

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАТИКИ  
И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра радиотехнических устройств

Ю.М. ЩЕРБАК    А.И. КОНОЙКО

УСТРОЙСТВА ОПТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

ЧАСТЬ 1

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Для студентов специальности «Радиотехника»

в 2-х частях

Минск 2011

УДК 681.3.01:535

Щербак Ю.М., Конойко А.И. Устройства Оптической обработки сигналов. Ч.1. Лабораторный практикум в 2-х частях. – Мн.: БГУИР, 1996. – 40 с.

Практикум предназначен для подготовки и проведения лабораторных занятий по курсу «Оптическая обработка сигналов» студентами дневного обучения специальности «Радиотехника» и содержит описание лабораторных работ и методику их проведения. Изложены краткие теоретические сведения об изучаемых устройствах и явлениях, принципы построения оптических схем обработки сигналов что дает возможность студентам использовать практикум для самостоятельной работы при изучении данного курса.

Ил. 9, список лит. – 5 назв.

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

### Подготовка к работам и оформление отчета

Для эффективного использования лабораторного времени каждой лабораторной работе должна предшествовать самостоятельная подготовка. Во время этой подготовки студент обязан:

- изучить соответствующие разделы курса, методические указания к лабораторной работе и правила безопасности при работе с электроприборами и лазерами;

- уяснить принципы работы исследуемых устройств, изучить их структурные схемы и используемые оптические и оптоэлектронные элементы.

Предварительная работа включает также оформление отчета по предыдущей лабораторной работе и подготовку к ее защите.

Отчет, составляемый индивидуально и подписываемый с указанием даты каждым студентом, должен содержать:

- структурную схему лабораторной установки с указанием используемой контрольно-измерительной аппаратуры;

- оптические схемы исследуемых устройств с указанием геометрических параметров распространяющихся в них лазерных лучей;

- результаты выполненных теоретических и экспериментальных исследований, сведенные в таблицы и оформленные в виде графиков, диаграмм, рисунков;

- результаты расчетов и соответствие их эксперименту;

- выводы и замечания по результатам исследований с приведением соответствующих доказательств.

Схемы вычерчиваются аккуратно от руки с учетом требований государственных стандартов. Графики могут вычерчиваться на миллиметровой бумаге. Минимальный размер графика – не менее 9×12 см.

### Правила безопасности при выполнении лабораторных работ

#### Общие положения

1. Не приступать к работе, не ознакомившись с инструкцией по технике безопасности для студентов, выполняющих работы на лазерных установках, и с настоящей инструкцией.

2. Внимательно осмотреть приборы и оборудование на рабочем месте и при обнаружении каких-либо неисправностей сообщить об этом руководителю.

3. Не включать и не выключать радиоизмерительные приборы без разрешения руководителя.

4. В случае неисправности приборов или макетов, при отсутствии напряжения в сети необходимо сообщить об этом руководителю.

#### Правила электробезопасности

1. Радиоизмерительные приборы и блоки питания лазеров питаются напряжением 220 В, частотой 50 Гц, опасным для жизни.

2. Перед включением установки необходимо убедиться в наличии заземления у всех приборов.

3. Не прикасаться к корпусам двух приборов одновременно.

#### Правила безопасности при работе с лазерами.

1. Лабораторные установки укомплектованы лазерами II класса, прямое и зеркально отраженное излучение, которых опасно для глаз.
2. Запрещается включать и выключать блоки питания лазеров. Их включение и выключение производится руководителем.
3. Запрещается смотреть навстречу прямому или отраженному лазерному лучу.
4. Сообщить руководителю об окончании выполнения работы. Привести в порядок рабочее место.

#### Учебно-исследовательская работа студентов

Целью учебно-исследовательской работы студентов (УИРС) является развитие у студентов навыков самостоятельной научно-исследовательской работы. УИРС проводятся по теме каждого лабораторного занятия. Однако задания по УИРС имеют в целом нестандартный характер и могут выходить за пределы инструкции к лабораторной работе. Учебно-исследовательская работа проводится во время лабораторного практикума. Ориентировочные темы заданий по УИРС приводятся в конце описания к каждой лабораторной работы.

В пределах настоящего лабораторного практикума организация УИРС осуществляется следующим образом:

- получение задания;
- изучение обязательной и поиск дополнительной литературы;
- теоретический анализ;
- составление плана эксперимента и обсуждение;
- обработка результатов исследования;
- формулировка выводов;
- оформление и защита отчета по работе.

#### Лабораторная работа 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Цель работы – выяснение условий формирования интерференционной картины, исследование основных интерференционных схем и их практическое применение.

##### 1.1 Краткие теоретические сведения

Явление интерференции света находит широкое применение в технике оптической обработки сигналов. Устройства, в которых одним из обрабатываемых параметров является фаза сигнала, строятся, как правило, по двухлучевой схеме интерференции. Принцип записи интерференционной картины, содержащей информацию о сигнале и алгоритме обработки, лежит в основе голографических методов обработки информации.

Известно, что при сложении гармонических колебаний одной частоты

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{01}(t) \cos[2\pi\nu t - \varphi_1(t)]; \\ a_2 &= a_{02}(t) \cos[2\pi\nu t - \varphi_2(t)]; \end{aligned} \quad (1.1)$$

получается вновь гармоническое колебание той же частоты (в линейном приближении)

$$a = a_1 + a_2 = a(t) \cos[2\pi\nu t - \varphi(t)]; \quad (1.2)$$

где

$$a(t) = \{a_{01}(t)^2 + a_{02}(t)^2 + 2a_{01}(t)a_{02}(t)\cos[\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi\nu(t_1 - t_2)]\}^{1/2}, \quad (1.3)$$

а фаза определяется как

$$\varphi(t) = \arctg \frac{a_{01}(t)\sin(\varphi_1 + 2\pi\nu t_1) + a_{02}(t)\sin(\varphi_2 + 2\pi\nu t_2)}{a_{01}(t)\cos(\varphi_1 + 2\pi\nu t_1) + a_{02}(t)\cos(\varphi_2 + 2\pi\nu t_2)}. \quad (1.4)$$

Таким образом, в зависимости от разности фаз исходных колебаний амплитуда результирующего колебания может принимать значение от суммы до разности амплитуд исходных колебаний.

На оптической частоте ни один регистрирующий прибор не может измерить или зарегистрировать амплитуду волны. Регистрируется интенсивность света – плотность потока энергии, переносимой волной. Известно, что интенсивность света пропорциональна квадрату модуля амплитуды волны. Но амплитуда колебаний в заданной точке пространства, где распространяются две или более электромагнитных волн, зависит не только от их амплитуд, но и от разности фаз отдельных колебаний, следовательно, и интенсивность зависит от разности фаз.

Если при взаимодействии волн не происходит арифметического суммирования их интенсивностей, то говорят об интерференции волн.

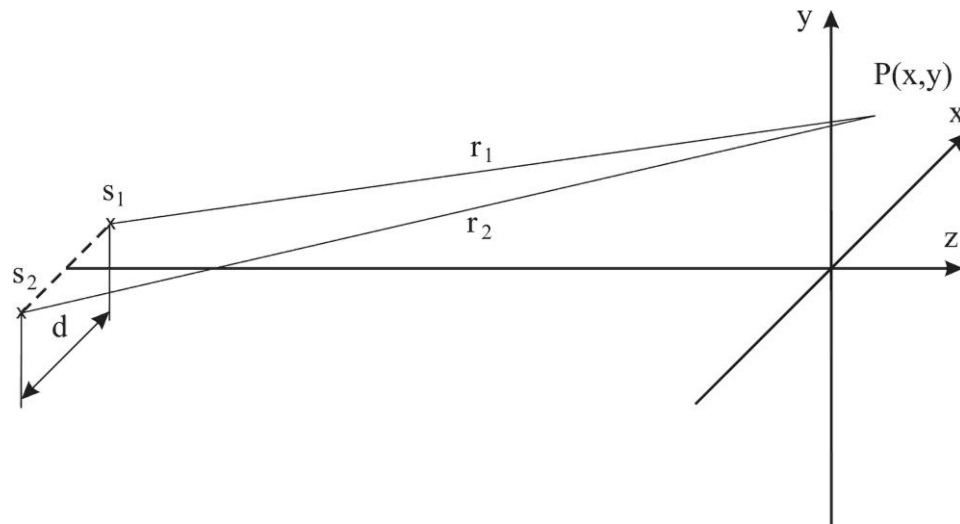


Рис. 1.1. Интерференция света от двух точечных источников

На рис.1.1 экран освещается двумя источниками света. Однако если мы возьмем две обычные лампочки накаливания или даже два лазера, то никакой интерференции волн обнаружено не будет. Излучение любых реальных источников оптических волн представляет собой последовательность волновых пакетов конечной длительности с нескоррелированными начальными фазами. Такие волны можно представить себе в виде

$$E(x, y, z, t) = E_0 \cos[\omega t - kr + \varphi(t)], \quad (1.5)$$

где  $k$  – волновой вектор;  $r$  – радиус-вектор;  $\varphi(t)$  – описывает быстрые случайные изменения начальной фазы волны.

Полагая для простоты, что амплитуды этих волн одинаковы, суммарное колебание в некоторой точке от двух источников можно записать как

$$E(t) = E_0 \cos[\omega t - kr_1 + \varphi_1(t)] + E_0 \cos[\omega t - kr_2 + \varphi_2(t)], \quad (1.6)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния от источников света до точки наблюдения интерференции.

Последнее выражение нетрудно привести к виду

$$E(t) = E_0 \cos \left[ \frac{k(r_2 - r_1)}{2} + \Delta\varphi(t) \right] \cos \left[ \omega t - \frac{k(r_2 - r_1)}{2} + \frac{\varphi_1(t) + \varphi_2(t)}{2} \right]. \quad (1.7)$$

Поскольку фазы двух источников нескоррелированы между собой,  $\frac{\varphi_1(t) + \varphi_2(t)}{2}$  и  $\Delta\varphi - \frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)}{2}$  также являются случайными функциями от  $t$ . Поэтому амплитуда и фаза колебаний в произвольной точке наблюдения изменяются во времени быстро и хаотически. Инерционность любого регистрирующего устройства (глаз, фотопленка, фотоприемник) приведет к усреднению мгновенных значений интенсивности света, и мы не зарегистрируем интерференционной картины. Следовательно, для ее получения необходимы источники с постоянной разностью фаз, когерентных источников.

