вторичный элемент универсума приписывается к числу промежуточных вторичных элементов реляционной структуры;
- знаки атрибутов, используемых для построения промежуточных вторичных элементов реляционной структуры.

Таким образом:

- все первичные элементы универсума реляционной структуры становятся первичными элементами самой реляционной структуры;
- не все вторичные элементы универсума реляционной структуры становятся вторичными элементами самой этой реляционной структуры (т.е. указанные понятия следует четко отличать);
- не все элементы сигнатурных множеств и отношений реляционной структуры становятся элементами этой реляционной структуры;
- не все элементы атрибутов реляционной структуры входят в состав этой реляционной структуры.

Каждая реляционная структура рассматривается нами как формальная (математическая) модель некоторой предметной области, а используемые в реляционной структуре знаки атрибутов – как "относительные" понятия соответствующей предметной области. При этом сигнатурные элементы реляционной структуры есть не что иное, как "абсолютные" понятия указанной предметной области. При этом будем отличать сигнатурные и атрибутные элементы, соответствующие неопределяемым (исходным, базовым) понятиям, а также сигнатурные и атрибутные элементы, которые соответствуют определяемым понятиям. Заметим при этом, что для одной реляционной структуры может существовать несколько **(!)** вариантов разбиения используемых понятий на неопределяемые (основные, базовые) и определяемые.

Итак, семейство всех реляционных структур общего вида мы разбили на два класса:

- классические реляционные структуры,
- неклассические реляционные структуры.

Заметим при этом, что среди всевозможных неклассических реляционных структур наибольший интерес для нас представляют такие структуры, у которых в область определения их отношений входят знаки отношений, знаки атрибутов, знаки систем множеств (в том числе, знаки реляционных структур). Такого рода реляционные структуры будем называть сложными реляционными структурами (сложноорганизованными, иерархическими реляционными структурами, сложноструктурированными реляционными конструкциями).

Особо подчеркнем то, что для интеллектуальных систем возможность работать с неклассическими, в частности со сложными (сложноорганизованными, иерархическими) реляционными структурами (со сложноструктурированными реляционными конструкциями) имеет принципиальное значение, т.к.

подавляющее число предметных областей прикладных интеллектуальных систем носит именно такой характер.

Уточнение понятия реляционной структуры общего вида проведем, опираясь на введенное нами в подразделе 1.1 понятие системы множеств. Каждую реляционную структуру будем трактовать как **систему множеств**, в которой тем или иным образом распределены роли между ее элементами.

Для строгого рассмотрения понятия реляционной структуры используются следующие введенные нами ранее понятия:

- Универсум (над заданным множеством и заданным семейством атрибутов) см. п. 2.3.7;
- Отношение подчинения (результат транзитивного замыкания отношения принадлежности) см. п. 2.3.13;
- Отношение смежности (результат симметризации отношения принадлежности) см. п. 2.3.13;
- Отношение связности (транзитивное замыкание отношения смежности) см. п. 2.3.13;

Уточнение понятия реляционной структуры общего вида проведем, опираясь на введенное нами в подразделе 1.1 понятие **системы множеств.** Каждую реляционную структуру будем трактовать как систему множеств, в которой тем или иным образом распределены роли между ее элементами. Напомним, что каждая конкретная система множеств представляет собой множество, элементами которого являются знаки множеств и, в том числе, знаки тех пар принадлежности, которые связывают между собой знаки множеств, входящих в состав системы множеств.

Перейдем к строгому определению понятия **реляционной структуры. Реляционная структура** – это такая система множеств, для которой каждому ее элементу дополнительно приписывается некоторая его роль в рамках этой системы множеств. Для указания роли элементов реляционных структур используются следующие атрибуты:

- ***первичный элемент_*** (быть первичным элементом реляционной структуры);
- ***атрибут_*** (быть знаком атрибута, используемого в кортежах, знаки которых являются вторичными элементами реляционной структуры);
- ***сигнатурное отношение_*** (быть знаком сигнатурного отношения реляционной структуры);
- ***сигнатурное множество_*** (быть знаком сигнатурного множества реляционной структуры);
- ***атрибут по умолчанию_*** (атрибут, задаваемый по умолчанию и отмечающий вторичные элементы реляционной структуры).

Вторичный элемент реляционной структуры ***g*** – это знак множества, все **(!)** элементы которого являются элементами структуры ***g*** и у которого элементами структуры ***g*** являются также знаки всех пар принадлежности, связывающих указанный выше знак множества с элементами этого множества. Очевидно также, что вторичные элементы реляционной структуры следует считать все входящие в нее знаки пар принадлежности, у которых соединяемые этими парами SCB – элементы также являются элементами реляционной структуры. Если для какой-либо пары принадлежности указанные условия не выполняются, то знак этой пары в рамках соответствующей реляционной структуры может выполнять роль только ее первичного элемента.

Первичными элементами реляционной структуры могут быть знаки любых объектов (знаки пар принадлежности, знаки "простых" узловых множеств, знаки кортежей, знаки атрибутов, знаки отношений, знаки реляционных структур).

Таким образом трактовка системы множеств как реляционной структуры "преобразует" систему множеств из неориентированного множества в кортеж и, соответственно этому, понятие реляционной структуры можно трактовать как ориентированное **(!)** отношение, схема которого состоит из выше перечисленных атрибутов. При этом в каждом кортеже, принадлежащем отношению "***реляционная структура***":

- Существует по крайней мере один компонент с атрибутом "***первичный элемент_***";
- Может отсутствовать компонент с атрибутом "***атрибут_***";
- Существует по крайней мере один компонент с атрибутом "***сигнатурное отношение***";
- Может отсутствовать компонент с атрибутом "***сигнатурное множество_***";
- Существует по крайней мере один компонент с атрибутом, задаваемым по умолчанию, т.е. существует по крайней мере один компонент без явно указанного атрибута;

- Не существует ни одного компонента, который был бы отмечен сразу несколькими атрибутами из числа выше перечисленных;
- Для каждого компонента si с атрибутом, задаваемым по умолчанию, существует компонент ri, имеющий либо атрибут "***сигнатурное отношение_***", либо атрибут "***сигнатурное множество_***", по отношению к которому компонент si является подчиненным, т.е. связанным выходящей из ri парой неявно (**!**) заданного отношения подчинения, которое является транзитивным замыканием подмножества отношения принадлежности, состоящего из только (**!**) тех пар принадлежности, знаки которых являются компонентами структуры с атрибутом, задаваемым по умолчанию.

Термин "***реляционная структура***" можно трактовать как знак ориентированного отношения с кортежами разной (**!**) мощности и со схемой, включающей в себя атрибуты: "***первичный элемент_***", "***атрибут_***", "***сигнатурное отношение_***", "***сигнатурное множество_***" и "***атрибут по умолчанию_***".

В общем случае не все элементы сигнатурного множества реляционной структуры должны быть элементами этой реляционной структуры. Следовательно, к каждому сигнатурному множеству реляционной структуры ставится в соответствие его подмножество, состоящее из всех тех и только тех элементов сигнатурного множества, которые являются элементами реляционной структуры (чаще всего, первичными элементами). Указанное подмножество будем называть определяющим подмножеством сигнатурного множества реляционной структуры.

В общем случае не все связки сигнатурного отношения реляционной структуры ставится в соответствие его подмножество, в состав которого входят все те и только те связки этого отношения, которые являются подмножествами этой реляционной структуры. Указанное подмножество сигнатурного отношения будем называть определяющим подмножеством сигнатурного отношения реляционной структуры.

Для уточнения вида определяющих подмножеств сигнатурных отношений реляционной структуры вводится дополнительные атрибуты, используемые для указания роли компонентов реляционной структуры. К числу таких дополнительных атрибутов относятся атрибут **"*функция_*"** и атрибут **"*алгебраическая операция_*"**. Особо подчеркнем то, что указанные понятия ставятся в соответствие не самим сигнатурным отношениям, а их определяющим подмножествам в рамках указываемых реляционных структур. Поэтому эти понятия являются не абсолютными, а относительными для этих реляционных структур. Другими словами, например, некоторое сигнатурное отношение некоторой реляционной структуры в целом может не быть функциональным, а его определяющее подмножество для указанной реляционной структуры может оказаться функциональным и наоборот.

Определение атрибута **"*функция_*"** (быть функциональным отношением реляционной структуры). Сигнатурное отношение реляционной структуры будем называть функциональным отношением этой реляционной структуры в том и только в том случае, если определяющему подмножеству указанного сигнатурного отношения указанной реляционной структуры соответствует некоторая функциональная зависимость, являющаяся функцией.

Примечание. Функциональная зависимость может иметь место только для определяющего подмножества сигнатурного отношения реляционной структуры и не распространяться на все это отношение.

Примечание. Указание того, какая именно функциональная зависимость (а их может быть несколько) указываемого сигнатурного отношения нас интересует в рамках указываемой реляционной структуры, осуществляется с помощью специальных дополнительных атрибутов, вводимых в состав реляционной структуры, – атрибута "***результат_***", атрибута "***аргумент-1_***", атрибута "***аргумент-2_***", атрибута "***аргумент-3_***", и т.д. Перечисленные знаки атрибутов, которые включаются в число элементов реляционной структуры (такие элементы реляционной структуры отмечаются атрибутом "***атрибут_***"), следует отличать от знаков атрибутов, которыми отмечаются элементы реляционной структуры, т.е. указываются роли этих элементов в рамках реляционной структуры. К числу таких атрибутов относится: "***первичный элемент_***", "***сигнатурное множество_***", "***сигнатурное отношение_***", "***атрибут_***", "***функция_***", "***алгебраическая операция_***".

Определение атрибута **"*алгебраическая операция_*"** (быть алгебраической операцией реляционной структуры) строится точно также, как и определение понятия **"*функция_*":**

Примечание. Следует отличать абсолютное понятие "***функция***" (см. п.1.5.5) от относительного понятия "***функция_***" (быть функцией данной реляционной структуры). Также следует отличать абсолютное понятие "***алгебраическая операция***" (см. п. 1.5.5) от относительного понятия "***алгебраическая операция_***" (быть алгебраической операцией данной реляционной структуры).

2.4.2. Классические реляционные структуры

К числу классических реляционных структур, в частности, относятся:

- полугруппы,
- группы,
- коммутативные (абелевы) группы,
- кольца,
- алгебры,
- алгебраические системы,
- алгебраические модели.

Классическим видом реляционных структур являются **алгебраические системы.**

О п р е д е л е н и е . Алгебраическая система – это реляционная структура, у которой:

- определяющее подмножество каждого сигнатурного множества является подмножеством носителя этой реляционной структуры, т.е. подмножеством множества всех ее первичных элементов;
- определяющее подмножество каждого сигнатурного отношения является классическим отношением;
- область определения определяющего подмножества каждого сигнатурного отношения является подмножеством носителя этой реляционной структуры;
- для каждого сигнатурного отношения может быть (но не обязательно) дополнительно указана одна из функций или алгебраических операций, соответствующих этому отношению (а, точнее, определяющему подмножеству этого отношения).

Примечание. Сигнатурному отношению реляционной структуры (а, точнее, определяющему подмножеству этого отношения) может соответствовать либо ни одной, либо одна, либо несколько алгебраических операций. При этом, если соответствует несколько алгебраических операций, то в алгебраической системе указывается только одна из них.

Следовательно, будут считаться разными алгебраические системы, отличающиеся только (**!**) тем, что для одного из сигнатурных отношений в первой алгебраической системе указывается одна из алгебраических операций этого отношения, а во второй алгебраической системе указывается другая из алгебраических операций этого отношения.

Наиболее исследованным видом алгебраических систем являются алгебраические структуры (которые иногда называют универсальными алгебрами).

О п р е д е л е н и е . Алгебраическая структура – это алгебраическая система, у которой для каждого (**!**) сигнатурного отношения дополнительно указывается (с помощью специальных дополнительных атрибутов "***алгебраическая операция_***", "***результат_***", "***агрумент-1_***", "***агрумент-2_***" и т.д.) одна из алгебраических операций, соответствующих этому отношению.

Перечислим основные виды алгебраических структур (Калужнин Л.А. 1973кн-Введ_в_О_А-с.430-435):

- алгебраическая структура с 2-мощными операциями (алгебраическая структура, каждая операция которой соответствует некоторому тернарному (**!**) отношению);
  - алгебраическая структура с одной 2-мощной операцией;
    - группоид;
      - группоид с нейтральным элементом;
      - группоид без нейтрального элемента;
      - полугруппа;
        - коммутативная полугруппа;
        - некоммутативная полугруппа;
        - полугруппа с правым сокращением;
        - полугруппа с двухсторонним сокращением;
        - группа
          - коммутативная группа (абелева группа)

- алгебраическая структура с двумя 2-мощными определениями;
  - кольцо;
    - тело;
      - поле;
  - решетка;
    - дедекиндова решетка (модулярная решетка);
      - дистрибутивная решетка.

2.4.3. Графовые структуры как реляционные структуры частного вида

К числу графовых структур будем относить следующие виды структур:

- неориентированные графы (такие структуры обычно называют просто графами);
- ориентированные графы (орграфы);
- гиперграфы;
- сети.

Неориентированный граф – это классическая реляционная структура с одним 2-мощным неориентированным отношением. Орграф – это классическая реляционная структура с одним 2-мощным ориентированным отношением. Гиперграф – это классическая реляционная структура с одним неориентированным отношением, связки которого имеют различную мощность. Сеть – это граф или орграф, связкам которого ставятся в соответствие некоторые числовые "веса".

5. Представление логических формул и формальных теорий в памяти графодинамических ассоциативных машин

Трактовка атомарных логических формул как множеств , элементами которых являются элементарные составляющие логических формул (константы и переменные), явное введение знаков для всех логических формул, входящих в состав логического текста, и, наконец, трактовка неатомарных (сложных) логических формул как множеств, элементами которых являются знаки логических формул, которые входят в состав этих неатомарных логических формул, – все это позволяет использовать фактографический язык SCB для представления логических формул и для описания соотношений между ними. Единственная особенность такого использования языка SCB заключается в том, что здесь приходится иметь дело не только с множествами, элементами которых являются знаки множеств (т.е. нормализованными множествами), но и с множествами, среди элементов которых встречаются переменные, которые, строго говоря, знаками множеств не являются.

Логические языки, построенные на базе языка SCB на основе указанных выше принципов, с полным основанием можно считать логическими языками теоретико-множественного или реляционного типа, т.е. языками, в основе которых лежит теоретико-множественный способ трактовки структуры логических формул. Рассмотрим один из вариантов такого логического языка. Назовем его SCL (Semantic Code Logic).

Данный раздел может быть использован в качестве учебного пособия по дисциплинам «Математические основы искусственного интеллекта» и «Логические основы интеллектуальных систем» для студентов специальности «Искусственный интеллект».

5.1. Принципы построения графового логического языка SCL (Semantic Code Logic) на теоретико-множественной основе

В данном подразделе рассматриваются специальные отношения и атрибуты, обеспечивающие представление в языке SCL неатомарных логических формул и формальных теорий. Неатомарная логическая формула в языке SCL трактуется как неориентированное множество или кортеж (ориентированное множество), в состав которого входят знаки логических формул, из которых состоит эта неатомарная логическая формула. Таким образом, для записи неатомарных логических формул вполне можно использовать фактографический язык SCB. В этом и заключается суть языка SCL. Система ключевых понятий, а следовательно, система ключевых узлов и синтаксис языка SCL не является единственно возможным способом построения логического языка на базе языка SCB.

Формальный логический язык SCL построен на базе языка SC как его подъязык путем фиксации определенного набора специальных ключевых узлов, т.е. узлов, семантика которых должна быть априори известна и согласована. Перечислим основные ключевые узлы языка SCL:
***atExpr*, *conj*, *disj*, *alt*, *impl*, *if_*, *then_*, *eqExpr*, *negExpr*, *fuzExpr*, *pwFuzExpr*, *exist*, *fix_*, *pwExist*, *all*, *existAtExpr*, *allImpl*, *allEqExpr*, *theory*, *union_*.**

Каждая логическая формула (как атомарная, так и неатомарная) входит (в качестве компонента) в состав какой-либо формулы. В конечном счете такой неатомарной логической формулой является сама формальная теория, трактуемая как априори истинное конъюнктивное высказывание, т.е. как множество истинных высказываний различного вида. Тип логической формулы задается ключевым множеством, которое содержит все формулы такого типа. Здесь следует выделить группы таких ключевых множеств:

- Первая группа множеств, определяющих тип логической формулы, разбивает логические формулы по их структурному виду соответственно, включает себя следующие множества:
  - множество атомарных логических формул, которое будем обозначать ключевым узлом "***atExpr***" (быть атомарной логической формулой, каждая из которых представляет собой множество, состоящее из (1) знаков узловых множеств, (2) знаков пар принадлежности, (3) переменных, значениями которых являются знаки узловых множеств, (4) переменных, значениями которых являются знаки пар принадлежности, (5) метапеременных (если логическая формула относится к метатеории);
  - множество конъюнктивных логических формул, которое будем обозначать ключевым узлом "***conj***" (быть конъюнктивной формулой);

- множество дизъюнктивных формул, которое будем обозначать ключевым узлом “***disj***” (быть нестрогой дизъюнктивной формулой);
- множество альтернативных формул, которое будем обозначать ключевым узлом “***alt***” (быть строгой дизъюнктивной формулой – логической формулой исключающего ИЛИ);
- множество импликативных формул, которое будем обозначать ключевым узлом “***impl***” ;
- множество логических формул об эквивалентности, которое будем обозначать ключевым узлом “***eqExpr***” ;
- множество негативных логических формул, каждая из которых трактуется как 1-мощное множество (синглитон), элементом которого является отрицаемая логическая формула (т.е. формула, на которую действует логическое отрицание). Множество негативных логических формул обозначается ключевым узлом “***negExpr***” .

- Вторая группа множеств используется для определения типа кванторных логических формул и соответственно включает в себя следующие множества:
  - множество формул о существовании, которое будем обозначать ключевым узлом “***exist***” ;
  - множество формул о всеобщности, которое будем обозначать ключевым узлом “***all***” .

