Конспект лекций по дисциплине
«Основы дискретной математики и теории алгоритмов»

Для студентов инженерно-экономического факультета БГУИР
Специальности ИСИТ (в экономике)

Автор - Поттосина С.А.,
К.ф.-м.н. , доцент кафедры экономической информатики

2006

Содержание

1. Множества

1.1.Основные понятия
1.2.Операции над множествами
1.3. Булева алгебра множеств
1.4. Разбиения и покрытия
1.5. Векторы и прямые произведения

1.1.Основные понятия

Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих некоторым общим свойством. Объекты, объединенные общим свойством, называются элементами множества и обозначаются малыми латинскими буквами $a,b,c,d,\ldots x,y.z$. Множества обозначают большими латинскими буквами $A,B,C,D,\ldots X,Y,Z$.

Запись $a \in A$ означает, что элемент а принадлежит множеству A, запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Множество, число элементов которого конечно, называется конечным, в противном случае – бесконечным. . Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью чисел натурального ряда, то оно называется счетным, в противном случае – несчетным так, множество четных чисел есть счетное множество, а множество действительных чисел – несчетное множество.

Конечные и счетные множества называются дискретными множествами. Количество элементов в конечном множестве A, называется мощность множества и обозначается $|A|$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\varnothing$. При решении той или иной проблемы мы исходим из некоторого множества. Множество всех элементов, которые могут встретиться в данном исследовании, называется универсальным множеством и обозначается Ω.

Если каждый элемент множества A есть вместе с тем элемент множества B, то говорят, что множество A есть подмножество множества В и обозначается это как $A \subseteq B$. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то множества А и В называются равносильными, что записывается в виде $A=B$. Пустое множество считают конечным, оно есть подмножество любого множества. Любое множество A есть подмножество самого себя. Такое подмножество называют несобственным подмножеством. К числу несобственных подмножеств относят также пустое множество. Все прочие подмножества исходного множества A называются собственными подмножествами. Нетрудно доказать, что число подмножеств любого конечного множества, содержащего n элементов, равно 2^n .

Задать множества можно различными способами:

- перечислением или списком своих элементов;
- порождающей процедурой, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов или других объектов ;

– характеристическим предикатом $P(x)$, т.е. описанием характеристического свойства, которым должны обладать его элементы : $M=\{ x \mid P(x) \}$.
–

1.2.Операции над множествами

Самого по себе понятия множества еще недостаточно – необходимо определить способы конструирования новых множеств из уже имеющихся, т.е. определить операции над множествами.

1. Объединением $A \cup B$ двух множеств А и B является множество M, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы к одному из множеств A и B, т.е.

$$M= A \cup B =\{m \mid m \in A \text{ или } m \in B \}.$$

2. Пересечением $A \cap B$ двух множеств A и B является множество M, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B, т.е.

$$M= A \cap B =\{m \mid m \in A \text{ и } m \in B \}.$$

3. Разностью $A \setminus B$ множеств A и B является множество M, состоящее из элементов, принадлежащих множеству А и не принадлежащих множеству В, т.е.

$$M= A \setminus B =\{\mathrm{m} \mid m \in A \text{ и } m \notin B \}$$

4. Симметрической разностью $A + B$ множеств A и B является множество M, содержащее все элементы из A, не принадлежащие В, а также все элементы из B, не принадлежащие A, т.е.

$$M= A+ B =\{m \mid m \in A \text{ и } m \notin B \}\text{или} =\{m \mid m \notin A \text{ и } m \in B \}$$

.

5. Дополнением $\overline{\mathrm{M}}$ (до Ω.) множества M является множество, состоящее из элементов универсального множества Ω, не принадлежащих М ,т.е.

$$\overline{\mathrm{M}} = \{m \mid m \in \Omega \text{ и } m \notin \mathrm{M} \}$$

Операцию дополнения обозначают символом $\neg$.

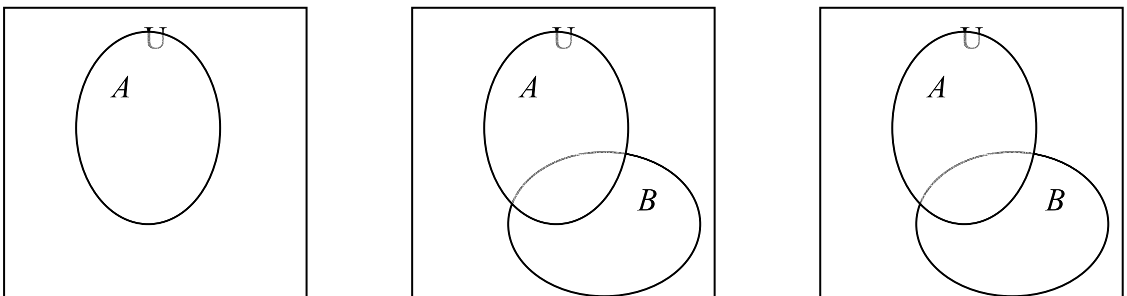
На основе введенных выше операций строятся теоретико-множественные формулы.

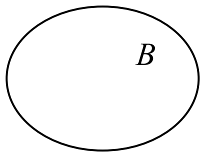
Определение.

а) Любой символ, обозначающий множество, есть формула;

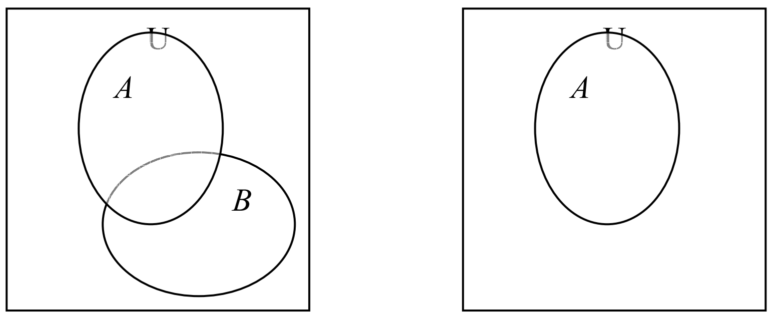
б) Если A и B - формулы, то $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, A+В, A – также есть формулы.

Операции объединения, пересечения и дополнения называются булевыми. Бинарные операции объединения, пересечения, разности и унарная операция дополнения проиллюстрированы на диаграммах Венна (рис.1.1). Результирующее множество элементов, соответствующее каждой из этих операций, изображено заштрихованной областью.





$A \cup B$ $\qquad\qquad$ $A \cap B$ $\qquad\qquad$ $A \setminus B$



$A + B$ $\qquad\qquad$ $\overline{A}$

Рис.1.1. Операции над множествами (не закончено)

Операции пересечения и объединения допускают следующие обобщения . Пусть I– некоторое множество, элементы которого используются как индексы, и пусть для любого $i \in I$ множество A_i известно. Тогда

$$\bigcup_{i \ni I} A_i = \{x \mid \ \exists\ i \in I\ \ x \in A_i\ \},\quad \bigcap_{i \ni I} A_i = \{x \mid \ \forall\ i \in I\ \ x \in A_i\ \}.$$

1.4. Булева алгебра множеств

Абстрактная алгебраическая система, состоящая из множества подмножеств некоторого универсального множества с введенными выше операциями дополнения, пересечения и объединения, составляют *булеву алгебру множеств*. Перечислим основные законы этой алгебры, используя общепринятое правило, что если в формуле отсутствуют скобки, устанавливающие порядок выполнения операций, то сначала выполняется дополнение, потом пересечение и затем объединение. Для повышения наглядности формулы знак пересечения множеств, подобно знаку арифметического умножения, будем опускать.

Коммутативность:

$A \cup B = B \cup A$; $\qquad$ $A\ B = B\ A$.

Ассоциативность:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $\qquad$ $A\ (B\ A) = (A\ B)\ C$.

Дистрибутивность:

$A\ (B \cup C) = A\ B \cup A\ C$; $\qquad$ $A \cup B\ C = (A \cup B)\ (A \cup C)$.

Идемпотентность:

$A \cup A = A$; $\qquad$ $A\ A = A$.

Законы де Моргана:

$\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \ \overline{B}$; $\qquad$ $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Законы операций с константами (пустым и универсальным множествами):

$A \cup \varnothing = A$; $A\ U = A$;

$A\ \varnothing = \varnothing$; $A \cup U = U$;

$A \cup \overline{A} = U$; $A\ \overline{A} = \varnothing$.

Закон двойного дополнения:

$\overline{\overline{A}} = A$.

Заметим, что для каждой пары формул, представляющих тот или иной закон, справедливо следующее: одна из формул получается из другой взаимной заменой всех операций пересечения на операции объединения и всех символов $\varnothing$ на символы U. Этот факт известен под названием *принципа двойственности*. Заметим также, что для операции пересечения пустое множество имеет свойство нуля, универсальное множество – свойство единицы. Для операции объединения универсальное множество имеет свойство нуля, а пустое множество – свойство единицы.

Формула, в которой присутствуют символы операций над множествами, есть способ задания множества. Две формулы *равносильны*, если они представляют одно и то же множество. Любую формулу булевой алгебры множеств можно вывести путем равносильных преобразований, используя формулы из приведенного списка. Данный список является достаточным, но для вывода любой формулы данной алгебры можно воспользоваться меньшим списком, т.е. некоторые формулы этого списка можно вывести из других. Например, формулу $A \cup B\ C = (A \cup B)\ (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения) можно получить следующим образом. Ее правую часть, используя дистрибутивность пересечения, представим как $(A \cup B)\ (A \cup C) = (A \cup B)\ A \cup (A \cup B)\ C$. Раскрыв скобки (по закону ассоциативности), получим $(A \cup B)\ A \cup (A \cup B)\ C = A\ A \cup B\ A \cup A\ C \cup B\ C$. Применим закон идемпотентности и введем константу U $(A\ A = A = A\ U)$, в результате чего после применения закона коммутативности пересечения правая часть примет вид $A\ U \cup A\ B \cup A\ C \cup B\ C$. После вынесения за скобки A получим $A\ (U \cup B \cup C) \cup B\ C$, что равно левой части исходного выражения согласно свойству константы U.

Подобным образом выведем закон поглощения $A \cup A\ B = A$, которого нет в приведенном списке:

$A \cup A\ B = A\ U \cup A\ B = A\ (U \cup B) = A$.

Используя принцип двойственности, получим: $A\ (A \cup B) = A$.

Формулу $A\ B \cup \overline{A}\ C = A\ B \cup \overline{A}\ C \cup B\ C$ выведем следующим образом:

$A\ B \cup \overline{A}\ C \cup B\ C = A\ B \cup \overline{A}\ C \cup B\ C(A \cup \overline{A}) = A\ B(U \cup C) \cup \overline{A}\ C(U \cup B) = A\ B \cup \overline{A}\ C$.

Используя только что выведенную формулу и закон поглощения, докажем $A \cup \overline{A}\ B = A \cup B$:

$A \cup \overline{A}\ B = A\ U \cup \overline{A}\ B = A\ U \cup \overline{A}\ B \cup U\ B = A \cup \overline{A}\ B \cup B = A \cup B$.

1.5. Разбиения и покрытия

Рассмотрим такие понятия теории множеств как разбиение и покрытие.

Пусть $\Xi=\{E_i\}_{i\in I}$ –некоторое подмножество множества M, $E_i \subset M$. Семейство Ξ называется покрытием множества M, если каждый элемент M принадлежит хотя бы одному из E_i:

$$M\subset \bigcup_{i \ni I} E_i \quad \Leftrightarrow \forall\ x\in M\ \exists\ i\in I\ x \in E_i\}.$$

Семейство Ξ называется дизъюнктивным, если элементы этого семейства попарно не пересекаются, т.е. каждый элемент множества М принадлежит не более чем одному из множеств E_i : $\forall$ i,j $\in I$ i $\neq j \Rightarrow E_i \bigcap\ E_j=\varnothing$.

Дизъюнктивное покрытие Ξ называется разбиением множества.

Пример. Пусть $M=\{1,2,3\}$. Тогда$\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$являются покрытием, но не разбиением; $\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$является разбиением и покрытием, а семейство $\{\{1\}, \{2\}\}$. является дизъюнктивным, но не является ни покрытием, ни разбиением...

1.6. Векторы и прямые произведения.

Для описания свойств элементов множества удобны векторные представления**.** Пусть нас интересуют свойства (значения, состояния, признаки, атрибуты) элементов v множества V по n фиксированным характеристикам $A_1, A_2, \ldots, A_n$. При этом каждая характеристика A_i $(i=1,2,\ldots n)$ представлена множеством из m_i допустимых значений $a_i\in A_i$. В таком случае каждый элемент v множества V может быть задан упорядоченным набором значений $a_1,a_2,\ldots, a_n$ по интересуемым характеристикам $A_1, A_2, \ldots, A_n$, так что $a_i\in A_i$, $i=1,2,\ldots n$. В результате получаем $v=(a_1,a_2,\ldots, a_n)$.

Векторv - упорядоченный набор элементов $v=(a_1,a_2,\ldots, a_n)$, где $a_1,a_2,\ldots, a_n$- компоненты (координаты) вектора. Число n компонент называется длиной (размерностью) вектора.

Два вектора $v_1=(a_1,a_2,\ldots, a_n)$ и $v_2=(b_1,b_2,\ldots, b_m)$ равны, если они имеют одинаковую длину и соответствующие координаты их равны.

Множество всех возможных (различающихся) векторов$(a_1,a_2,\ldots, a_n)$ длины n таких, что $a_i\in A_i$, $i=1,2,\ldots n$ называют прямым или декартовым произведением множеств A_i, $i=1,2,\ldots n$ и обозначают $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$. Прямое произведение n одинаковых множеств ($A_i=A$, $i=1,2,\ldots n$) называют n –ой степенью множества A и обозначают A^n.

Способы задания прямого произведения множеств $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ аналогичны способам задания множеств с той лишь разницей, что требуется задание каждого множества прямого произведения.

Операции над множеством векторов (данного прямого произведения) – обединение, пересечение, разность, дополнение – аналогичны соответствующим операциям над множествами элементов.

Рассмотрим еще некоторые операции над вектором $v=(a_1,a_2,\ldots, a_n)$ длины n и множеством векторов V длины n: $v=(a_1,a_2,\ldots, a_n)$, $v\in V$.

Проекцией вектора v на i –ю ось называется его i –я компонента: пр$_i v = a_i$.

Проекцией вектора v на оси с номерами $i_1, i_2, .. i_k$ называется вектор длины k:

$$пр_{i1,\ i2,..ik}\ v = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\ n}).$$

Проекцией множества векторов Vна на i –ю ось называется множество проекций всех векторов из V на i –ю ось: пр$_i$ $V = \{пр_i v : v \in V\}$.

Проекцией множества векторов V на оси с номерами $i_1, i_2, .. i_k$ называется множество проекций всех векторов $v \in V$ на оси с номерами $i_1, i_2, .. i_k$:

$$пр_{i1,\ i2,..ik}\ V = \{пр_{i1,\ i2,..ik} v : v \in V\}.$$

Проекцией упорядоченного множества векторов на i –ю ось называется упорядоченное множество проекций векторов на эту ось . Проекцией упорядоченного множества векторов V на оси с номерами $i_1, i_2, .. i_k$ называется упорядоченное множество проекций всех векторов $v \in V$ на оси с номерами $i_1, i_2, .. i_k$. Кроме того, над векторами одинаковой длины возможно выполнение различных операций сравнения, задаваемых теми или иными правилами сравнения векторов. Например, *правило сравнения векторов по предпочтению* .

Пусть V – множество векторов длины n, компонентами которых являются числа. Вектор $v_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не менее предпочтителен вектора $v_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ (обозначение $v_1 \succeq v_2$), если компоненты вектора v_1 не меньше соответствующих компонент вектора v_2

2 Отношения. Алгебры.

2.1 Понятие об *n*-арных и бинарных отношениях

Декартовым или прямым произведением A*В множеств A и B называется множество таких упорядоченных пар ($a,в$), что a принадлежит A, а $в$ -принадлежит B.
$A=\{a,b,c\}$, $B=\{0,1\}$
$A*B=\{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}$
Декартово произведение $A_1*\ldots*A_n$ множеств $A_1, \ldots, A_n$ есть множество всех векторов $(a_1, \ldots a_n)$ размером n таких, что a_1 принадлежит A_1 и т д.
Если $A=B$, то $A*B=A^2$ и мы имеем дело с декартовой степенью множества A.
Декартовым произведением n одинаковых сомножителей A называется n-ая степень множества A.

Любое подмножество $R \subseteq A_1*...*A_n$ декартова произведения n множеств называется n-арным отношением (при n=1,2,3 оно унарное, бинарное, тернарное соответственно)

2.2. Бинарные отношения (соответствия)

Бинарным отношением или соответствием между элементами множеств A и B называется любое подмножество $R \subseteq A*B$ декартова произведений этих множеств. Тот фактор, что некоторый $a \in A$ и $в \in B$ находятся в бинарном отношении R , обозначается как $a\ R\ в$

Приме:

Пусть A={1,2,3}, B={1,2,3,4,5,6}

Пусть R-бинарное отношение между элементами A и B таково, что элемент x , принадлежащий A, есть делитель y, принадлежащего B.

R={(1,1), (1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6)}

Бинарное отношением удобно представить в виде булевой матрицы. При этом элемент множеств A и B должны быть пронумерованы и если $a_i\ R\ b_i$, то соответственно элемент матрицы r_{ij}=1, в противном случае r_{ij}=0.

	A\B	1	2	3	4	5	6
	1	1	1	1	1	1	1
A*B	2	1	1	1	1	1	1
	3	1	1	1	1	1	1

	A\B	1	2	3	4	5	6
	1	1	1	1	1	1	1
R	2	0	1	0	1	0	1
	3	0	0	1	1	0	1

$R \subseteq$ A*B

Элемент a есть проекция элемента ($a,в$) множества A*В на множество A. Проекцией множества $R \subseteq A*B$ на множество A называется множество всех тех элементов из A, которые являются проекцией из B на множество A.

$$\text{Пр } A(2,4)=\{2\}$$

$$\text{Пр}(\{(1,2),(2,2),(2,4)\})=\{1,2\}$$

Сечением множества $R \subseteq A*B$ на множество B называется множество всех тех элементов y принадлежащих B, для которых (a,y) принадлежит R.