Пусть интерференционная картина образуется от двух волн, полученных в результате деления излучения от одного источника. Тогда  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ . Амплитуда колебаний в данном случае стационарна во времени и в зависимости от  $\Delta = (r_2 - r_1)$ , или, как ее называют, разности хода волн, может принимать значения от 0 до  $\pm E_0$ . Следовательно, интенсивность света, регистрируемая приемниками, изменяется от  $I_{\min} = 0$  до  $I_{\max} = 4I_0$ .

$I = I_{\max}$  при  $\Delta = 2m\lambda/2$ , то есть при разности хода, равной четному числу полуволен;

$I = I_{\min}$  при  $\Delta = (2m-1)\lambda/2$ , то есть при разности хода, равной нечетному числу полуволен.

Число  $m$  называют порядком интерференционной картины.

Назовем контрастом  $S$  интерференционной картины отношение

$$S = \frac{I_{\max}}{I_{\min}}. \quad (1.8)$$

Из определения следует, что максимальное значение контраста равно бесконечности. При  $S=1$  интерференционная картина не наблюдается. В рассмотренном случае равенства амплитуд интерферирующих волн контраст интерференционной картины равен бесконечности.

Интерференция наблюдается на плоском экране или другой поверхности в виде характерного чередования светлых и темных полос, которые называются интерференционными полосами.

Интерференционная полоса – это геометрическое место точек на поверхности наблюдения интерференционной картины с одинаковой разностью хода.

Существует два способа получения когерентных источников для наблюдения интерференционной картины. Первый способ заключается в выделении отдельных участков волнового фронта источника с помощью диафрагм, зеркал.

В современных интерференционных схемах чаще используется второй способ, обеспечивающий меньшие потери световой энергии. Он заключается в разделении волнового фронта с помощью полупрозрачных зеркал (интерферометры Майкельсона, Маха-Цендера, Фабри-Перо и др.).

## 1.2. Форма интерференционных полос

Для лучшего понимания процесса формирования интерференционной картины полезно проанализировать форму интерференционных полос. Она определяется как формой волновых фронтов интерферирующих волн, так и формой поверхности экрана, на которой наблюдается интерференционная картина. Область перекрытия интерферирующих волн занимает в пространстве, как правило, некоторый объем, поэтому максимумы и минимумы амплитуды суммарного светового поля располагаются в этом объеме в виде системы непересекающихся поверхностей. Исключение составляет картина интерференции волн в тонких (по сравнению с длиной волны) пленках. Во всех остальных случаях наблюдаемая интерференционная картина представляет собой сечение этих поверхностей поверхностью наблюдения. Рассмотрим форму интерференционных полос для простейших случаев:

а) интерферируют две плоские волны.

Расположение волновых фронтов в пространстве и их волновые векторы показаны на рис.1.2. Интерферируют две волны, сходящиеся под углом  $\theta$ , причем для простоты анализа установим, что плоскости волновых фронтов параллельны оси  $x$ , ось  $z$  является биссектрисой угла между волновыми векторами  $k_1$  и  $k_2$ . Тогда волновые векторы этих волн равны

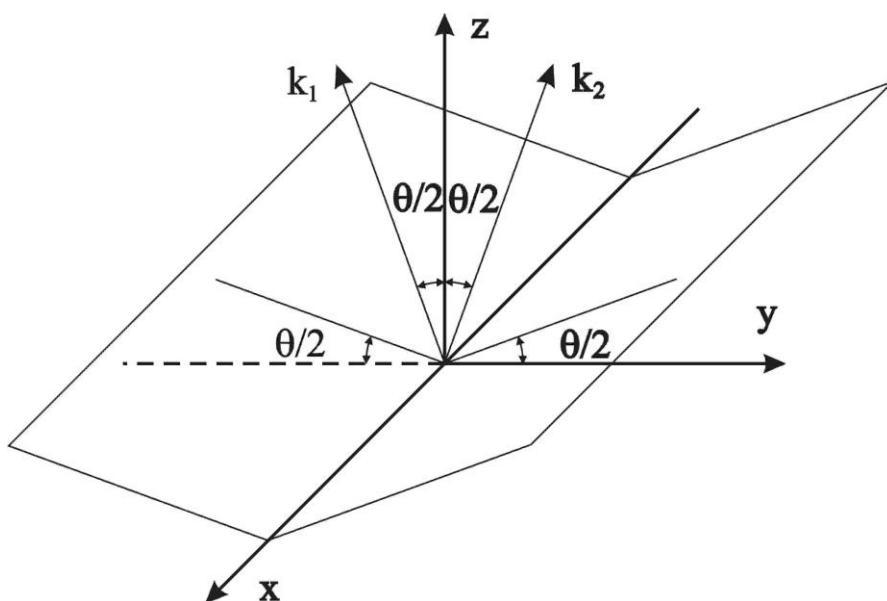


Рис.1.2. Интерференция двух плоских волн

$$k_1 = \left( 0, k \sin \frac{\theta}{2}, k \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad (1.9)$$

$$k_2 = \left( 0, -k \sin \frac{\theta}{2}, k \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad (1.10)$$

Чтобы найти уравнения для пары волновых фронтов интерферирующих волн, подставим в уравнение волны

$$E = E_0 \exp[i(\omega t - k \cdot r + \varphi_0)] \quad (1.11)$$

Выражения (1.9) и (1.10) и приравняем показатель экспоненты постоянной величине, например, нулю, предполагая, что между интерферирующими волнами имеется постоянная разность фаз  $\varphi$ . Получим

$$k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)y + k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)z - kct = 0, \quad (1.12)$$

$$-k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)y + k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)z - kct - \varphi = 0. \quad (1.13)$$

Решая совместно (1.12) и (1.13), найдем выражение для линии пересечения двух волновых фронтов, дающей максимум в интерференционной картине

$$z = \frac{ct}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{\varphi}{2k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (1.14)$$

$$y = -\frac{\varphi}{2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.15)$$

Это параметрическое уравнение прямой, параллельной оси  $x$  и перемещающейся в направлении оси  $z$  со скоростью  $c/\cos(\theta/2)$ . Если принять  $\varphi = \varphi_n = 2\pi n$ , получим систему прямых, равноотстоящих друг от друга на расстоянии  $y_n = n\lambda/2\sin(\theta/2)$ , «прочерчивающих» в области взаимодействия ряд плоскостей, на которых суммарное световое поле имеет максимумы амплитуды. Если поверхность наблюдения представляет собой плоскость, параллельную координатной плоскости  $xu$ , интерференционная картина представляет собой набор эквидистантных прямых, шаг которых равен

$$\Delta y = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (1.16)$$

Если одна из интерферирующих волн приобретает дополнительную разность фаз, система плоскостей, а значит, и интерференционные полосы смещаются на расстояние  $\Delta y$ ; б) интерферируют две сферические волны.

Анализ пространственной структуры интерференционной картины в области наложения волн в данном случае затруднителен, поэтому рассмотрим форму интерференционных полос на плоском экране, воспользовавшись определением интерференционной полосы. Пусть сферические волны образуются двумя точечными источниками, например, небольшими отверстиями в непрозрачном экране (опыт Юнга, 1802 г.). расстояние между источниками  $S_1$  и  $S_2$  равно  $d$ , их удаление от экрана равно  $z_0$ . Взаимное расположение источников и плоскости наблюдения интерференционной картины показано на рис.1.3. Расстояние от источника света произвольной точки на экране запишутся как

$$|\overline{S_1 P}| = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z_0^2}, \quad (1.17)$$

$$|\overline{S_2 P}| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z_0^2}. \quad (1.18)$$



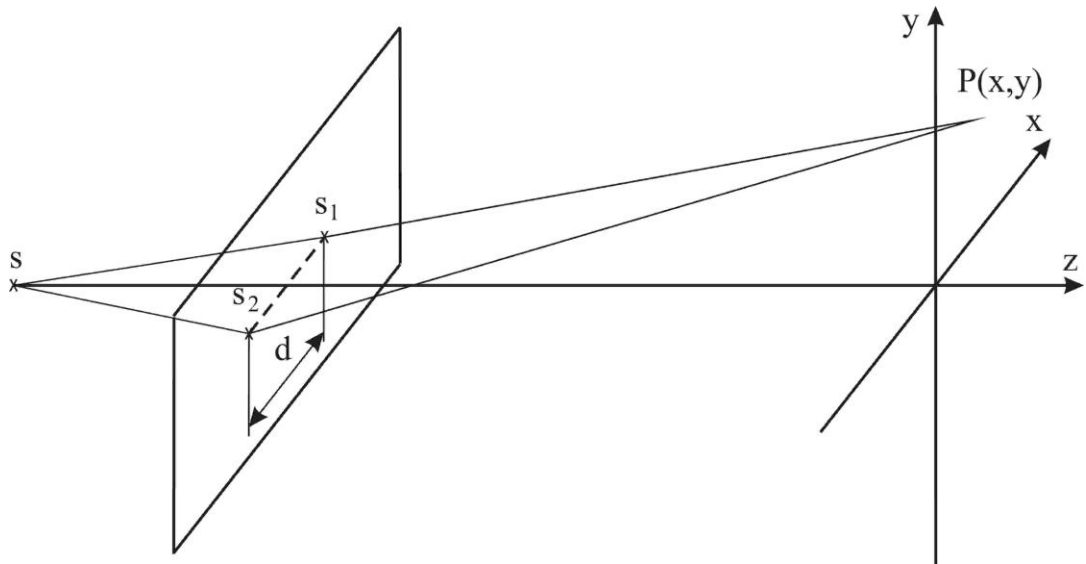


Рис. 1.3. Интерференция двух сферических волн

Условие получения максимумов в интерференционной картине:

$$\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z_0^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z_0^2} = m\lambda. \quad (1.19)$$

Целое число  $m=1, 2, \dots, n$  называют порядком интерференции.