Кроме множеств, указывающих тип самой логической формулы, введем атрибуты, указывающие роль формулы, входящей в состав неатомарной формулы, представляющей собой кортеж из знаков других логических формул. К таким атрибутам относятся:

- “***if_***” (быть посылкой импликативной логической формулы);
- “***then_***” (быть следствием импликативной логической формулы);
- “***fix_*** ” (быть множеством фиксируемых элементов, т.е. тех переменных, которые связываются каким-либо квантором в рамках кванторной формулы – при этом в это множество разрешается включать уже выше зафиксированные, т.е. уже связанные переменные и даже константы).

Специальным видом неатомарных формул являются формальные теории. Формальная теория задается путем причисления ее знака ко множеству с именем (идентификатором) “***theory***”, которое представляет собой множество знаков всевозможных формальных теорий. А поскольку каждая формальная теория есть кортеж, множество ***theory*** можно трактовать как ориентированное отношение. В состав формальной теории обязательно входит знак описываемой этой теорией реляционной структуры под атрибутом “***union_***”.

5.2. Запись логических формул с использованием стилизованного естественного языка

Для записи логических формул на языке, близком к естественному, будем использовать такие варианты (шаблоны) этих формулировок, от которых легко можно перейти к формальному логическому языку. Заметим, что в этих шаблонах используются тексты языка SCg или языка SCs для записи атомарных логических формул. А сам стилизованный естественный язык используется для представления семантической структуры изображаемых (записываемых) неатомарных логических формул. Перечислим эти шаблоны.

Здесь прямоугольниками обозначаются тексты, построенные по одному из перечисленных шаблонов и представляющие собой запись различных логических формул.

Имеет место **к о н ъ ю н к ц и я** следующих формул: • [ ] • [ ]	/* Запись конъюнктивной формулы */

Имеет место **д и з ъ ю н к ц и я** следующих формул: • $\boxed{}$ • $\boxed{}$	/* Запись дизъюнктивной формулы */
Имеет место **с т р о г а я д и з ъ ю н к ц и я** следующих формул: • $\boxed{}$ • $\boxed{}$	/* Запись строгой дизъюнктивной формулы */
Имеет место **э к в и в а л е н т н о с т ь** следующих формул: • $\boxed{}$ • $\boxed{}$	/* Запись формулы об эквивалентности */
Имеет место **и м п л и к а ц и я** следующих формул: • **е с л и** $\boxed{}$ • **т о** $\boxed{}$	/* Запись импликативной формулы */
С у щ е с т в у е т конструкция вида: **[** < *атомарная формула* > **] ;**	/* Запись формулы о существовании, в которой квантор существования действует на атомарную формулу */
С у щ е с т в у е т конструкция вида: **[** < *атомарная формула* > **] ;** **у к о т о р о й :** $\boxed{}$	/* Запись формулы о существовании, в которой квантор существования действует на неатомарную формулу */
Д л я в с е х значений переменных: **[** < *атомарная формула* > **] ;** $\boxed{}$	/* Запись формулы о всеобщности */

Преобразование перечисленных вариантов записи позитивных логических формул в негативные осуществляется добавлением в самом начале текста отрицания **“ н е ”**.

Одной из наиболее часто используемых логических формул об эквивалентности является определение, которые выглядят следующим образом:

> Имеет место **э к в и в а л е н т н о с т ь** следующих формул:
>
> - **С у щ е с т в у е т** конструкция вида:
>
>   **[_*x* □□□ *s* ;] ;**
>
> - $\boxed{}$

/* Запись определения множества с именем “*s*” ***/**

Здесь прямоугольником изображается текст, являющийся формулировкой критерия, которому должны удовлетворять <u>все</u> элементы определяемого множества <u>и только они</u>, т.е. формулировкой критерия принадлежности произвольного элемента _*x* определяемому множеству *s*.

5.3. Язык SCLs (Semantic Code Logic string) – формальный линейный логический язык классического типа, использующий язык SCs для записи атомарных логических формул

Логический язык SCL является языком теоретико-множественного типа, в основе которого лежит трактовка логических связок и кванторов через понятия множества, кортежа, атрибута, отношения, т.е. трактовка формальных теорий и неатомарных логических формул как реляционных структур над высказываниями.

Язык SCL является подъязыком языка SC и имеет две модификации:
- линейную модификацию – язык SCLs (Semantic Code Logic string);
- графическую модификацию – язык SCLg (Semantic Code Logic graphical).

Основное отличие языка SCLs от классического логического языка заключается в способе записи атомарных логических формул. Атомарная логическая формула в языке SCLs – это текст языка SCs, ограниченный квадратными скобками. Неатомарные (сложные) логические формулы в языке SCLs строятся точно так же, как и в классическом логическом языке.

Если ***bi*** и ***bj*** есть scls-формулы, а переменная ***xi*** является свободной переменной логической формулы ***bi***, то логическими формулами также являются конструкции вида:

(¬ *bi*)	–	логическая формула, являющаяся отрицанием формулы ***bi***;
(*bi* & *bj*)	–	конъюнктивная формула, являющаяся конъюнкцией формул ***bi*** и ***bj*** ;
(*bi* ∨ *bj*)	–	дизъюнктивная формула;
(*bi* | *bj*)	–	строгая дизъюнктивная формула;
(*bi* —➢ *bj*)	–	импликативная формула;
(*bi* ⮘□ ➢ *bj*)	–	логическая формула об эквивалентности;
(∃*xi bi*)	–	логическая формула о существовании;
(∃!*xi bi*)	–	логическая формула о существовании и единственности;
(∃*n* / *xi bi*)	–	логическая формула о существовании ***n*** значений ***xi***, удовлетворяющих формуле ***bi***;
(∃>*n* / *xi bi*)	–	логическая формула о существовании более чем ***n*** значений ***xi***, удовлетворяющих формуле ***bi***;
(∃⩾*n* / *xi bi*)	–	логическая формула о существовании не менее чем ***n*** значений ***xi***, удовлетворяющих формуле ***bi***;

$(\exists{<}n/xi\ bi)$ – логическая формула о существовании менее чем n значений xi, удовлетворяющих формуле bi;

$(\exists{\leqslant}n/xi\ bi)$ – логическая формула о существовании менее чем n значений xi, удовлетворяющих формуле bi;

$(\exists/n_1,\ n_2/xi\ bi)$ – логическая формула о существовании n значений переменной xi, удовлетворяющих формуле bi, где $n_1 \le n \le n_2$;

$(\exists/n_1{<},\ n_2/xi\ bi)$ – логическая формула о существовании n значений переменной xi, удовлетворяющих формуле bi, где $n_1 < n \le n_2$;

$(\exists/n_1{<},\ {<}n_2/xi\ bi)$ – логическая формула о существовании n значений переменной xi, удовлетворяющих формуле bi, где $n_1 < n < n_2$;

$(\exists/n_1,\ {<}n_2/xi\ bi)$ – логическая формула о существовании n значений переменной xi, удовлетворяющих формуле bi, где $n_1 \le n < n_2$;

$(\forall xi\ bi)$ – логическая формула о всеобщности, т.е. о том, что каждое значение переменной xi удовлетворяет формуле, т.е. "превращает" эту логическую формулу в истинное высказывание после соответствующей подстановки.

Приведем в табл. 5.3.1. перечень разделителей языка SCLs, которые используются для записи неатомарных высказываний.

Таблица 5.3.1. Специальные разделители логического языка SCLs

Разделитель	Комментарий
$\neg$	символ логического отрицания
&	связка конъюнкции
$\vee$	связка дизъюнкции
|	связка строгой дизъюнкции
—➢	связка импликации
⮘□ ➢	связка эквиваленции
$\exists$	квантор существования
$\exists!$	квантор существования и единственности
$\forall$	квантор всеобщности
/	разделитель (ограничитель) диапазона в формулах существования определенного количества значений
$\leqslant$ $\geqslant$	разделители, указывающие на включение границы диапазона
$<$ $>$	разделители, указывающие на не включение границы диапазона
,	разделитель значений границ диапазона в формулах существования определенного количества значений

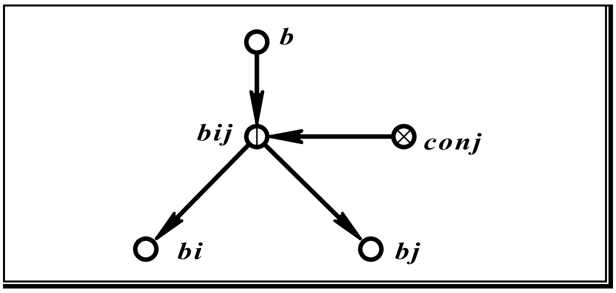
5.4. Язык SCLg (Semantic Code Logic graphical) – графический вариант изображения текстов языка SCL

Рассмотрим представление конкретных типов логических формул на языке SCLg путем "перевода" соответствующих scls-конструкций на язык SCLg (см. scl-тексты 5.4.1 – 5.4.6).

SCL-текст 5.4.1. Представление конъюнктивной логической формулы

$$bij = (bi \ \& \ bj);$$

□□ □



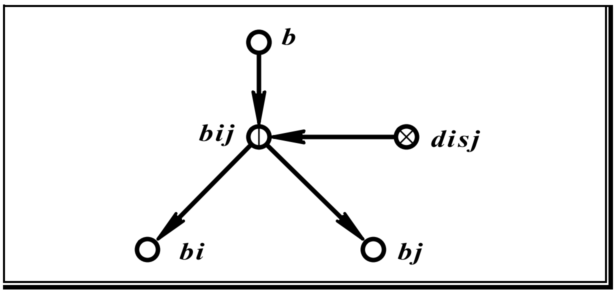
Здесь b есть неатомарная логическая формула дополнительно уточняемого вида, в состав которой формула bij непосредственно входит.

Примечание. В языке SCL допустимо существование вырожденных конъюнктивных логических формул, состоящих из одного компонента.

SCL-текст 5.4.2. Представление дизъюнктивной логической формулы

$$bij = (bi \vee bj);$$

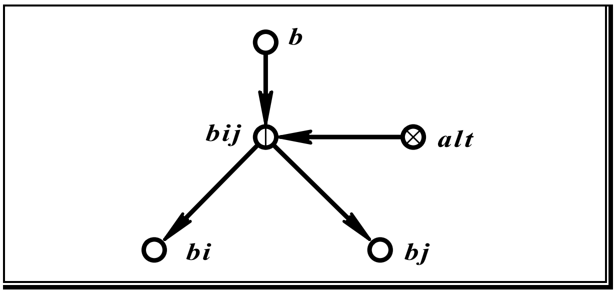
□□ □



SCL-текст 5.4.3. Представление альтернативной логической формулы

$$bij = (bi \mid bj);$$

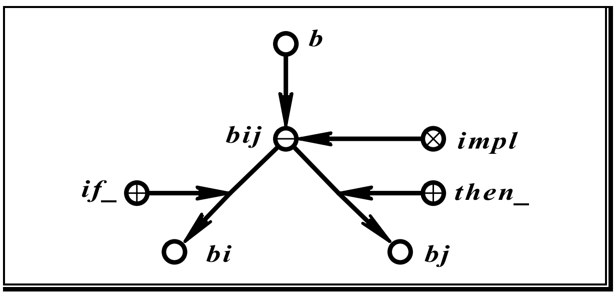
□□ □



SCL-текст 5.4.4. Представление импликативной логической формулы

$$bij = (bi \longrightarrow bj);$$

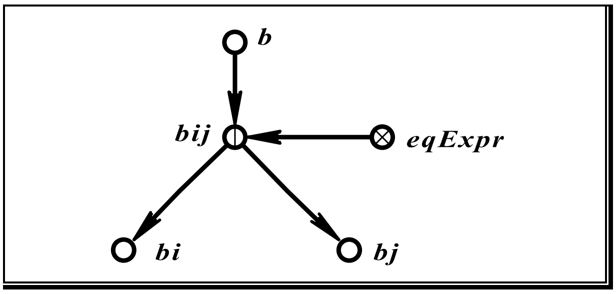
□□ □



SCL-текст 5.4.5. Представление логической формулы об эквивалентности

***bij* = (*bi* ⋖□ ⋗ *bj*);**

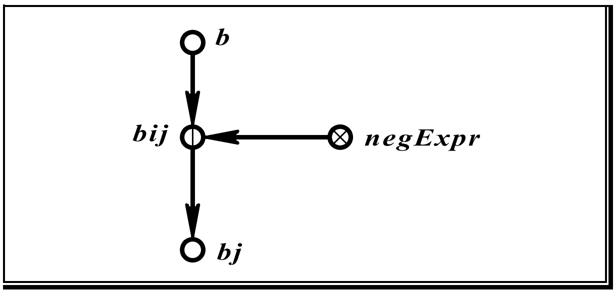
□□ □



SCL-текст 5.4.6. Представление негативной логической формулы

***bi* = (¬ *bj*);**

□□ □

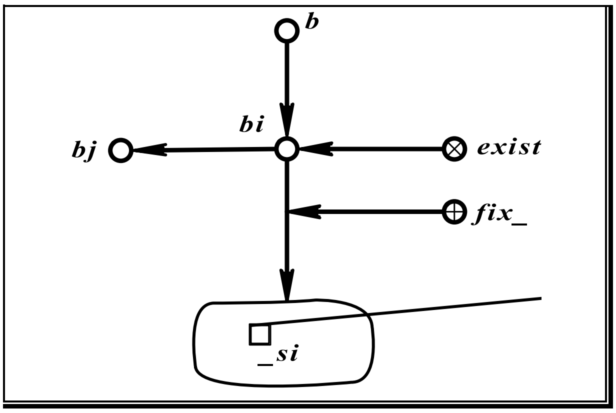


На нижеприведённых scl-текстах примеры записи кванторных логических формул.

SCL-текст 5.4.7. Представление формулы о существовании

***bi* = (∃ *_si bj*);**

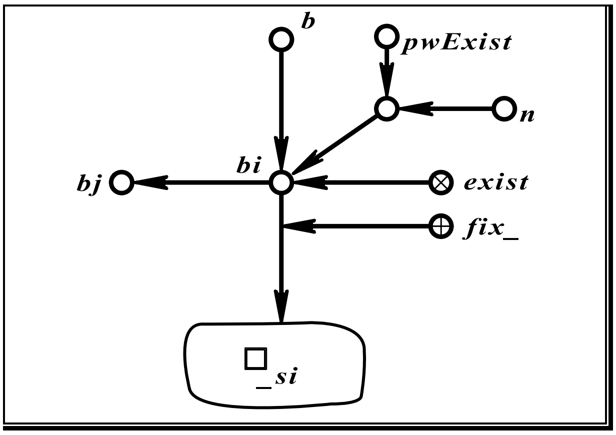
□□ □



SCL-текст 5.4.8. Представление "числовой" формулы о существовании

***bi* = (∃ *n*/*_si bj*);**

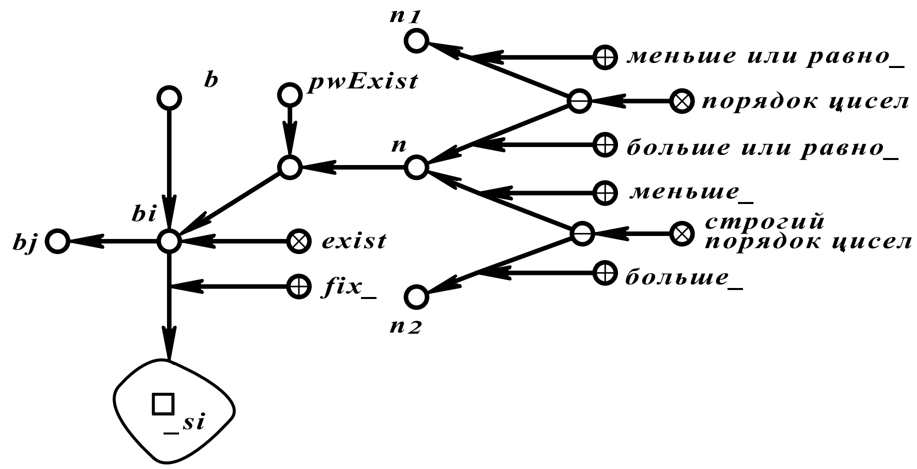
□□ □



SCL-текст 5.4.9. Представление "числовой" формулы о существовании

$$bi = (\exists\ /\ n_1,\ <n_2 /\ \_si\ bj);$$

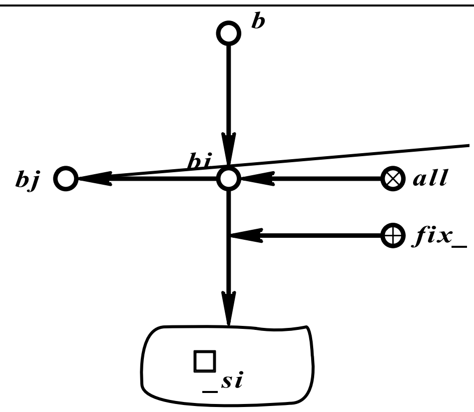
□
□
□



SCL-текст 5.4.10. Представление формулы о всеобщности

$$bi = (\forall\ \_si\ bj);$$

□□ □

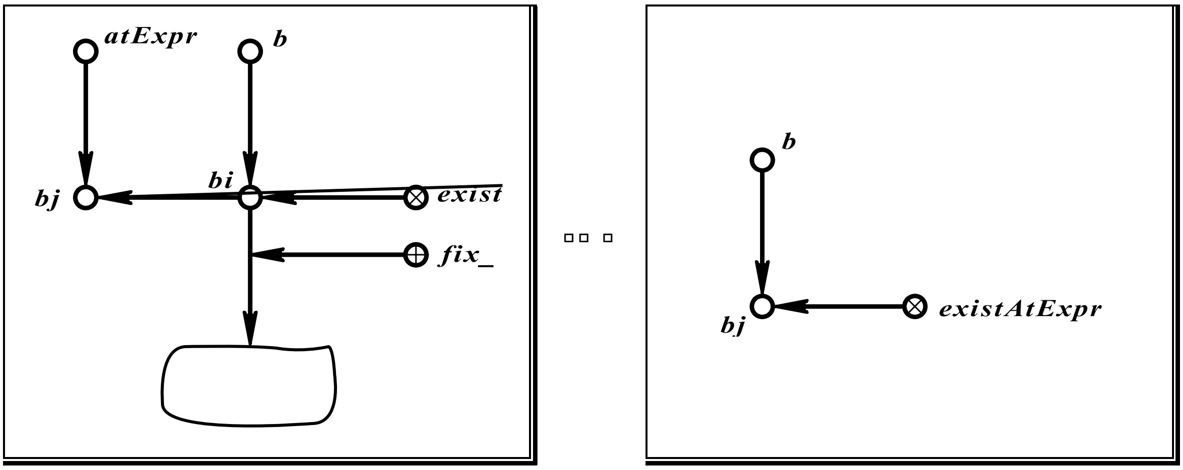


В случае, если квантор существования навешивается на атомарную формулу, а квантор всеобщности – на импликативную формулу, то для таких кванторных формул используется более лаконичный способ их записи и неявное указание связываемых переменных (см. scl-тексты 5.4.11 и 5.4.12).