Сечением $E(x)$ множества $R \subseteq A*B$ по $x \in A$ является объединением сечений для всех элементов из x.

$$G=\{(1,1),(1,3),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(3,3),(3,6)\}$$

$$G(2)=\{2,4,6\}\text{-сечение G по 2}$$

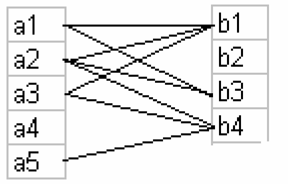
$$X=\{2,3\},$$

$$G(x)=\{2,3,4,6\}\text{-сечение G по x}$$

Областью определения отношения $R \subseteq A*B$ является проекция множества R на A.

Областью значений отношения $R \subseteq A*B$ является проекции сечений R по A

	A\B	b1	b2	b3	b4
	a1	1	0	1	0
R	a2	1	0	1	1
	a3	1	0	0	1
	a4	0	0	0	0
	a5	0	0	0	1



{a1,a2,a3,a5}-область определения
{b1,b3,b4}-область значений

Образом множества $x \in A$ относительно R называется множество всех $в \in B$ таких что $(x,в) \in R$ и $x \in X$
Прообразом $y \in B$ относительно R оказывается множество всех $a \in A$ таких что , $(a,y) \in R$ и $y \in Y$
Образом множества {a1,a3} относительно R являются {b1,b3,b4}
Преобразуем множества {в3,в4}->{a1,a2,a3,a5}
Обратным отношением R^{-1} для некоторого отношения $R \subseteq B*A$, является отношение, в котором присутствует пара для которого пара $(a,в) \in R$
Матрицы, представляющие обратные отношения $R^{-1,}$ полученные транспонированием матрицы соответствующей R.

2.3 Операции над бинарными отношениями

Рассмотрим операцию композиционного отношения. Заданны множества A,B,C и два отношения $R \subseteq A*B$ и $S \subseteq B*C$.
Композиция отношений R и S – это такое отношение SR между элементами множества A и C, что для всех $a \in A$ сечении множества RS по a совпадает с сечением множества S по подмножеству $R(a) \subseteq B$
Пусть R и S заданы матрицами:

	A\B	b1	b2	b3	b4
	a1	1	0	1	0
R	a2	1	0	1	1
	a3	1	0	0	1
	a4	0	0	0	0
	a5	0	0	0	1

		c1	c2	c3
	b1	0	1	0
S=	b2	1	1	0
	b3	0	0	1
	b4	0	0	1

Тогда их композиция представлена матрицей вида

		c1	c2	c3
	a1	0	1	1
R*S=	a2	0	1	1
	a3	0	1	1
	a4	0	0	0
	a5	0	0	1

2.4 Функциональные отношения

Отношением $R \subseteq A*B$ называется функциональным, если для каждого $a \in A$ сечении множества R по a содержит не более одного элемента. В функциональном отношении не существует пар с одинаковым левым элементам и разными правыми.

Матрицы, представляющие функциональные отношения, в каждой строке имеет не более одной единицы:

Пример:

	b	d	e
a	1	0	0
b	0	1	0
c	1	0	0
d	0	1	0
e	0	1	0

Если сечение функционального отношения R по любому элементу $a \in A$ содержит только один элемент, то отношением R называют всюду определением.

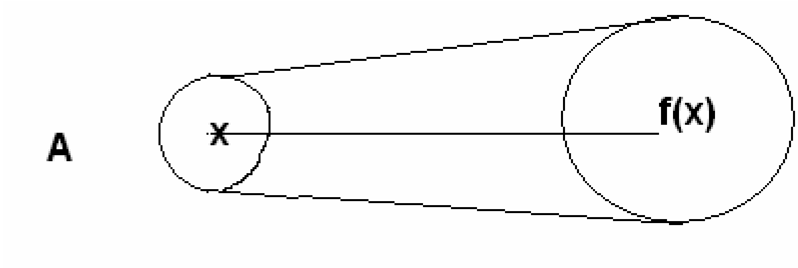
Если отношение R^{-1}, обратное к функциональну отношению R, так же является функциональным, то R называется взаимнооднозначным.

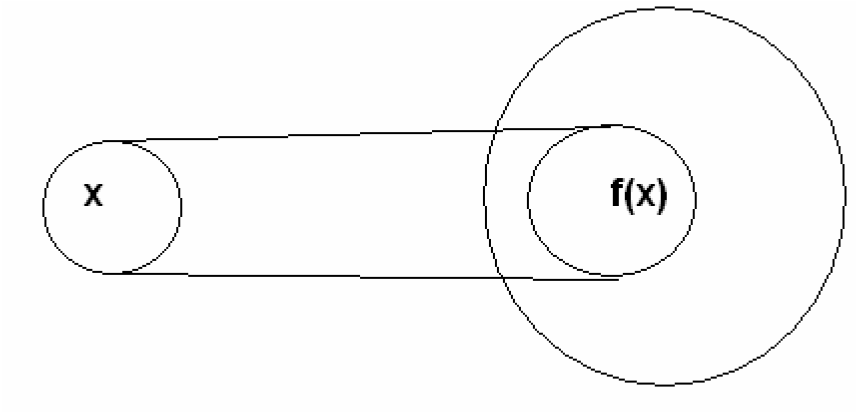
Для всякого функционального отношения $R \subseteq A*B$ можно определить функцию, связанную с этим отношением (f:A->B). Если $(x,y) \in R$, то это можно выразить как $y=f(x)$, где x-аргумент, а y-значение функции f.

Множество $\{x| (x,y) \in R, y \in B\}$ называется областью определения функции f. Если это множество совпадает с A, то f- полностью определенная функция. Такая функция называется отображением множества A в B.

В противном случае функция называется частично определенной

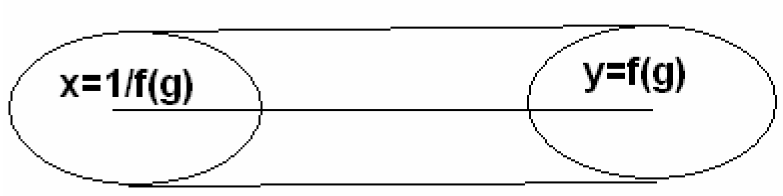
Если область значений функции f совпадает с множеством B, то f называется отображением A на B(сюръекцией). Если функциональное отношение $R \subseteq A*B$, определяющая функция f, является взаимнооднозначным, то f называется инъекцией.





В этом случае существует функция f^{-1}, которая является обратной к функции f (если $y=f(x)$, то $x=f^{-1}(y)$).

Функция f называется биекцией, если она является как сюръективным, там и инъективным отображением (1-1 соответствие)



Рассмотрим ещё несколько функциональных отношений:

-Функция, определённая на множестве целых чисел, называется *последовательностью*, а каждое её значение -членом последовательности

-Отображение f произвольного множества во множество действительных чисел называется *функционалом.*

-Отображение $f:A\text{->}B$, где A и B – некоторые множества функции, называется *оператором*, преобразующим одну функцию в другую

-Отображением $f:A\text{->}A$, где A-некоторое множество, называется *операцией.*

2.5. Свойства бинарных отношений на множестве

.

Пусть $R\subseteq A*A$ – бинарное отношение на множестве A . Определим ряд свойств, которыми может обладать такое отношение:

Рефлективность : если $a=в$. то $aRв$

Ассиметричность: если $aRв$, то $вRa$

Антисимметричность : если $aR в$ и $в R a$, то $a=в$

Транзитивность: если $aR в$ и $в R c$,то aRc

Следует выделить некоторые типы биноминальных отношений характеризующиеся определенным набором свойств.

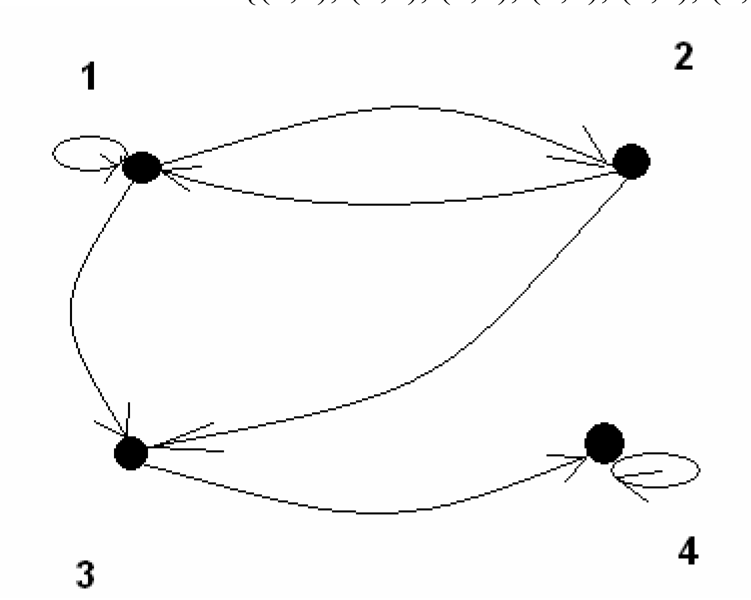
1) отношением эквивалентности: рефлексивность, симметричность и транзитивность (равносильность формул, подобие геометрических фигур)
2) отношение совместимости : рефлексивно и симметрично (близость чисел)
3) отношение нестрогого порядка. : (рефлективность, антисимметричность и транзитивность($\subseteq$)
4) отношение строгого порядка : (рефлексивность, антисимметричность (<,>)

ПРИМЕР:

Отношение *P* на множестве *A* задано графиком . Определить , обладает ли он свойствами , перечисленными выше.

$A = \{1,2,3,4\}$

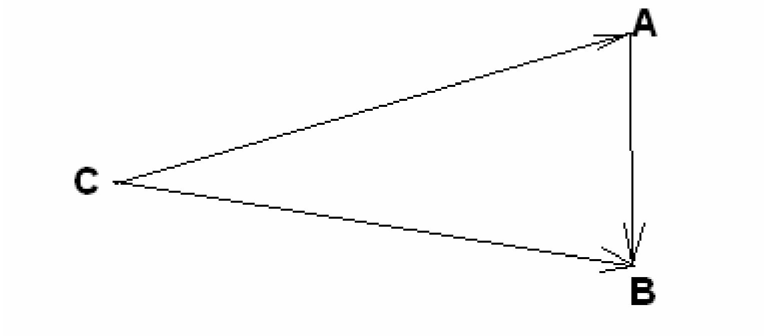
$P = \{(1,2), (1,3), (1,1), (2,1), (2,3), (3,4), (4,4)\}$



РЕШЕНИЕ

1) *P* не является рефлексивным т.к. нет пар (2,2) и (3,3)

2) P не является симметричным т.к. не хватает пар (3,1), (3,2), (4,3) – в симметричном отношении все строки градиента двухсторонние
3) P не является антисимметричным т.к. есть пара (1,2) и (2,1)
4) P не является транзитивным т.к. не хватает пары (1,4)



Еще несколько интересных замечаний

1. Заметим, что отношение эквивалентности делит множество на непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности. С другой стороны, всякое разбиение множества M на непересекающиеся подмножества задает отношение эквивалентности на множестве H :
   Любые два элемента, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности, называются эквивалентными, а элементы, принадлежать различным классам, не являются эквивалентными.

   Множество всех классов эквивалентности образует так называемый *фактор множеств*а H по P.

2. Множество M, на котором задано отношение порядка P (строго или не строго) будет. полностью упорядоченным, если любые два элемента a и **b** из M находятся в отношении P, т.е. aPb или bPa. При этом говорят, что a и b сравнимы.

   Отношение полного порядка обладает свойством иррефлексивности , симметричности и дихотомии.

2.6. Алгебраические системы

Пусть φ_i , $i=1,2,\ldots m.$ есть операции на множестве М. Множество M вместе с заданной на нем совокупностью операций $\Phi = \{\varphi_1., \varphi_2, \ldots,\varphi_m.\}$ называется алгеброй или алгебраической системой и обозначается $< M, \Phi >$.При этом M называется основным множеством алгебры, а Φ - сигнатурой. Вектор арностей операций алгебры называется ее типом. Если специально не оговорена арность операции, то под операцией понимают бинарную операцию.

Различные уточнения свойств операций, входящих в сигнатуру, приводят к широко известным частным случаям алгебраических систем – группы, полугруппы, кольца, поля, тела, решетки, структуры.

Так, алгебра с единственной операцией $< M, \varphi >$ называется *группоидом*. Группоид, в котором операция φ ассоциативна, называется *полугруппой*. Если операция в полугруппе является коммутативной, такая полугруппа называется *абелевой*.

Алгебра $< R, +, \bullet >$, где R – множество действительных чисел, «+», «•» - операции сложения и умножения, называется *полем* действительных чисел. Обе операции – бинарные потому тип этой алгебры - (2,2).

Система $<F(\Omega), \cup, \cap, \neg >$, где $F(\Omega)$ – множество всех подмножеств универсального множества Ω, а $\cup$, $\cap$, $\neg$ - операции объединения, пересечения и дополнения, называется алгеброй множеств над Ω,

Алгебраическая система с двумя бинарными операциями φ и ϕ, обладающими свойствами ассоциативности и коммутативности, образует *решетку* относительно этих операций, если для произвольных элементов основного множества этой алгебры выполняются соотношения:

$x \varphi x = x,\ x \phi x = x$ (закон тождественности),

$(x\ \varphi y)\ \phi x = x,\ (x \phi y)\ \varphi x = x$ (закон поглощения).

Решетка называется дистрибутивной, если операции удовлетворяют свойствам дистрибутивности. Если для решетки верно какое-либо утверждение, то из него можно получить так называемое двойственное утверждение, поменяв местами в исходном утверждении операции φ и ϕ. Это свойство решетки называют законом двойственности. Дистрибутивная решетка $< M, \varphi, \phi >$ называется *булевой алгеброй* , если в ней выполняется закон дополнения : в *M* существуют такие элементы 1 и 0, что а) $x\varphi 1 = 1$, $x\phi 1 = x$, $x\varphi 0 = x$, $x\phi 0 = 0$; б) для произвольного элемента $x \in M$ в M найдется такой элемент $\bar{x}$, что $x\varphi \bar{x} = 1$, $x\phi \bar{x} = 0$. Элемент $\bar{x}$ называется дополнением элемента x в множестве M.

Исходя из этого определения, булевой является алгебра множеств

$<F(\Omega), \cup, \cap, \neg>$,т.к. операции $\cup$, $\cap$ обладают свойствами ассоциативности, дистрибутивности, коммутативности, а в качестве элементов 1 и 0 выступают универсальное множество Ω и пустое множество $\varnothing$.

Булевой алгеброй является и алгебра логических функций Дадим определение алгебре логических функций.

Пусть Е={0,1}- двухэлементное множество. Обозначим через P_2 множество всех логических функций от n переменных. Рассмотрим на множестве Е следующие бинарные операции: дизъюнкция (v) и конъюнкция ( ) , а так же унарную операцию дополнение. Зададим эти операции таблицами истинности , а именно:

x1	x2	x1∨ x2	x1∧ x2
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

Тип этой алгебры (2,2,1)

Заметим, что все алгебры типа (2,2,1) являются булевыми, если их операции удовлетворяют законам ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности, поглощения и дополнения.

Алгебры с различными типами имеют существенно различное строение. Если же алгебры имеют одинаковый тип, то наличие у них сходства характеризуется с помощью вводимых ниже понятий гомоморфизма и изоморфизма.

Пусть даны две алгебры $A = < M, \varphi_1., \varphi_2, \ldots, \varphi_m. >$ и $B = < K, \phi_1., \phi_2, \ldots, \phi_m. >$ одинакового типа. *Гомоморфизмом* алгебры A в алгебру B называется отражение $Г{:}K \rightarrow M$, при котором независимо от того, выполнена ли сначала операция φ в A и затем произведено отображение Γ либо сначала произведено отображение Γ, а затем в B выполнена соответствующая операция ϕ, результат будет одинаковым. *Изоморфизмом* алгебры А на алгебру B называется взаимно-однозначный гомоморфизм. В этом случае существует обратное отображение Γ^{1}: $M \to K$.

Алгебры называются *изоморфными*, если существует изоморфизм A на B и изоморфизм B на A.

Примеры

1. Рассмотрим алгебру $< Q_{\mathrm{N}}, + >$ на множестве всех целых чисел и алгебру $< Q_{2\mathrm{N}}, + >$ на множестве всех четных чисел. Эти алгебры изоморфны, причем изоморфизмом является отображение Γ: $n \to 2n$, удовлетворяющее условию: $2(a+b)=2a+2b$.

2. Если R – множество действительных чисел, R_+ - множество положительных действительных чисел, то изоморфизмом между алгебрами $< R_+, \bullet >$и $R, + >$ является отображение Γ: $a \to \log(a)$, обладающее свойством: $\log(a \bullet в) = \log(a) + \log(в)$.

Понятие изоморфизма является одним из важнейших понятий в математике. Распространенное выражение «рассматривать объекты с точностью до изоморфизма» означает, что рассматриваются только те свойства объекта, которые сохраняются при изоморфизме. В частности, изоморфизм сохраняет ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность теоретико-множественных операций $\cup$, $\cap$, $\neg$ и логических операций $\vee,\wedge,\neg$, с которыми будем знакомиться далее.

Понятие изоморфизма используется и в прикладных задачах. В частности, оно облегчает действия над множеством двоичных векторов, с которыми приходится иметь дело программисту.

Рассмотрим множество $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ мощности n, элементы которого занумерованы числами от 1 до n. Пусть B_n – множество двоичных векторов длины n, состоящее из символов 1 и 0.

Каждому подмножеству $A^Э \subseteq A$ поставим в соответствие вектор $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in B_n$ следующим образом: $v_i = 0$, если $a_i \notin A^Э$ и $v_i=1$, если $a_i \in A^Э$

3. Логические функции (функции алгебры логики).

3.1 Способы представления логических функций.

3.2 Суперпозиция и формулы

3.3. Булева алгебра логических функций

3.4 Нормальные формы логических функций

3.5 Полиномиальная форма Жегалкина логических функций.

3.6. Полнота и замкнутость

3.7 Минимизация логических функций

3.8. Визуально-матричный метод минимизации логических функций.

3.1 Способы представления логических функций.

Пусть $B = \{0,1\}$ – двухэлементное множество, а x_i – двоичная переменная, принимающая значение из B. Наиболее распространенная интерпретация двоичных переменных – логическая: “Да” – “Нет”, “истинно” – “ложно”, “1” – “0”, “и” – “л”.

Алгебра, образованная множеством B, вместе со всеми возможными операциями на нем, называется *алгеброй логики*. Функцией алгебры логики (или логической функцией) от n переменных называется n-арная операция на B.