Уравнение (1.19) определяет форму интерференционных полос. Умножая обе части (1.19) на

$$\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z_0^2} + \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z_0^2} \quad (1.20)$$

и заменив подкоренные выражения справа, их приближенным значением

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2},$$

после необходимых упрощений приводим (1.19) к виду

$$y^2(d - m^2\lambda^2) - m^2\lambda^2x = m^2\lambda^2z_0. \quad (1.21)$$

Поскольку во всех реальных условиях  $d^2 - m^2\lambda^2 > 0$ , (1.21) описывает семейство гипербол, симметричных относительно оси  $x$ . При  $m=0$  гипербола вырождается в прямую  $y=0$ , относительно которой симметрично расположены проекции источников  $S_1$  и  $S_2$  на плоскости  $xy$  (см. рис. 1.3).

Определим периодичность интерференционной картины на оси  $y$ . Для этого в (1.21) примем  $x=0$ . Получим

$$y^2(d - m^2\lambda^2) = m^2\lambda^2z_0. \quad (1.22)$$

Считая, что  $d \gg m$ , после соответствующих упрощений получим выражение для положения максимумов интерференционной картины на оси  $y$ :

$$y_m = \frac{m\lambda z_0}{d}. \quad (1.23)$$

Таким образом, интерференционная картина при наложении сферических волн представляет собой систему гипербол, а пространственный период на оси  $y$  равен  $\frac{z}{d}$ .

### 1.3. Факторы, влияющие на контраст интерференционной картины

В устройствах, использующих интерференцию световых волн, следует добиваться максимального контраста интерференционной картины, поскольку от него непосредственно зависят амплитуда выходного сигнала, отношение сигнал/шум и другие важные характеристики устройства. Рассмотрим влияние различных факторов на контраст интерференционной картины.

#### 1.3.1. Соотношение интенсивностей интерферирующих световых пучков.

Из (1.3) следует, что интенсивность света в интерференционной картине изменяется от  $I_{\min}=(A_1-A_2)^2$  до  $I_{\max}=(A_1+A_2)^2$ , где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды интерферирующих волн. Подставляя выражения для  $I_{\min}$  и  $I_{\max}$  в (1.8), получим

$$S = \frac{I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}}. \quad (1.24)$$

При равенстве амплитуд интерферирующих волн контраст имеет максимальную величину.

#### 1.3.2. Длина когерентности источника света

Как уже отмечалось, излучение любых реальных источников света представляет собой последовательность волновых пакетов конечной длительности, причем длина волновых пакетов и спектральный состав излучаемого света связаны между собой. Чем короче средняя длина излучаемых волновых пакетов, тем шире спектр. Если разность хода лучей, образующих интерференционную картину, намного меньше средней длины волновых пакетов, то интерференционные полосы очень четкие, и в таком случае говорят, что существует временная когерентность. Если же тем или иным путем увеличить разность хода, волновые пакеты с подобными характеристиками в плоскости наблюдения будут перекрываться все меньше и меньше, вследствие чего интерференционные полосы будут становиться все менее четкими (контраст будет падать).

Максимальная разность хода, при которой еще наблюдается интерференционная картина, называется длиной когерентности источника света.

Как отмечалось выше, длина когерентности  $L$  источника света связана с шириной спектральной линии излучения. Действительно, интерференция не будет наблюдаться, если максимум  $m$ -го порядка для длины волны  $(\lambda + \Delta\lambda)$  совпадает с максимумом  $(m+1)$ -го порядка для  $\lambda$ . В этих условиях весь провал между соседними максимумами будет заполнен максимумами для длин волн из интервала  $\Delta\lambda$ . Тогда условие неразличимости интерференционной картины

$$(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda) \quad (1.25)$$

С учетом того, что порядок интерференции  $m$  связан с разностью хода  $\Delta$  интерферирующих световых пучков и длиной волны  $\lambda$  соотношением

$$m = \frac{\Delta}{\lambda}, \quad (1.26)$$

дает выражение

$$L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}. \quad (1.27)$$

### 1.3.3. Поляризация интерферирующих световых пучков

До сих пор при анализе явления интерференции мы считали амплитуды интерферирующих волн скалярными величинами, вычисляя результирующую амплитуду с учетом разности фаз волн. Рассмотрение влияния поляризации интерферирующих пучков следует проводить с учетом векторного характера электромагнитных волн.

В качестве примера рассмотрим сложение колебаний с равными амплитудами и взаимно перпендикулярными векторами поляризации при различных величинах разности фаз (рис. 1.4). При нулевой разности фаз результирующий вектор поляризации лежит на биссектрисе угла между исходными векторами. При увеличении разности фаз поляризация суммарного колебания становится эллиптической и при значении  $\pi/2$  превращается в круговую. При дальнейшем ее увеличении поляризация суммарного колебания, проходя через эллиптическую, становится линейной и ортогональной первоначальной при разности фаз  $\pi$ .

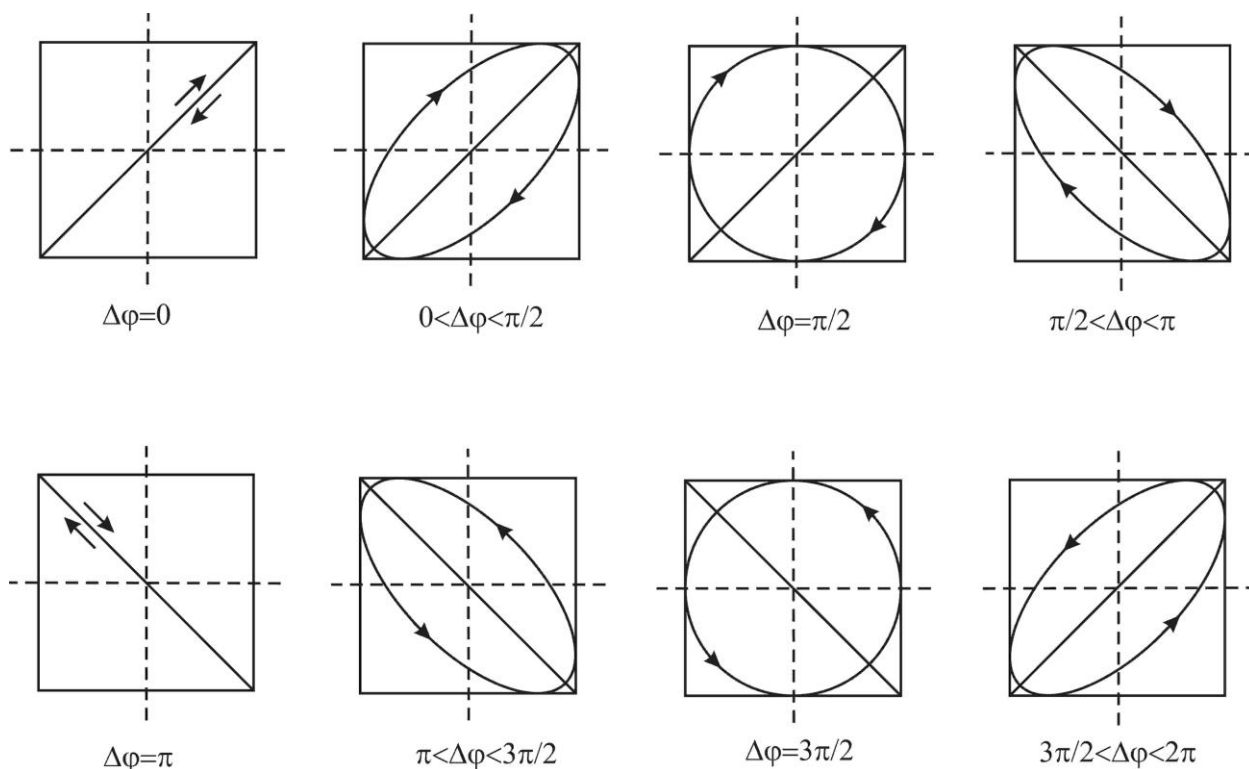


Рис.1.4. Сложение колебаний с ортогональными поляризациями

Таким образом, в данном случае ни при какой разности фаз амплитуда результирующей волны не обращается в ноль, следовательно, интерференционная картина не образуется. Очевидно, что состояние поляризации исходной световой волны не имеет значения, поскольку при делении ее на две векторы поляризации образующихся волн совпадают в любой момент времени. Но при распространении каждой из двух волн в оптической схеме их поляризация может измениться. В результате в месте образования интерференционной картины возможны следующие ситуации:

а) векторы поляризации взаимно ортогональны. Интерференционная картина не образуется (контраст равен единице);

б) векторы поляризации ортогональны плоскости взаимодействия (плоскости, в которой лежат волновые векторы интерферирующих волн). Волновые векторы остаются коллинеарными при любом угле между интерферирующими пучками. Следовательно, контраст максимален и не зависит от данного угла;

в) векторы поляризации лежат в плоскости взаимодействия. Угол между ними равен углу между волновыми векторами интерферирующих волн. Следовательно, контраст максимален при малых углах между интерферирующими пучками и падает до нуля при увеличении угла до  $90^\circ$ .

Итак, для получения максимального контраста интерференционной картины необходимо добиваться равенства интенсивностей интерферирующих пучков. Следует также следить, чтобы разность хода лучей в оптической схеме была существенно меньше длины когерентности источника излучения. Нужно контролировать состояние поляризации интерферирующих световых пучков, не допускать их деполяризации.