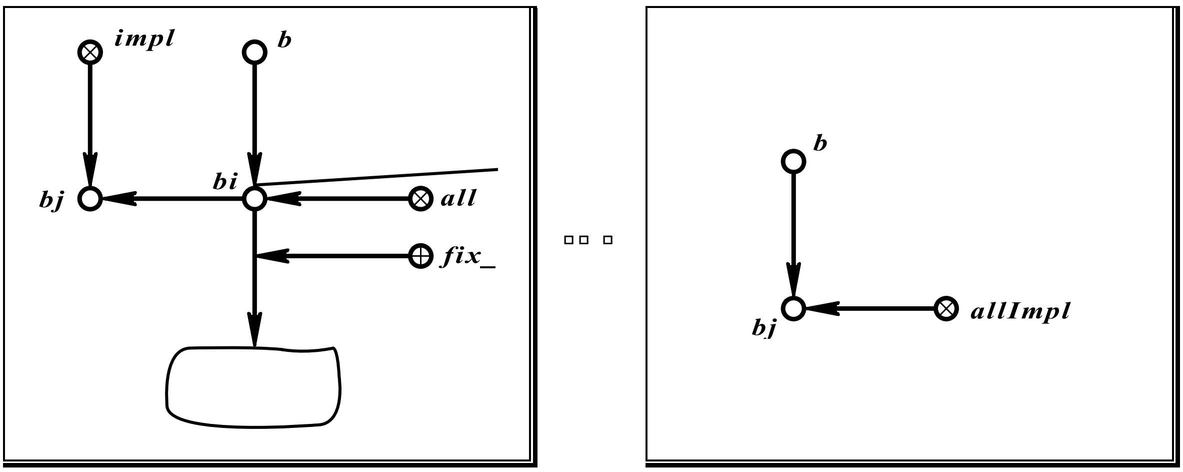
Правила неявного связывания переменных в кванторных формулах сводятся к следующему:

- переменные связываются сверху вниз (если какая-либо переменная связана в рамках некоторой кванторной формулы, то она считается связанной в рамках всех логических формул, которые входят в состав этой кванторной формулы);
- если формула ***bj*** отнесена к классу ***existAtExpr***, то эта формула трактуется как кванторная формула о существовании, в которой связываются все переменные, которые являются элементами множества ***bj*** и которые не были связаны выше;
- если формула **(** ***bi*** **—>** ***bj*** **)** отнесена к классу ***allImpl***, то эта формула трактуется как кванторная формула о всеобщности, в которой связываются все переменные, которые входят в состав как формулы ***bi***, так и формулы ***bj*** и которые не были связаны выше.

SCL-текст 5.4.11. Приведение к более лаконичному виду формулы о существовании



SCL-текст 5.4.12. Приведение к более лаконичному виду формулы о всеобщности



Примечание. Поскольку каждый текст языка SCLg является текстом языка SCg и соответственно языка SC и поскольку язык SC, кроме графического варианта изображения текстов (языка SCg), имеет также абсолютно эквивалентный ему символьный вариант (язык SCs), то от sclg-текстов достаточно легко перейти к их эквивалентному символьному представлению на языке SCs. При этом такое символьное представление логических высказываний не следует путать с рассмотренным выше языком SCLs, который является результатом компромисса между реляционным логическим языком SCL и логическими языками классического типа.

5.5. Примеры записи логических формул на предложенных логических языках

Приведём несколько примеров записи логических высказываний:
1) на естественном языке;
2) на стилизованном естественном языке по приведенным выше "шаблонам";
3) на языке SCLs, максимально приближенном к классическому логическому языку;
4) на графическом языке SCLg.

Пример 5.5.1. Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:
1) каждое (всякое, любое) классическое отношение является ориентированным;
2) если x есть классическое отношение, то x является также и ориентированным отношением.

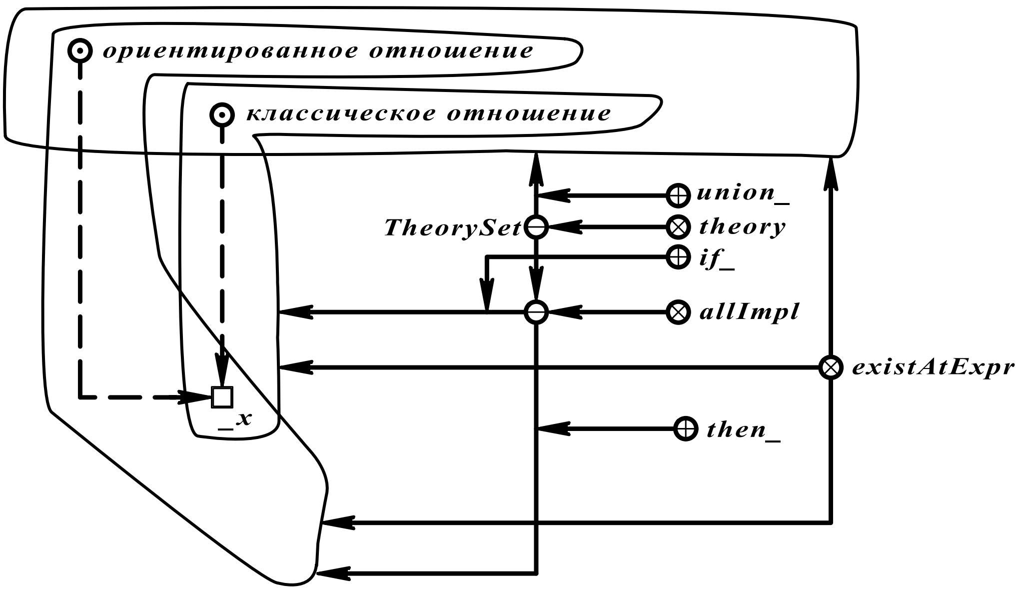
Продолжение примера 5.5.1. Запись на стилизованном естественном языке с применением языка SCs для записи структуры атомарных логических формул:

> Для всех *_x* имеет место **импликация** следующих формул:
> - **если существует [** *_x* □□□ *классическое отношение* **;],**
> - **то существует [** *_x* □□□ *ориентированное отношение* **;].**

Продолжение примера 5.5.1. Запись на языке SCLs:

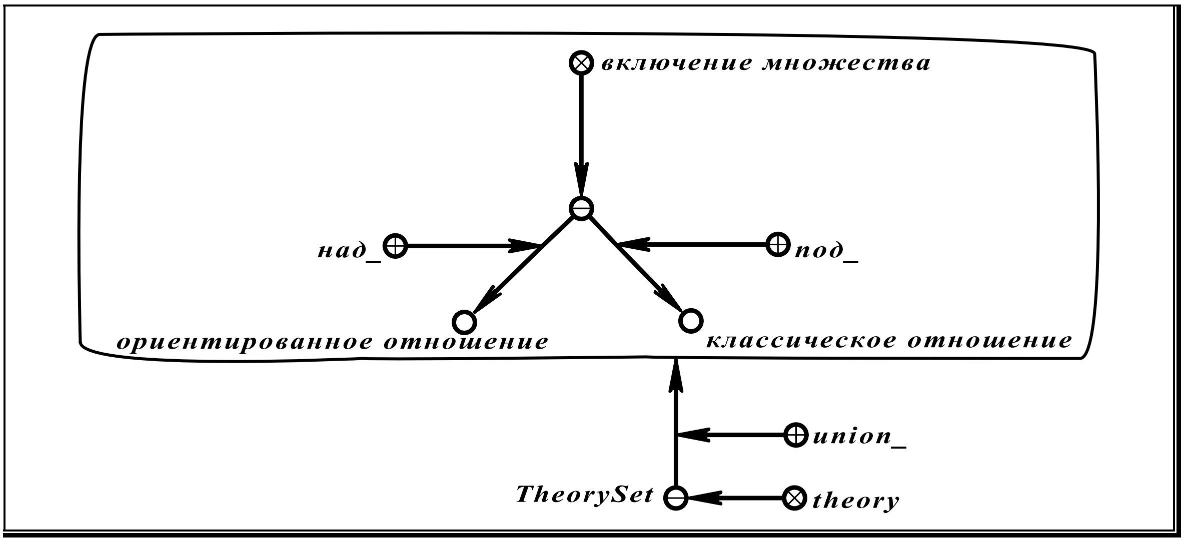
> ***TheorySet*** □□ ∀ *_x* **([** *_x* □□ ***классическое отношение*** **;]** ⟶
> **[** *_x* □□ ***ориентированное отношение*** **;]);**

Продолжение примера 5.5.1. Запись на языке SCLg:



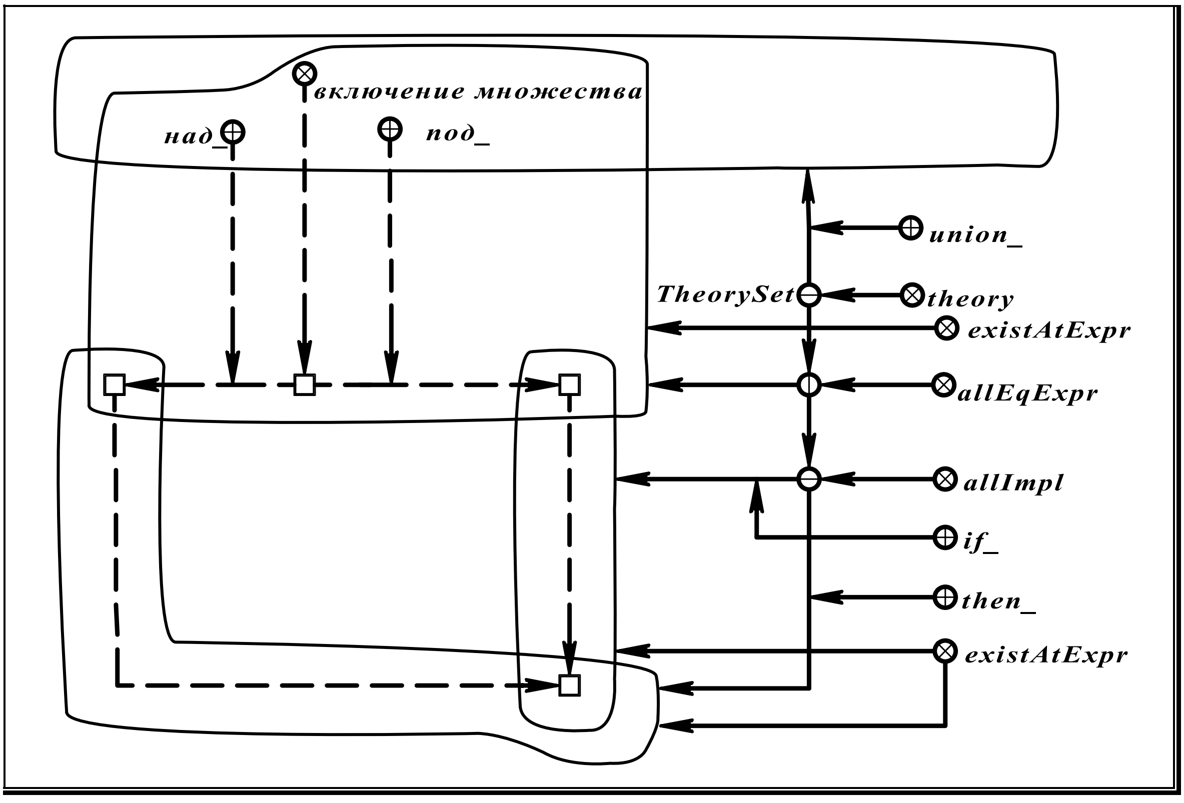
Пример 5.5.2. Высказывание, приведенное в примере 5.5.1, эквивалентно высказыванию о том, что множество "***классическое отношение***" является нестрогим подмножеством по отношению ко множеству "***ориентированное отношение***".

Продолжение примера 5.5.2. Запись на языке SCLg (см. также пункт 3.3.11):



Пример 5.5.3. Формальная запись высказывания, которое следует из определения понятия "***включение множества***" (см. пункт 3.3.11) и из которого следует эквивалентность высказывания, приведенного в примере 5.5.1, и высказывания, приведенного в примере 5.5.2.

Продолжение примера 5.5.3. Запись на языке SCLg:



Пример 5.5.4. Запись высказывания:
Не существует ни одного классического отношения, не являющегося ориентированным.

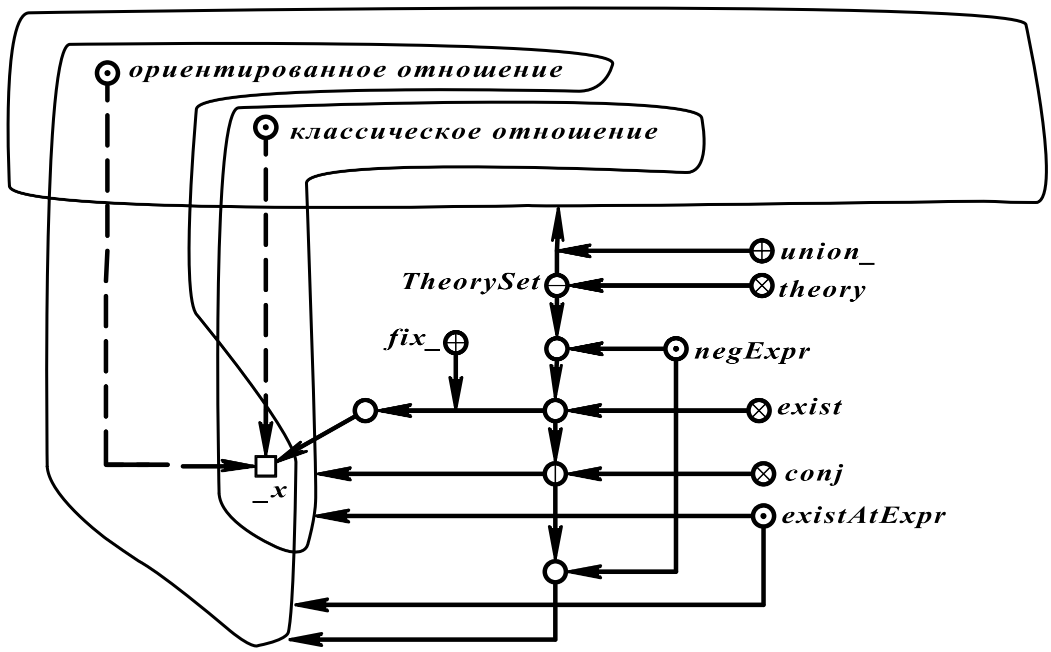
Продолжение примера 5.5.4. Запись на стилизованном естественном языке:

Не существует конструкции вида:
[*_x* □□□ ***классическое отношение*** **;],**
у которой:
не существует конструкции вида:
[*_x* □□□ ***ориентированное отношение*** **;].**

Продолжение примера 5.5.4. Запись на языке SCLs:

TheorySet_ □ □ ¬ ∃ *_x* **([** *_x* □□□ ***классическое отношение*** **;] &**
¬ **[** *_x* □□□ ***ориентированное отношение*** **;]);**

Продолжение примера 5.5.4. Запись на языке SCLg:

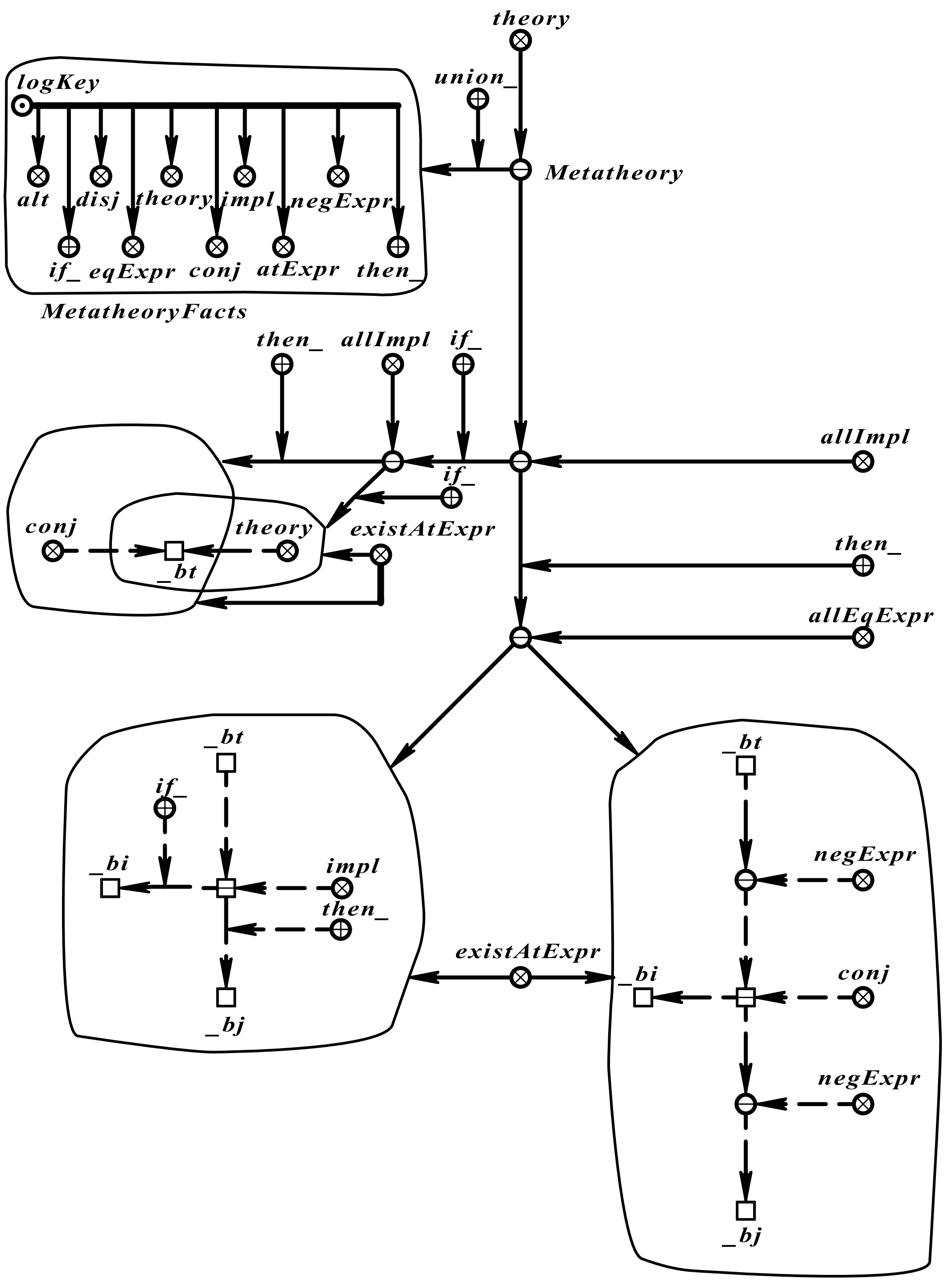


Пример 5.5.5. Очевидно, что высказывание, приведенное в примере 5.5.1, и высказывание, приведенное в примере 5.5.4, являются эквивалентными. Очевидно также, что такого рода эквивалентность имеет место для любых логических формул сходной структуры:

(*bi* —> *bj*) □□ □ ¬ **(*bi* &¬ *bj*)**

Рассмотрим то, как эта закономерность записывается в рамках формальной метатеории, для которой описывается совокупность всевозможных формальных теорий, представленных на языке SCL. Существенным здесь является то, что сама метатеория может быть представлена также на языке SCL, поскольку любая формальная теория, представленная на языке SCL, представляет собой реляционную структуру специального вида, а сам язык SCL ориентирован на описание произвольных реляционных структур. Таким образом, единство языка и метаязыка в предлагаемых графодинамических моделях проявляется не только на уровне языка SCB, но и на уровне языка SCL.

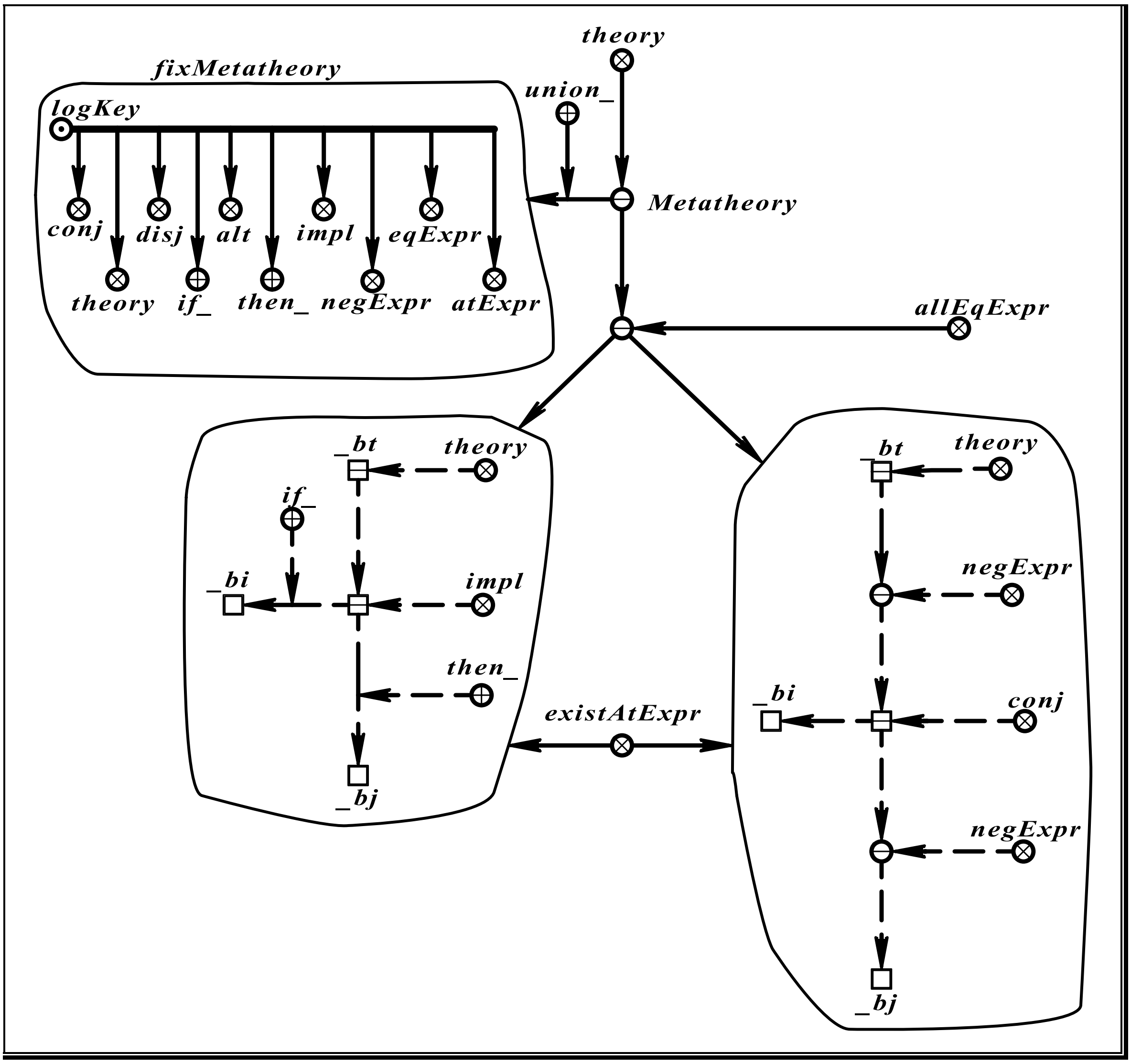
П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 5 . Запись на языке SCLg (вариант 1):



/* Здесь множество “*logKey*” включает в себя знаки всех сигнатурных элементов (ключевых узлов), указывающих структурный тип формулы ***/**

Очевидно, что приведенный sclg-текст можно переписать по-другому – в виде следующих двух высказываний об эквивалентности, входящих в состав формальной метатеории.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 5 . Запись на языке SCLg (вариант 2):



П р и м е р   5 . 5 . 6 . Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) некоторые тернарные отношения являются классическими;
2) существуют тернарные отношения, являющиеся классическими;
3) существует по крайней мере одно отношение являющееся как тернарным, так и классическим.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 6 . Запись на стилизованном естественном языке и SCs:

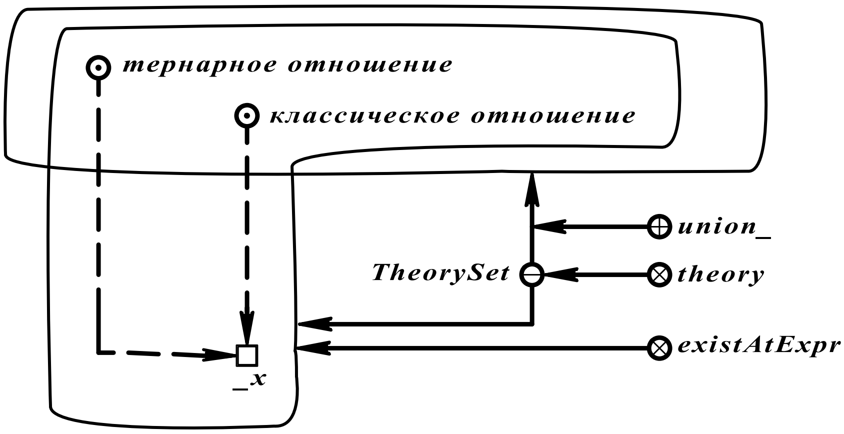
С у щ е с т в у е т   конструкция вида:
[*_x* □□□ ***тернарное отношение*** **,** ***классическое отношение*** **;] .**

Примечание. Множество, элементы которого удовлетворяют данному условию, есть пересечение множества “***тернарное отношение***” и множества “***классическое отношение***”.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 6 . Запись на языке SCLs:

TheorySet □□ ∃ *_x*
[*_x* □□□ ***тернарное отношение*** **,** ***классическое отношение*** **;] ;**

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 6 . Запись на SCLg:



П р и м е р   5 . 5 . 7 . Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) существуют отношения, являющиеся тернарными, но не являющиеся классическими;
2) существует по крайней мере одно отношение, которое относится к классу тернарных отношений, но не относится к классу классических отношений.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 7 . Запись на стилизованном естественном языке и SCs:

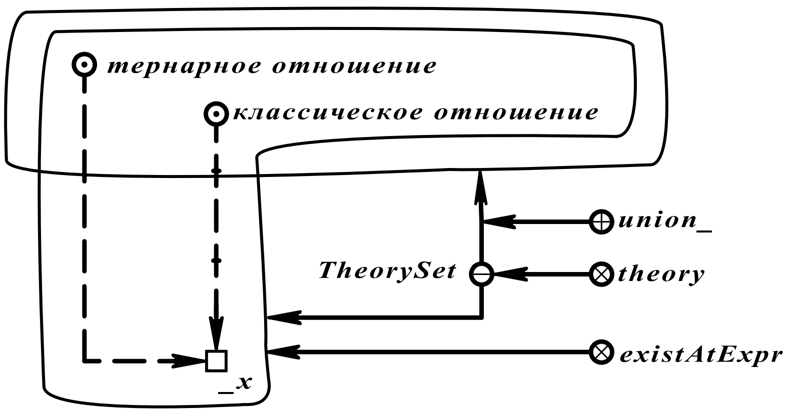
С у щ е с т в у е т конструкция вида:
[*_x* □□□ ***тернарное отношение*** **;** *_x* □□□ ***классическое отношение*** **;] .**

Примечание. Множество, элементы которого удовлетворяют данному условию, есть результат вычитания множества "***классическое отношение***" из множества "***тернарное отношение***".

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 7 . Запись на языке SCLs:

TheorySet □ □ ∃ *_x* **[** *_x* □□□ ***тернарное отношение*** **;**
_x □□□ ***классическое отношение*** **;] ;**

Продолжение примера 5.5.7. Запись на языке SCLg:



Пример 5.5.8. Эквивалентная запись высказывания, приведенного в примере 5.5.7.

Продолжение примера 5.5.8. Запись на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

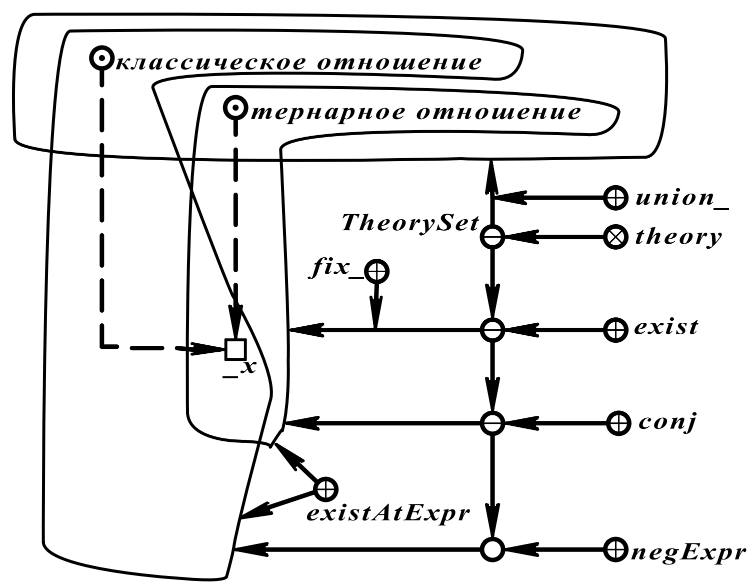
Существует конструкция вида:
[*_x* □□□ ***тернарное отношение*** **;]**

для которой
не существует конструкции вида:
[*_x* □□□ ***классическое отношение*** **;].**

Продолжение примера 5.5.8. Запись на языке SCLs:

TheorySet □ □ ∃ *_x* **([** *_x* □□□ ***тернарное отношение*** **;]**
& ¬ **[** *_x* □□□ ***классическое отношение*** **;]);**

Продолжение примера 5.5.8. Запись на языке SCLg:



Примечание. Логическая структура данного высказывания отличается от структуры высказывания, приведенного в примере 5.5.4, только тем, что здесь конъюнктивное высказывание является позитивным.

Пример 5.5.9. Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) существуют отношения, не являющиеся ни классическими, ни тернарными;
2) существуют отношения, каждое из которых не является классическим и не является тернарным.

Продолжение примера 5.5.9. Запись на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

Существует конструкция вида:
[*_x* ▫▫▫ ***отношение*** **;**
_x ▫▫▫ ***классическое отношение*** **,** ***тернарное отношение*** **;] ;**

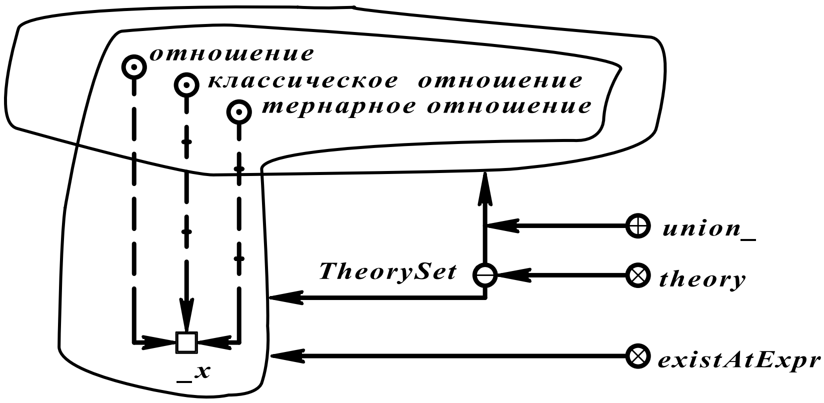
Логическая структура этого высказывания аналогична высказыванию, рассмотренному в примере 5.5.7. Отличие здесь заключается только в количестве негативных дуг.

Примечание. Множество, элементы которого удовлетворяют данному условию, представляет собой результат вычитания множества "**(*классическое отношение*** ▫ ***тернарное отношение*)**" из множества "***отношение***".

Продолжение примера 5.5.9. Запись на языке SCLs:

***TheorySet* □ □ ∃ *_x* [*_x* □□□ *отношение* ; *_x* □□□ *классическое отношение* , *тернарное отношение* ;] ;**

Продолжение примера 5.5.9. Запись на языке SCLg:



Примечание. В соответствии с правилом замены негативной дуги на негативное атомарную формулу (см. пример 5.6.2) от высказывания, приведенного в примере 5.5.9, легко перейти к целому ряду эквивалентных высказываний.

Пример 5.5.10. Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) не существует ни одного классического отношения, которое являлось бы булеаном;
2) не существует ни одного булеана, который был бы классическим отношением.

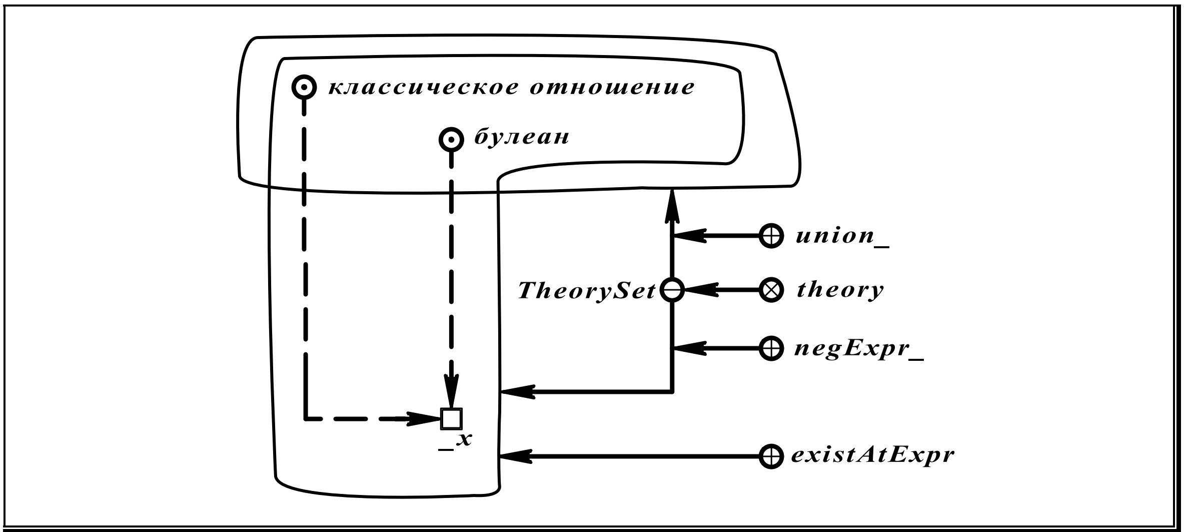
Продолжение примера 5.5.10. Запись на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

Не существует конструкция вида:
[*_x* □□□ *классическое отношение* , *булеан* ;]

Продолжение примера 5.5.10. Запись на языке SCLs:

***TheorySet* □ □ ¬ ∃ *_x* [*_x* □□□ *классическое отношение* , *булеан* ;] ;**

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 1 0 . Запись на языке SCLg:



П р и м е ч а н и е . От рассматриваемого высказывания можно перейти к целому ряду эквивалентных высказываний в соответствии с правилом преобразования негативных конъюнктивных формул в импликативные (см. пример 5.5.5). Примерами таких эквивалентных высказываний являются:

1) каждое классическое отношение не является булеаном;
2) каждый булеан не является классическим отношением.