Итак, логическая функция $f(x_1 x_2, \ldots x_n)$ - эта функция, принимающая значение 0,1, аргументы которой принимают значения из множества B. Другими словами, это функция вида:

$$f(x_1 x_2, \cdots x_n) : B^n \to B \tag{2.1}$$

Всякая логическая функция *n* переменных может быть задана таблицей, в левой части которой перечислены все $\mathbf{2^n}$ наборов значений переменных (т.е. двоичных векторов длины n), а в правой части - значения функции на этих наборах. В этой таблице (таблица истинности) наборы расположены в лексико-графическом порядке, который совпадает с порядком возрастания значений наборов, рассматриваемых как двоичные числа. В табл 2.1 представлена логическая функция трех переменных:

Таблица 2.1

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Характеристическое множество логической переменной функции – это множество $\mathbf{M_1}$ двоичных наборов, на котором функция принимает значение **1**.

Логическая функция может быть задана с помощью своего характеристического множества M_1 или с помощью множества M_0 наборов, на котором она равна 0**.** Так, функцию f (табл.2.1) можно задать множествами:

$$M_1 = \{ 001, 010, 101, 111\} \text{ или } M_0 = \{ 000, 011, 100, 110\}$$

Переменная x_i в функции $f(x_1, \cdots x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \cdots x_n)$ называется фиктивной (несущественной), если изменение значения x_i в любом наборе значений переменных не меняет значение функции, т.е. $f(x_1,\dots x_{i-1},0,x_{i+1},\dots x_n) = f(x_1,\dots x_{i-1},1,x_{i+1},\dots x_n)$.

В табл.2.2.и 2.3 представлены булевы функции одной и двух переменных.

Таблица 2.2

X	$\varphi 0$	$\varphi 1$	$\varphi 2$	$\varphi 3$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$\varphi 0$ и $\varphi 3$ – константы 0 и 1

$\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = \bar{x}$ – отрицание x (функция НЕ)

Таблица 2.3

x_1	x_2	$\Psi 0$	$\Psi 1$	$\Psi 2$	$\Psi 3$	$\Psi 4$	$\Psi 5$	$\Psi 6$	$\Psi 7$	$\Psi 8$	$\Psi 9$	$\Psi 10$	$\Psi 11$	$\Psi 12$	$\Psi 13$	$\Psi 14$	$\Psi 15$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функции $\Psi 0$ и $\Psi 15$ – константы 0 и 1, т.е. функции с двумя несущественными переменными.

Функция $\Psi_1(x_1, x_2)$ называется **конъюнкцией** x_1 **и** x_2; (или логическое умножение).

Её обозначения: $x_1 \& x_2$, $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \bullet x_2$. Иногда её называют функцией **И.**

Функция $\Psi_7(x_1, x_2)$ называется **дизъюнкцией** x_1 **и** x_2; её обозначения: $x_1 \vee x_2$, $x_1 + x_2$. Её часто называют функцией **ИЛИ.**

Функция $\Psi_6(x_1, x_2)$ - это **сложение по модулю 2**; её обозначения: $x_1 \oplus x_2$, $x_1 \Delta x_2$, $x_1 \not\equiv x_2$.

Функция $\Psi_9(x_1, x_2)$ называется **эквивалентностью** или **равнозначностью**; её обозначения: $x_1 \infty x_2$, $x_1 \equiv x_2$.

Функция $\Psi_{13}(x_1, x_2)$ называется **импликцией** ; её обозначения: $x_1 \rightarrow x_2$, $x_1 \supset x_2$. (читается “если x_1, то x_2”).

Функция $\Psi_8(x_1, x_2)$ называется **стрелкой Пирса** (функция Вебба); её обозначения: $x_1 \downarrow x_2$.

Функция $\Psi_{14}(x_1, x_2)$ называется **штрихом Шеффера**; её обозначения: $x_1 | x_2$.

Остальные функции специальных названий не имеют.

3.2 Суперпозиция и формулы

Суперпозицией функций $f_1, f_2, \ldots f_m$ называется функцией f, полученная с помощью подстановок этих функций друг в друга и переименования переменных, а **формулой** называется выражение , описывающее эту суперпозицию.

Пусть дано множество (конечное или бесконечное) исходных функций Σ = { f1, f2 ... fm **}.** Формулы , содержащие только символы переменных, скобки и знаки функций из множества Σ, называются **формулами над Σ.**

Всякая формула, выражающая функцию f как суперпозицию других функций, задаёт способ её вычисления. Формула каждому набору значений аргументов ставит в соответствие значение функции и может служить наряду с таблицей способом задания и выражения функции.

ПРИМЕР: Пусть f_1 – дизъюнкция, f_2 – конъюнкция, f_3 – сложение по модулю 2. Тогда формула f_3 (f_1 (X_3, X_1), f_2 (X_1, f_3 (X_1, X_2))) принимает вид:

$$(X_3 \vee X_1) \oplus (X_1 \wedge (X_1 \oplus X_2)) \qquad (2.2)$$

Вычислим формулу (2.2) на наборе $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 0$, используя таблица 2.3.

Получим X_3 VX_1 = 1, X1 ($X_1 \oplus X_2$) = X_1^0 = 0; (X_3 V X_1) $\oplus$ (X_1 ($X_1 \oplus X_2$)) = 1 $\oplus$ 0 = 1.

Заметим, что f_3 называется главной (внешней) операцией (функцией), а f_1, f_2 – подформулами.

О формуле, задающей функцию, говорят, что она реализует или представляет эту формулу. В отличие от табличного задания представления данной функции формулой не единственно. Так, функцию Вебба можно представить формулами:

$$x_1 \uparrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \qquad \textbf{(2.3)}$$

А функцию штрих Шеффера – формулами:

$$x_1 | x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \qquad \textbf{(2.4)}$$

Формула, представляющие одну и ту же функцию, называются **равносильными.** Все они могут быть проверены построением таблиц истинности.

3.3. Булева алгебра логических функций

Пусть P_2 – множество всех логических функций. Алгебра (P_2, V, ^, ┐), основным множеством которой является всё множество логических функций, а операциями – дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, называется **булевой алгеброй логических функций.** Операции булевой алгебры часто называют **булевыми операциями**.

Рассмотрим основные свойства булевых операций.

Ассоциативность:

а) $x_1(x_2 x_3) = (x_1 x_2)x_3$; б) $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$ (2.5)

Коммутативность:

а) $x_1 x_2 = x_2 x_1$; б) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$ (2.6)

Дистрибутивность конъюнкций относительно дизъюнкции (1-ой дистрибутивный закон):

$$x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \qquad (2.7)$$

Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкций (2-ой дистрибутивный закон):

$$x_1 \vee (x_2x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \qquad (2.8)$$

Идемпотентность:

а) $XX = X$ б) $X \vee X = X$ (2.9)

Двойное отрицание:

$$\overline{\overline{X}} = X \qquad (2.10)$$

Правила де Моргана:

а) $\overline{x_1x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ б) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$ (2.11)

Закон противоречия:

$$X\overline{X} = 0 \qquad (2.12)$$

Закон «исключения третьего»:

$$X \vee \overline{X} = 1 \qquad (2.13)$$

Правило подстановки: если в равносильные формулы вместо всех вхождений некоторой переменной **X** подставивь одну и ту же формулу, то получается равносильные формулы:

Правило замены: если в формуле заменить некоторую подформулу на равносильную, то получится равносильная формула.

ПРИМЕР: Возьмем формулу $\overline{x_1x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ и подставим $\overline{x_1}x_3$ вместо x_1. Тогда:

$$\overline{\overline{x_1}x_3x_2} = \overline{\overline{x_1}x_3} \vee \overline{x_2}$$

Заменим в правой части соотношения $\overline{\overline{x_1}x_3}$ формулой $\overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_3}$, эквивалентной ей в силу (2.11), а в полученной подформуле x_1 заменить на эквивалентную ей в силу (2.10) формулу x_1. Тогда все формулы в построенной цепи преобразований эквивалентны:

$$\overline{\overline{x_1} x_3 x_2} \Rightarrow \overline{\overline{x_1} x_3} \vee \overline{x_2} \Rightarrow \overline{\overline{x_1}} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \Rightarrow x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_2}$$

Преобразования, использующие правила подстановки и замены, называются <u>эквивалентными преобразованиями</u>. Эквивалентные преобразования являются эффективным средством доказательства эквивалентности формул.

С помощью эквивалентных преобразований получим интересные соотношения из (2.5) – (2.13), приводящие к упрощению формул.

1) *Теорема поглощения:*

$$X \vee XY = X \qquad (2.14а)$$

$$X \wedge (X \vee Y) = X \qquad (2.14б)$$

Докажем первое из равенств:

$$X \vee XУ = X \wedge 1 \vee XУ = X\,(1 \vee У) = X \wedge 1 = 1$$

Аналогично доказывается второе равенство:

$$X\,(X \vee У) = XX \vee XУ = X \vee XУ = X$$

2) *Теорема склеивания:*

$$XY \vee X\overline{Y} = X \qquad (2.15)$$

Доказательство:

$$XY \vee X\overline{Y} = X\left(Y \vee \overline{Y}\right) = X \wedge 1 = 1$$

3) *Теорема обобщенного склеивания:*

$$XZ \vee Y\overline{Z} \vee XY = XZ \vee Y\overline{Z}$$

Доказательство:

$$XZ \vee Y\overline{Z} \vee XY = XZ \vee Y\overline{Z} \vee XY\left(Z \vee \overline{Z}\right) = \underline{XZ} \vee \underline{\underline{Y\overline{Z}}} \vee \underline{XYZ} \vee \underline{\underline{XY\overline{Z}}} = XY \vee Y\overline{Z}$$

4) *Теорема разложения:*

$$x_1 \wedge f\left(x_1 \cdots x_n\right) = x_1 \wedge f\left(1, x_2 \cdots x_n\right)$$

$$\overline{x_1} \wedge f(x_1 \cdots x_n) = \overline{x_1} \wedge f(0, x_2 \cdots x_n)$$

$$x_1 \vee f(x_1 \cdots x_n) = x_1 \vee f(0, x_2 \cdots x_n)$$

$$f(x_1 \cdots x_n) = x_1 f(1, x_2 \cdots x_n) \vee \overline{x_1} f(0, x_2 \cdots x_n)$$

$$f(x_1 \cdots x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2 \cdots x_n)) \vee (\overline{x_1} \vee f(1, x_2 \cdots x_n))$$

3.4 Нормальные формы логических функций

Рассмотрим набор двоичных переменных $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ и введем обозначения

$$X_i^{\delta i} = \begin{cases} x_i, & \delta_i = 1 \\ \overline{x_i}, & \delta_i = 0 \end{cases}$$

Формула вида $X_1^{\delta 1} \wedge X_2^{\delta 2} \wedge \ldots \wedge X_m^{\delta m}$, где $m \le n$, $\delta_i \in (0,1)$, $X_i \in (0,1)$, называется **элементарной конъюнкцией.**

Формула вида $X_1^{\delta 1} V X_2^{\delta 2} V \ldots V X_m^{\delta m}$ при тех же условиях называется **элементарной дизъюнкцией.** При m=n элементарная конъюнкция называется **конституентой единицы,** а элементарная дизъюнкция – **конституентой нуля**.

Две элементарные конъюнкции называются **соседними**, если они отличаются знаком инверсии одного из сомножителей. Например, $k_1 = \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4}$ и $k_2 = x_1 x_2 x_3 \overline{x_4}$ – две соседние элементарные конъюнкции по переменной $\mathbf{X_1}$.

Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)**.

Всякая конъюнкция элементарных дизъюнкция называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ)**.

Любую логическую функцию, не равную тождественно единице, можно представить в ДНФ.

Любую логическую функцию, не равную тождественно нулю, можно представить в КНФ.

Приведение к ДНФ сводится к раскрытию скобок в соответствии с первым дистрибутивным законом в булевой формуле функции, содержащей знаки инверсии на самих переменных, с последующим исключением тождественных нулей и объединением равных членов.

Пример: Построить ДНФ функции ***f***, используя равносильные формулы

$$(x_1 \to x_2) = \overline{x_1} \vee x_2, \quad \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2},$$

$$f = (x_1 \to x_2) \to \left(\overline{x_3 \to x_1}\right) = \overline{\overline{x_1} \vee x_2} \vee \left(\overline{\overline{x_3} \vee x_1}\right) = x_1 x \overline{x_2} \vee x_3 \overline{x_1}$$

Приведение к КНФ сводится к раскрытию скобок в соответствии со вторым дистрибутивным законом в булевой формуле, содержащей знаки инверсии на самих переменных, с последующим исключение тождественных единиц и объединением равных членов.

Пример: Построим КНФ функции ***f***, используя полученную выше ДНФ этой функции.

$$f = (x_1 \to x_2) \to \left(\overline{x_3 \to x_1}\right) = x_1 \overline{x_2} \vee x_3 \overline{x_1} = (x_1 \overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1}) =$$
$$= (x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_1})(\overline{x_2} \vee \overline{x_1}) = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$$

Дизъюнктивная нормальная форма логической функции называется **совершенной (СДНФ)**, если все её составляющие есть конституенты единицы.

Всякую, не равную тождественно нулю, логическую функцию можно представить в виде СДНФ. Конъюнктивная нормальная форма называется совершенной (СКНФ), если все её составляющие есть конституенты нуля.

Всякую, не равную тождественно единице, логическую функцию можно представить в виде СКНФ.

При аналогичном приведении ДНФК СДНФ элементарные конъюнкции **k,** не содержащие переменной x_e, к которым применяется первый дистрибутивный закон

…

ПРИМЕР: Привести к СДНФ функцию $f = x_1 \cdot \overline{x_2} \vee x_3 \cdot \overline{x_1}$

$$f = x_1\overline{x_2} \vee x_3\overline{x_1} = x_1\overline{x_2}(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee x_3\overline{x_1}(x_2 \vee \overline{x_2}) = x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3} \vee x_3\overline{x_1}x_2 \vee x_3\overline{x_1}\overline{x_2}$$

При аналитическом приведении КНФ к СКНФ элементарные дизъюнкции **q**, не содержащие переменной x_e, заменяются равносильными формулами $q = q \vee x_e\overline{x_e}$, к которым затем применяется второй дистрибутивный закон и закон ....

ПРИМЕР: Привести к СКНФ функцию $f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$,

$$f = (x_1 \vee x_3)(\overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) = (x_1 \vee x_3 \vee x_2\overline{x_2})(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1\overline{x_1})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3\overline{x_3}) =$$
$$= (x_1 \vee x_3 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_2})(\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_1)(\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_1})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) =$$
$$= (x_1 \vee x_3 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_2})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$$

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности функции состоит из трех шагов.

1. В таблице истинности выбираются наборы, на которых функция принимает значение 1 (единицы).

2. 2 наборов, выбранных на первом шаге, составляются конституенты единицы, в которые переменная входит с инверсией, если в соответствующем наборе она принимает значение 0 (ноль), и без инверсии, если в соответствующем наборе она принимает значение 1 (единицы).

3. Составляется дизъюнкция построенных на втором шаге конституент единицы.

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности логической функции, содержит три шага.

1. В таблице истинности функции выбираются наборы, на которых функция принимает значение 0 (нуля).

2. Для этих наборов составляются конституенты нуля, в которые переменная входит с инверсией, если в наборе она принимает значение единицы, и без инверсии, если в наборе она принимает значение нуля.

3. Составляется конъюнкция построенных на предыдущем шаге конституент нуля.

ПРИМЕР: Построить СНДФ и СКНФ функции f, заданной таблицей истинности.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

1) $M_1 = \{000, 011, 100, 110\}$

2) $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3};\ \overline{x_1}x_2x_3;\ x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3};\ x_1x_2\overline{x_3}$

3) CDHФ$_f = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3}$

4) $M_0 = \{001, 010, 101, 111\}$

5) $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3};\ x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3;\ \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3};\ \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

6) СКНФ$_f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$.

3.5 Полиномиальная форма Жегалкина логических функций

Алгебра над множеством логических функций с двумя бинарными операциями $\wedge$ и $\oplus$, двумя константами 1,0 называется алгеброй Жегалкина, если в ней выполняются следующие законы:

$$x \oplus y = y \oplus x\,; \quad x(y \oplus z) = xy \oplus xz\,; \quad x \oplus x = 0\,; \quad x \oplus 0 = x\,; \quad x \oplus 1 = \overline{x} \qquad \textbf{(2.17)}$$

$xy = yx$; $x(yz) = (xy)z$; $xx = x$

В алгебре Жегалкина дизъюнкция $x \vee y$ выражается формулой $xy \oplus x \oplus y$, из которой видно, что $x \vee y = x \oplus y$ тогда, когда $xy = 0$ (когда x и y ортогональны).

Действительно,

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{(x \oplus 1)(y \oplus 1)} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y$$

Всякую формулу алгебры Жегалкина можно представить в виде полинома Жегалкина.

$$f(x_1,.. x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus ... \oplus c_n x_n \oplus c_{n+1} x_1 x_2 \oplus ... \\ ... \oplus c_{n2} x_1 x_2 \oplus ... \oplus c_{2n-1} x_1 x_2,.. x_{n-1} x_n, \quad \text{где } c_i \in \{0,1\}.$$

Для всякой логической функции существует полином Жегалкина и притом единственный. Алгоритм построения полинома Жегалкина (совершенной полономиальной формы Жегалкина) логической функции состаит из следующих шагов:

1. Строится СДНФ логической функции
2. В СДНФ все операции V заменяются на операции $\oplus$ (все конституенты единицы в СДНФ являются ортогональными конъюнкциями), а все операции $\overline{x}$ на $x \oplus 1$.
3. В полученном выражении раскрываются скобки в соответствии с правилами (2.17) алгебры Жегалкина и приводятся подобные члены.

ПРИМЕР: Построить полином Жегалкина для логической функции $f = (x_1, x_2, x_3)$ с характеристическим множеством $M_1 = \{001,101,110\}$.

СДНФ функции имеет вид (первый шаг):

$$f = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3$$

Согласно алгоритму выполняем второй шаг:

$f = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)x_3 \oplus x_1(x_2 \oplus 1)x_3 \oplus x_1 x_2 (x_3 \oplus 1)$,

а затем и третий шаг:

$f = (x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1)x_3 \oplus (x_1 x_2 \oplus x_1)x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 =$

$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 =$

$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2$

Функция называется линейной, если , ее полином Жегалкина имеет линейный вид:

$f = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus ... \oplus c_n x_n$, где $c_i \in \{0,1\}$, называется **линейной**.