#### 1.4. Описание лабораторной установки

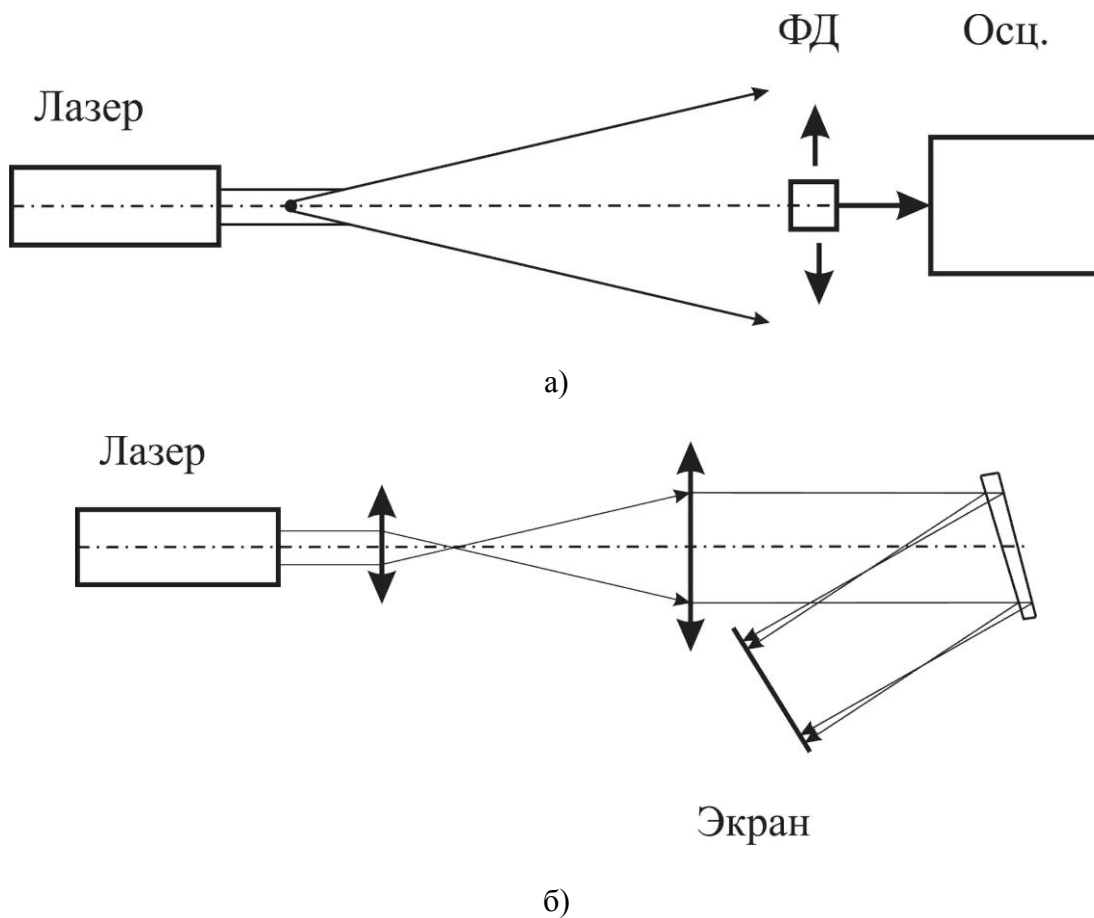


Рис.1.5. Схема лабораторной установки

Лабораторная установка (рис.1.5) позволяет исследовать интерференцию лазерного излучения в расходящихся и параллельных пучках. Она содержит гелий-неоновый лазер ( $\lambda = 0,6328$  мкм), коллиматор, фотоприемник (диафрагмированный фотодиод), осциллограф, делители светового пучка. Коллиматор состоит из двух конфокальных положительных линз и представляет собой «обратный» телескоп (трубу Кеплера с коэффициентом увеличения 0,2). Он служит для расширения лазерного пучка. Изменяя расстояние между линзами в коллиматоре, можно делать пучок слабо сходящимся, расходящимся или параллельным (сколлимированным). Лазер и оптические элементы закреплены в юстировочных механизмах и размещены на оптической скамье.

## 1.5. Порядок выполнения работы

### 1.5.1. Исследование интерференции в расходящихся пучках

1. Включить блок питания лазера (включает руководитель) и осциллограф.
2. Снять с оптической скамьи рейтеры с закрепленными на них линзами, составляющими коллиматор. Установить на оптической скамье на минимальном расстоянии от лазера рейтер с держателем, в котором зафиксирована тонкая проволока.
3. Вращая винт рейтера, перемещать проволоку перпендикулярно лазерному пучку, пока проволока не окажется на его пути. Проволока здесь выполняет роль делителя пучка, причем величин  $d$  в формуле (1.22) равна диаметру проволоки. На экране наблюдаем интерференционную картину. Из (1.23) получаем выражение для нахождения диаметра проволоки

$$d = \frac{a\lambda}{n\Delta x}. \quad (1.28)$$

4. Перемещая фотодиод по вертикали, установить его на пути интерферирующих волн. Перемещая фотодиод винтом рейтера вдоль интерференционной картины, снять зависимость фототока от величины перемещения  $x$  фотодиода. Из графика определить период  $\Delta x$  интерференционной картины.

5. Измерить расстояние,  $a$  от проволоки до фотодиода. По формуле (1.28) вычислить диаметр проволоки.

В промышленных условиях, используя вместо перемещающегося фотодиода неподвижную линейку фотодиодов или телекамеру, рассмотренный метод используют для бесконтактного автоматического измерения размеров микрообъектов, например, диаметра волоконных световодов в процессе их изготовления.

### 1.5.2. Исследование интерференции в параллельных пучках

1. Съюстировать оптическую схему. Для этого:
  - а) снять все рейтеры с оптическими элементами с оптической скамьи, кроме лазера и рейтера с экраном. Вращая юстировочные винты рейтеров и держателей, в которых закреплен лазер, добиться параллельности лазерного пучка направляющим оптической скамьи. В этом случае световое пятно от пучка не должно перемещаться по экрану при перемещении последнего по направляющим;
  - б) последовательно устанавливать рейтеры с оптическими элементами на направляющих и, вращая юстировочные винты, аналогичным образом добиться параллельности оси прошедшего через элемент лазерного пучка направляющим оптической скамьи.
2. Съюстировать телескоп (трубу Кеплера). Для этого необходимо перемещая рейтер с положительной линзой, обладающей большим фокусным расстоянием, по

направляющим, добиться, чтобы диаметр лазерного пучка на выходе этой линзы не изменялся с расстоянием от линзы (т.е. чтобы лазерный пучок был сколлимированным).

3. Установить рейтер с эталонной (плоскопараллельной) пластиной на пути лазерного пучка. Направить отраженный пучок на экран. На экране мы видим результат интерференции пучков, отраженных от двух плоскостей эталона.

Перемещая линзы по направляющим, добиться максимального периода интерференционной картины. Тем самым мы получаем практически плоский волновой фронт.

4. Заменить эталонную пластинку на измеряемую. С помощью линейки измерить период  $\Delta x$  интерференционной картины.

Из (1.16) следует выражение для угла между входной и выходной гранями пластины:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\Delta x}. \quad (1.29)$$

По формуле (1.29) вычислить угол между входной и выходной гранями пластины.

В промышленных условиях рассмотренный метод используют для контроля точности изготовления оптических деталей.

#### Темы для УИРС

1. Исследование длины когерентности излучения лазера.
2. Исследование контраста интерференционной картины.
3. Исследование формы интерференционных полос.
4. Исследование основных оптических схем интерферометров.

#### Контрольные вопросы

1. Каковы условия наблюдения интерференционной картины?
2. Что такое оптическая разность хода пучков?
3. От чего зависит форма интерференционных полос?
4. От чего зависит контраст интерференционной картины?
5. Какую величину называют длиной когерентности?
6. Какова связь между длиной когерентности и шириной спектральной линии излучения?
7. Какой вывод можно сделать о длине когерентности излучения лазера, используемого в данной работе?

## Лабораторная работа 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Цель работы – изучить принципы построения и функционирования оптических Фурье-процессоров

### 2.1. Краткие теоретические сведения

Оптические устройства способны выполнять широкий набор алгоритмов обработки сигналов:

- умножение;
- сложение (вычитание);
- интегрирование;
- дифференцирование;
- спектральный анализ;
- линейная фильтрация;
- вычисление функций свертки и взаимной корреляции сигналов;
- преобразование Лапласа, Гильберта и др.

В основе большинства из этих устройств лежит тот факт, что пространственные распределения амплитуды света в передней и задней фокальных плоскостях положительной сферической линзы связаны между собой уравнением двумерного преобразования Фурье. Эта зависимость объясняется явлением дифракции световой волны, распространяющейся в оптической системе.

В общем случае оптическая схема устройства обработки сигналов содержит источник света, элементы, осуществляющие пространственно-временную модуляцию амплитуды световой волны, оптическую систему, выполняющую ту или иную операцию преобразования светового потока, и устройство регистрации (считывания) распределения светового поля на выходе оптической системы.

Оптическая обработка сигналов – это такой способ обработки, при котором обрабатываемым сигналом осуществляется пространственная модуляция волнового фронта несущей световой волны, испытывающей при распространении в той или иной оптической системе дифракцию и интерференцию, а результат обработки считывается в виде распределения интенсивности светового поля в плоскости изображения, формируемого по законам волновой оптики.

### 2.2. Элементы теории дифракции

В самом широком смысле под дифракцией понимают любое отклонение от закона прямолинейного распространения света. На этом законе построена геометрическая оптика, когда любое построение хода луча в оптической системе можно выполнить с помощью прямых линий. Не следует понимать, что законы дифракции и геометрической оптики противоречат друг другу – они дополняют друг друга. Можно считать геометрическую оптику первым приближением в законах распространения электромагнитных волн оптического диапазона. Однако можно создать условия (что и делается в устройствах оптической обработки информации), когда явление дифракции как бы преобладает над прямолинейным распространением света, проявляется наиболее ярко. Это происходит в первую очередь при прохождении световой волны через препятствия, когда размеры неоднородностей сравнимы с длиной волны.