Заметим при этом, что атомарное высказывание в языке SCL является вырожденным случаем конъюнктивного высказывания и может быть представлено в виде эквивалентной конъюнкции атомарных высказываний.

Завершая рассмотрение высказывания, приведенного в примере 5.5.10, заметим, что теоретико-множественная трактовка этого высказывания заключается в том, что пересечение множества "***классическое отношение***" и множества "***булеан***" не содержит элементов, т.е. является пустым множеством.

П р и м е р   5 . 5 . 1 1 . Варианты записи высказываний на естественном языке:

1) некоторые отношения в состав своей области определения включают некоторые тернарные классические отношения (но, возможно, не все тернарные классические отношения и, возможно, не только тернарные классические отношения).

   П р и м е ч а н и е . Примером такого отношения является метаотношение "***функциональная зависимость***", поскольку:

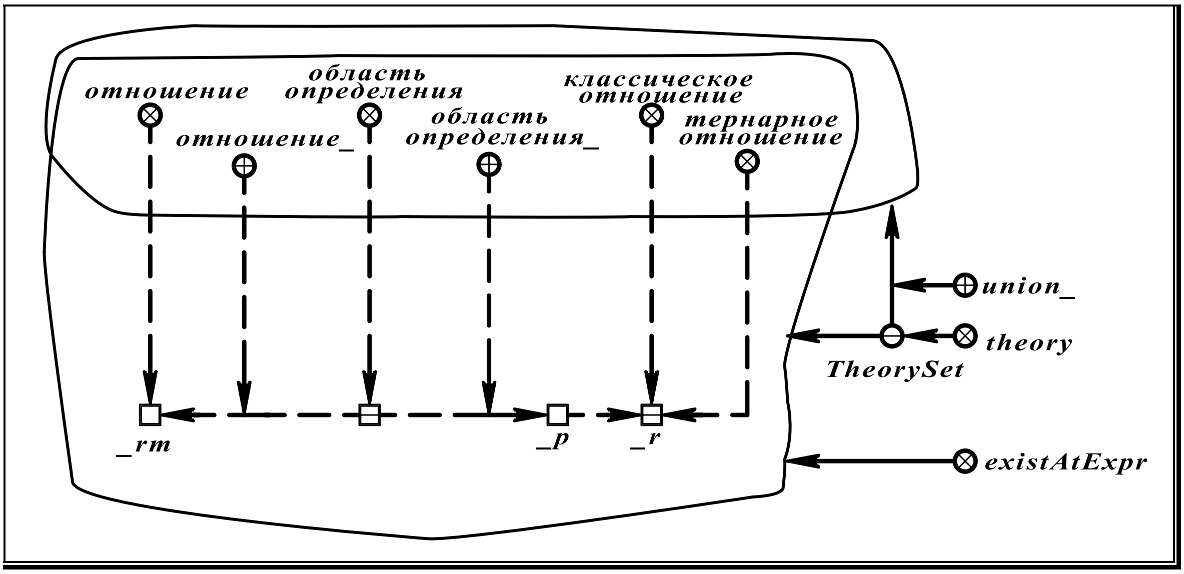
   - не все тернарные классические отношения входят в область определения этого метаотношения, а только те, которые имеют функциональную зависимость;
   - кроме некоторых тернарных классических отношений, в область определения метаотношения "***функциональная зависимость***" входят также некоторые неклассические отношения, некоторые бинарные отношения, некоторые четырехарные отношения и т.д.

2) существуют отношение ***rm*** и тернарное классическое отношения ***r*** такие, что ***r*** является одним из элементов области определения отношения ***rm***.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 1 1 . Запись на стилизованном естественном языке и с использованием языка SCs:

С у щ е с т в у е т конструкция вида:
[*_rm* □□□ *отношение* ; *_p* □ □□ *_r* ;
***область определения* □ □□ □· *отношение_* :: *_rm* ,**
***область определения_* :: *_p* ·□ ;**
***_rm* □□□ *классическое отношение* , *тернарное отношение* ;] .**

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 1 1 . Запись на SCLg:



П р и м е р   5 . 5 . 1 2 . Варианты записи высказывания на естественном языке:

1) <u>**некоторые**</u> отношения в состав своей области определения включают <u>**все**</u> бинарные ориентированные отношения, но возможно не только их.

   Примечание. Примером такого отношения "***соответствие***", в область определения которого кроме <u>**все-возможных**</u> (<u>для любого</u> бинарного ориентированного отношения можно построить семейство кортежей метаотношения "***соответствие***") бинарных ориентированных отношений входят и другие объекты – множества, не являющиеся бинарными ориентированными отношениями.

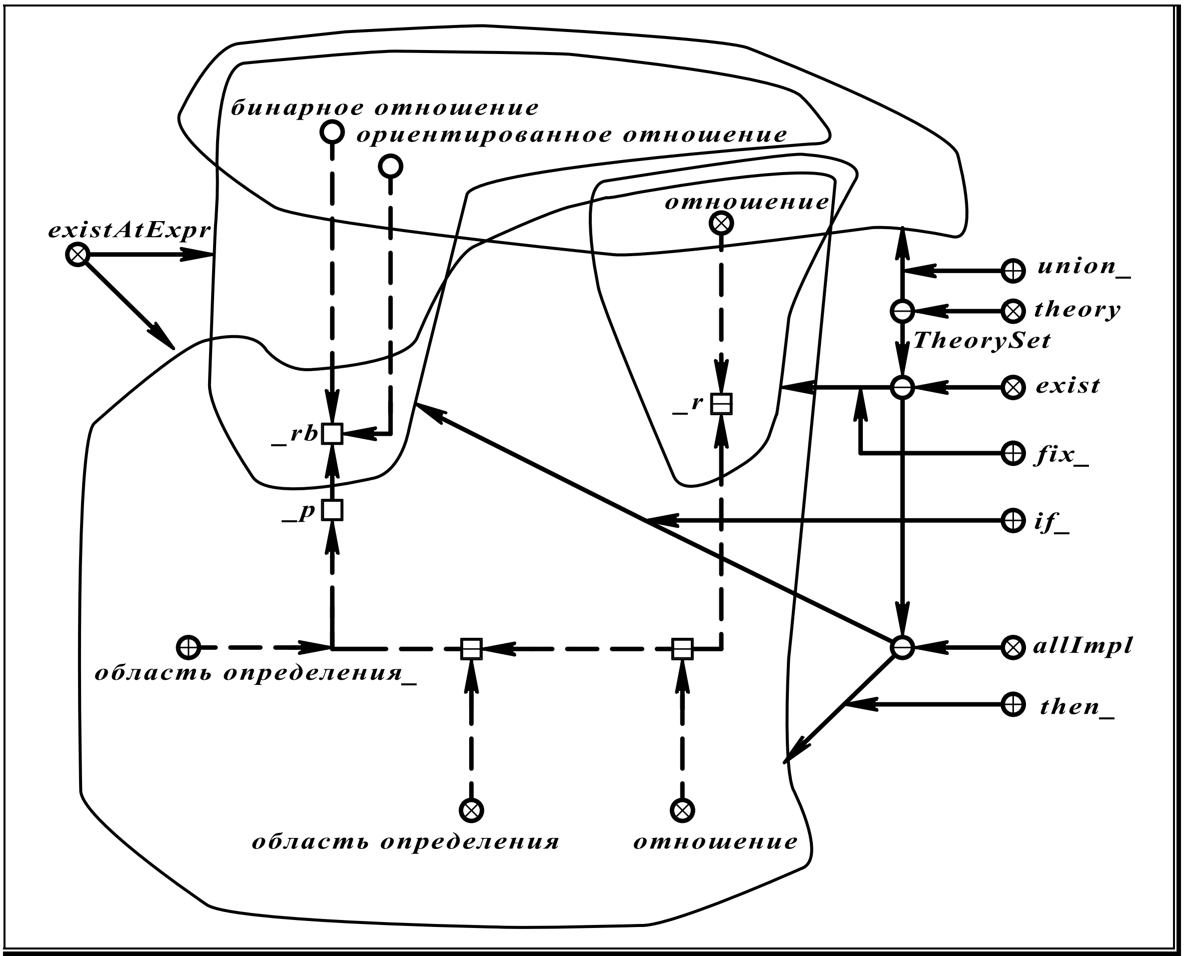
2) существует по крайней мере одно отношение такое, что каждое бинарное ориентированное отношение входит в состав его области определения.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 1 2 . <u>Запись на стилизованном естественном языке</u> и с использованием языка SCs:

С у щ е с т в у е т конструкция вида:
[*_r* □□□ *отношение* ;]
у   к о т о р о й :
д л я   к а ж д о г о ***_rb*** имеет место импликация следующих логических формул:

- **е с л и   с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
  [*_rb* □□□ *бинарное отношение* , *ориентированное отношение* ;]
- **т о   с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
  [*область определения* □ □□ □· *отношение_* :: *_r* ,
  область определения_ **::** ***_p*** **·□ ;** ***_p*** **□ □□** ***_rb*** **;]**

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 2 . Запись на SCLg:



П р и м е р 5 . 5 . 1 3 . Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:

1) некоторые отношения в состав своей области определения включают все бинарные ориентированные отношения и только их;
2) существует по крайней мере одно отношение, у которого:
   - все бинарные ориентированные отношения являются элементами его области определения,
   - и наоборот все элементы его области определения являются бинарными ориентированными отношениями.

Примечание. Примерами таких отношений являются "***транзитивное замыкание***" и "***произведение бинарных отношений***".

Примечание. Из определения понятия равенства множеств (см. пункт 3.3.11) следует, что область определения отношения, которое удовлетворяет сформулированным выше требованиям, является множеством, равным множеству всевозможных бинарных ориентированных отношений.

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 3 . Запись на стилизованном естественном языке и с использованием языка SCs:

С у щ е с т в у е т конструкция вида:
[*_r* □□□ *отношение* ;
***область определения* □ □□ □• *отношение_* :: *_r* , *область определения_* :: *_p* •□ ;]**
у к о т о р о й д л я к а ж д о г о ***_rb*** имеет место **э к в и в а л е н т н о с т ь** следующих логических формул:
- **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
  [*_rb* □□□ *бинарное отношение* , *ориентированное отношение* ;]
- **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
  [*_rb* □□□ *_p* ;]

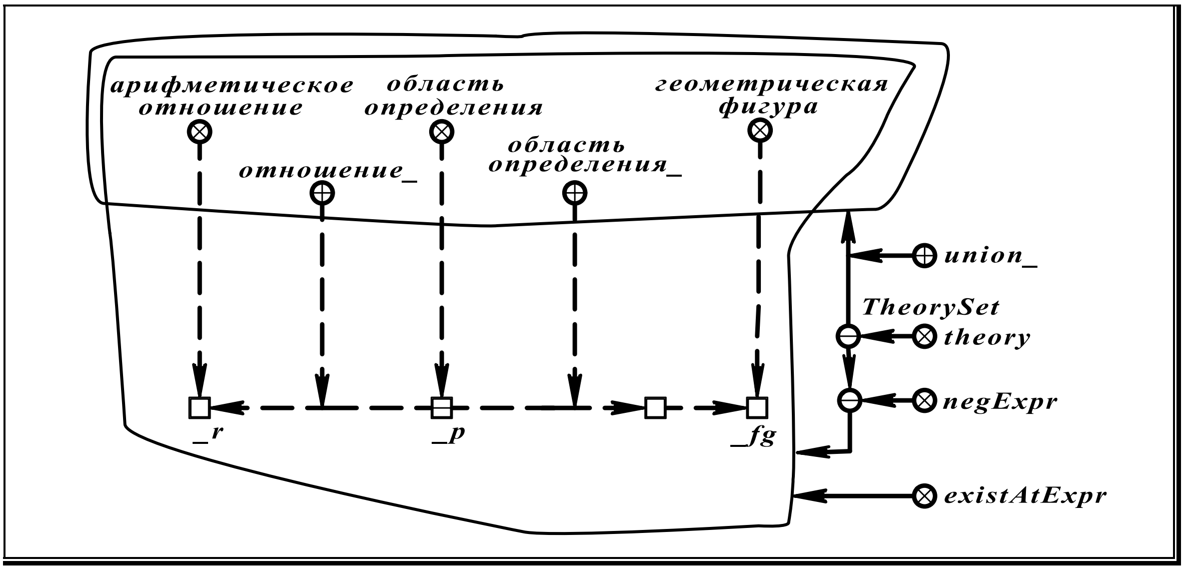
П р и м е р 5 . 5 . 1 4 . Формальная запись следующих эквивалентных высказываний:
1) не существует ни одного арифметического отношения, которое бы включало какие-либо геометрические фигуры в состав своей области определения;
2) не существует ни одной геометрической фигуры, которая была бы элементом области определения какого-либо арифметического отношения.

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 4 . Запись на стилизованном естественном языке и с использованием языка SCs:

Н е с у щ е с т в у е т конструкции вида:
[*_r* □□□ *арифметическое отношение* ;
***область определения* □ □□ □• *отношение_* :: *_r* , *область определения_* :: *_p* •□ ;**
***_p* □ □□ *_fg* □□□ *геометрическая фигура* ;]**

Примечание. Логическая структура данного высказывания отличается от логической структуры высказывания, приведенного в примере 5.5.11, тем, что в первом случае высказывание о существовании является негативным, а во втором – позитивным.

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 4 . Запись высказывания на языке SCLg:

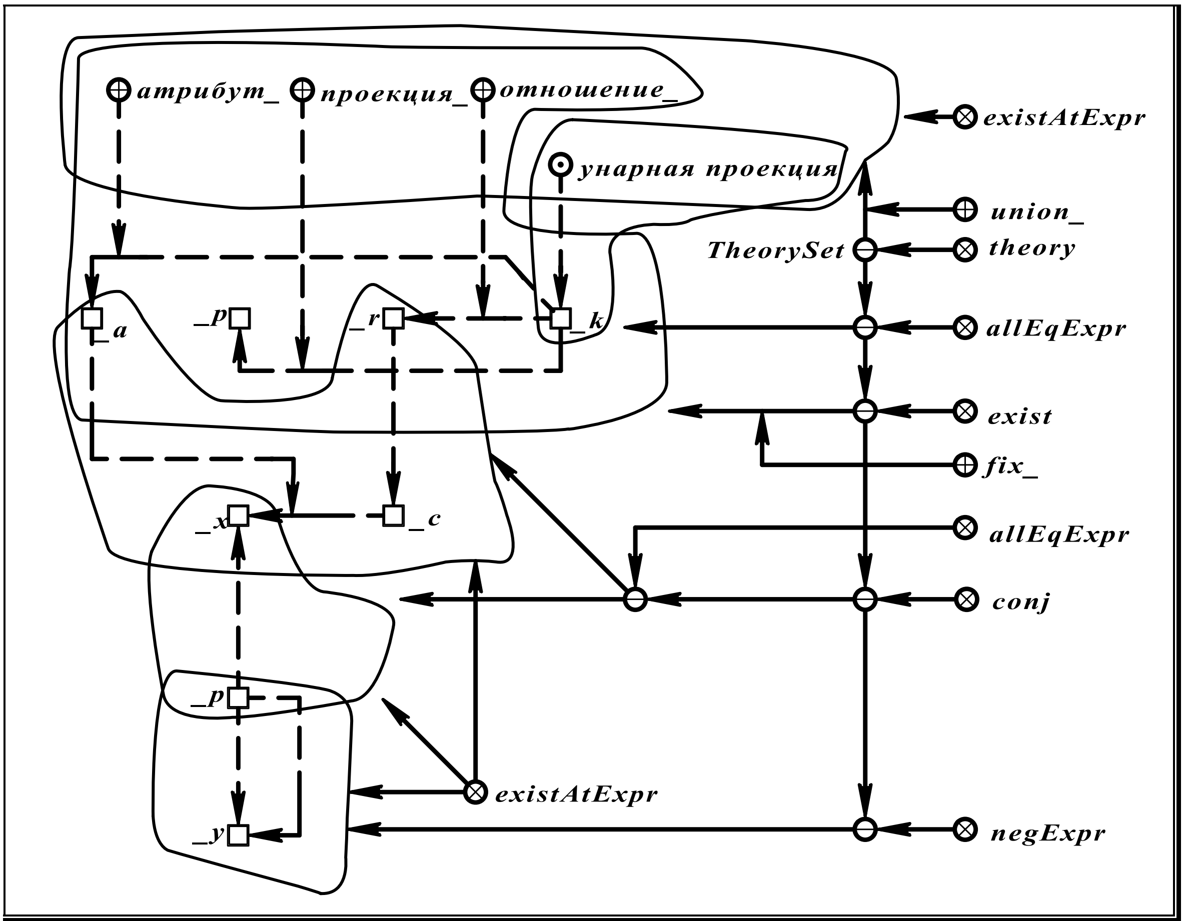


П р и м е р 5 . 5 . 1 5 . Определения метаотношения ***"унарная проекция"*** (см. пункт 3.3.13).