Все функции от одной переменной линейны $(x = x \oplus 0, \bar{x} = x \oplus 1)$. Линейными функциями двух переменных являются $x_1 \oplus x_2$ и $x_1 \infty x_2$. Действительно, имеют место следующие равносильные формулы

$$x_1 \infty x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2} = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$$

3.6 Полнота и замкнутость

Рассмотрим логические функции $g(y_1 y_2 ... y_k)$, $f_1(x_1 ... x_n), ... f_k(x_1 ... x_n)$. Будем считать, что функции $f_1, f_2, ... f_k$ зависят от одних и тех же аргументов $x_1 ... x_n$. Это можно достигнуть, добавив при необходимости к аргументам некоторых функций фиктивные переменные (аргументы).

Некоторый класс А логических функций назовём **замкнутым**, если для всяких функций $g(y_1 ... y_k)$, $f_1, f_2, ... f_k$ из **А** их суперпозиция

$h(x_1 ... x_n) = g(f_1(x_1, ... x_n), f_2(x_1, ... x_n), ... f_k(x_1, ... x_n))$ содержится в **А**.

Перечислим пять замкнутых классов логических функций:

1. Класс функций, сохраняющих константу 0 (обозначение T_0), содержит функции, обладающие свойством

$$f(0,0,...,0) = 0$$

2. Класс функций, сохраняющие константу 1(обозначение T_1), содержит функции, обладающие свойством

$$f(1,1,...,1) = 1$$

3. Класс линейных функций (обозначение T_L), для которых полином Жегалкина линеен

$$f(x_1, ... x_n) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus ... \oplus c_n x_n,\ c_i \in \{0,1\}.$$

4. Класс самодвойственных функций (обозначение T_s), для которых выполняется условие

$$f(x_1, ... x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, ... \overline{x_n}),$$

т.е. на всех инверсных наборов значения функции различны.

5. Класс монотонных функций (обозначение T_M), для которых выполняется условие монотонности.

$$f(A) \geq f(A') \text{ при } A>A'$$

Здесь $A = (a_1, \ldots a_n)$ и $A' = (a'_1 \ldots a'_n)$ - двоичные наборы. Набор **A** больше набора **A'(A>A'),** если каждый элемент a_i набора **A** больше или равен соответствующему элементу a'_i набора $A'(\forall_i a_i \geq a'_i)$.

Рассмотрим совокупность **R** всех логических функций от **n** переменных. Система функций $\{f_1, f_2, \ldots f_m\}$ называется **полной** в классе **R** (**базисом**), если любую функцию из этого класса можно представить суперпозицией функции $f_1, f_2, \ldots f_m$. Базис, для которого удаление любой из функций превращает полную систему в неполную, называется **минимальным.**

Сформулируем и докажем ряд теорем.

ТЕОРЕМА 1. Система функций $\{\neg, \vee, \wedge\}$ является полной.

Действительно, любая логическая функция, тождественно не равна 0, представима в СДНФ, т.е. является формулой в базисе $\{\neg, \vee, \wedge\}$. Поскольку тождественной 0 может быть реализован как $x\bar{x} = 0$, то система $\{\neg, \vee, \wedge\}$ является базисом.

ТЕОРЕМА 2. Нетрудно показать, что базис $\{\neg, \vee, \wedge\}$ не является минимальным. В самом деле, функция V выражается через ^ и] ($x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2}$), следовательно, $\{\neg, \wedge\}$ - базис и притом минимальный. Функция ^ выражается через V и] $\left(x_1 \wedge x_2 = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}\right)$, следовательно, минимальным является и базис $\{\neg, \vee\}$.

ТЕОРЕМА 3. Функция Шеффера образует базис. Для доказательства достаточно выразить операции $\{\neg, \wedge\}$ через функцию Шеффера:

$$\bar{x} = x|x, \quad x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1|x_2} = (x_1|x_2)|(x_1|x_2).$$

ТЕОРЕМА 4. Функция Вебба образует базис. Для доказательства достаточно выразить операции $\{\vee, \wedge\}$ через функцию Вебба:

$$\bar{x} = x \downarrow x; \quad x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2).$$

ТЕОРЕМА 5. Система функций $\{\oplus, \vee, \wedge\}$ является полной в классе **R**.

Доказательство следует из того, что любую логическую функцию можно представить в виде полинома Жегалкина.

Теорема о функциональной полноте (критерий полноты системы логических функций).

Система функций $f_1, f_2, \ldots f_m$ является полной тогда и только тогда, когда она целиком не содержит ни в одном из пяти замкнутых классов : $T_0, T_1, T_L, T_S T_M$.

ПРИМЕР:

3.7 Минимизация логических функций

Логическая функция $g = g(x_1, \ldots x_n)$ называется **импликантой** функции $f = f(x_1, \ldots x_n)$, если на любом наборе значение переменных $x_1, \ldots x_n$, на котором значение функции *g* равно 1 (единице), значение функции f тоже равно единице. **Простой импликантой** *p* функции *f* называется элементарная конъюнкция, являющаяся импликантой функции *f* и такая, что никакая её собственная часть не является импликантой. Дизъюнкция любого множества импликат булевой функции является импликантой этой функции.

Дизъюнкция всех простых импликант булевой функции совпадает с этой функцией и называется **сокращённой дизъюнктивной нормальной формой** (СкДНФ) этой функции.

Сокращенная ДНФ является, в общем случае, более экономным способом представления булевой функции, чем совершенная ДНФ. Однако зачастую и она допускает дальнейшие упрощения за счет того, что некоторые из простых импликант могут поглощаться дизъюнкциями других простых импликант. Появляется задача минимизации логических функций.

ПРИМЕР: В сокращенной ДНФ функции $f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz$ простая импликанта *yz* поглощается дизъюнкцией остальных членов формы, так что

$$f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz.$$

Система $\boldsymbol{S}$ простых импликант функции f называется **приведенной**, если эта система полна, а никакая её собственная часть не является полной системой импликант функции f.

Дизъюнкция всех простых импликант, составляющих систему $\boldsymbol{S}$, называется тупиковой дизъюнктивной нормальной формой (ТДНФ) функции f. Всякая тупиковая ДНФ функции f совпадает с этой функцией. Если сокращенная ДНФ однозначно определяема логической функцией, то для одной и той же функции может существовать несколько различных тупиков ДНФ.

ДНФ логической функции называется **минимальной,** если сумма рангов образующих её элементарных конъюнкций будет не больше, чем в любой другой ДНФ этой функции.

Метод непосредственных преобразований. Его суть заключается в том, что минимизация исходной ЛФ осуществляется путем применения основных законов и теорем.

Метод Квайна исходит из задания функции в виде СДНФ и заключается в последовательном применении к составляющим СДНФ операции неполного склеивания и поглощения. В результате этих операций СДНФ преобразуется в сокращенную ДНФ – дизъюнкция простых импликант. Простой импликантой называется элементарная конъюнкции, которая не склеивается ни с какой другой конъюнкции, входящей в данную логическую функцию.

Метод Блейка основывается на использовании операции обобщенного склеивания. Если функция задана в КНФ, для получения ее сокращенной ДНФ целесообразно применять **метод Нельсона**, согласно которому достаточно в произвольной КНФ раскрыть скобки в соответствии с первым дистрибутивным законом и провести все необходимые поглощения.

Тупиковая ДНФ с наименьшей суммой рангов составляющих её простых импликант и является минимальной ДНФ. Нахождение тупиковой ДНФ и выбор из них минимальных можно реализовать **методом Петрика.**

Минимизация логических функций методом Квайна-Мак=Класки.

Этап 1 Построение сокращенной ДНФ.

Сокращенная ДНФполучается из СДНФ путем склеивания вначале конституент единицы между собой (склеиваются “соседние” по той или иной переменной) по всем переменным, а затем конъюнкции ранга n-1, n-2 и т.д.

При реализации этого метода удобно конституенты единиц задавать в виде условных чисел, рассматривая набор, на котором они обращают в единицу, как двоичную запись этого числа. Индексом условного числа будем называть число единиц в двоичном представлении этого числа. Очевидно, что склеивать можно только те конституенты единиц, для которых индексы различные только на единицу.

Процесс решения удобно представлять в виде таблицы. Знаком (*) отмечают конъюнкции, которые склеиваются в процессе решения, а символом (-) отмечают переменные, по которым происходило склеивание.

Пример

Пусть логическая функция 3-х переменных задана своей СДНФ, а ее составляющие распределены по ячейкам, соответвующим индексам условных чисел этих конституент единиц.

0	000*	-00* 0-0*	--0
1	100* 010*	10- 1-0* 01- -10*	
2	101* 011 110*		

Как видно из таблицы, к элементарным конъюнкциям, не отмеченным (*), нельзя применить операцию неполного склеивания. Следовательно, они являются простыми импликантами. Сокращенная ДНФ имеет вид

Часто сокращённая ДНФ допускает дальнейшие упрощения, т.к. содержит простые импликанты, которые поглощаются дизъюнкцией простых импликант. Упрощение сокращённой ДНФ и составляет второй этап минимизации ЛФ.

Заметим, что в нашем примере сокращённая ДНФ является min ДНФ. И в этом мы убедились на визуально-матричной форме

2 этап. Построение тупиковых ДНФ и выбор минимальной ДНФ

Тупиковой ДНФ называется такая дизъюнкция простых импликант, которая равна ЛФ, но исключение из нее любой из этих импликат, нарушает равенство. ТДНР с наименьшей суммой рангов составляющих ее простых импликант и является min ДНФ.

2-ой этап можно реализовать методом Петрика. В соответствии с этим методом строим булеву матрицу, строки которой соответствуют импликантам ТДФ, а столбцы – конституентам единиц СДНФ. Элемент матрицы равен 1, если простые импликанты являются составной частью соответствующей конституенты единицы. Затем отыскивают кратчайшее скрытое покрытие этой матрицы. Простые импликанты, попавшие в это покрытие , и являются составляющими минимальной ДНФ.

Пример: найти min ДНФ

0	0000*	000-
1	0001*	-001
2	1100* 1001*	11-0 110- 1-01
3	1110* 1101*	

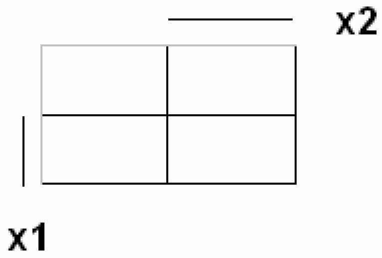
		0000	0001	1100	1001	1110	1101
p1	000-	1	1				
p2	-001		1		1		
p3	11-0			1		1	
p4	110-			1			1
p5	1-01				1		1

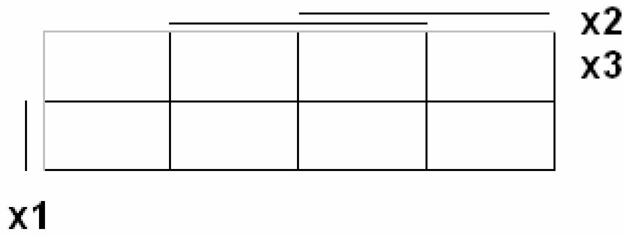
или использовать этот рисунок

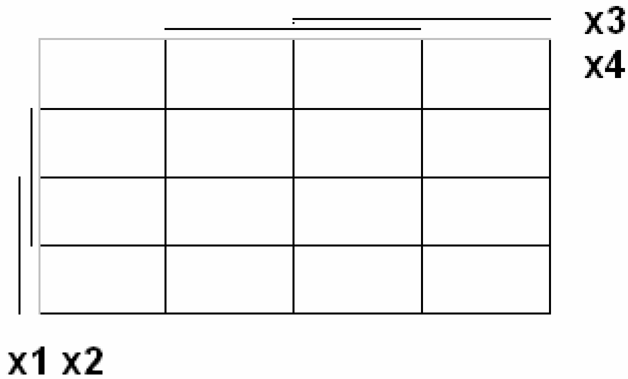
		oooo	ooo1	11oo	1oo1	1110	1101
p1	000-	1	1				
p2	- 00 1		1		1		
p3	11-0			1		1	
p4	110-			1			1
p5	1-o1				1		1
		p1	p1 p2	p3 p4	p2 p5	p3	p4 p5

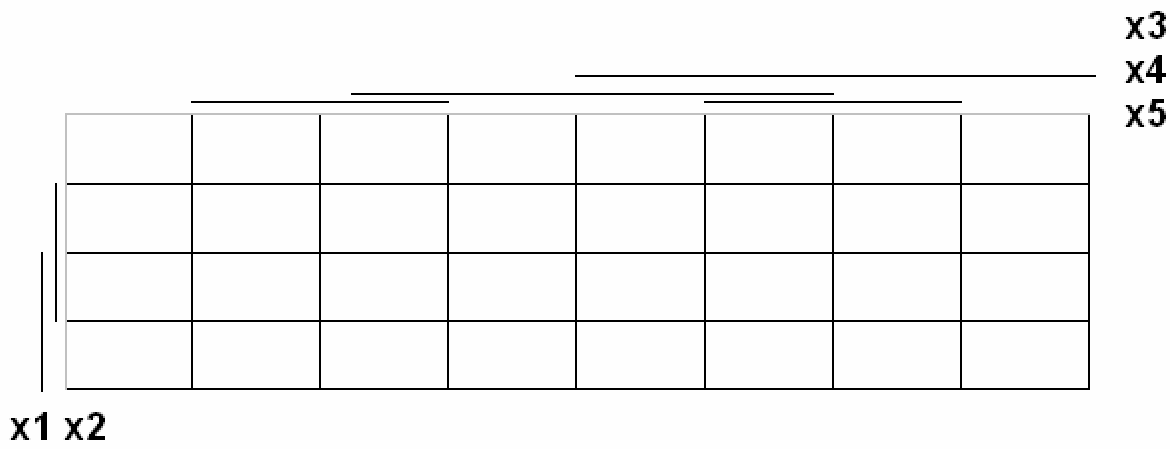
3.8. Визуально-матричный метод минимизации логических функций.

Логическая функция может быть представлена на матричной форме своих характеристических множеством. Это наиболее удобный способ представления функций в ДНФ. Матричная форма - таблица, каждая клетка которой соответствует одному из наборов таблицы истинности. Множество переменных x=X{x1..xn} разбито на подмножество младших ……. и старших переменных ………..
Столбцам таблицы сопоставляются различные комбинации значений младших(старших)
переменных. Единичное значение переменной отмечены чертой над соответствующими столбцами или строкой, нулевое – отсутствием черты. В клетках матрицы заносятся значения логической функции на соответствующем наборе x=X{x1..xn}единичные значение функции отмечается точкой, поставленной в клетке, нулем – отсутствие точки.


x2
x1


x2
x3
x1


x3
x4
x1 x2



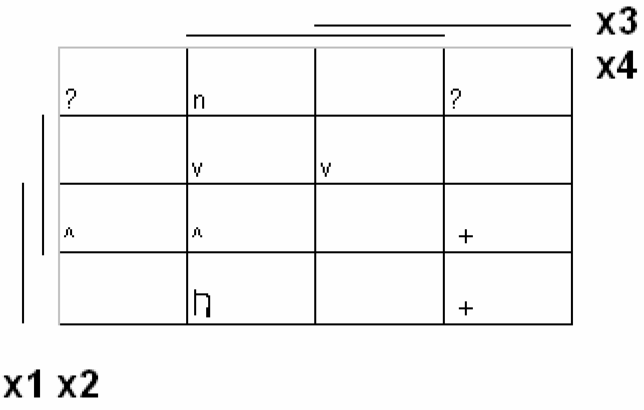
На каждой матричной форме выделены оси симметрии той или иной переменной x_i (линии смены значения этой переменной). Каждой оси симметрии соответствует зона симметрии, серединной линией которой является ось симметрии, а ширина зоны равна 2^r, где r – ранг оси симметрии.

Два элемента α и β называются соседними, если их значение различаются значениями только одной переменной.

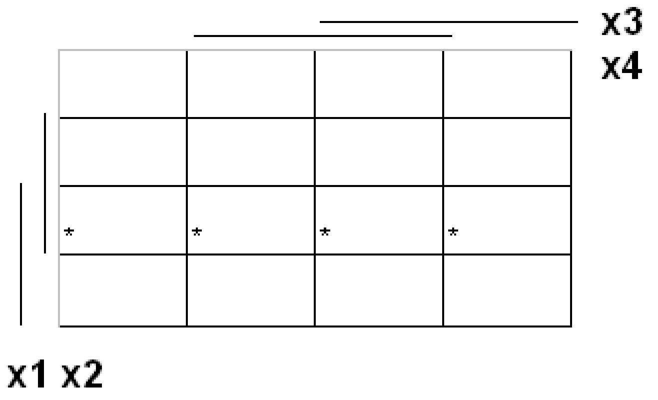
Соседними по переменной Xi считаются те элементы булева пространства , которые лежат симметрично относительно соответствующей оси этой переменной и полностью в зоне ее симметрии.

Пример

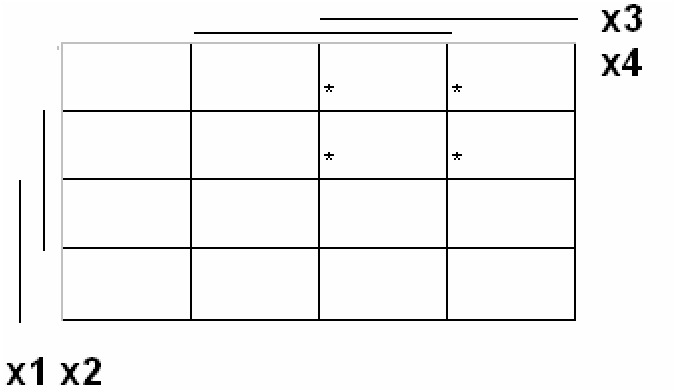
На матричной форме 4-х переменных найти элементы, соседние выделенным элементам.