В общем случае для решения задач распространения электромагнитных волн следует пользоваться скалярным волновым уравнением, получаемым из уравнений Максвелла

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

с начальными и граничными условиями, описывающими действие источника излучения. Здесь  $u(x, y, z, t)$  - любые компоненты векторов напряженности электрического и магнитного поля,  $c$  – скорость света,  $\nabla$  - оператор Лапласа.

В силу линейности (2.1) произвольное возмущение  $u = f(t)$  может быть представлено в виде линейной комбинации гармонических составляющих, и решение (2.1) ищут в виде гармонических волн, которые удобно записывать в экспоненциальной форме.

Наиболее простыми решениями уравнения (2.1) являются те, которые описывают однородные плоские и сферические волны.

Волну называют плоской, если ее амплитуда и фаза в любой момент времени постоянны на плоскости, перпендикулярной волновому вектору. По определению плоская волна не ограничена в пространстве, поэтому она является идеализацией встречающихся на практике волн.

Уравнение гармонической плоской волны, распространяющейся в направлении, определяемом вектором  $\vec{k}$ , имеет вид

$$u(x, y, z, t) = u_0 \exp \left[ i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi_0) \right] \quad (2.2)$$

где  $u_0$  – амплитуда волны,  $\omega$  - циклическая частота,  $\vec{k} = k\vec{n}$  - волновой вектор,  $k$  – волновое число,  $\vec{n}$  – вектор волновой нормали,  $\vec{r}$  – радиус вектор точки наблюдения.

На практике приходится иметь дело с волнами, имеющими более сложную форму поверхности волновых фронтов, причем их амплитуда не постоянна в различных точках волнового фронта. Такие волны в параксиальном приближении (т.е. когда направления векторов волновой нормали составляют малый угол с каким-либо выделенным направлением) удобно описывать как результат модуляции амплитуды и фазы несущей плоской волны

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z) \exp \left\{ i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \varphi(x, y, z)] \right\} \quad (2.3)$$

Например, при распространении вдоль оси  $z$  уравнение волны можно записать в виде

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z) \exp[-i\varphi(x, y, z)] \exp[i(kz - \omega t)], \quad (2.4)$$

Комплексную величину  $u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z) \exp[-i\varphi(x, y, z)]$  называют комплексной амплитудой волны. Целесообразно в дальнейшем анализировать изменение комплексной амплитуды при ее распространении в пространстве или в оптической схеме, возвращаясь при необходимости к полной записи уравнения волны на любом этапе анализа.

Очевидно, что комплексная амплитуда на плоскости, совпадающей с волновым фронтом плоской волны, равна постоянной величине в любой момент времени. Положительные значения  $\varphi$  означают задержку соответствующего участка волнового фронта, отрицательные – опережение.

Будем называть волну квазиплоской, если существует только амплитудная модуляция плоской волны, а фазовая модуляция отсутствует, то есть при фиксированном  $z$   $\varphi(x, y, z) = 0$ . Такая волна называется квазиплоской потому, что при распространении ее волновой фронт неизбежно искривляется из-за дифракции.



В устройствах оптической обработки сигналов требуемый вид модуляции получают, освещая плоской световой волной объект со светопропусканием  $t(x,y) \sim u_0(x,y) \exp[i\varphi(x,y)]$ , помещенный во входной плоскости  $(x_0, y_0)$  при  $z = 0$ . Такой объект в зависимости от конкретного применения и конструкции называют транспарантом, управляемым транспарантом, или пространственно-временным модулятором света (ПВМС).

В общем случае пропускание транспаранта  $t(x,y)$  – комплексная функция. Транспарант называют амплитудным, если он изменяет распределение амплитуды волны, но не влияет на распределение фазы или, другими словами, не изменяет форму волнового фронта. Пропускание  $t(x,y)$  амплитудного транспаранта – действительная функция. Транспарант называют фазовым, если он изменяет форму волнового фронта, но не влияет на амплитуду волны. Потери световой энергии в таком транспаранте отсутствуют. Функция пропускания фазового транспаранта имеет вид  $t(x,y) = \exp[i\varphi(x,y)]$  и  $|t(x,y)| = 1$ , причем положительные приращения фазы  $\Delta\varphi$  в выражении для  $t(x,y)$  соответствуют задержке волны в транспаранте.

Как отмечалось, распределение амплитуды и фазы волны, заданное на входной плоскости, изменяется при распространении волны в результате дифракции. Анализ распространения волн путем решения волнового уравнения (2.1) затруднителен и возможен только при использовании численных методов.

В основе построения теории дифракции лежит принцип Гюйгенса-Френеля, согласно которому каждую точку волнового фронта можно считать центром вторичного излучения, которое вызывает элементарные сферические волны, интерферирующие между собой, а волновой фронт в более поздний момент времени представляет собой огибающую этих волн.

Главный вывод, который используется при построении теории дифракции: чтобы подсчитать поле в точке Р, надо просуммировать в точке Р излучение от всех точек волнового фронта с учетом фазы элементарных волн.

Воспользуемся принципом Гюйгенса-Френеля для решения одной из главных задач теории дифракции: зная распределение амплитуды и фазы колебаний на плоскости, освещаемой световой волной, найти распределение амплитуды и фазы колебаний на параллельной плоскости находящейся от первой на некотором расстоянии  $z$  (см. рис.2.1). Комплексная амплитуда волны на плоскости  $x_0y_0$  равна  $u(x_0, y_0)$ .

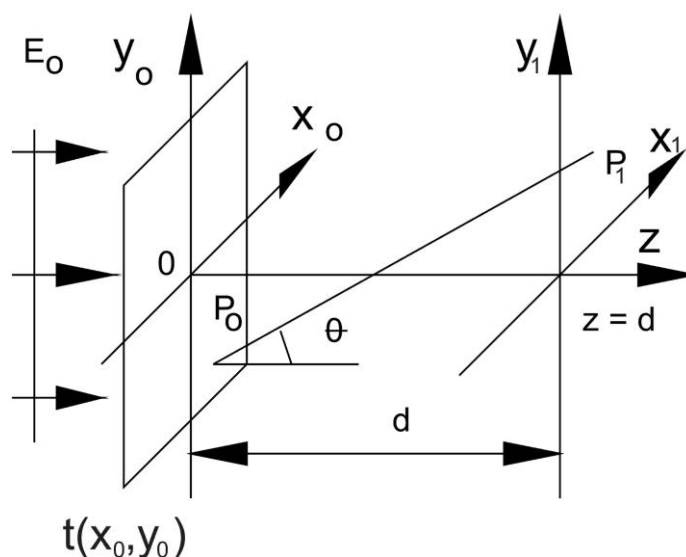


Рис.2.1.

Амплитуда вторичной световой волны, возбуждаемой участком волнового фронта  $dS$  в точке  $P_0$  с координатами  $(x_0, y_0)$  и измеренной в точке  $P_1$  с координатами  $(x_1, y_1)$ , равна

$$du(P_1) = \frac{i}{\lambda} \cos(\gamma) u(x_0, y_0) \frac{\exp(ikL)L}{dS}. \quad (2.5)$$

Здесь  $i/\lambda$  - коэффициент, определяемый в результате более детального анализа,  $\cos(\gamma)$  - коэффициент наклона,  $\gamma$  - угол между осью  $z$  и вектором  $P_0P_1$ ,  $L$  - длина вектора  $P_0P_1$ .

Суммарное возмущение в точке  $P_1$  определяется интегралом

$$u(x_1, y_1) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \cos(\gamma) \frac{\exp(ikL)L}{L} dx_0 dy_0. \quad (2.6)$$

Для параксиального приближения можно считать  $\cos(\gamma) = 1$ .

Подставляя в (2.6) выражение для длины вектора

$$|\vec{P_0P_1}| = \sqrt{z^2 + (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}, \quad (2.7)$$

Получим выражение

$$u(x_1, y_1) = \frac{i}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \frac{\exp\left[ik\sqrt{z^2 + (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\right]}{\sqrt{z^2 + (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} dx_0 dy_0. \quad (2.8)$$

В используемом приближении можно считать, что  $|x_1 - x_0| \ll z$ ,  $|y_1 - y_0| \ll z$ . Однако этого нельзя делать в экспоненциальном члене, так как на экспоненту влияет даже малое изменение длины отрезка  $P_0P_1$ . Упростим (2.7), пользуясь приближенным значением квадратного корня, получим

$$|\vec{P_0P_1}| \approx z + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2z} + \frac{(y_1 - y_0)^2}{2z}. \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) интеграл (2.8) записывается в следующем виде:

$$u(x_1, y_1) = \frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0. \quad (2.10)$$

Интеграл (2.10) называют интегралом Френеля.

Экспоненциальный множитель перед интегралом в (2.10) соответствует исходной волне, поэтому сам интеграл отражает изменение с координатой  $z$  модулирующей функции  $u(x_0, y_0)$ .

Интегральное преобразование вида (2.10) называют преобразованием Френеля. Характерная его особенность - зависимость результирующей функции от параметра, пропорционального координате  $z$ . С помощью интеграла Френеля можно рассчитать электромагнитное поле практически в любой точке пространства, занимаемого световой волной.

Для области пространства, достаточно удаленной от входной плоскости  $(x_0, y_0)$ , где выполняется условие

$$\frac{(x_0^2 + y_0^2)}{\lambda} \ll z, \quad (2.11)$$

интеграл (2.10) можно упростить. Учитывая (2.11), можно принять, что

$$\exp\left[\frac{ik}{2z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \approx 1. \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.10), получим

$$u(x_1, y_1) = \frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp\left[-\frac{ik}{z}(x_1 x_0 + y_1 y_0)\right] dx_0 dy_0. \quad (2.13)$$

Заметим, что отношение  $x_1/z = \xi$  и  $y_1/z = \eta$  это угловые координаты точки наблюдения  $P_1$ . Произведя замену переменных в (2.13), получим дифракционный интеграл

$$u(x_1, y_1) = \frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \exp\left[\frac{ik}{2z}(x_1^2 + y_1^2)\right] \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp[-ik(\xi x_0 + \eta y_0)] dx_0 dy_0, \quad (2.14)$$

который называют интегралом Фраунгофера. Первый экспоненциальный коэффициент перед интегралом соответствует исходной плоской волне, второй при небольших отклонениях от оси  $z$  ( $x, y \ll 1$ ) можно считать равным единице.