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 5 . Запись на языке SCLs:

```
TheorySet □ □
   ∀ _k ( [ _k □□□  унарная проекция ; ]
         ∢□ ≻ ∃ _r , _p , _a ( [ _k == □· отношение_ :: r , проекция_ :: _p ,
                                        атрибут_ :: _a ·□ ]
                              &∀ _x ( ∃ _c [ _r □ □□ _c □ □□ _a :: _x ]
                                    ∢□ ≻ [ _p □ □□  _x ; ] )
                              &¬ ∀ _y [ _p □ □ _y , _y ; ]
                              )
         ) ;
```

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 5 . Запись на языке SCLg:



П р и м е р 5 . 5 . 1 6 . Определение отрезка

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 1 6 . Варианты записи на естественном языке:

1) отрезок – это множество всех тех и только тех точек, которые лежат между двумя заданными.
2) будем говорить, что ***_t*** есть отрезок, в том и только в том случае, если существуют ***_a*** и ***_b*** такие, что:
   - ***_a*** и ***_b*** являются элементами множества ***_t*** ;

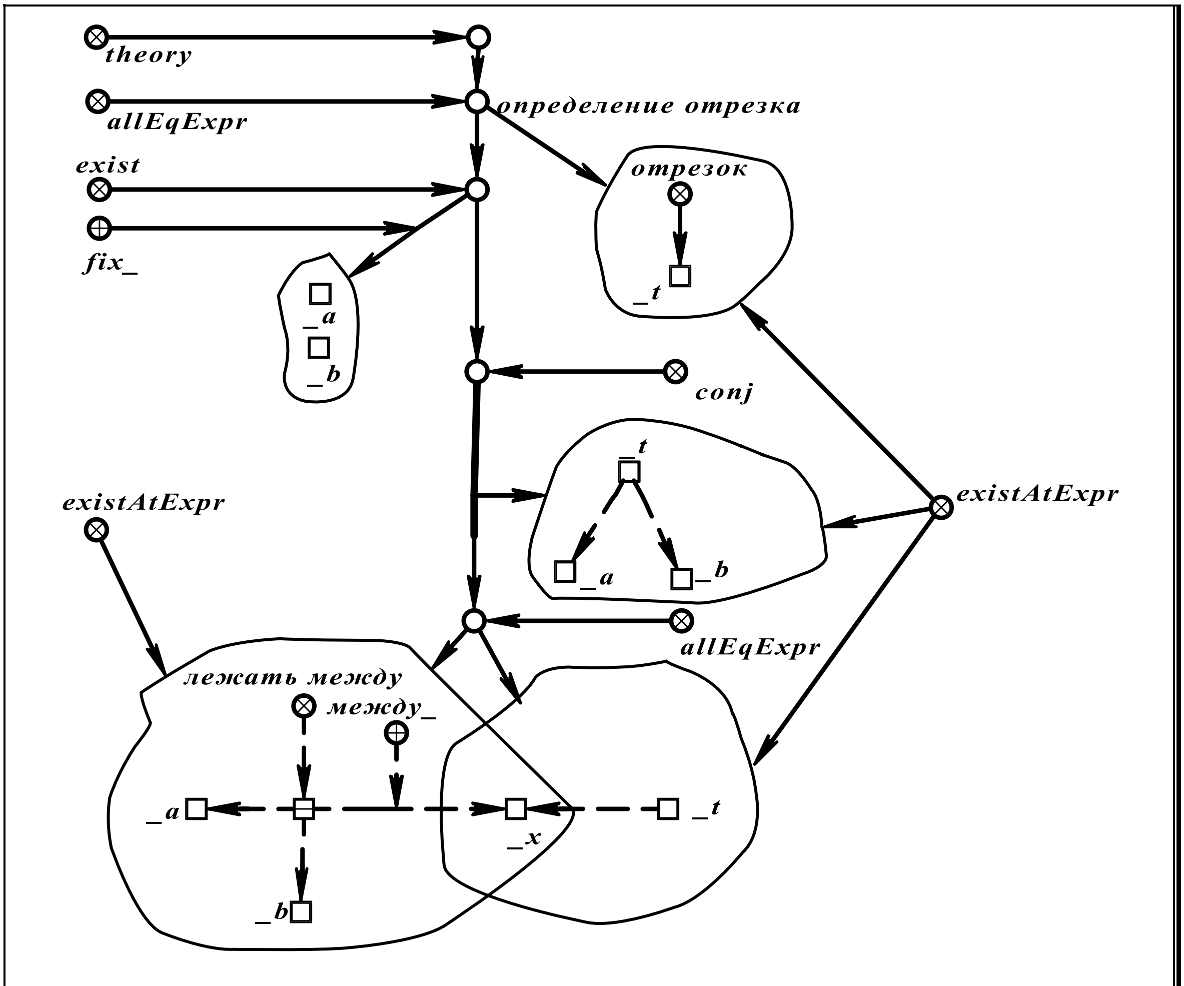
- для каждого *_x* справедливо следующее:
  - если *_x* есть элемент множества ***_t*,** не совпадающий с ***_a*** и ***_b***,
  - то *_x* лежит между ***_a*** и ***_b*** и наоборот.

Продолжение примера 5.5.16. Запись определения отрезка на стилизованном естественном языке и языке SCs:

Для всех значений переменной *_t* имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:

- **Существует** конструкция вида:
  [***отрезок*** □ □□ ***_t*** **;];**
- **Существует** конструкция вида:
  [***_t*** □ □□ ***_a*** **,** ***_b*** **;];**
  для которой имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:
  - **существует** конструкция вида:
    [***_t*** □ □□ ***_x*** **,** ***_a*** **,** ***_b*** **;]; /*** включение в состав этой конструкции переменных ***_a*** и ***_b*** означает то, что значение переменной ***_x*** не должно совпадать со значениями переменных ***_a*** и ***_b*** ***/**
  - **существует** конструкция вида:
    [***лежать между*** □ □□ □· ***_a*** **,** ***между_*** **:** ***_x*** **,** ***_b*** ·□ **;].**

Продолжение примера 5.5.16. Запись определения отрезка на языке SCLg:



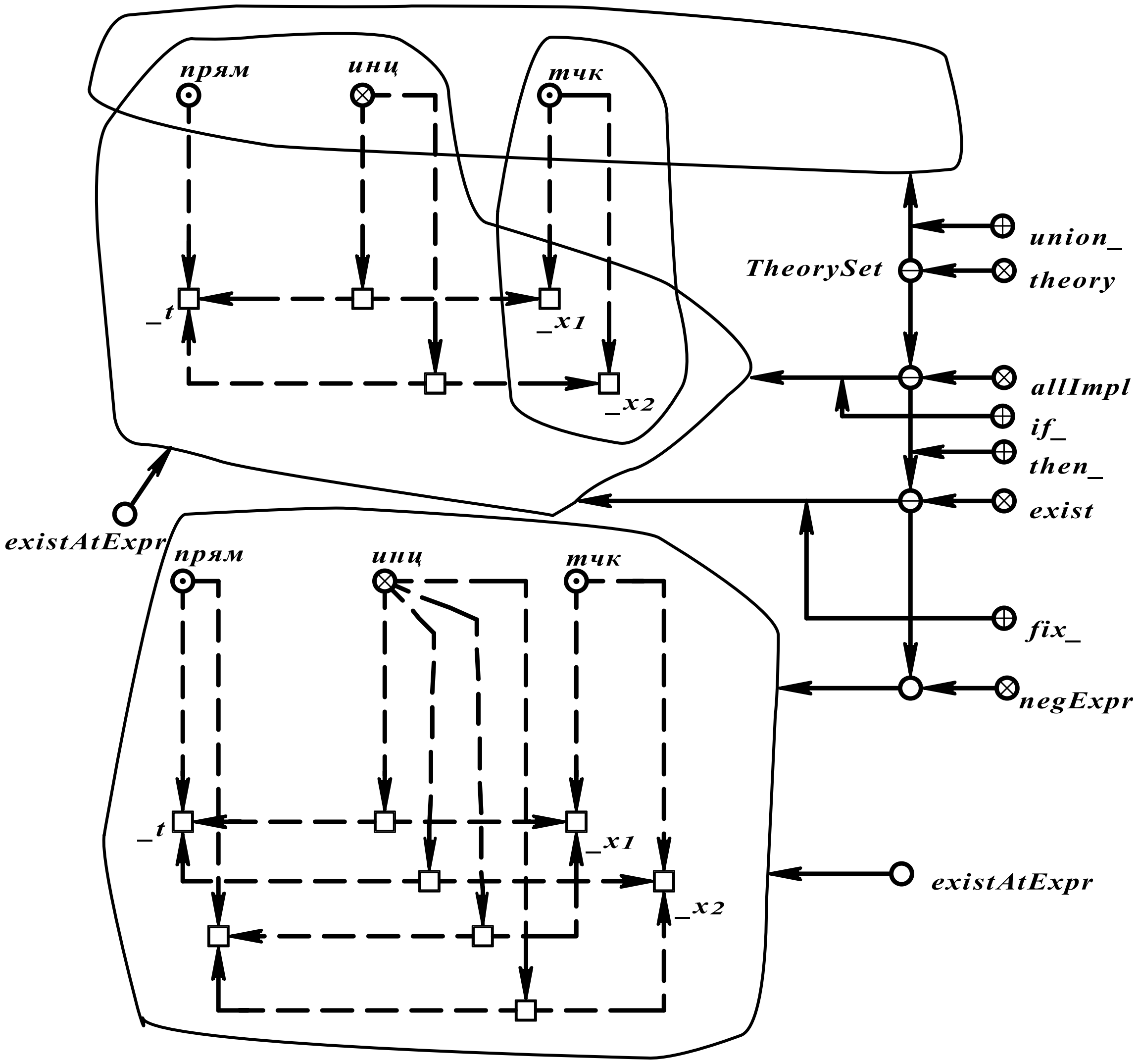
/* Здесь более одной копии имеют изображения sc-узлов ***_t*** , ***_a*** , ***_b*** , ***allEqExpr*** , ***existAtExpr*** ***/**

Продолжение примера 5.5.16. Запись определения отрезка на языке SCLs:

```
TheoryGeo □ □
    ∀ _t ( [ отрезок □ □□ _t ; ]
          ⋖□ ⋗ ∃ _a , _b ( [ _t □ □□ _a , _b ; ] ;
                        & ∀ _x ( [ _t □ □□ _x , _a , _b ; ]
                              ⋖□ ⋗ [ лежать между □ □ □· _a, между_ : _x , _b ·□ ; ]
                              )
                        )
    ) ;
```

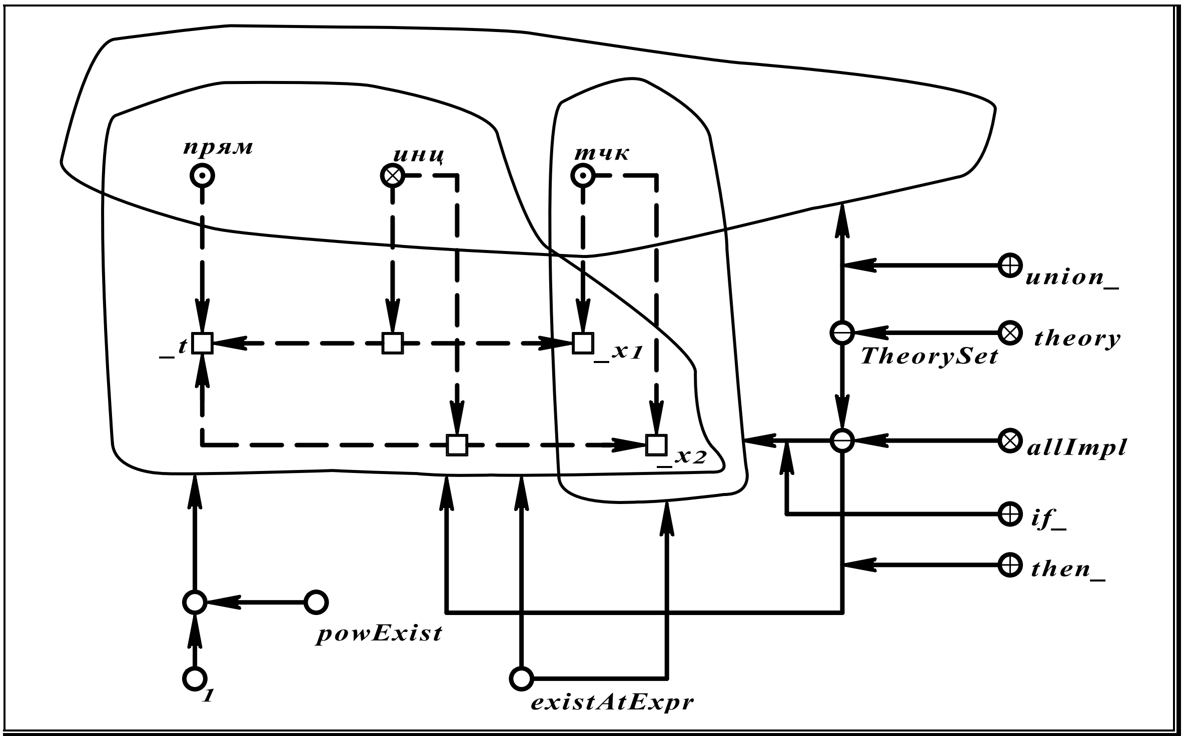
Пример 5.5.17. Запись аксиомы геометрии Евклида о существовании прямой, инцидентной двум точкам:
Для каждой пары точек существует одна и только одна инцидентная им прямая.

Продолжение примера 5.5.17. Запись аксиомы на языке SCLg:



Примечание. Квантор существования и единственность в SCLg задается явно (ключевой узел *exist*), но его можно свести к неявно задаваемому квантору существования. Приведем такого рода запись рассматриваемой аксиомы.

Продолжение примера 5.5.17. Запись аксиомы на языке SCLg (вариант 2)



Продолжение примера 5.5.17. Запись аксиомы на языке SCLs (вариант 2):

```
TheoryGeo □ □ ∀ _x1, _x2 ([тчк □ □□ _x1 , _x2 ;]
                    —> ∃ ! _t [прям □ □□ _t ;
                          инц □ □□ {· _t , _x1 ; ·}, {· _t , _x2 ; ·};] ;
                   );
```

Пример 5.5.18. Определение множества всех множеств, которые не являются элементами самих себя [100; 99] (***Виленкин Н.Я.1969кн-РасскОМ***; ***Виленкин Н.Я..1980кн-СовреОШКМ***).

Такое множество в пункте 3.1 мы называли множеством всевозможных нерефлексивных множеств и поставили ему в соответствии идентификатор "***нерефлексивное множество***". В некоторых работах, например [100] (***Виленкин Н.Я.1969кн-РасскОМ***), нерефлексивные множества называют ординарными, а рефлексивные соответственно – экстраординарными.

К строгой формулировке определения необходимо подходить весьма аккуратно, чтобы не привнести в него внутреннюю противоречивость, приводящую к тому, что называется антиномиями (парадоксами) теории множеств. Противоречие здесь может возникнуть при рассмотрении вопроса о том, является ли само определяемое множество элементом самого себя. Поэтому самым логичным способом предотвратить внутреннюю противоречивость рассматриваемого определения – это разбить его на две части:

- часть определения, формулирующая критерий принадлежности к определяемому множеству всех тех и только тех множеств, которые не совпадают с определяемым множеством;
- часть определения, которая дополнительно указывает либо факт принадлежности, либо факт непринадлежности определяемого множества самому себе.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 1 8 . Запись этого определения на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

Имеет место **э к в и в а л е н т н о с т ь** следующих логических формул:

- **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:

  [***_s*** □□□ ***нерефлексивное множество*** **;] ;**

  /* Из этой атомарной формулы следует то, что значение переменной ***_s*** не может совпадать sc-узлом, имеющим идентификатор “***нерефлексивное множество***”, т. е. не может совпадать со знаком определяемого множества. ***/**

- **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:

  [***_s*** □□□ ***_s*** **;** ***нерефлексивное множество*** **;] ;**

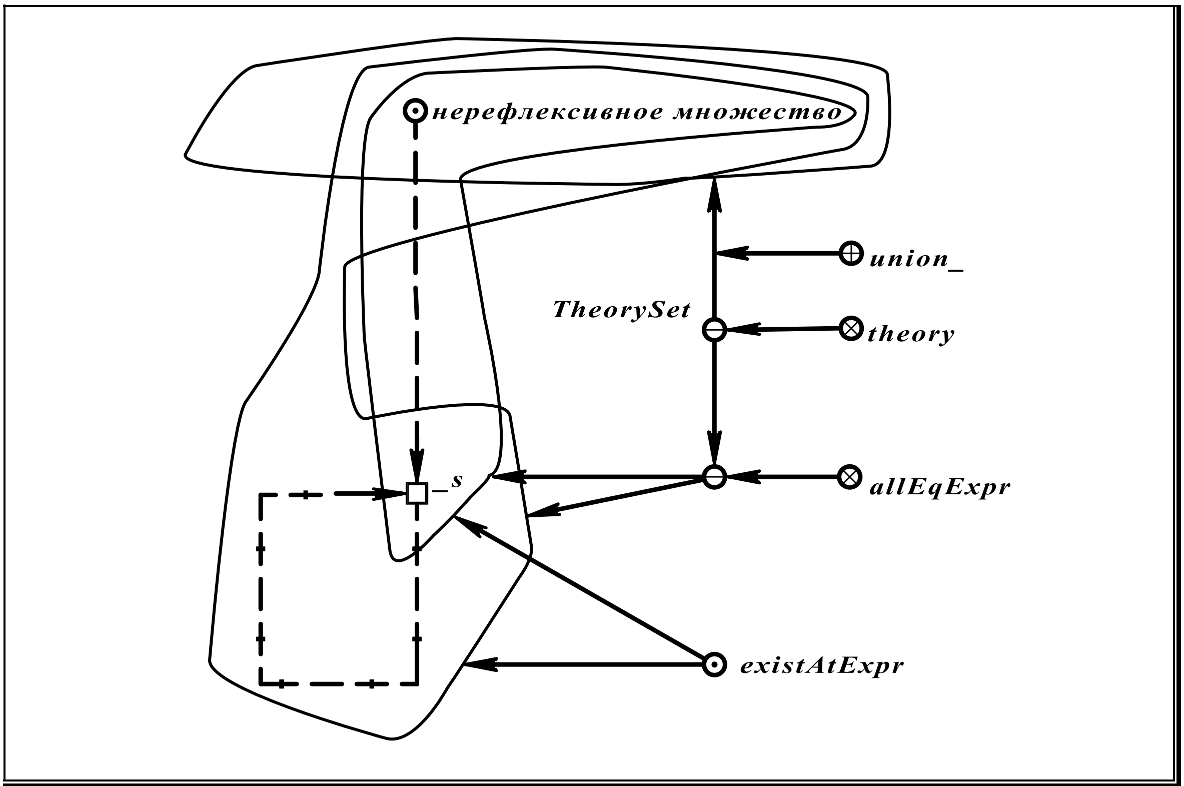
  /* Включение в данную атомарную формулу sc-узла с идентификатором “***нерефлексивное множество***” означает, что значение переменной ***_s*** не должно совпадать со знаком определяемого множества. Другими словами, под ***_s*** подразумевается знак любого другого множества ***/**

Попробуем сформулировать приведённое здесь определение на естественном языке:

Множество ***_s***, не являющееся множеством всех нерефлексивных множеств, является элементом множества всех нерефлексивных множеств в том и только в том случае, если это множество ***_s*** не является элементом самого себя.