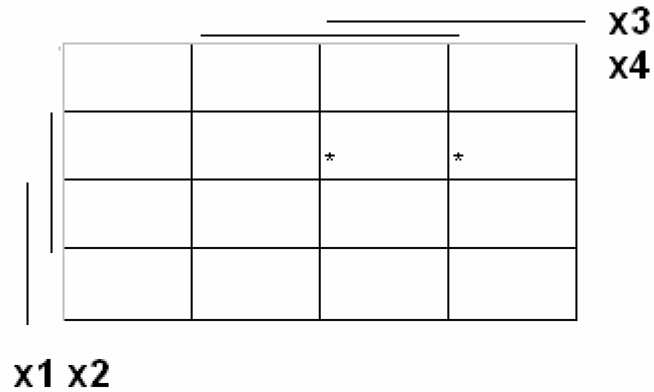


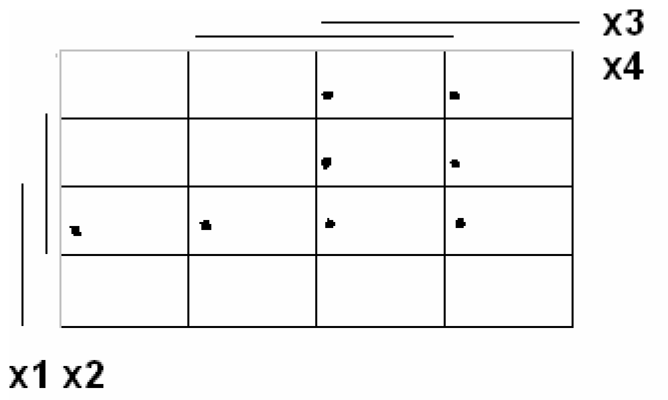
?-соседи по переменной x3
v-соседи по переменной x3
^- соседи по переменной x4
n-соседи по переменной x1
+- соседи по переменной x2
Интервал – множество наборов значений переменных , на которых элементарная конъюнкция принимает значений «1», т.е. характеристическим множеством элементарной конъюнкции.
Интервал , соответствующий элементарной конъюнкции k-го ранга, получаем путём пересечений опорных интервалов, соответствующих k конъюнкциям 1-го ранга.
Задание булевых функций в ДНФ сводится к размещению точек(единиц) по клеткам матричной формы, её элементарных конъюнкции.



x1x2=k







Если две элементарные конъюнкции соседние по переменной xi, то их можно склеить по этой переменной

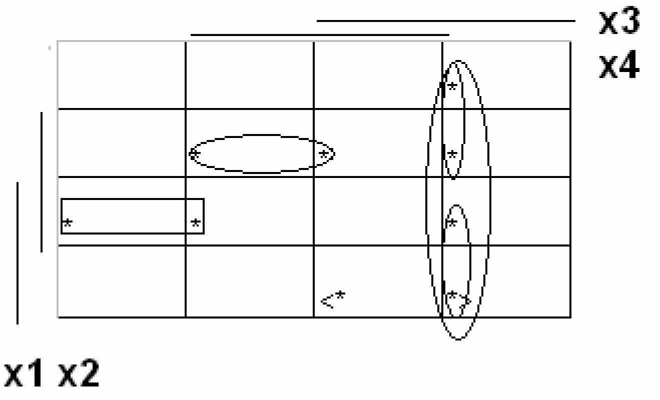
$$x1x2x3 \quad x1x2x3=x1x2$$

и получить элементарную конъюнкцию меньшего ранга. На матричной форме это соответствие тому, что интервалы, соседние по переменной xi, можно покрыть интервалом, более крупным (т.е. найти покрывший их интервал).

ДНФ функции f(x1…xn) называется минимальной, если она содержит наименьшее число переменных по сравнению со всеми другими эквивалентными ДНФ

Минимизация логической функции визуально-матричным методом сводится к нахождению наиболее крупных интервалов, покрываемых характеристическое множество данной функции.

Целесообразно вначале искать покрывающий интервал для максимального элемента булева пространства, у которого меньше взято соседей. Затем, что одна и та же клетка матрицы может входить в несколько интервалов.



Элемент $x_1x_2x_3x_4$ склеиваем с элементом $x_1x_2x_3\bar{x}_4$ по переменной x_4
Покрывающий их интервал соответствует элементарной конъюнкции

$<x_1x_2\bar{x}_3>$.

Окончательно, получаем минимальную ДНФ $x_1x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2x_4 \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3$

4.Элементы математической логики

4.1.Алгебра высказываний
4.2. Логические отношения
4.3.Проверка правильности рассуждений
4.4. Нормальные формы формул алгебры высказываний.
4.5. Моделирование алгебры высказывания с помощью релейно-контактных схем
4.6. Решение логических задач методом характеристичесого уравнения.

Математическая логика представляет собой формальный математический аппарат, изучающий различные способы логических рассуждений.

Простейшей из формальных логических теорий называют *алгебру высказываний*. Исчисление высказываний следующая ступень в иерархии формальных теорий. Ещё выше стоят алгебра предикатов и исчисление предикатов.

4.1 Алгебра высказываний

Высказывание – некоторое утверждение, относительно которого нас интересует только его истинность или ложность.

Высказывание называют простым (элементарным), если его истинность не зависит от истинности других высказываний.

Высказывание называют сложным (составным), если оно зависит от истинности других высказываний.

В алгебре высказываний объектом исследования является множество высказываний, а операциями – некоторые логические операции, каждую из которых можно рассматривать как некоторое сложное высказывание.

$$\{ \vee, \wedge, \neg, \oplus, \rightarrow, \backsim \}$$

Определяются эти операции следующими таблицами истинности. Например, операции «дизъюнкция» соответствует сложное высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда А ложно и В ложно

А	В	А∨В
Л	Л	Л
Л	И	И
И	Л	И
И	И	И

В дальнейшем каждое простое высказывание можно связать с некоторой двоичной переменной.

$$X = \begin{cases} 1, \text{ если простое высказывание истинно} \\ 0, \text{ если простое высказывание ложно} \end{cases}$$

$$f(x_1, x_2 .. x_n) = \begin{cases} 1, \text{ если сложное высказывание, зависящее от n простых высказываний истинно} \\ 0, \text{ если сложное высказывание ложно} \end{cases}$$

Поэтому сложное высказывание можно связать с некоторой двоичной (логической) функцией.

Используя подобную связь можно сказать, что алгебра высказываний есть одна из интерпретаций алгебры логических функций.

Запишем таблицу истинности операций алгебры высказываний:

A	B	A\/B	A/\B	A→B	A∽B	A⊕ B
0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Любое сложное высказывание можно представить в виде некоторой формулы. Дадим определение формулы:

1. Каждый символ a, b, c… есть формула;
2. Если A и B – формулы, то формулами являются A*B, A\/B, где * - любая операция из других формул нет.

$$\{\vee, \wedge, \neg, \oplus, \rightarrow, \backsim\}$$

$$\left\{\underbrace{\neg}_{\mathrm{I}},\ \underbrace{\wedge}_{\mathrm{II}},\ \underbrace{\vee, \oplus}_{\mathrm{III}},\ \underbrace{\backsim, \rightarrow}_{\mathrm{IV}}\right\}$$

Для установления порядка выполнения операций в формулах используются скобки. При их отсутствии порядок устанавливается приоритетом операций

Вычисление по формуле продемонстрируем на следующем примере:

$$F = \neg[(a \oplus b)\ c] \rightarrow \neg a \vee bc$$

a	b	c	a⊕b	(a⊕b)c	¬((a⊕b)c)	¬a	¬a \/ bc	F
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1

0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1

В дальнейшем будем говорить, что формула истинна или ложна в зависимости от того, истинно или ложно соответствующее ей высказывание.

Формула может быть истинной при одном наборе значений переменных и ложным при другом наборе. Формула, которая является истинной хотя бы при одном наборе значений переменных, называется **выполнимой.** Формула ложная при всех наборах значений переменных называется **противоречием (тождественно ложной).** Формула, истинная при всех наборах значений переменных называется **тавтологией (тождественно истинной).**

Между формулами можно установить отношение формально импликации (==>). Формулы A и B находятся в отношении формальной импликации, точнее A имплицируем B (A==>B), если ф-ла B истинна на всех наборах переменных, на которых истинна ф-ла A. В таких случаях говорим, что ф-ла B логически следует из ф-лы A.

Формулы A и B равносильны (логически эквивалентны) (A<=>B) если любая из них следует из другой. Очевидно, что таблица истинности равносильных ф-л совпадают.

Отметим следующий факт.

Если a=>b и c⇔d, то a→b и c∽d являются тавтологиями.

Тавтологии составляют основу логических рассуждений.

Рассмотрим основные тавтологии использования высказываний.

Основные тавтологии алгебры высказываний

1.Закон тождествия :

$a \to a$

Всякое высказывание логична следует из самого себя.

2. Закон противоречия:

$\neg(a \wedge \neg a)$

Всякое высказывание не м.б. одновременно истинным и ложным.

3. Закон исключения третьего:

$a \vee \neg a$

Для всякого высказывания истинно либо оно само либо его отрицание.

4. Закон двойного отрицания:

$\neg\neg a \Leftrightarrow a$

Отрицание отрицания любого высказывания равносильно самому высказыванию.

5. Закон «истинно из чего угодно»:

$a \to (b \to a)$

Если а – истинное высказывание, то ф-ла (b→a) – истинна.

6. Закон «из ложного что угодно»:

$a \to (a \to b)$

Если а – ложное высказывание, то из а следует всё, что угодно.

7. Закон modus ponens:

$(a \wedge (a \to b)) \to b$

Если истинно то, что из а следует b, и а истинно , то b истинно.

8.Закон modus tollens:

$((a \to b) \wedge \neg b) \to \neg a$

Если из а следует b, а b ложно, то а тоже ложно.

9. Закон силлогизма:

$((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$

Если из а следует b, а из b следует с, то из а следует с.

4.2. Логические отношения

Имеем два высказывания P и Q.

1. Отношение следствия (P=>Q). Говорим, что из P следует Q, если Q истинно всякий раз, когда истинно P. Q наз. следствием P.

Пусть $P=A\rightarrow B$, $Q= A \backsim B$. Следует ли P из Q? Следует ли из P высказывание Q?

A	B	$P=A\rightarrow B$	$Q=A \backsim B$	$P\rightarrow Q$	$Q\rightarrow P$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1

Следовательно, из Q следует P.

Заметим, что между отношениями следствие и импликация существует тесная связь. Но это не одно и тоже. Импликация – сложное высказывание, составленное из двух данных, а следствие – отношение между двумя высказываниями. Импликация выражает отношение следствие только тогда, когда таблица истинности импликации содержит одну единицу. Отметим, что высказывания, связанные с импликацией, при отсутствии смысловой связи между посылкой и заключением могут звучать парадоксально. Например: « Если я не приду на лекцию, то река впадает в Белое море.» Звучит парадоксально. Между посылкой и заключением в подобных случаях не существует отношения следствия.

2. Два высказывания P и Q эквивалентны, если таблица истинности P Q содержит только единицы. Импликация $P=A\rightarrow B$ и импликация $Q= \bar{B}\rightarrow\bar{A}$ эквивалентны. Эти формулы в рассуждении заменяют друг друга.

3. Два высказывания P и Q называются несовместимыми, если не существует
логической возможности, при которой оба высказывания были бы одновременно истинными, т.е. при истинном значении одного из них другое обязательно ложно.

Чтобы установить совместимость высказывания, нужно построить их таблицы истинности. Если найдется хотя бы одна строка, в которой все высказывания принимают значение истинно, то данные высказывания будут совместимы и несовместимы в противном случае.

4.3.Проверка правильности рассуждений

Рассуждение есть утверждение того, что некоторое высказывание (заключение) следует из других высказываний (посылок). Рассуждение будет правильным, если из конъюнкции посылок следует заключение, т.е. между конъюнкцией посылок и заключением установлено отношение следствия. В этом случае импликация должна

$$P_1 \wedge P_2 .. P_n \Rightarrow Q$$

$$P_1 \wedge P_2 .. P_n \rightarrow Q \qquad (1)$$

быть тавтологией.

Правильность рассуждения можно установить, построив таблицу истинности высказывания (1) и убедившись в том, что оно тождественно истинно.

Правильность рассуждения можно установить и методом «от противного». Этот метод заключается в том, что, полагая заключения Q ложным, а некоторые посылки Pi истинными, проверяем найдётся ли хотя бы одна посылка, принимающая значение ложно. Если да, то рассуждение правильно.

ПРИМЕР:

Следует установить, правильно ли рассуждение: "Если функция на данном интервале непрерывна и имеет разные знаки на концах, то внутри данного интервала функция обращается в нуль. Функция не обращается в нуль внутри данного интервала, но на концах интервала имеет разные знаки. Следовательно, функция разрывна."

Посылки и заключения в данном рассуждении состоят из следующих элементарных высказываний:

A - "Функция непрерывна на данном интервале."

B - "Функция обращается в нуль внутри данного интервала."

C - "Функция имеет разные знаки на концах интервала."

Используя эти обозначения, запишем посылки и заключения в виде формул:

$A \wedge C \rightarrow B$ (1-ая посылка: P_1)

$\bar{B} \wedge C$ (2-ая посылка: P2)

$\bar{A}$ (заключение Q)

Рассуждение верно, если импликация $(A \wedge C \to B) \wedge (B \wedge C) \to A$ тождественно истинна. Для проверки правильности рассуждения построим истинностную таблицу:

				P_1		P_2		Q	
A	B	C	AC	$AC \to B$	$\bar{B}$	$\bar{B}C$	P_1P_2	$\bar{A}$	$P_1P_2 \to Q$
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0	I
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1

Убеждаемся, что рассуждение верно.

Проведем проверку правильности рассуждения методом от противного. Предположим, что в этом случае конъюнкция посылок $P_1 \wedge P_2$ - ложна. В самом деле, если Q = A ложно, то A истинно. Пусть $P_2 = \bar{B}C$ - истинна, тогда C - истинно, B - истинно, т.е. B - ложно, но в этом случае посылка Pi принимает значение ложно, что противоречит условию.

Правильность данного рассуждения можно проверить также, преобразовав формулу $P_1P_2 \to Q$ к некоторой равносильной ей формуле, которая задает заведомо тождественно истинное высказывание.

Это сделаем после ознакомления с так называемыми совершенными нормальными формулами алгебры высказываний.

4.4. Нормальные формы формул алгебры высказываний.

Установить тип ф-лы можно с помощью таблиц истинности. При большом числе переменных xi (при большом числе простых высказываний) таблицы истинности f(x1…xn) функций, соотв. Этим формулам, очень громоздки. Установить тип формулы (выполнима, тавтология, противоречие) удобно с помощью так называемых **нормальных форм.**

Введём ряд определений:

1. Элементарной конъюнкцией называют конъюнкцию элементарных высказываний

$R: \; a\bar{b}\bar{c}d, abc, a\bar{b}$

или их отрицание.

2. Элементарной дизъюнкцией называют дизъюнкцией элементарных высказываний или их отрицание.

$q: \; a \vee \bar{b} \vee \bar{c} \vee d, a \vee b \vee c, a \vee \bar{b}$

Заметим, что элементарная конъюнкция R является тождественно ложной, когда она содержит пару множителей, одно из которых является простым

$a\bar{b}\bar{c}\bar{a} \equiv 0$

высказыванием, а другое – есть его отрицание.

Заметим, что элементарная дизъюнкция q является тождественно истинной, когда она содержит хотя бы одну пару слагаемых, одно из которых является простым высказыванием, а другое – есть его отрицание.

3. Формула, равносильная данной формуле

$a \vee \bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{a} \equiv 1$

алгебры высказываний и является

$abc \vee a\bar{b} \vee cb \vee \bar{c}$

дизъюнкцией элементарных конъюнкций, наз. ДНФ данной формулы.

4. Формула, равносильная данной формуле алгебры высказываний и является

$(a \vee b \vee c)\,(a \vee \bar{b})\,(c \vee b)\,\bar{c}$

конъюнкцией элементарных дизъюнкций наз. КНФ данной формулы.

Для каждой формулы алгебры высказываний можно найти множества КНФ и ДНФ.

Для этого нужно:

1) Заменить все логические операции булевыми операциями. Это можно сделать используя следующие равносильные формулы.

$A \to C = \overline{A} \vee C$, $A \oplus C = A\overline{C} \vee \overline{A}C$

2) Заменить знак отрицания относящийся ко всему выражению на знаки относящиеся к отдельным переменным (используя закон де Моргана).

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3) Избавиться от знаков двойного отрицания. $\overline{\overline{A}} = A$

4) Применить, если нужно, закон дистрибутивности и формулы поглощения. $A \vee AB = A$, $A(AC) = A$

Пример:

Пусть $S = (A \to C) \leftrightarrow (\overline{A} \to \overline{B})$

Построим КНФ для этой формулы.

1) Избавимся от знаков импликации, получим

$(\overline{A} \vee C) \leftrightarrow (\overline{\overline{A}} \vee \overline{B})$.

2) Учитывая, что $\overline{\overline{A}} = A$, имеем: $S = (\overline{A} \vee C) \leftrightarrow (A \vee \overline{B})$.

3) Избавимся от знака двойной импликации:

$S = ((\overline{\overline{A} \vee C} \vee (A \vee \overline{B})) \wedge ((\overline{A} \vee C) \vee \overline{A \vee \overline{B}})$.

4) Применим закон де Моргана:

$\overline{\overline{A} \vee C} = \overline{\overline{A}}\,\overline{C}$; $\overline{A \vee \overline{B}} = \overline{A}\,\overline{\overline{B}}$.

Получим $S = (\overline{\overline{A}}\,\overline{C} \vee (A \vee \overline{B})) \wedge ((\overline{A} \vee C) \vee \overline{A}\,\overline{\overline{B}})$.

5) Избавимся от двойных отрицаний $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\overline{B}} = B$ в формуле S. Учитывая закон ассоциативности операции дизъюнкции внутренние скобки опустим:

$S = (A\overline{C} \vee A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee C \vee \overline{A}B)$.

6) Применим формулу поглощения: $A\vee A\overline{C} = A$; $\overline{A} \vee \overline{A}\,B = \overline{A}$ Получим S = $(A\vee \overline{B})\wedge(\overline{A} \vee C)$.

Получили КНФ для исходной формулы.

<u>Теорема 1:</u> формула алгебры высказываний является тождественно истинной , когда каждый множитель её КНФ содержит пару слагаемых, одно из которых является элементарным высказыванием, а другое его отрицанием.

<u>Теорема 2:</u> формула алгебры высказываний является тождественно ложной , когда каждый множитель её ДНФ содержит пару сомножителей, один из которых является элементарным высказыванием, а другое его отрицанием.

Данные теоремы позволяют решить вопрос о выполнимости любой формулы алгебры высказываний.

<u>Пример:</u>

Установить тип формулы $S = \overline{(A\vee B)\to(B\to C)}$.

<u>Решение:</u>

Определим КНФ для отрицания S.

$$\overline{S} = (A\vee B)\to(B\to C) = (A\vee B)\to(\overline{B}\vee C) = \overline{A\vee B}\vee\overline{B}\vee C = \overline{A}\,\overline{B}\vee\overline{B}\vee C = (\overline{A}\vee\overline{B}\vee C)(\overline{B}\vee\overline{B}\vee C)$$

КНФ для $\overline{S}$ не удовлетворяет условию теоремы 1, следовательно $\overline{S}\neq 1$ и $S\neq 0$, т.е. S - выполнима.