Интеграл Фраунгофера с точностью до экспоненциальных коэффициентов перед знаком интеграла совпадает с интегралом Фурье для двумерных функций. Характерная особенность дифракции, описываемой интегралом Фраунгофера, - угловое распределение дифрагированной волны не зависит от координаты  $z$  (переменной  $z$  под знаком интеграла нет).

Итак, в зависимости от расстояния  $z$  от входной плоскости  $(x_0, y_0)$  до точки наблюдения  $P_1$  световое поле можно разбить на три области (зоны) с существенно различным характером дифракции. (Следует только помнить, что границы этих зон достаточно условны).

Зона геометрической тени.

Несмотря на то, что дифракционные явления могут наблюдаться на очень малых расстояниях от входной плоскости, при

$$z \leq \frac{l_{\min}^2}{5\lambda}, \quad (2.15)$$

где  $l_{\min}$  – минимальный размер неоднородности светового поля во входной плоскости, дифракционными явлениями в большинстве практических применений можно пренебречь и

$$u(x_0, y_0, z) \approx u(x_1, y_1) \exp(ikz) \quad (2.16)$$

То есть модулирующая функция сохраняется. Поэтому эту область называют областью (зоной) геометрической тени.

### Зона дифракции Френеля

Эта зона характеризуется тем, что амплитуда колебаний и форма волнового фронта изменяются при распространении волн. Зона дифракции Френеля ограничена расстояниями

$$\frac{l_{\min}^2}{5\lambda} \leq z \leq \frac{l_{\min}^2}{\lambda^3}. \quad (2.17)$$

### Зона дифракции Фраунгофера

Дифракция Фраунгофера – наиболее важный для практических применений вид дифракции, так как с ее помощью реализуется двумерное преобразование Фурье – базовая операция устройств оптической обработки сигналов.

Заметим, что преобразование Фурье получено без каких-либо оптических элементов; оно заложено в самой волновой природе света.

Имеется ряд преимуществ выполнения оптического преобразования Фурье перед электронными методами.

**Двумерность.** Распределение амплитуды световой волны, испытывающей дифракцию при распространении, описывается двумерной функцией. По сравнению с одномерными такие функции обладают значительно большей информационной емкостью. Кроме того, расширяется класс обрабатываемых функций: двумерные сигналы (изображения), одно- и многоканальные одномерные сигналы.

**Параллельность.** В отличие от электронных методов скорость выполнения оптического преобразования Фурье не зависит от информативности обрабатываемого сигнала. Преобразование Фурье всего входного сигнала выполняется при однократном прохождении световой волны от входной плоскости до плоскости регистрации дифрагированной волны.

**Быстродействие.** Время выполнения оптического преобразования Фурье определяется временем распространения света от входной плоскости до плоскости регистрации. При средней величине  $z=30$  см это время составляет около  $10^{-9}$  с, что на много порядков быстрее, чем для самых быстродействующих ЭВМ.

Известно, что любой фоточувствительный элемент реагирует на интенсивность света, пропорциональную квадрату модуля амплитуды световой волны. Поэтому для сохранения информации о фазовой составляющей Фурье-образа приходится использовать более сложные интерференционные схемы. Часто при решении задач обработки сигналов достаточно пользоваться спектром Винера сигнала – функцией, пропорциональной квадрату модуля Фурье-образа и регистрируемой непосредственно фотоприемником в зоне дифракции Фраунгофера.

## 2.3. Роль положительной линзы в выполнении оптического преобразования Фурье

Рассмотрим простейшую оптическую систему (рис.2.2), состоящую из одной тонкой сферической линзы с фокусным расстоянием  $f$ , помещенной в плоскости  $z=0$ , и расположенного вплотную к ней транспаранта с комплексным амплитудным пропусканием  $t(x_0, y_0)$ . Линзу называют тонкой, если луч, входящий в точку с координатами  $(x_0, y_0)$ , выходит из нее на противоположной поверхности в точке примерно с теми же координатами. Это означает, что смещением луча внутри линзы можно пренебречь. Линза задерживает фронт падающей волны на значение, пропорциональное толщине линзы в каждой точке. Следовательно, такую линзу можно рассматривать как транспарант, осуществляющий фазовую модуляцию и имеющий функцию пропускания вида  $t_L(x, y) = \exp[i\Delta\varphi(x, y)]$ , где функция  $\Delta\varphi(x, y)$  пропорциональна толщине линзы в точке с координатами  $(x, y)$ . Нетрудно показать, что

$$\Delta\varphi(x, y) = \frac{\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2). \quad (2.18)$$

Таким образом, комплексное пропускание соответствующее тонкой сферической линзе можно определить из выражения вида:

$$t_e(x, y) = \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)\right] = \exp\left[\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2)\right]. \quad (2.19)$$

Если на рассматриваемую оптическую систему падает плоская световая волна с амплитудой  $E_0$ , распространяющаяся в положительном направлении оси  $z$ , то комплексная амплитуда света непосредственно вблизи линзы, справа, равна произведению функций пропускания транспаранта и линзы:

$$E_0(x_0, y_0) = E_0 t(x_0, y_0) t_l(x_0, y_0) = E_0 t(x_0, y_0) \exp\left[\frac{ik}{2f} (x_0^2 + y_0^2)\right]. \quad (2.20)$$

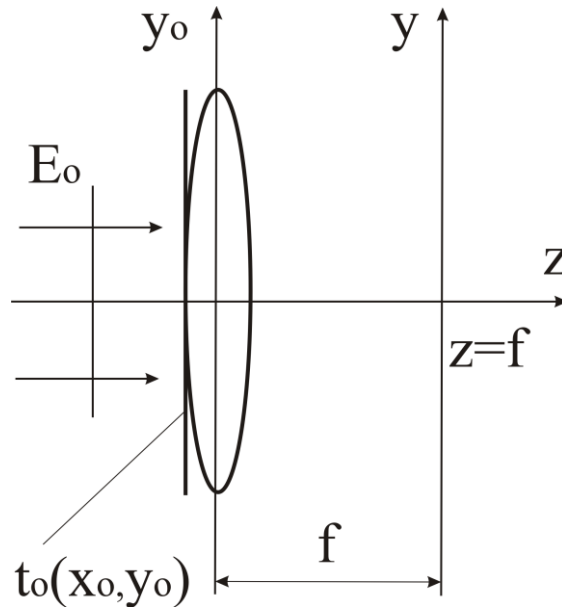


Рис.2.2

Далее волна распространяется в свободном пространстве, поэтому комплексная амплитуда света на любом расстоянии от линзы может быть рассчитана с помощью интеграла Френеля-Кирхгофа. Для расчета распределения комплексных амплитуд света в зоне дифракции Френеля на расстоянии  $z=d$  от линзы воспользуемся приближением Френеля (2.20). Тогда

$$E(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi d} e^{-ikd} \iint E_0(x_0, y_0) \exp\left\{\frac{ik}{2d} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0, \quad (2.21)$$

Интегрирование производят по всей поверхности линзы. Если подставить в (2.21) выражение (2.20), опустив несущественный для дальнейшего анализа постоянный фазовый множитель  $\exp(-ikd)$ , то получим выражение следующего вида:

$$E(x,y,z) = \frac{ikE_0}{2\pi d} e^{-ikd} \int \int t(x_0,y_0) \exp\left[\frac{ik}{2f}(x_0^2 + y_0^2)\right] \cdot \exp\left\{\frac{ik}{2d}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\right\} dx_0 dy_0. \quad (2.22)$$

В результате упрощения данного интеграла путем разложения квадратов  $(x-x_0)^2$  и  $(y-y_0)^2$  получим

$$E(x,y,z) = \frac{ikE_0}{2\pi d} e^{-ikd} \exp\left[-\frac{ik}{2d}(x^2 + y^2)\right] \int \int t(x_0,y_0) \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right] \exp\left\{\frac{ik}{d} \times [xx_0 + yy_0]\right\} dx_0 dy_0. \quad (2.23)$$

Если  $d = f$ , то выражение (2.23) примет следующий вид:

$$E(\xi, \eta) = \frac{ikE_0}{2\pi f} \exp[-i\pi(\xi^2 + \eta^2)] \int \int t(x,y) \exp\{-i2\pi[\xi x + \eta y]\} dx dy, \quad (2.24)$$

где  $\xi = x/(\lambda f)$ ;  $\eta = y/(\lambda f)$ . Интеграл в данном выражении представляет собой двумерное преобразование Фурье функции  $t(x,y)$  при условии, что функция  $t(x,y)$  тождественно равна нулю за пределами поверхности линзы. Это условие позволяет расширить пределы интегрирования до бесконечности, что и требуется для преобразования Фурье.