Таким образом в этом определении речь идёт только о тех множествах, которые не совпадают со множеством всех нерефлексивных множеств (т. е. с определяемым множеством). При таком определении вопрос о том, является ли множество всех нерефлексивных множеств элементом самого себя, остаётся открытым. То есть этому определению не противоречит ни утверждение о том, что множество всех нерефлексивных множеств является элементом самого себя, ни утверждение о том, что множество всех нерефлексивных множеств не является элементом самого себя. Итак, причина возникновения по крайней мере некоторых видов противоречий, которые называют парадоксами теории множеств, не во внутренней противоречивости самой теории множеств, а в некорректных, внутренне противоречивых формулировках некоторых утверждений.

П р о д о л ж е н и е   п р и м е р а   5 . 5 . 1 8 . Запись определения на языке SCLg:



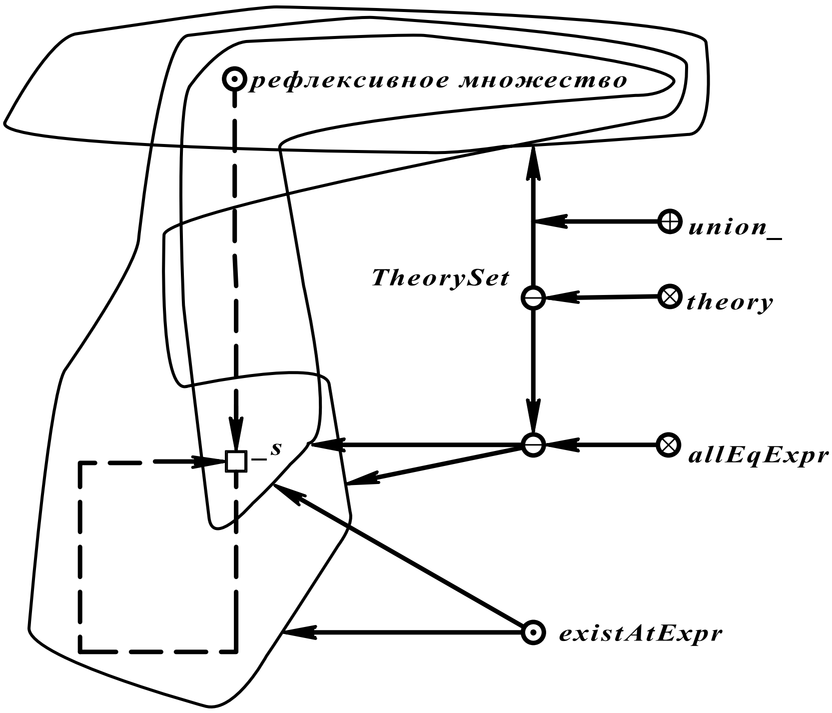
Продолжение примера 5.5.18. Запись на языке SCLs:

∀ *_s* ([*_s* □□□ ***нерефлексивное множество*** ;]
⋖□ ⋗
[*_s* □□□ *_s* ; ***нерефлексивное множество*** ;]);

Пример 5.5.19. Определение множества всех множеств, которые являются элементами самих себя. В пункте 3.1 такое множество мы называли множеством всевозможных рефлексивных множеств и поставили ему в соответствие идентификатор “***рефлексивное множество***”.

Очевидно, что определение очень похоже на предыдущее. Поэтому ограничимся его записью на языке SCLg.

Продолжение примера 5.5.19. Запись определения на языке SCLg:



Пример 5.5.20. Формальная запись следующего высказывания. Человека ***t*** будем называть брадобреем для группы лиц ***s***, в состав которой входит и человек ***t***, в том и только в том случае, если человек ***t*** бреет каждого человека ***x***, принадлежащего группе лиц ***s***, если этот человек не бреет себя сам.

Очевидно, что приведённая формулировка некорректна, т. к. к противоречию приводит попытка дать ответ на вопрос "бреет ли брадобрей сам себя". См. [100] (***Виленкин Н.Я.1969кн-РасскОМ***). Переформулируем рассматриваемое высказывание в целях устранения в нём внутренней противоречивости.

Человека *t* будем называть брадобреем для группы лиц *s* , в состав которой входит и человек *t* , в том и только в том случае, если человек *t* бреет каждого человека *x* , не совпадающего с *t* , принадлежащего группе лиц *s* , если этот человек не бреет себя сам.

При таком определении брадобрея ответ на вопрос “бреет ли брадобрей сам себя” может быть как положительным, так и отрицательным. То есть существуют два типа таких брадобреев:

- брадобреи, которые сами себя бреют;
- брадобреи, которые сами себя не бреют.

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 2 0 . Запись этого определения на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

Д л я в с е х значений переменных *_s*, *_t* имеет место **э к в и в а л е н т н о с т ь** следующих логических формул:

- **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:

  [*_s* □ □□ ***брадобрей_*** **::** *_t* **;]**

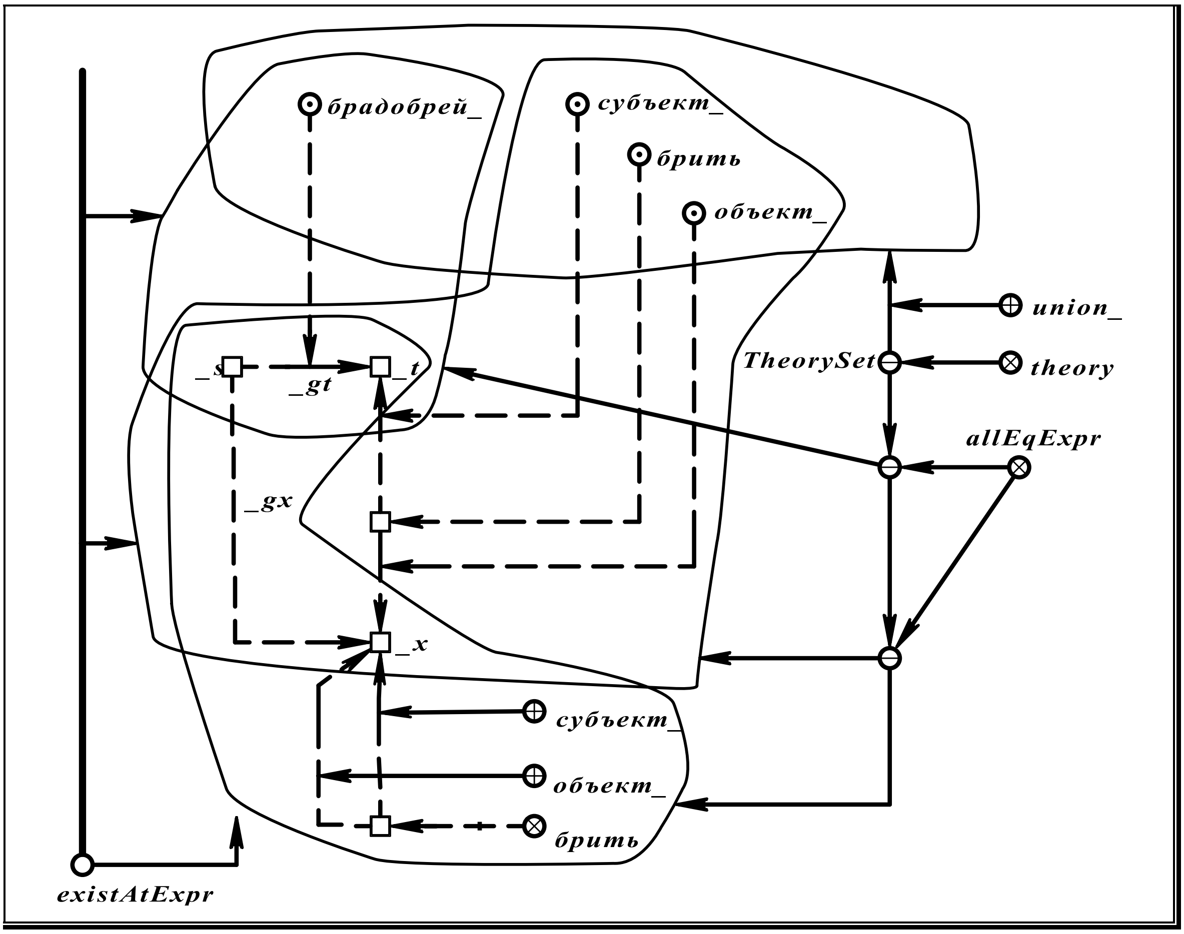
- **д л я в с е х** значений переменных *_x* имеет место **э к в и в а л е н т н о с т и** следующих логических формул:
  - **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:

    [*брить* □ □□ □· ***субъект_*** **::** *_t* **,** ***объект_*** **::** *_x* ·□ **;** *_s* □ □□ *_x* **,** *_t* **;]**
  - **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:

    [*брить* □ □□ □· ***субъект_*** **::** *_x* **,** ***объект_*** **::** *_x* ·□ **;** *_s* □ □□ *_x* **,** *_t* **;]**

Здесь атрибут ***субъект_*** (субъект действия) указывает на человека, который бреет, а атрибут ***объект_*** (объект действия, то, на что действие направлено) указывает на человека, которого бреют.

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 2 0 . Запись определения на языке SCLg:



Продолжение примера 5.5.20. Запись на языке SCLs:

∀ _s, _t ([_s □□ _gt □□ _t ; брадобрей □ □□ _gt ;]
⋖□ ⋗
(∀ _x [брить □ □□ □• субъект_ :: _t , объект_ :: _x •□ ;
_s □□ _gx □□ _x ; _s □□ _gt □□ _t ;]
⋖□ ⋗
[брить □ □□ □• субъект_ :: _x , объект_ :: _x •□ ;
_s □□ _gx □□ _x ; _s □□ _gt □□ _t ;]
)
);

Пример 5.5.21. Определение изоморфизма систем множеств (см. пункт 3.4.3).

Продолжение примера 5.5.21. Запись этого определения на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs:

Для всех значений переменной _k имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:

- **существует** конструкция вида:
  [_k □□□ изоморфизм систем множеств ;]
- **существует** конструкция вида:
  [_k □□□ взаимно однозначная сюръекция ;
  _k == □• □• _sx , атр_ :: _ax •□ , □•_sy , атр_ :: _ay •□ , отнш_ :: _r •□ ;]
  для которой имеет место **конъюнкция** следующих логических формул:
  - имеет место эквивалентность следующих логических формул:
    - **существует** конструкция вида:
      [_sx □ □□ _gx , _ex ; _gx □□ _ex ; _gx □□□ пара принадлежности ;
      _r □ □□ □• _ax :: _gx , _ay :: _gy •□ , □• _ax :: _ex , _ay :: _ey •□ ;]
    - **существует** конструкция вида:
      [_sy □ □□ _gy , _ey ; _gy □□ _ey ; _gy □□□ пара принадлежности ;
      _r □ □□ □• _ax :: _gx , _ay :: _gy •□ , □• _ax :: _ex , _ay :: _ey •□ ;]
  - имеет место **эквивалентность** следующих логических формул:
    - **существует** конструкция вида:
      [_sx □ □□ _vx , _gx ; _vx □□ _gx ; _vx □□□ узловое множество ;
      _gx □□□ пара принадлежности ;
      _r □ □□ □• _ax :: _vx , _ay :: _vy •□ , □• _ax :: _gx , _ay :: _gy •□ ;]
    - **существует** конструкция вида:
      [_sy □ □□ _vy , _gy ; _vy □□ _gy ; _vx □□□ узловое множество ;
      _gy □□□ пара принадлежности ;
      _r □ □□ □• _ax :: _vx , _ay :: _vy •□ , □• _ax :: _gx , _ay :: _gy •□ ;]

Продолжение примера 5.5.21. Запись на языке SCLs:

∀ _k ([_k □□□ изоморфизм систем множеств]
⋖□ ⋗ ∃ _sx , _ax , _sy, _ay, _r
([_k □□□ взаимно однозначная сюръекция ;
_k == □• □•_sx , атр_ :: _ax •□ , □•_sy , атр_ :: _ay •□ , отнш_ :: _r •□ ;]
& ∀ _gx , _ex , _gy , _ey
([_sx □ □□ _gx , _ex ; _gx □□ _ex ;

```
        _gx □□□ пара принадлежности ;
        _r □ □□ □• _ax :: _gx , _ay :: _gy •□ ,
         □• _ax :: _ex , _ay :: _ey •□ ; ]
        ≺□ ≻
        [ _sy □ □□ _gy , _ey ; _gy □□  _ey;
        _gy □□□ пара принадлежности;
        _r □ □□ □• _ax :: _gx , _ay :: _gy •□,
        □• _ax :: _ex , _ay :: _ey •□;])
      & ∀ _gx, _ex, _gy, _ey
      ( [ _sx □ □□ _vx, _gx; _vx □□  _gx;
        _vx □□□ узловое множество;
        _gx □□□ пара принадлежности;
        _r □ □□ □• _ax :: _vx , _ay :: _vy •□,
         □•_ax :: _gx , _ay :: _gy •□;]
        ≺□ ≻
        [_sy □ □□ _vy, _gy; _vy □□  _gy;
        _vx □□□ узловое множество;
        _gy □□□ пара принадлежности;
        _r □ □□ □• _ax :: _vx , _ay :: _vy •□,
        □• _ax :: _gx , _ay :: _gy •□;]
      )
   )
);
```

П р и м е р 5 . 5 . 2 2 . Определение понятия "*группа*" (см. пункт 3.4.2).

П р о д о л ж е н и е п р и м е р а 5 . 5 . 2 2 . Запись этого определения на стилизованном естественном языке с использованием языка SCs (для записи структуры атомарных формул).

Д л я в с е х значений переменной ***_G*** имеет место **э к в и в а л е н т н о с т ь** следующих логических формул:

- **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
  [*группа* □ □□ *_G*;]
- **с у щ е с т в у е т** конструкция вида:
  [*алгебраическая структура с одной бинарной операцией* □ □□ *_G* ;
  ***_G* □ □□ *сигнатурное отношение_* :: *r* ,**
  ***атрибут_* :: *аргумент-1_* ,**
  ***атрибут_* :: *аргумент-2_* ,**
  ***атрибут_* :: *результат_* ;**
  ***алгебраическая операция* □ □□**
  □• *отношение* :: *_r* , *результат_* :: *результат_* •□ ;]
  для которой имеет место **к о н ъ ю н к ц и я** следующих логических формул:
  - **д л я в с е х** *_a*, *_b* имеет место **и м п л и к а ц и я** следующих логических формул:
    - **е с л и с у щ е с т в у е т** конструкция вида
      [*_G* □ □□ *первичный элемент_* :: *_a* ,
      ***первичный элемент_* :: *_b* ;]**
    - **т о с у щ е с т в у е т** конструкция вида
      [*_G* == [• *_r* □ □□ □• *аргумент-1_* :: *_a* , *аргумент-2_* :: *_b* ,

*результат_* :: *_c* ▫ ; ·] ;]

- **для всех** *_a*, *_b*, *_c*, *_d* имеет место **импликация** следующих логических формул (аксиома ассоциативности):
  - **если существует** конструкция вида:

    [*_G* == [· *_r* □ □□ ▫· *аргумент-1_* :: *_a* , *аргумент-2_* :: *_bc* , *результат_* :: *_d* ▫ ,

    ▫· *аргумент-1_* :: *_b* , *аргумент-2_* :: *_c* ,

    *результат_* :: *_bc* ▫ ; ·] ;]
  - **то существует** конструкция вида

    [*_G* == [· *_r* □ □□ ▫· *аргумент-1_* :: *_ab* , *аргумент-2_* :: *_c* , *результат_* :: *_d* ▫ ,

    ▫· *аргумент-1_* :: *_a* , *аргумент-2_* :: *_b* ,

    *результат_* :: *_ab* ▫ ; ·] ;]
- **существует** конструкция вида (аксиома о существовании нейтрального элемента):

  [*_G* □ □□ *первичный элемент_* :: *_e* ;]

  для которой имеет место **импликация** следующих логических формул:
  - **если существует** конструкция вида:

    [*_G* □ □□ *первичный элемент_* :: *_a* ;]
  - **то существует** конструкция вида

    [*_G* == [· *_r* □ □□ ▫· *аргумент-1_* :: *_e* , *аргумент-2_* :: *_a* , *результат_* :: *_a* ▫ ,

    ▫· *аргумент-1_* :: *_a* , *аргумент-2_* :: *_e* ,

    *результат_* :: *_a* ▫ ; ·] ;]
- **для всех** *_a*, *_b* имеет место **импликация** следующих логических формул (аксиома о левом делении):
  - **если существует** конструкция вида

    [*_G* □ □□ *первичный элемент_* :: *_a* , *первичный элемент_* :: *_b* ;]
  - **то существует** конструкция вида

    [*_G* == [· *_r* □ □□ ▫· *аргумент-1_* :: *_x* , *аргумент-2_* : *_a* ,

    *результат_* :: *_b* ▫ ; ·] ;]
- **для всех** *_a*, *_b* имеет место **импликация** следующих логических формул (аксиома о правом делении):
  - **если существует** конструкция вида

    [*_G* □ □□ *первичный элемент_* :: *_a* , *первичный элемент_* :: *_b* ;]
  - **то существует** конструкция вида

    [*_G* == [· *_r* □ □□ ▫· *аргумент-1_* :: *_a* , *аргумент-2_* :: *_x* ,

    *результат_* :: *_b* ▫ ; ·] ;]

Упражнения к подразделу 5.5.