Возвратимся к примеру о правильности рассуждений. Чтобы убедиться в том, что рассуждение верно, нужно либо преобразовать импликацию $S=P_1\wedge\ldots P_n\to Q$ к КНФ и удостовериться в том, что она удовлетворяет условиям теоремы 1, либо преобразовать к ДНФ S и убедиться в том, что она удовлетворяет условиям теоремы 2.

$$S = (AB\to C)(\overline{C}\,B)\to\overline{A}.$$

Преобразуем S к виду КНФ: $S=\overline{(\overline{AB}\vee C)\overline{C}B\vee A} =$

$$\overline{\overline{AB}\vee C}\vee\overline{\overline{C}}\vee\overline{B}\vee\overline{A} = \overline{\overline{AB}}\,\overline{C}\vee C\vee\overline{B}\vee\overline{A} = AB\overline{C}\vee(C\vee\overline{B}\vee\overline{A}) =$$

$$=(A\vee C\vee\overline{B}\vee\overline{A})(B\vee C\vee\overline{B}\vee\overline{A})(C\vee C\vee\overline{B}\vee\overline{A}).$$

Конъюнктивная нормальная форма S удовлетворяет условиям теоремы 1, каждый сомножитель есть тождественно истинное высказывание, что и требовалось доказать, т.е. S = 1, т.е. рассуждение правильно.

СКНФ и логическое следствие

Определения:

- Конституента 1 – это элемент конъюнкции, состоящий из всех переменных, входящих в формулу и взятых со знаком отрицания или без него.
- Конституента 0 – это элемент дизъюнкции, состоящий из всех переменных, входящих в формулу и взятых со знаком отрицания или без него.
- Совершенная ДНФ (СДНФ) – формула алгебры высказывания, наз. ДНФ, состоящая из конституент 1.
- Совершенная КНФ (СКНФ) – формула алгебры высказывания, наз. КНФ, состоящая из конституент 0.

Всякую, не равную тождественно 1 (0) формулу алгебры высказывания можно представить в СДНФ (СКНФ) и при этом единственным образом.

- При аналитическом приведении ДНФ к СДНФ элементарные конъюнкции R, не содержащей переменной x_e, заменим равносильными формулами: R=R($x_e \vee \bar{x}_e$), к которым затем применим 1-ый дистрибутивный закон с последующим приведением подобных членов.

$$f = x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_1 = x_1\bar{x}_2(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_3\bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_2) = x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$$

(ДНФ→СДНФ)

СДНФ и СКНФ логических функций удобно составлять по таблице истинности.

С помощью СКНФ можно решить задачу построения всех логических следствий из данных конъюнкций.

Схема решения этой задачи следующая:

1) Образуем конъюнкции всех данных конъюнкций.
2) Приведём конъюнкции к СКНФ.

Пример:

x / y , $x \oplus y$

$$x / y * (x \oplus y) \Leftrightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) \Rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y) - СКНФ$$

Следствие: $\bar{x} \vee \bar{y} \Leftrightarrow x / y$

$(\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y) \Leftrightarrow x \oplus y$

Построение формулы алгебры высказываний по заданной функции.

Рассмотрим задачу, обратную той, что рассматривали раньше – построим таблицу истинности для некоторой формулы алгебры высказываний.

Задана некоторая ф. $f(x_1 ... x_n)$ и нужно для неё построить формулу. Задача неоднозначна. Существует множество равносильных друг другу формул, которые могут соотв. данной функции. Но совершенные нормальные формы(СДНФ и СКНФ) для любой формулы единственны.

x1	x2	x3	f(x1,x2,x3)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

СДНФ:

1) В таблице истинности выбираем наборы, на которых ф.=1;

2) Для этих наборов составим конститум 1: $(0-\bar{x},1-x)$

3) составим дизъюнкции конститум 1:

000, 010, 011, 110

$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2\bar{x}_3$

СКНФ:

1) В таблице истинности выбираем наборы, на которых ф.=0;

2) Для этих наборов составим конститум 0: $(0-x,1-\bar{x})$

3) составим конъюнкции конститум 0:

001, 100, 101, 111

$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

Заметим, что используя основные равносильные формулы СДНФ и СКНФ упрощают, если это возможно.

4.5. Моделирование алгебры высказывания с помощью релейно-контактных схем.

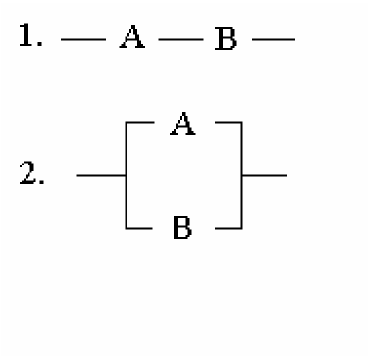
РКС – устройство из проводников и контактов, связывающих полюса источника тока. Контакты могут быть размыкающимися и замыкающимися. Каждый контакт подключён к некоторому реле. Когда реле находиться под током, все подключённые к нему замыкающиеся контакты замкнуты, а размыкающиеся разомкнуты.

Каждому реле можно поставить в соответствие значение 1, если оно находиться под током, и 0, если нет. Все замыкающиеся контакты, подключённые к реле X будут обозначены $x_1 ... x_n$, а размыкающиеся $\bar{x}_1 ... \bar{x}_n$.всей схеме также можно поставить одно из двух значений: 1 – если схема проводит ток, и 0- если не проводит. Это значение есть функции переменных xi, xj (i,j=1…n), т.е. логические функции – функции проводимости. Этой функции соответствует некоторая формула алгебры высказываний. Т.о. всякая формула алгебры высказываний может быть реализована некоторой релейно-контактной схемой, имеющая функцию проводимости. И, наоборот.

Основные логические связи в моделировании схем следующие:

Дизъюнкции – параллельные связи;

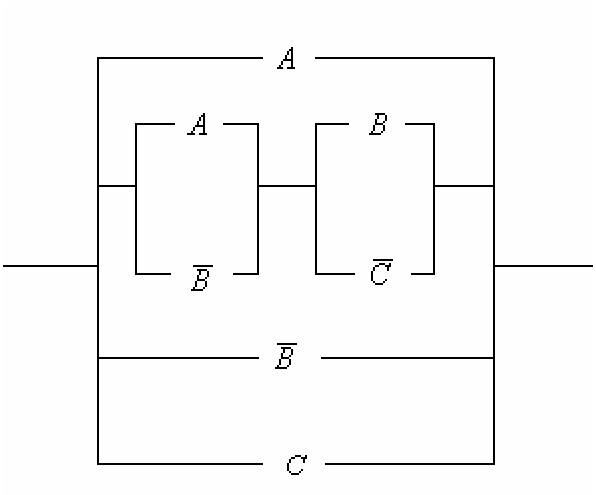
Конъюнкции – последовательные. 2.



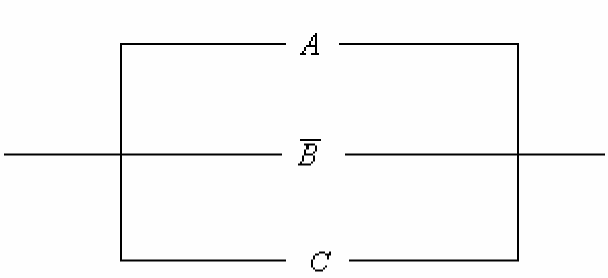
1.A $\wedge$ B

2.A $\vee$ B

Задача 1: Упростить схему.



$$A \vee (A \vee \overline{B})(B \vee \overline{C}) \vee \overline{B} \vee C \Rightarrow A \vee (AB \vee A\overline{C} \vee B\overline{B} \vee \overline{B}\,\overline{C}) \vee \overline{B} \vee C \Rightarrow A \vee AB \vee A\overline{C} \vee \overline{B} \vee C = A \vee \overline{B} \vee C$$



Задача 2: Построить схему по заданной функции.

f(1,1,1) = f(1,0,1) =f(1,1,0).

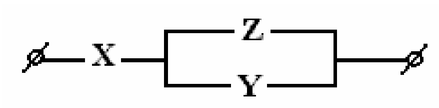
Составим формулу алгебры высказываний, имеющую заданную логическую функцию - СДНФ:

$$S=XYZ\vee X\overline{Y}Z\vee XY\overline{Z}.$$

Упростим это выражение:

$$S=XZ(Y\vee \overline{Y})\vee XY\overline{Z}=XZ\vee XY\overline{Z}=X(Z\vee Y\overline{Z}) = X(Y\vee Z).$$

Соответствующая данной формуле схема имеет вид:



4.6. Решение логических задач методом характеристического уравнения.

Алгоритм решения:

1) Введение булевых переменных, соответствующих простым высказываниям $x_j \in [0,1], j = 1 \div n \qquad x = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$

2) Запись условия задачи в виде логических уравнений

$$f_i(x) = 1, i = 1 \div m, \qquad (1)$$

где $f_i(x)$ – логическая функция

3) Сведение системы уравнений к характеристическому уравнению

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i(x) = 1, \qquad (2)$$

множество корней, которого совпадает с множеством корней системы (1)

4) Приведение левой части характеристического уравнения к ДНФ и решение его:

- Приравнивание каждого слагаемого ДНФ (СДНФ), независимо от других, к единице извлечение из уравнения значений переменных. Каждый их набор является решением задачи.
- Если после упрощения в ДНФ осталось только одно слагаемое, задача имеет единственное решение. В случае, когда в левой части уравнения все слагаемые уничтожены, задача не имеет решения.

Задача Р.М. Смаллиана «Принцесс и тигр».

В некотором царстве правил король. Однажды он предложил узнику отгадать, в какой комнате находится принцесса, а в какой тигр.

Узнику было объявлено, что в каждой комнате находится либо принцесса, либо тигр, однако может оказаться, что сразу в обеих комнатах будет обнаружено по тигру или по принцессе.

На табличках, прикрепленных к двери каждой из комнат, было написано:

1.	2.
В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр. $(f_1 = x_1\bar{x}_2\bar{y}_1 y_2)$	В одной из этих комнат находится принцесса, кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр. $(f_2 = (x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2)(y_1\bar{y}_2 \vee \bar{y}_1 y_2))$

Король сообщил узнику, что на одной из таблиц написана правда, на другой – ложь. Какую дверь надо открыть узнику, если он предпочитает принцессу тигру?

Решение:

1. Формулируем простые высказывания:

- x_i – «принцесса находится в комнате i»: i=1,2;
- y_i - «тигр сидит в комнате i»: i=1,2;

2. формулируем сложные высказывания, соответствующие условию задачи:

$f_1 = x_1\bar{x}_2\bar{y}_1 y_2 \quad f_2 = (x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2)(y_1\bar{y}_2 \vee \bar{y}_1 y_2) \quad f_0 = x_1 x_2\bar{y}_1\bar{y}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 y_1 y_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{y}_1 y_2 \vee \bar{x}_1 x_2 y_1\bar{y}_2$

Получаем систему уравнений:

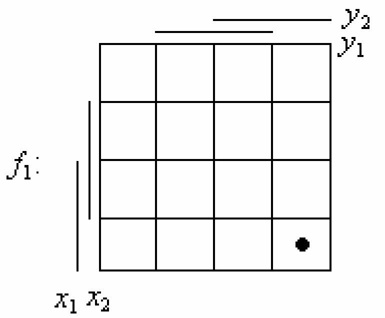
$$f_0 = 1$$
$$f_1\bar{f}_2 \vee \bar{f}_1 f_2 = 1$$

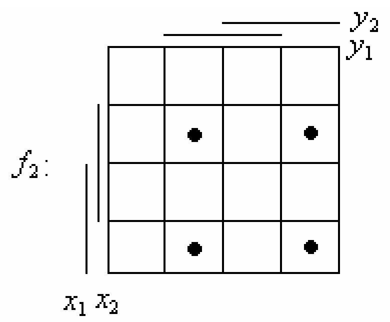
3. Составляем характеристическое уравнение:

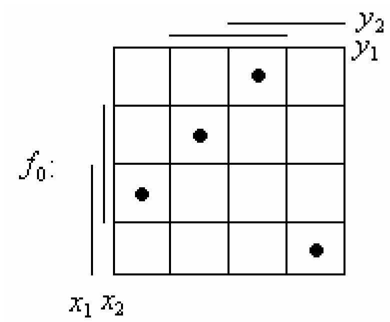
$$(f_1\bar{f}_2 \vee \bar{f}_1 f_2)f_0 = 1$$

4. Приведение левой части характеристического уравнения к ДНФ. Реализуем с помощью матричного представления логических функции:

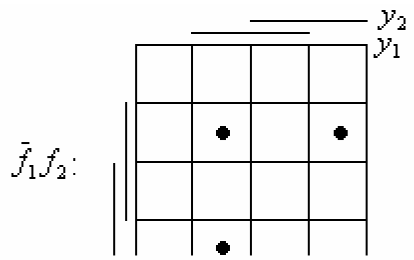
Из последней матрицы видно, что ДНФ содержит только одно слагаемое

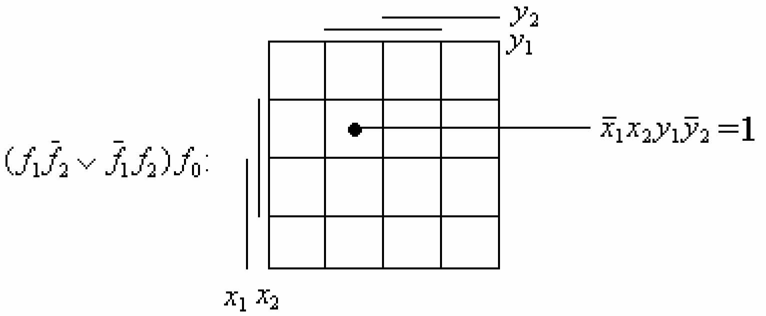






$f_1\bar{f}_2$:0





Решением уравнения $\bar{x}_1 x_2 y_1 \bar{y}_2 = 1$ является набор 0110, т.е. принцесса находится в комнате 2, а тигр в комнате 1.

5. Логика предикатов

5.1. Основные понятия и определения

Логика предикатов представляет собой развитие логики высказываний (см. рис. 4.1). С помощью формул логики высказываний, например алгебры логики, можно описать и исследовать структуру сложных высказываний, установить их истинность или ложность в зависимости от истинности или ложности входящих в нее простых высказываний. Для описания внутренней логической структуры простых высказываний (т.е. высказываний, не содержащих связок) используется понятие предиката.

Предикат - повествовательное предложение, содержащее *предметные переменные,* определенные на соответствующих множествах; при замене переменных конкретными значениями (элементами) этих множеств предложение обращается в высказывание, т.е. принимает значение "истинно" или "ложно". Обозначение предиката, содержащего *n* переменных (*n*-местного предиката): $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, при этом предполагается, что $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, ..., x_n \in M_n$.

В качестве примера рассмотрим три высказывания:

A - "Рубль - валюта России" ;

B - "Доллар - валюта России";

C - "Доллар - валюта США".

Высказывания *A* и С - истинны, а *B* - ложно. Если вместо конкретных наименований валюты в выражениях *A, B (*и, может быть, аналогичных им) подставить предметную переменную *x* и определить ее на множестве наименований денежных единиц* е {рубль, доллар, фунт стерлингов,..., марка}, то получим одноместный предикат P(x) - "x - валюта России".

Если в выражениях *A, B, C* (или аналогичных им) вместо конкретных наименований валюты и государства подставить соответственно переменные *x* и *y,* где *y* е {Россия, США, Англия,..., Германия}, получим двухместный предикат *P(x, y)* – «x - валюта y». Общим для этих предикатов является то, что, приписав значения входящим в них переменным из соответствующих областей определения, получим высказывания, обладающие свойством "истинно" или "ложно".

С помощью логических связок (и скобок) предикаты могут объединяться в разнообразные логические формулы - *предикатные формулы.* Исследование предикатных формул и способов установления их истинности является основным предметом *логики предикатов.* Логика предикатов вместе с входящей в нее логикой высказываний является основой логического языка математики. С ее помощью удается формализовать и точно исследовать основные методы построения математических теорий. Логика предикатов является важным средством построения развитых логических языков и формальных систем (формальных теорий).

Логика предикатов, как и логика высказываний, может быть построена в виде *алгебры логики* предикатов и *исчисления* предикатов. Здесь, как и в случае логики высказываний, для знакомства с основными понятиями логики предикатов воспользуемся языком алгебры, а не исчислений. Такой выбор обусловлен рядом причин:

• Исследование предикатных формул алгебры логики, выполнение их преобразований значительно проще, чем то же в исчислении предикатов.

• Ограничения в использовании аппарата алгебры обусловлены тем, что предметные области (множества, на которых определены предметные переменные предикатов) теоретически могут быть и бесконечными. В таких случаях стандартный метод проверки истинности предикатов и формул в целом, требующий подстановки всех возможных значений предметных переменных, не может быть осуществлен в строгом смысле (точнее, процедура вычисления истинности может быть бесконечной и не дать ответа ни за какое конечное время). Однако в практических ситуациях при описании реальных систем, процессов, явлений в качестве предметных областей, как правило, используются конечные множества. Поэтому проблема бесконечности в значительной степени теряет свою актуальность.

• Ниже, в иллюстративных примерах с бесконечными множествами, например множеством натуральных чисел, при необходимости проверки формул на истинность будем основываться на знаниях, полученных в других дисциплинах средней школы, например школьной арифметике.

n-местный предикат - это функция $P(x_1, x_2,..., x_n)$ от n переменных, принимающих значения из некоторых заданных предметных областей,так что $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$,..., $x_n \in M_n$, а функция P принимает два логических значения - "истинно" или "ложно" (обозначения: {И, Л}, {1, 0}). Таким образом, предикат $P(x_1, x_2,..., x_n)$ является функцией типа $P: M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to B$, где множества $M_1, M_2, ...,M_n$ называются *предметными областями* предиката; $x_1, x_2, ..., x_n$ - *предметными переменными* предиката; B - двоичное (бинарное) множество: B = {И, Л} или {1,0}. Если предикатные переменные принимают значения на одном множестве, то $P: M'' \to B$.