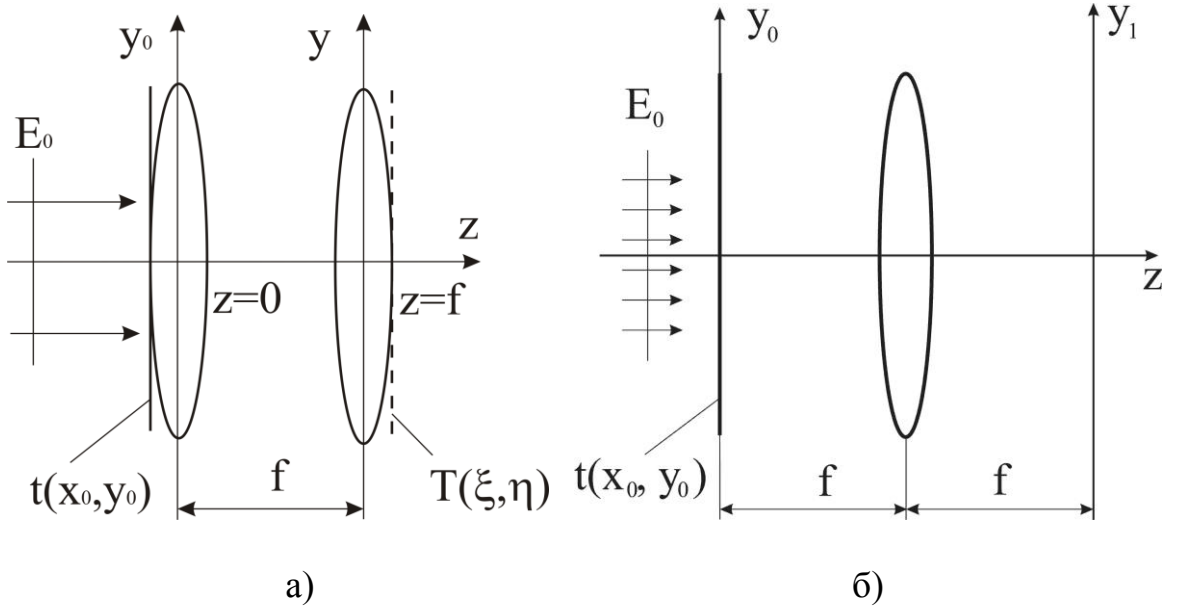


Рис.2.3 Оптические системы, выполняющие точное преобразование Фурье

Таким образом, если на тонкую сферическую линзу с примыкающим к ней транспарантом падает плоская световая волна, то в задней фокальной плоскости линзы образуется световое поле с распределением комплексных амплитуд, пропорциональным произведению квадратичного фазового множителя и фурье-образа функции пропускания транспаранта.

В тех случаях, когда важна только интенсивность света, квадратичный фазовый множитель в выражении (2.24) не учитывают. Эффект, обусловленный этим множителем, эквивалентен действию тонкой рассеивающей (вогнутой) линзы с фокусным расстоянием

$f$ , помещенной в плоскости  $z=f$ . Это естественно, так как за задней фокальной плоскостью лучи начинают расходиться. Если в плоскость  $z=f$  поместить тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием  $f$  (рис. 2.3.а), то этот фазовый множитель будет компенсирован. Можно также показать, что фазовый множитель превращается в единицу, если транспарант поместить не вплотную к линзе, а в ее передней фокальной плоскости (рис.2.3.б). В обоих этих случаях получаются оптические системы, выполняющие точное преобразование Фурье:

$$E(\xi, \eta) = \frac{ikE_0}{2\pi f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \exp\{-i2\pi[\xi x + \eta y]\} dx dy, \quad (2.25)$$

Важная роль положительной линзы заключается в том, что она переносит место регистрации преобразования Фурье из области, удаленной от входной плоскости, в близко расположенную и строго фиксированную заднюю фокальную плоскость линзы. Кроме того в отличие от дифракции Фраунгофера, отсчет входной функции и ее Фурье-образа ведется в одних и тех же пространственных координатах, что позволяет производить последовательно несколько операций обработки сигнала в одной и той же оптической системе.

## 2.4.СВОЙСТВА ОПТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

При рассмотрении свойств оптического преобразования Фурье будем пользоваться следующими обозначениями. Запишем преобразование Фурье в следующем виде:

$$T(x_1, y_1) = F[t(x_0, y_0)], \quad (2.26)$$

где оператор  $F$  обозначает преобразование Фурье,  $T(x_1, y_1)$  - фурье-образ функции  $t(x_0, y_0)$ . Численные коэффициенты, определяемые конкретными параметрами оптической системы, опущены. Аналогично обозначается обратное преобразование Фурье:

$$t(x_0, y_0) = F^{-1}[T(x_1, y_1)]. \quad (2.27)$$

Разумеется, свойства оптического преобразования Фурье вытекают и согласуются со свойствами математической операции, задаваемой интегралом Фурье. Здесь мы изложим только наиболее важные свойства для оптической обработки сигналов в понятиях и терминологии, присущих оптической схемотехнике. Так как доказательства аналогичны тем, которые применяются для одномерных функций, мы их не приводим.

### ЛИНЕЙНОСТЬ

Любой оптический сигнал можно представить как сумму точечных источников света, а его фурье-образ - как результат интерференции плоских волн.

Это свойство позволяет производить анализ прохождения оптического сигнала в оптической системе, используя простейшие "модельные" функции.

### ИЗМЕНЕНИЕ МАСШТАБА

Растяжение или сжатие в каком-либо направлении изображения, зафиксированного на транспаранте и помещенного во входной плоскости, приводит к пропорциональному сжатию или растяжению в том же направлении фурье-образа.

$$F[t(ax_0, by_0)] = \frac{1}{ab} T(x_1/a, y_1/b), \quad (2.28)$$

где  $a$  и  $b$  - произвольные постоянные.

### ТЕОРЕМА СДВИГА (СМЕЩЕНИЯ)

Смещение функции во входной плоскости вызывает линейный фазовый сдвиг фурье-образа.

$$F[t(x_0 - c, y_0 - d)] = T(x_1, y_1) \exp[-i(cx_1, dy_1)]. \quad (2.29)$$

Ясно, что спектр Винера инвариантен к сдвигу сигнала во входной плоскости. Это является важным достоинством оптической системы, выполняющей преобразование Фурье, так как регистрирующая система, расположенная в выходной плоскости, может находиться в фиксированном положении независимо от положения сигнала во входной плоскости. Изменение фазового множителя сказывается только в интерференционной схеме, когда к фурье-образу в выходной плоскости добавляется второй пучок. В таком случае смещение сигнала во входной плоскости вызывает пропорциональное смещение интерференционных полос в выходной плоскости.

Заметим, что ни фурье-образ, ни спектр Винера не обладают инвариантностью к изменению масштаба и повороту изображения во входной плоскости.

### ТЕОРЕМЫ О СВЕРТКЕ

Сверткой двумерных функций назовем функцию вида

$$S(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_1(x, y) t_2(\alpha - x, \beta - y) dx dy. \quad (2.30)$$

Введем обозначение операции свертки:  $S(\alpha, \beta) = t(x, y) * t(x, y)$ .

**А.ПРЯМАЯ ТЕОРЕМА.** Теорема о свертке записывается в следующем виде:

$$F[t_1(x_0, y_0) * t_2(x_0, y_0)] = T_1(x_1, y_1) T_2(x_1, y_1). \quad (2.31a)$$

То есть преобразование Фурье свертки функций равно произведению фурье-образов этих функций.

**Б.ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА.**

$$F[t_1(x_0, y_0) t_2(x_0, y_0)] = T_1(x_1, y_1) * T_2(x_1, y_1). \quad (2.31b)$$

Преобразование Фурье произведения функций равно свертке фурье-образов этих функций.

### ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

Функции взаимной корреляции имеют следующий вид:



$$R_{12}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_1(x+\alpha, y+\beta) t_2^*(x, y) dx dy, \quad (2.32a)$$

$$R_{21}(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_1^*(x+\alpha, y+\beta) t_2(x, y) dx dy. \quad (2.32b)$$

Теорема о взаимной корреляции записывается в следующем виде:

$$F[t_1(x_0, y_0) * t_2^*(x_0, y_0)] = T_1(x_1, y_1) T_2^*(x_1, y_1). \quad (2.33a)$$

$$F[t_1^*(x_0, y_0) * t_2(x_0, y_0)] = T_1^*(x_1, y_1) T_2(x_1, y_1). \quad (2.33b)$$

Теоремы о свертке и корреляции имеют исключительно большое значение, так как показывают пути выполнения данных операций обработки сигналов оптическими методами.

## ДВОЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Последовательное двукратное выполнение оптического преобразования Фурье дает перевернутое входное изображение.

$$F\{F[t(x_0, y_0)]\} = t(-x_2, -y_2). \quad (2.34)$$

Этот факт хорошо известен из геометрической оптики.

## РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Функция двух независимых переменных называется функцией с разделяющимися переменными, если ее можно записать в виде произведения двух функций, каждая из которых является функцией от одной переменной:  $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ . Преобразование Фурье двумерной функции с разделяющимися переменными может быть представлено произведением преобразований Фурье каждой из одномерных функций:

$$F[t_1(x_0) t_2(y_0)] = T_1(x_1) T_2(y_1). \quad (2.35)$$

## СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

**А.** Если  $t(x_0, y_0)$  - действительная функция, то есть

$$t^*(x_0, y_0) = t(x_0, y_0), \quad (2.36)$$

то

$$T^*(-x_1, -y_1) = T(x_1, y_1), \quad (2.37)$$

$$T^*(x_1, y_1) = T(-x_1, -y_1), \quad (2.38)$$

то есть  $\text{Re}[T(x_1, y_1)]$  - четная, а  $\text{Im}[T(x_1, y_1)]$  - нечетная функции.

**Б.** Если  $t(x_0, y_0)$  - действительная и четная функция, то есть

$$t(x_0, y_0) = t^*(x_0, y_0) = t^*(-x_0, -y_0), \quad (2.39)$$

то и  $T(x_1, y_1)$  - действительная и четная функция.

$$T(x_1, y_1) = T^*(x_1, y_1) = T^*(-x_1, -y_1). \quad (2.40)$$

**В.** Если  $t(x_0, y_0)$  - действительная и нечетная функция, то есть

$$t(x_0, y_0) = t^*(x_0, y_0) = -t(-x_0, -y_0), \quad (2.41)$$

то

$$T(x_1, y_1) = T(-x_1, -y_1) = T^*(-x_1, -y_1), \quad (2.42)$$

то есть  $T(x_1, y_1)$  - чисто мнимая нечетная функция.

Очевидно, что спектр Винера во всех рассмотренных здесь случаях - четная функция.

**Г.** Преобразование Фурье осесимметричной функции.

Осесимметричной будем называть функцию вида

$$t(x_0, y_0) = t(r_0), \quad \text{где} \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2. \quad (2.43)$$

Ее фурье-образ

$$T(r_1) = 2\pi \int_0^\infty t(r_0) J_0(r_0 r_1) r_0 dr_0, \quad (2.44)$$

где  $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ ,  $J_0$  - функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Преобразование Фурье для осесимметричных функций иногда называют преобразованием Фурье-Бесселя или преобразованием Ганкеля. Следует подчеркнуть, что данное преобразование - это не более чем частный случай двумерного преобразования Фурье. Поэтому любое свойство преобразования Фурье можно применить к преобразованию Фурье-Бесселя (Ганкеля).