Упражнение 5.5.1. Запишите на SCLs определение полугруппы:

Полугруппа – это реляционная структура ***G***, у которой:
- отсутствуют сигнатурные множества;
- имеется два сигнатурных отношения, одно – основное (***ri***), другое вспомогательное (***“алгебраическая операция”***)
- имеется только один кортеж метаотношения ***“алгебраическая операция”*** вида:
  □ ***отношение_*** : ***ri*** , ***аргумент_*** : ***ai*** , ***аргумент_*** : ***aj*** , ***результат_*** : ***ar*** , □
- пересечение множеств ***G*** и ***ri*** представляет собой тернарное классическое отношение со схемой **{ *ai* , *aj* , *ar* }** и алгебраическую операцию с аргументами **{ *ai* , *aj* }**.

- в G имеется 6 элементов с атрибутом “***атрибут***”: три основных (***ai*** , ***aj*** , ***ar***) и три вспомогательных (***отношение_***, ***атрибут_***, ***результат_***).
- для каждой структуры вида $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 \Rightarrow x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$ (ассоциативность).

Упражнение 5.5.2. Запишите утверждение о том, что из любого набора sc-элементов можно построить множество. Это утверждение разбивается на два следующих утверждения:

- из любого sc-элемента можно построить его синглитон (1-мощное множество, содержащее этот sc-элемент);
- из любого множества и любого sc-элемента можно построить другое множество, состоящее из элементов заданного множества с добавлением указанного sc-элемента (если этот sc-элемент входит в число элементов заданного множества, то увеличивается на единицу число вхождений этого sc-элемента).

Упражнение 5.5.3. Аналогичным образом запишите утверждение о том, что из любого набора sc-элементов и любого набора атрибутов можно построить кортеж с любой комбинацией распределения атрибутов по его компонентам.

Упражнение 5.5.4. Запишите утверждение о том, что существует множество, для которого существует sc-элемент, не являющийся элементом этого множества.

Упражнение 5.5.5. Запишите утверждение о том, что существует по крайней мере одна пара кратных пар принадлежности.

Упражнение 5.5.6. Запишите утверждение о том, что существует по крайней мере одна пара принадлежности, для которой не существует кратной ей пары принадлежности.

Упражнение 5.5.7. Запишите утверждение о том, что существует по крайней мере одна петля принадлежности (т. е. существуют множества содержащие знак самого себя в качестве своего элемента).

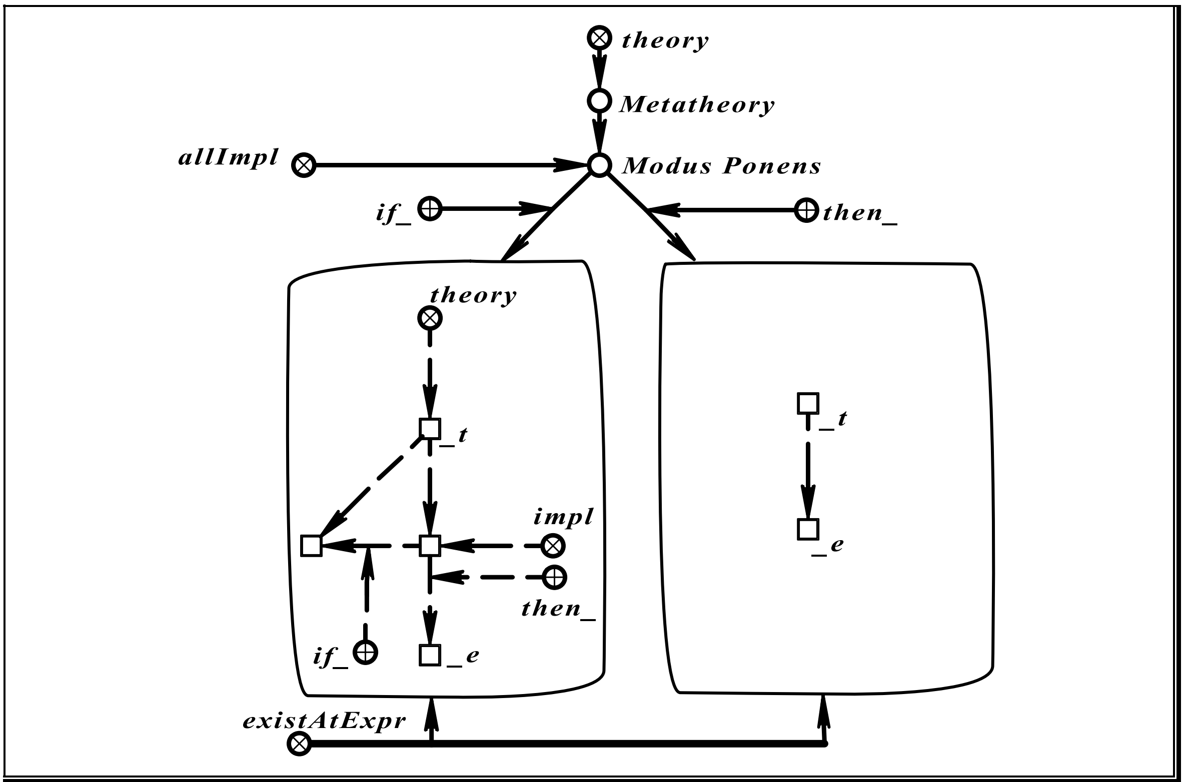
Упражнение 5.5.8. Запишите утверждение о том, что существует множества, не содержащие знак самого себя в качестве своего элемента.

5.6. Формальная метатеория и её представление на языке SCL

По аналогии с примером 5.5.5 можно привести еще целый ряд высказываний, которые описывают общие свойства всевозможных формальных теорий, каждая из которых описывает ту или иную предметную область, которая формально трактуется как некоторая реляционная структура. Свойства всевозможных формальных теорий описываются в рамках специальной метатеории (***Metatheory***), для которой совокупность всевозможных формальных теорий является описываемой предметной областью.

Приведем примеры записи общих логических закономерностей, имеющих место для всех формальных теорий. Описания этих закономерностей входят в состав формальной метатеории, которая описывает свойства всевозможных формальных теорий. Очевидно, в высказываниях этой метатеории присутствуют не только простые переменные, но и метапеременные.

Пример 5.6.1. Описание правила логического вывода **Modus ponens**

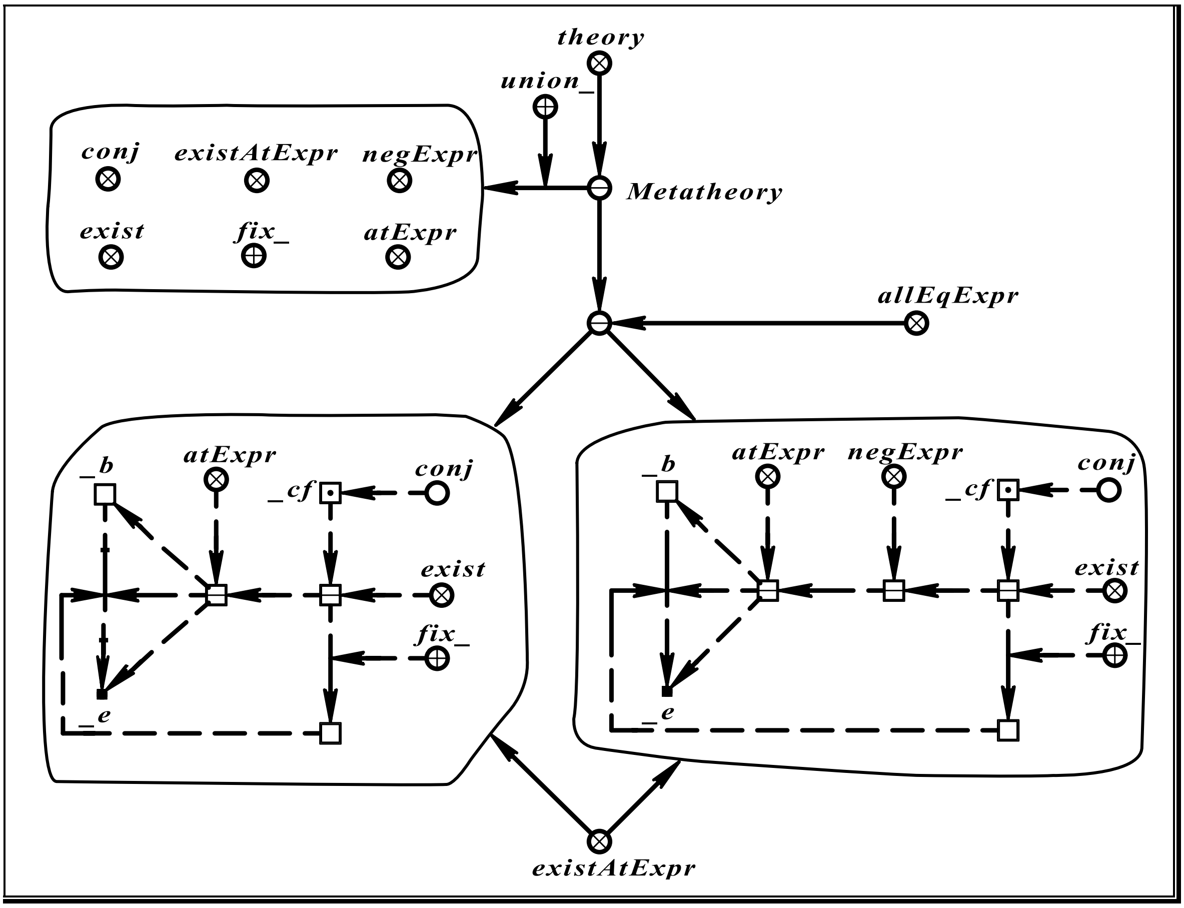


Пример 5.6.2. Рассмотрим в качестве примера правило замены негативной константной дуги на эквивалентное негативное высказывание. Итак, рассмотрим запись в рамках метатеории высказывания о том, что дуга непринадлежности, входящая в состав атомарного высказывания, эквивалентна негативному атомарному высказыванию, в состав которого входят:

- узел, из которого выходит указанная дуга непринадлежности;
- элемент, в который эта дуга входит;
- дуга принадлежности, проведенная из указанного узла в указанный элемент.

Из этого метавысказывания следует, что дуга непринадлежности, входящая в число фиксируемых элементов конъюнктивного высказывания, может быть преобразована в соответствующее негативное атомарное высказывание, входящее в состав того же конъюнктивного высказывания. Следовательно, дугу непринадлежности можно рассматривать просто как лаконичный способ записи соответствующего негативного атомарного высказывания.

Продолжение примера 5.6.2. Запись на языке SCLg:



В данном sclg-тексте используется понятие ***“absent”***, являющееся знаком множества, состоящего из sc-элементов, которые должны отсутствовать. В случае, если указанные элементы присутствуют, они должны быть удалены (ликвидированы). Таким образом, понятие ***“absent”*** является одним из средств, обеспечивающих описание различных преобразований sc-текстов.

Упражнения к подразделу 5.6.

Упражнение 5.6.1. Запишите на SCLg определение метаотношения ***“быть парой логических формул, одна из которых непосредственно входит в состав другой”***.

Упражнение 5.6.2. Запишите на SCLg определение метаотношения ***“быть парой логических формул, одна из которых входит в состав другой”***.

Упражнение 5.6.3. Запишите на SCLg определение бинарного метаотношения, каждая пара которого связывает атомарные scl-формулы, одна из которых является частной по отношению ко второй.

Упражнение 5.6.4. Запишите на SCLg определение истинного высказывания о существовании, в котором квантор существования действует на атомарную scl-формулу. Это высказывание, для которого существует изоморфный подграф в описываемой реляционной структуре.

Упражнение 5.6.5. Запишите на SCLg определение истинного высказывания о существовании, имеющего произвольный вид.

Упражнение 5.6.6. Запишите на SCLg истинного высказывания о всеобщности, в котором квантор всеобщности действует на импликативное высказывание, в котором оба компонента являются атомарными scl-формулами.

Упражнение 5.6.7. Запишите на SCLg общую логическую закономерность (закон отрицания отрицания): $\neg\neg \boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{b}$

Выводы к разделу 5

В данном разделе показано, что на базе языка SC (Semantic Code), который является достаточно простым расширением фактографического языка SCB (путем добавления переменных и введения множеств, элементами которых являются переменные), можно построить логический язык, тексты которого представляют собой не что иное, как представление реляционных структур определенного вида. И точно так же, как в языке SCB, мы легко переходим от реляционных структур к реляционным метаструктурам, в языке SC мы легко переходим от логических формул и формальных теорий к логическим метаформулам и формальным метатеориям.

1) Используемые сокращения

SCB	–	Semantic Code Basic
SCBg	–	Semantic Code Basic graphical
SCBs	–	Semantic Code Basic symbolic
SC	–	Semantic Code
SCg	–	Semantic Code graphical
SCs	–	Semantic Code symbolic
SCL	–	Semantic Code Logic
SCLs	–	Semantic Code Logic symbolic
ЕЯ	–	Естественный язык

2) Используемые условные обозначения

li, ***lj***, ***lk*** – языки (с. 9)
s, ***si***, ***sj*** – языки множеств
ei – элементы любого вида
u – узел
g – дуга
t – система множеств
ki – кортеж
ai – атрибут
r – отношение
c – связка вставка слова
x, ***y*** – элементы кортежей, числа веществ
d – декартово произведение
p – проекция
n, ***m*** –целые числа

3) Терминологический указатель

множество
знак множества
изображение знака множества
- пара – (2-мощное множество – это множество, состоящее либо из 2-х однократных вхождений в его состав элементов либо из 1-го элемента, но 2-кратно входящего в его состав)
- неориентированная пара (неупорядоченная пара)
- ориентированная пара (упорядоченная пара)
- пара принадлежности – ориентированная пара, знак которой принадлежит отношению принадлежности
- элемент множества (относительное понятие, указывающее на 2-й компонент пары принадлежности)
- знак пары принадлежности (дуг принадлежности)
- множество всевозможных знаков пар принадлежности и только их (отношение принадлежности)
- ребро – знак неориентированной пары
- дуга – знак ориентированной пары
- SCB-дуга – знак пары принадлежности
- 1-мощное множество (множество, мощность которого равна 1) – множество, состоящее из одного и однократно входящего в его состав элемента
- 1-арное отношение (унарное отношение) – семейство 1-мощных множеств
- 1-элементное множество – множество, состоящее из одного и не обязательно однократно входящего в его состав элемента

- высказывание;

определение на ЕЯ ф≻ < **…,** ***определение_*: /"** высказывание – это текст некоторого языка, который является истинным или ложным для указываемого субъекта и для указываемых значений свободных переменных "/>;

… ⊃ атомарное высказывание;

… ⊃ фактографическое высказывание;

… ⊃ атомарное нефактографическое высказывание;

… ⊃ неатомарное высказывание;

… ⊃ формальная теория;

… ⊃ замкнутое высказывание /* высказывание, имеющее свободные переменные, от значения которых зависит истинность или ложность этого высказывания. Незамкнутые высказывания называют также предикативными высказываниями или предикатами */;

4) **Используемые SC-идентификаторы**

Перечислим идентификаторы основных (ключевых) SC-элементов, к числу которых относятся:

- идентификаторы базовых ключевых узлов языка SCB;
- идентификаторы ключевых узлов языка SCB, используемых для представления тех или иных математических структур;
- идентификаторы дополнительных ключевых узлов языка SC, т.е. узлов, которые не входят в число ключевых узлов языка SCB.

Особо подчеркнем то, что особенность языка SC позволяет считать синонимичными некоторые пары константных SC-элементов и соответствующие им пары идентификаторов тогда, как ассоциируемые с указанными идентификаторами понятия следует четко отличать. Приведем несколько примеров таких пар синонимичных идентификаторов:

пара принадлежности
= ***Знак пары принадлежности*** ;

/* Понятие множества и понятие знака этого множества по сути принципиально разные вещи. Но в языке SC каждый **(!)** константный SC-элемент есть знак **(!)** некоторого множества **(!)**. Поэтому при построении идентификатора константного SC-элемента слова “знак” можно опускать, т.к. это слово всегда подразумевается */

знак пары принадлежности
= ***Знак множества из всевозможных пар принадлежности*** ;

/* Очевидно, что следует четко отличать знак некоторого множества от одного из элементов этого множества. Но в языке SC для компактной идентификации знаков множеств используется построение таких идентификаторов не только как имен собственных, но и как имен нарицательных. */

Используемые SCB-идентификаторы

отношение_ (***rel_***)
атрибут_ (***attr_***)

пара (2-мощное множество)
неориентированная пара
ориентированная пара (2-мощный кортеж)
петля (2-мощное 1-элементное множество)
неориентированная петля
ориентированная петля
дуга (знак ориентированной пары)
ребро (знак неориентированной пары)
2-мощное отношение
2-мощное ориентированное отношение
2-мощное неориентированное отношение
SCB-дуга
SCB-ребро
SCB-дуга принадлежности
(знак пары принадлежности
знак пары отношения принадлежности)
пара принадлежности
отношение принадлежности

5) Библиографический указатель

1. Гильберт Д., Бернайс П. Основание математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М.: Наука, 1979.
2. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. М.: Изд-во МГУ, 1982.
3. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980.
4. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1975.
5. Таран Т.А. Основы дискретной математики. К.: Просвещение, 1998.