Соответствия между предикатами, отношениями и функциями:

1. Для любых M и n существует взаимно однозначное соответствие между n-местными отношениями R с M^n и n-местными предикатами $P(x_1, x_2,..., x_n)$, $P: M'' \to B$:

• каждому n-местному отношению R соответствует предикат $P(x_1, x_2,..., x_n)$ такой, что $P(a_1, a_2,..., a_n) = 1$, если и только если $P(a_1, a_2,..., a_n) \in R$;

• всякий предикат $P(x_1, x_2,..., x_n)$ определяет отношение R такое, что $(a_1, a_2,..., a_n) \in R$, если и только если $P(a_1, a_2,..., a_n) = 1$

При этом *R задает область истинности предиката P.*

2. Всякой функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$, $f: M^n \to M$, соответствует предикат $P(x_1, x_2,..., x_n, x_{n+1})$, $P: M^{n+1} \to B$, такой, что $P(a_1, a_2,..., a_n, a_{n+1}) = 1$, если и только если $f(a_1, a_2,..., a_n) = a_{n+1}$

Понятие предиката шире понятия функции (см. рис. 5.1), поэтому обратное соответствие (от (и+1)-местного предиката к и-местной функции) возможно не всегда, а только для таких предикатов P', *для* которых выполняется условие (связанное с требованием однозначности функции):

Если $P'(a_1, a_2,..., a_n, a_{n+1}) = 1$ {**R**} ,то для любого $a'_{n+1} \neq a_{n+1}$

$P'(a_1, a_2,..., a_n, a'_{n+1}) = 0$. (5.1)

Аналогичное соответствие (взаимно однозначное) имеется между подмножеством отношений $\{R'\} \subset \{R\}$ и множеством функций $\{f\}$. Для этого класса отношений выполняется аналогичное условие:

если $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \boldsymbol{R}'$, то для любого $a'_{n+1} \neq a_{n+1}$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \notin \boldsymbol{R}'. \qquad \textbf{(5.2)}$$

Выражение $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ будем понимать как *высказывание* "$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$" или "$P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ истинно", а выражение $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - как *переменное высказывание,* истинность которого определяется подстановкой элементов множества M вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. При этом будем также называть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *логической* (двоичной) *переменной,* в отличие от $x_1, x_2, \dots, x_n$ - *предметных* (нелогических) *переменных.*

Из предикатов как высказываний можно образовывать составные высказывания - *формулы логики предикатов.*

Для обозначения двухместных предикатов помимо префиксной записи $P(x_1, x_2)$ используется нередко инфиксная запись $x_1 P x_2$

Пример 1. Каким отношениям и функциям соответствуют следующие предикаты, определенные на множестве натуральных чисел:

1. Предикат тождества $E: N^2 \to B$:
   $E(a_1, a_2) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$
2. Предикат порядка $Q: N^2 \to B$: $Q(a_1, a_2) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 <= a_2$
3. Предикат делимости $D: N^2 \to B$:
   $D(a_1, a_2) = 1$ тогда и только тогда, когда a_1, делится на a_2
4. Предикат суммы $S: N^2 \to B$:
   $S(a_1, a_2, a_3) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + a_2 = a_3$.
5. Предикат произведения $П: N^3 \to B$:
   $П(a_1 a_2, a_3) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 \cdot a_2 = a_3$

> 1. Двухместному предикату тождества E - "$x_1 = x_2$" взаимно однозначно соответствуют:

а) двухместное отношение R_1 - "быть равным", $R_1 \subseteq N^2$: $(a_1, a_2) \in R_1$ тогда и только тогда, когда $E(a_1, a_2) = 1$;

б) одноместная функция (операция) тождества $f_1(x_1) = x_2$, а именно: $f_1(x) = x$, $f: N \to N$.

2. Двухместному предикату порядка Q – "$x_1 <= x_2$" взаимно однозначно соответствует двухместное отношение R_2 - "быть не больше", $R_2 \subseteq N^2$:

$(a_1, a_2) \in R_2$ тогда и только тогда, когда $Q(a_1, a_2) = 1$. Однако функции $f_1(x_1) = x_2$ для предиката порядка $Q(x_1, x_2)$ не существует, так как не выполнено условие (5.1): при одинаковых значениях переменной x_1, существует не единственное значение переменной x_2, при котором предикат Q истинен. Например, $Q(2,4) = 1$ и $Q(2, 6) = 1$, однако $4 \neq 6$.

3. Двухместному предикату делимости D- "x_1 делится на x_2" взаимно однозначно соответствует двухместное отношение R_3 - "делиться", $R_3 \subseteq N^2$:

$(a_1, a_2) \in R_3$ тогда и только тогда, когда $D(a_1, a_2) = 1$.

Однако функции $f(x_1) = x_2$ для предиката делимости $D(x_1, x_2)$ не существует, так как не выполнено условие (5.1), например $D(6,2) = 1$ и $D(6,3) = 1$, однако $2 \neq 3$.

4. Трехместному предикату суммы S - "$x_1 + x_2 = x_3$" взаимно однозначно соответствуют:

а) трехместное отношение $R_4 \subseteq N^3$: $(a_1, a_2, a_3) \in R_4$ тогда и только тогда, когда $S(a_1, a_2, a_3) = 1$;

б) двухместная функция (операция арифметики) - сложение $f_2(x_1, x_2) = x_3$, а именно: $x_1 + x_2 = x_3$.

5. Трехместному предикату произведения П - "$x_1 * x_2 = x_3$" взаимно однозначно соответствуют:

а) трехместное отношение $R_5 \subseteq N^3$: $(a_1, a_2, a_3) \in R_5$ тогда и только тогда, когда $П(x_1, x_2, x_3) = 1$;

б) двухместная функция (операция арифметики) - умножение $f_3(x_1, x_2) = x_3$, а именно: $x_1 \cdot x_2 = x_3$.

Взаимная однозначность соответствия между S и f_2 ($П$ и f_3) обусловлена выполнением для предиката S (/7) условия (5.1): для каждой системы элементов $a_1, a_2 \in N$ существует единственный элемент $a_3 \in N$ такой, что $S(a_1, a_2, a_3) = 1$ (соответственно для $П(a_1, a_2, a_3) = 1$).

Пример 2. Проиллюстрировать на примере предиката делимости, определенного в примере 1, понятия переменного высказывания, истинного высказывания, ложного высказывания.

>• Предикат делимости $D(x_1, x_2)$ - это переменное (двухместное) высказывание, предметной областью которого могут служить любые множества действительных чисел, например множество N.

$D(6, 2)$ - высказывание, значение которого есть истина, т.е. истинное высказывание.

$D(5, 2)$ - ложное высказывание.

$D(3, x)$, $D(x, 2)$ - переменные (одноместные)высказывания, истинность которых зависит от того, каким числом будет замещен символ x, но $D(a, 1)$ - истинное высказывание, так как для любого элемента $a \in N$ имеет место: $D(a, 1) = 1$ (любое натуральное число делится на единицу).

Пример 3. Записать формулой логики предикатов предложение, отражающее транзитивное свойство делимости целых чисел.

>• Составное высказывание (предложение), являющееся формулировкой свойства транзитивности отношения делимости целых чисел:

"если а делится на b и b делится на c, то a делится на c", состоит из трех простых высказываний $D(a, b)$, $D(b, c)$ и $D(a, c)$. Следовательно, транзитивное свойство делимости можно записать в виде составного высказывания (логической формулы):

"если $D(a, b)$ и $D(b, c)$, то $D(a, c)$" или

$$(D(a, b) \,\&\, (D(b,c)) \to D(a, c).$$

Пример 4. Дать словесные формулировки следующих составных высказываний (предложений):

1. $S(a, b, c)$ & $D(a, d)$ & $D(b, d) \to D(c, d)$, где S и D - предикаты суммы и делимости соответственно (см. пример 1);

2. $|D(a,b)$ &$|S(a,b,c)$

3. $S(a, b, c) \sim S(b, a, c)$;

4. $P_1 \sim P_2$,

где P_1 - предикат "число $3n$ является четным"; P_2 - предикат "число n является четным".

Примечание. Здесь и далее для обозначения связки (логической операции) отрицания будем использовать символ |, принятый в логике предикатов.

>• 1. "Если каждое слагаемое a, b суммы целых чисел делится на некоторое число d, то и сумма c делится на это

• $S(a, b, c)$ & $D(a, d)$ & $D(b, d) \to D(c, d)$.

2. "Число a не делится на число b, и неверно, что их сумма равна c":

$$|D(a,b) \& \ |S(a,b,c). \ b$$

3. "От перестановки мест слагаемых a и b сумма c не меняется" - свойство коммутативности арифметической операции сложения:

$$S(a, b, c) \sim S(b, a, c);n$$

4. "Число $3n$ является четным тогда и только тогда, когда n является четным":

$$P_1 \sim P_2$$

Эквивалентность может быть выражена и другими словесными формулировками, в том числе:

- "из того что P_1, следует, что P_2, и обратно";
- "из того, что P_2, следует, что P_1, и обратно";
- "условия P_1, необходимо и достаточно для того, чтобы P_2";
- "P_2 необходимо и достаточно, чтобы P_1";
- " P_1, если и только если P_2";
- "P_2, если и только если P_1";
- "условия P_1 и P_2 эквивалентны";
- "P_2 тогда и только тогда, когда P_1" и др.

Упражнения

1. Проиллюстрировать на примере предиката порядка, определенного в примере 1, понятия истинного, ложного и переменного высказываний.

2. Записать предикатной формулой предложение, которое выражает для произвольных $a,b,c \in N$ в модели

$$N=(N; S, \Pi, E),$$

называемой в логике предикатов *арифметикой натуральных чисел,* где N - множество натуральных чисел и S, Π, E -предикаты суммы, произведения, равенства соответственно, определенные в примере 1:

а) коммутативность умножения;
б) ассоциативность сложения;
в) ассоциативность умножения;
г) дистрибутивность слева умножения относительно сложения;
д) дистрибутивность справа умножения относительно сложения;
е) транзитивность равенства.

5..2. Кванторы

Важную роль в логических представлениях систем, процессов, явлений с использованием предикатов играют собственные связки логики предикатов: общности $\forall$ и существования $\exists$.

Пусть *P(x)* - предикат, определенный на *M*, т.е. $x \in M$.

Высказывание "для всех *x* из *M* *P(x)* истинно" обозначается $\forall x\ P(x)$; знак $\forall x$ называется *квантором общности.* Высказывание "существует такой *x* из *M*, что P(x) истинно" обозначается $\exists x\ P(x)$; знак $\exists x$ называется *квантором существования.*

Переход от *P(x)* к $\forall x\ P(x)$ или $\exists x\ P(x)$ называется *связыванием* переменной x, или *навешиванием квантора* на переменную *x* (или на предикат P), или *квантификацией* переменной x.

Переменная, на которую навешен квантор, называется *связанной,* несвязанная квантором переменная называется *свободной.*

Выражения $\forall x\ P(x)$ и $\exists x\ P(x)$ не зависят от *x* и при фиксированных *P* и *M* имеют вполне определенные значения, представляя вполне конкретные высказывания относительно всех *x* предметной области *M.*

Навешивать кванторы можно и на многоместные предикаты и вообще на любые логические выражения. Выражение, на которое навешивается квантор $\forall x$ или $\exists x$, называется *областью действия квантора;* все вхождения переменной *x* в это выражение являются связанными.

Пример 1. Пусть *x* определен на множестве людей *M*, а *P(x)* - предикат "x - смертен". Дать словесную формулировку предикатной формулы $\forall x\ P(x)$.

>• Выражение $\forall x\ P(x)$ означает "все люди смертны". Оно не зависит от переменной *x,* а характеризует всех людей в целом, т.е. выражает суждение относительно всех *x* множества *M.*

Пример 2. Пусть P(x) - предикат "x - четное число", определенный на множестве *M.* Дать словесную формулировку высказыванию $\exists x\ P(x)$, определить его истинность.

>• Исходный предикат *P(x)* - "x - четное число" является переменным высказыванием: при подстановке конкретного числа вместо переменной *x* он превращается в простое высказывание, являющееся истинным или ложным, например при подстановке числа 5 превращается в высказывание "5 -четное число", являющееся ложным. Высказывание $\exists x$ P(x) означает "в *M* существует четное число". Поскольку множество *M,* на котором задан предикат *P(x),* не определено в условии (в таком случае говорят, что задача сформулирована не вполне корректно), доопределим *M.*

Пусть предикат *P(x)* определен на множестве натуральных чисел *N*, т.е. $x \in N$, тогда высказывание $\exists x\ P(x)$ - истинно. В общем случае высказывание $\exists x\ P(x)$ истинно на любом множестве *M,* содержащем хотя бы одно четное число, и ложно на любом множестве нечетных чисел.

Пример 3. Пусть *N(x)* - предикат "x - натуральное число". Рассмотреть варианты навешивания кванторов. Проинтерпретировать полученные высказывания и определить их истинность.

>• $\forall x N(x)$ - высказывание "все числа - натуральные" истинно на любом множестве натуральных чисел и ложно, если *M* содержит хотя бы одно ненатуральное число, например целое отрицательное;

$\exists x\ N(x)$ - высказывание "существует натуральное x" истинно на любом множестве *M,* содержащем хотя бы одно натуральное число, и ложно - в противном случае.

Пример 4. Записать предикатной формулой предложение "Любой человек имеет отца".

>• Для построения предикатной формулы используем два предиката "x - человек" и "y - отец x" и для удобства восприятия обозначим их соответственно: ЧЕЛОВЕК (x) и ОТЕЦ (y, x). Тогда предложение "Любой человек имеет отца" в предикатной форме имеет вид:

$$\forall x\ (\text{ЧЕЛОВЕК}\ (x) \to \exists y\ \text{ОТЕЦ}\ (y, x)).$$

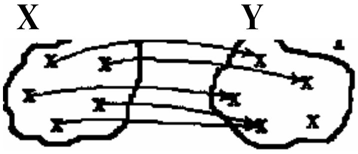
Заметим, что если предикат ОТЕЦ *(y, x)* определен на множестве людей, то выражение "любой человек имеет отца" можно записать проще:

$$\forall x\ \exists y\ \text{ОТЕЦ}\ (y,x).$$

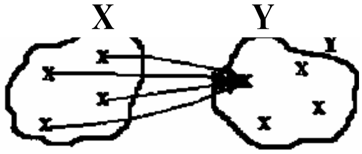
Пример 5. Пусть предикат *P(x, y)* описывает отношение "x любит У на множестве людей. Рассмотреть все варианты навешивания кванторов на обе переменные. Дать словесную интерпретацию полученных высказываний.

>• Обозначим предикат "x любит *y*" через ЛЮБИТ (x, *y*). Предложения, соответствующие различным вариантам навешивания кванторов, проиллюстрированы на рис. 5.2, где x и y показаны на разных множествах, что является услов-

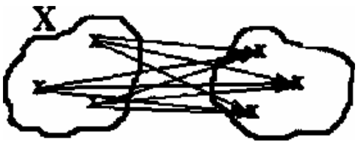
а) $\forall x\ \exists y$ **ЛЮБИТ (x, y)**



б) $\exists y\ \forall x$ **ЛЮБИТ (x,y)**

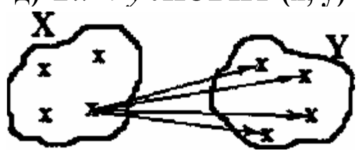


в) $\forall x\ \forall y$ **ЛЮБИТ (x, y)**

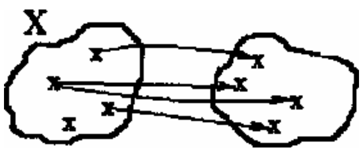


г) $\exists x \exists y$ **ЛЮБИТ (x, y)**

д) $\exists x\ \forall y$ **ЛЮБИТ (x, y)**



$\forall y \exists x$ **ЛЮБИТ (x,**



ностью и предпринято только для объяснения смысла предложений (реальные множества переменных x и y, очевидно, должны совпадать):

$\forall x\ \exists y$ ЛЮБИТ *(x, y)* - "для любого человека x существует человеку, которого он любит" (см. рис. 5.2, а) или "всякий человек кого-нибудь любит";

$\exists y \forall x$ ЛЮБИТ *(x,y)* - "существует такой человек y, что его любят все x" (см. рис. 5.2, б);

$\forall$ x $\forall$ y ЛЮБИТ *(x, y)* - "все люди любят всех людей" (рис. 5.2, в);

$\exists x \exists y$ ЛЮБИТ *(x,y)* - "существует человек, который кого-то любит" (рис. 5.2, г);

$\exists x\ \forall$ y ЛЮБИТ *(x,y)* - "существует человек, который любит всех людей" (рис. 5.2, д);

$\forall$ y$\exists x$ ЛЮБИТ *(x, y)* - "для всякого человека существует человек, который его любит" или "каждого человека кто-то любит" (рис. 5.2, е).

Из приведенного выше можно сделать вывод о том, что перестановка кванторов общности и существования меняет смысл высказывания, т.е. кванторы общности и существования не обладают в общем случае свойством коммутативности.

Пример 6. Пусть $Q(x, y)$ - предикат порядка "$x \leq y$". Рассмотреть различные варианты квалификации его переменных. Определить истинность получаемых выражений для разных случаев интерпретации области определения M предиката, $X, y \in M$.

>• $\forall x\ (x \leq y)$ - одноместный предикат (переменное высказывание) от y: "для любого x имеет место $x \leq y$" или "любое число не больше y'. Если M- бесконечное множество неотрицательных целых чисел, то этот предикат ложен; на любом конечном множестве натуральных чисел предикат истинен в единственной точке, представляющей наибольшее число в M, например для $M = \{1,2,3,...,99\}$ предикат истинен в единственной точке $y = 99$. При подстановке любого другого .у из М этот предикат обращается в ложное высказывание;

$\forall y\ (x \leq y)$ - одноместный предикат от x: "для любого y имеет место $x \leq y$" или "любое число из M не меньше x". Если M - множество неотрицательных целых чисел, то этот предикат истинен в единственной точке x = О и ложен при подстановке вместо д: любого другого числа из M;

$\exists x\ (x \leq y)$ - одноместный предикат от x: "существует число в M, которое не больше y". Если M- любое непустое множество чисел, то данный предикат превращается в истинное высказывание при подстановке какого-либо y из M. Например, если $5 \in M$, то при $y = 5$ получаем $\exists x\ (x \leq 5)$ – истинное высказывание;

$\exists y\ (x \leq y)$~ одноместный предикат от x: "существует число в M, которое не меньше x". На любом непустом множестве М чисел данный предикат превращается в истинное высказывание при подстановке какого-либо x из M,. Например, если $5 \in M$, то при $x = 5$ получаем $\exists x\ (5 \leq y)$ - истинное высказывание;

$\forall x\ \forall y\ (x \leq y)$ - высказывание "для любых x и y выполняется $x \leq y$" ложно на любом множестве, состоящем более чем из одного элемента, и истинно на множестве с одним элементом;

$\exists x\ \exists y\ (x \leq y)$ - высказывание "существуют такие x и y, что $x \leq y$ " истинно на любом непустом множестве;

$\forall x\ \exists y\ (x \leq y)$ - высказывание "для любого числа x существует число y, не меньшее, чем x" истинно на любом непустом множестве (ввиду рефлексивности отношения $\leq$);

$\exists y \forall x\ (x \leq y)$ - высказывание "существует y такой, что для любого x $x<y$" утверждает, что в M имеется единственный максимальный элемент. Оно истинно на любом конечном множестве целых чисел, но ложно, например, на множестве векторов длины n, из которого удален вектор, состоящий из одних единиц;

$\exists x \forall y\ (x \leq y)$- высказывание "существует x такой, что он не больше любого у” утверждает, что в M имеется единственный минимальный элемент. Оно истинно на любом конечном множестве целых чисел, но ложно, например, на множестве векторов длины n, из которого удален вектор, состоящий из одних нулей;

$\forall y \exists x\ (x \leq y)$ - высказывание "для любого числа y существует число x, не большее, чем y " истинно на любом непустом множестве (ввиду рефлексивности отношения $\leq$).