Свойства симметрии позволяют выбирать наиболее удобные и простые "модельные" функции для анализа работы устройств оптической обработки сигналов.

## 6.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И СПЕКТРЫ ВИНЕРА НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

Ниже приведены фурье-образы и спектры Винера наиболее часто встречающихся двумерных функций, обладающих симметрией и используемых в качестве "модельных".

ФУНКЦИЯ

ФУРЬЕ-ОБРАЗ

СПЕКТР  
ВИНЕРА

### 1. Дельта-функция

$\delta(x, y)$

1

1

Используется в качестве модели точечного источника света.

## 2. Прямоугольная функция

$$\begin{aligned} \text{rect}(x_0/D)\text{rect}(y_0/C) &= D \sin c(Dx_1) C \sin c(Cy_1) = D^2 \sin^2 c(Dx_1) C^2 \sin^2 c(Cy_1) \\ &= \begin{cases} 1, & |x_0, y_0| \leq 1 \\ 0, & |x_0, y_0| > 1 \end{cases} = D \frac{\sin(\pi Dx_1)}{(\pi Dx_1)} \cdot C \frac{\sin(\pi Cy_1)}{(\pi Cy_1)} \end{aligned}$$

Функция sinc имеет главный максимум при  $x_1 = 0$  и побочные максимумы меньшей амплитуды, разделенные нулями. Выражение для углового расстояния между первыми нулями функции sinc при дифракции Фраунгофера

$$\delta\varphi = \lambda/D \quad (2.45)$$

часто используется для оценки дифракционной расходимости квазиплоской волны с поперечным размером волнового фронта  $2D$ .

Если преобразование Фурье осуществляется линзой, то аналогичное соотношение будет иметь следующий вид:

$$\delta x = \lambda f/D. \quad (2.46)$$

Используется для оценки размера фокального пятна.

## 3. Круговая функция

$$\text{circ}\left(\frac{r_0}{\rho}\right) = \begin{cases} 1, & r_0 \leq \rho \\ 0, & r_0 > \rho \end{cases} \quad \rho \frac{J_1(2\pi\rho r_1)}{2\pi\rho r_1} \quad \rho^2 \frac{J_1^2(2\pi\rho r_1)}{(2\pi\rho r_1)^2}$$

Спектр Винера круговой функции реализуется в оптике как результат дифракции плоской световой волны на круглом отверстии в непрозрачном экране и известен под названием диска Эйри.

Соотношения для круговой функции, аналогичные (6.20) и (6.21), отличаются числовым коэффициентом:

$$\delta\varphi = 2,44 \lambda/D, \quad (2.47)$$

$$\delta r = 2,44 \lambda/D. \quad (2.48)$$

Здесь  $D = 2\rho$ .

## 4. Гребенчатая функция

$$\begin{aligned} \text{comb}(\xi x_0, \eta y_0) &= \frac{1}{|\xi\eta|} \text{comb}(x_1/\xi, y_1/\eta) \quad \frac{1}{\xi^2\eta^2} \text{comb}(x_1/\xi, y_1/\eta) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\xi x_0 - n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\eta y_0 - m). \end{aligned}$$

## 5. Гауссова функция

$$\exp(-\alpha r_0)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \exp\left(-\frac{2\pi}{\alpha} r_1^2\right)$$

$$\frac{1}{4\alpha^2} \exp\left(-\frac{2\pi}{\alpha} r_1^2\right)$$

Заметим, что две последние функции - единственные, чьи фурьеобразы и спектры Винера с точностью до масштабных коэффициентов совпадают с самими функциями. Функция *comb* используется при математическом описании дифракционных решеток и других периодических структур. Особенно большое значение имеет функция Гаусса. Распределение интенсивности по сечению луча наиболее совершенного источника света - одномодового лазера - близко к двумерной гауссовой функции. Такие лазеры - наиболее распространенные источники света в устройствах обработки информации.

## 2.6. Описание лабораторной установки

Лабораторная установка (рис.2.4.) предназначена для исследования оптического преобразования Фурье. Она содержит гелий-неоновый лазер ( $\lambda = 0,6328$  мкм), коллиматор (расширитель) лазерного пучка, состоящий из линз  $L_1$  и  $L_2$ , транспарант, моделирующий входную функцию  $t(x_0, y_0)$ , короткофокусную линзу  $L_3$ , фотоприемник ФД (фотодиод), осциллограф.

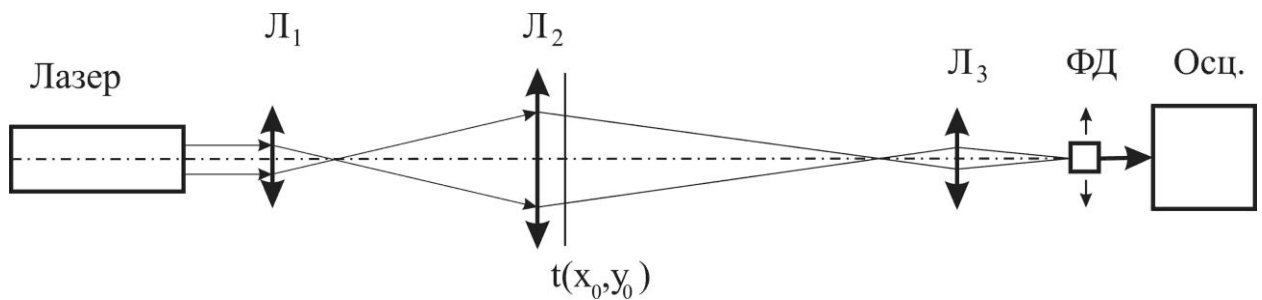


Рис.2.4

Оптическая схема лабораторной установки отличается от классических схем (рис. 2.3). Коллиматор формирует слабо сходящийся пучок, играя роль длиннофокусной Фурье-линзы. Сформированный Фурье-образ входного сигнала находится вблизи (слева) от передней фокальной плоскости короткофокусной линзы. Короткофокусная линза проецирует увеличенное изображение Фурье-образа на плоскость, где находится фотоприемник.

Электрический сигнал с фотоприемника, измеряемый осциллографом, пропорционален интенсивности света в изображении Фурье-образа. Сканируя изображение фотоприемником, получаем данные о спектре Винера исследуемого сигнала.

## 2.7. Порядок выполнения работы

1. Включить блок питания лазера (включает руководитель) и осциллограф.
2. С помощью юстировочных винтов добиться параллельности лазерного пучка направляющим на всех участках оптической схемы.
3. Установить транспарант на пути лазерного пучка непосредственно за коллиматором, добиться четкой дифракционной картины на экране.
4. Определить ход пучка в оптической схеме. Для этого с помощью листа миллиметровой бумаги или линейки измерить сечение пучка в 2-х – 3-х точках каждого участка оптической схемы.

5. Измерить фокусные расстояния эквивалентной длиннофокусной линзы, образованной коллиматором, и короткофокусной линзы.
6. Измерить расстояния между элементами оптической схемы.
7. Пользуясь результатами измерений по пунктам 3 – 5, начертить оптическую схему лабораторной установки с изображением хода лучей и указанием размеров.
8. Убрать экран и установить фотодиод. Перемещая фотодиод, совместить его с центром дифракционной картины. Перемещая фотодиод винтом рейтера перпендикулярно оптической оси, снять зависимость сигнала с фотодиода от его перемещения. Построить график.
9. Пользуясь формулами (2.46) или (2.48) в зависимости от вида входной функции, оценить размер главного максимума спектра Винера исследуемого сигнала.
10. Пользуясь результатами оценки по п. 9 и измеренными значениями параметров оптической схемы, оценить размер главного максимума спектра Винера в плоскости фотодиода.
11. Пользуясь результатами измерений по п.8, выбрать наиболее близкую к измеренной «модельную» функцию. Произвести расчет спектра Винера «модельной» функции. Произвести соответствующую нормировку и сопоставить расчетные и измеренные значения на одном графике. Дать объяснение имеющимся расхождениям.

## 2.8. Темы для УИРС

1. Исследование дифракции Френеля.
2. Исследование преобразования Фурье комплексных сигналов.
3. Исследование оптической свертки и корреляции.

## 2.9. Контрольные вопросы

1. Какие зоны дифракции существуют?
2. Каковы условия получения дифракции Фраунгофера?
3. Какова роль положительной линзы в выполнении оптического преобразования Фурье?
4. Чем определяется время выполнения оптического преобразования Фурье?
5. Какова предельная производительность оптического Фурье-процессора?
6. каковы свойства оптического преобразования Фурье?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юу Ф.Т.С. Введение в теорию дифракции, обработку информации и голографию. М.: "Сов.радио", 1979.
2. Акаев А.А., Майоров С.А. Оптические методы обработки информации. М.: "Высш. шк.", 1988.
3. Престон К. Когерентные оптические вычислительные машины. М.: "Мир", 1974.
4. Парыгин В.Н., Балакший В.И. Оптическая обработка информации М.: Изд-во МГУ, 1987.
5. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. – М.: Мир, 1970.

Учебное издание

Щербак Юрий Михайлович  
Конойко Алексей Иванович

## УСТРОЙСТВА ОПТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

### ЧАСТЬ 1

Лабораторный практикум

Для студентов специальности «Радиотехника»

в 2-х частях

Редактор Н.В.Гриневич  
Корректор Е.Н. Батурчик

---

Подписано в печать 07.05.96.                      Формат 60×1/16  
Объем 2,33 усл.печ.л. 2,0 уч. -изд.л. Тираж 150 экз. Заказ 450.

---

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники  
Министерства образования и науки Республики Беларусь  
Отпечатано на ротапринте БГУИР. 220027, Минск, П.Бровки, 6