Отметим здесь еще раз, что в общем случае перестановка кванторов общности и существования меняет смысл высказывания и условия его истинности.

Пример 7. Рассмотреть все возможные варианты навешивания кванторов на предикат $D(x, y)$ - "x делится на y", определенный на множестве натуральных чисел (без нуля) N. Дать словесные формулировки полученных высказываний и определить их истинность.

>• Операции навешивания кванторов приводят к следующим формулам:

$\forall x\ \underline{D(x, y)}$ - одноместный предикат (переменное высказывание) "всякое натуральное число из N делится на натуральное число y из А/"; истинный только для одного значения свободной переменной $y = 1$;

$\exists x\, D(x, y)$ - переменное высказывание "существует натуральное число, которое делится на/', истинное для любого значения свободной переменной *у,* взятой из множества *N;*

$\forall y D(x, y)$ - переменное высказывание "натуральное число х делится на всякое натуральное число/', ложное для любого значения свободной переменной л:, взятой из множества *N;*

$\exists y\, D(x, y)$ - переменное высказывание "существует натуральное число, которое делит натуральное число *x",* истинное для любого значения свободной переменной *х ;*

$\forall x\ \forall y\, D(x, y);\ \forall y\ \forall x\, D(x, y)$ - высказывания "для любых двух натуральных чисел имеет место делимость одного на другое" ложные;

$\exists x\ \exists y\ D(x, y);\ \exists y\ \exists x\ D(x, y)$ - высказывания "существуют такие два натуральных числа, что первое делится на второе", истинны;

$\exists x\ \forall y\, D(x, y)$ - высказывание "существует натуральное число, которое делится на любое натуральное", ложное;

$\forall y\ \exists x\, D(x, y)$ - высказывание "для всякого натурального числа найдется такое натуральное, которое делится на первое", истинное;

$\forall x\ \exists y\ D(x, y)$ - высказывание "для всякого натурального существует такое натуральное число, на которое оно делится", истинное;

$\exists y\ \forall x\ D(x\ y)$ - высказывание "существует натуральное число, которое является делителем всякого натурального числа", истинное (таким делителем является единица).

Пример 8. Какой смысл имеют предикатные формулы:

а) $\forall x\ \forall y\ \exists x\ \Pi(x, y, z)$;

б) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall u\ (\Pi(x, y, z)\ \&\ \Pi(x, y, u) \to E(z, u))$, где *П, Е* - предикаты произведения и равенства, определенные на *N* ? Истинны ли эти формулы? Привести примеры наборов переменных, иллюстрирующие заключение относительно истинности или ложности формул.

>• а) Формула $\forall y\ \forall z\ \exists x\ П(x, y, z)$ - высказывание "для всех натуральных чисел .у и z существует натуральное число x такое, что x-y = z " является ложным. Например, $П(x, 5,2)$ не выполняется ни при каком натуральном x, т.е. не для любых y, z существует x такое, что x-y = z, следовательно, высказывание, заданное формулой $\forall y\ \forall z\ \exists x\ П(x, y, z)$, - ложно.

б) $\forall x \forall y \forall z \forall u$ ($П(x, y, z)$ & $П(x, y, u)$ -> $E(z, u)$), - высказывание, отражающее однозначность операции умножения "для любых натуральных чисел x, y, z, u из того, что x-y=z и x-y = u, следует, что z = u" истинно. Для подтверждения этого заключения рассмотрим варианты наборов чисел, значения предикатов и формулы в целом на этих наборах:

1) (2,3,6,6): $П$(2,3,6) & $П$(2,3,6) -> E(6,6) = 1 & 1 -> 1 = 1 -> 1 = 1;
2) (2,3,5,5): $П$(2,3,5) & $П$(2,3, 5) -> E(5, 5) = 0 & 0 -> 1 = 0 -> 1 = 1;
3) (2,3,3,6): $П$(2,3,3) & $П$(2,3,6) -> E (3,6) = 0&1 ->0 = 0 ->0=1;
4) (2,3,3,5): $П$ (2,3,3) & $П$ (2,3,5) -> E (3,5) = 0 & 0 ->0 = 0 -> 0=1;
5) (2,3,6,5): $П$ (2,3,6) & $П$ (2,3,5) -> E (6,5)=1 & 0 ->0 =0 -> 0=1.

Очевидно, нет таких натуральных чисел x, y, произведение которых было бы не единственно, т.е. не существует набора чисел (a ,b, c, d), на котором были бы истинны предикаты $П (a, b, c)$ и $П(a, b , d)$ и одновременно ложен предикат $E(c, d)$, следовательно, высказывание $\forall x \forall y \forall z \forall u$ ($П(x, y, z)$ & $П(x, y, u)$ -> $E(z, u)$) истинно.

Упражнения

1. Рассмотреть варианты навешивания кванторов на предикат $P(x)$, определенный на множестве натуральных чисел с нулем N_0. Дать словесную формулировку исходных и полученных высказываний и определить их истинность, если:

а) $P(x) = \exists y\ S(y, y, x)$; в) $P(x) = \forall y\ П(x, y, y)$;
б) $P(x) = \exists y\ П(y, y, x)$; г) $P(x) = \forall y\ S(x, y, y)$.

Примечание. S и $П$- предикаты суммы и произведения соответственно.

2. Пусть $Q(x, y)$ - предикат порядка "x $\leq y$, определенный на конечном множестве натуральных чисел M = {0,1,2, 3,..., 9}. Рассмотреть различные варианты квантификации его переменных. Определить истинность получаемых выражений.

3. Пусть предикат $P(x, y)$ задан на множестве M= {a, b, c} таблицей (табл. 5.1). Определить истинность следующих формул:

а) $\forall x P(x,a)$, $\exists x P(x,a)$, $\forall y P(a,y)$, $\exists y P(a,y)$;
б) $\forall x P(x,b)$, $\exists x P(x, b)$;), $\forall y P(b,y)$, $\exists\ y P(b,y)$;
в) $\forall x \forall y P(x, y)$, $\forall x \exists y P(x, y)$, $\forall y \exists x P(x, y)$
$\exists y \forall x P(x, y)$
г) $\forall y \forall x P(x, y)$, $\exists x \forall y P(x, y)$, $\exists x \exists y P(x, y)$,
$\exists y \exists x P(x, y)$,

x y	*P(x,y*
aa	0
ab	1
ac	1
ba	0
bb	1
be	1
c a	0
cb	1
ee	1

4. Пусть S(x,y, z) и П(x,y, z) - предикаты суммы и произведения, определенные:

а) на множестве Z всех целых чисел;
б) на множестве N_0 натуральных чисел с нулем. Какой смысл имеют формулы:

1) $\exists y\ \forall x\ S(x, y, z)$; 3) $\forall z\ \forall x\ \exists y\ S(x, y, z)$;
2) $\exists y\ \forall x\ П(x, y, z)$; 4) $\forall z\ \forall x\ \exists y\ П(x, y, z)$?

На каком из множеств N_0 или Z они истинны?

5. Рассмотреть все варианты навешивания кванторов на предикат $P(x, y)$, описать в словесной форме полученные высказывания и определить их истинность, если:

1. $P(x, y)$, определенный на конечном множестве натуральных чисел $N` \subset N$, означает:
а) "x делит y" (или, что то же, "x является делителем y");
б) "x имеет общий делитель с y";
в) "x, y делятся на 3";

г) "$x \geq y$";
д) "x, y - четные числа";
е) "$x < y$".
2. $P(x, y)$, определенный на системе множеств $\beta(U)$, означает:
а) "x является частью y";
б) "x пересекается с y".
3. $P(x, y)$, определенный на множестве людей, означает:
а) "x является родителем y";
б) "x живет в одном городе с y";
в) "x является родственником y";
г) "x является сыном y";
д) "x равнодушен к y".

6. Выполнить задание упражнения 2 в § 5.1 для общего случая переменных $x, y, z \in N$, используя кванторы общности и/или существования.

§ 5.3. Выполнимость и истинность

При логической интерпретации формул логики предикатов возможны три основные ситуации:

1. Формула $F(x_1,..., x_n)$ называется *выполнимой в области M,* если в этой области для формулы F существует такая подстановка констант $a_1,..., a_n$ вместо переменных $x_1,..., x_n$, что $F(a_1 ..., a_n)$ становится истинным высказыванием. Формула называется просто *выполнимой,* если существует область M, где F выполнима.

2. Формула $F(x_1,..., x_n)$ называется *тождественно истинной в области M,* если F выполнима в M при любых подстановках констант. Формула F называется *тождественно истинной* (ТИ), или *общезначимой,* если она тождественно истинна в любых M.

3. Формула F называется *тождественно ложной в области M,* если F невыполнима в М, и *тождественно ложной* (ТЛ), или *противоречивой,* если F невыполнима ни в каких M.

Моделью ***M*** в логике предикатов называют множество M вместе с заданной на нем совокупностью предикатов $\Sigma=\{P_1,..., P_k\}$:

$$\boldsymbol{M}=(M;P_1,\ldots,P_k)$$

где M- основное множество модели $\boldsymbol{M}$; $\Sigma=\{P_1,..., P_k\}$ -сигнатура модели $\boldsymbol{M}$ Например, сигнатура модели $\boldsymbol{N} = \{N;S, \Pi, E\}$, называемой арифметикой натуральных чисел, включает предикаты суммы S, произведения Π и равенства E. Аналогично предыдущему определяются формулы, выполнимые на модели $\boldsymbol{M}$, тождественно истинные (ТИ-формулы) и тождественно ложные (ТЛ-формулы) на модели $\boldsymbol{M}$.

Пример 1. Определить истинность, ложность либо выполнимость на модели $\boldsymbol{N}= \{N;S, \Pi, E\}$ следующих формул: 1. $(\Pi(x,y, z) \& \Pi (x,y, u)) \to E(z, u)$;

2. $\exists y\, \Pi(x,x,y)$;

3. $\exists x\, \Pi(x,x,y)$.

>• 1. Предикатная формула $(\Pi (x, y, z) \& \Pi (x, y, u)) \to E(z, u)$ -ТИ-формула на модели $\boldsymbol{N}$ в силу единственности значения произведения чисел из N. Действительно, для любых подстановок констант вместо переменных x, y, z, u, например $a,b,c,d \in N$, формула $(\Pi (a, b, c) \& \Pi(a, b, d)) \to E(c, d)$ имеет значение "истинно" (см. поясняющие примеры различных подстановок констант вместо переменных x, y, z, u в примере 8 §5.2).

2. Формула $\exists y\ \Pi(x,x,y)$-ТИ-формула на модели N, выражающая существование натурального квадрата натурального числа x. Действительно, при подстановке любой константы вместо свободной переменной x формула $\exists y\, \Pi(x, x, y)$ истинна.

3. Формула $\exists x\ \Pi(x,x,y)$ выполнима на модели N: "существует натуральное значение квадратного корня для натурального y из N" или "$\sqrt{y}$ -натуральное число". Очевидно, формула истинна при подстановках вместо свободной переменной y чисел 0,1,4,9,16,... и

ложна при подстановке 2,3,5,6,7,8,10,...; например, $\exists x\Pi(x,x,4)$ -истинна,а $\exists x\Pi(x,x,5)$-ложна.

Пример 2. Определить истинность, ложность либо выполнимость следующих формул:

а) $\forall x\ P(x,.y,x)$;

б) $\exists x\ P(x,y) \to \forall x\ P(x, y)$;

в) $\forall x(P(x) \vee |P(x))$;

г) $\exists$ x (P(x) & |P(x));

д) $|\forall x\ P(x) \to \exists xP(x)$.

>• *а)*| $\forall x\ P(x, y, x)$ - выполнимая формула. Действительно, формула выполнима в области N_0 натуральных чисел с нулем (например, на модели W = $(N_0; S, \Pi, E)$ - арифметики натуральных чисел). Пусть, например, *P* - предикат суммы 5. Тогда для формулы $\forall x\ S(x, y, x)$ существует подстановка константы вместо свободной переменной y = 0, при которой эта формула становится истинной: $\forall x\ S(x, 0, x)$. Если P проинтерпретировать предикатом произведения П, то такой (тоже единственной) подстановкой константы является y=1: $\forall x\ \Pi(x, 1, x)$ - истинно. Таким образом, существует область N_0 (модель **N**), в которой формула $\forall x\ P(x, y, x)$ выполнима, а значит, она просто выполнима;

б) $\exists x\ P(x, y) \to \forall x\ P(x, y)$ - выполнимая формула. Она является ТИ-формулой в области M_1, состоящей из одного элемента, однако не является ТИ-формулой во всех областях. Например, она лишь выполнима в области M_2 с N_0, являющейся конечным множеством натуральных чисел. Пусть D(x, y) есть предикат порядка Q(x, y) - "x <= y". Тогда формула $\exists\ x\ Q(x, y) \to \forall xQ(x,y)$ истинна при подстановке

$y = a_{max} \in M_2 : \exists x\ Q(x, a_{max}) \to \forall x\ Q(x, a_{max})$

становке других констант $a \neq a_{max}$ вместо свободной переменной y.

Очевидно также, что данная формула с предикатом порядка, но определенном на множестве M_3 всех двоичных векторов фиксированной длины п без вектора, состоящего из одних единиц, является ТЛ-формулой в области M_3.

Таким образом, для формулы $\exists x\ D(x, y) \to \forall x\ P(x, y)$ существуют области, в которых она является ТИ-формулой, ТЛ-формулой, а также выполнимой, т.е. она является просто выполнимой;

в)$\forall x\ (P(x) \vee |P(x))$ - ТИ-формула, так как она истинна в любой области М. Действительно, при подстановке любой константы а любой области М предикат Да) либо истинен, т.е. P(a) = 1, тогда |P(a) = 0 и P(a) v | P(a) = 1 v 0 = 1 (истинно), либо ложен, т.е. P(a) = 0, тогда | P(a) = 1 и P(a) v | P(a) = 0 v 1 = 1 (истинно);

г) $\exists$ x (P(x) & | P(x)) - ТЛ-формула, поскольку она ложна в любой области М. Пояснения этого заключения аналогичны предыдущему в);

д)| $\forall x\ P(x) \to \exists\ x\ |\ P(x)$ - ТИ-формула, так как она истинна в любой области М. Формула выражает очевидно истинное для любой М высказывание "если не для любого $a \in M$ P(a) истинно, то существует а, для которого P(a) ложно, т.е. ” |P(a) истинно”. Левая и правая части формулы принимают одинаковые значения при подстановке константы $a \in M$, но 0 -> 0 = 1 и 1 -> 1 = 1, т.е. формула | $\forall x\ P(x) \to \exists x\ |P(x)$ всегда истинна.

Пример 3. Доказать истинность формулы: $\forall x((P(x)\ \&\ Q(x) \to P(x))$.

>• Предположим противное. Пусть формула ложна, т.е. не для всех x (P(x) & Q(x)) -> P(x) истинно. Тогда существует константа $a \in M$, подстановка которой в формулу сделает ее ложной, т.е. (P(a) & Q(a)) -> P(a) = 0.

Это возможно лишь тогда, когда P(a) = 0 (правая часть импликации), а P(a) & Q(a) = 1 (левая часть), но последнее требует, чтобы P(a) = 1 и Q(a) = 1 .

Таким образом, требуется, чтобы существовала константа а в области М такая, что P(a) = 0 и Да) = 1, что невозможно.

Принятое предположение относительно ложности формулы привело к противоречию, поэтому оно неверно и, следовательно, формула $\forall x\ ((P(x)\ \&\ Q(x)) \to P(x))$ - истинна.

Упражнения

1. Определить истинность, ложность либо выполнимость в области N_0 натуральных чисел следующих формул:

а) $\forall x \forall y \forall z \forall u$ ((S(x, y, z) & S(x, y, u))-> E(z, u));

б) (S(x, y, z) & S(y, x, «)) -> E(z, и);
в) $\forall x \forall y \forall z \forall$ U ((П(x, y, z) & П(y, x, и)) -> E(z,));
г) $\exists$ y (П(x, x, y) -> S(x, x, y));
д) $\forall x \forall y \forall z$ ((П(x, y, z) & | E(x,.y, y) -> S(x, y, z));
е) $\exists$ y ((S(x, y, z) v E(x, z, y) -> Q(x, z));
ж) Q(x, z) -> ($\exists$ y S(x, y, z) v E(x, z));
и) $\exists$ x S(x, y, y)
к) $\exists$ x П(y, x, y) ->$\exists$ x S(x,x,y);

Примечание: S, *П, E, Q, D* - соответственно предикаты суммы, произведения, равенства, порядка, делимости.

2. Показать, что следующие формулы являются ТИ-формулами:
а) *P(x1г ... , xn)* -> $\exists x_1, \dots \exists x_n$и $P(x_1, \dots , x_n)$;
б) $\forall x_1, .. \forall x_n P(x_1, \dots , x_n)$ -> $P(x_1, \dots ,x_n)$.
3. Доказать методом от противного истинность формул: а) $\forall$ x ((P(x) -> Q(x)) v (Q(x) -> P(x)));
б) $\forall$ x (P(x) -> Q(x)) v (P(x) -> Q(*)));
в) $\forall$ x (P(x) -> (Q(x) -> (P(x) & Q(x))));
г) $\forall$ x ((]|P(x) ->|Q(x))->(Q(x)->P(x)));

е) $\forall$ x ((Q(x) -> R(x)) -> ((P(x) v Q(x))->(P(x)->R(x))));
ж) $\forall$ x (((P(x) ->Q(x))->P(x)) ->P(x));
3) $\forall$ x (|P(x)->(P(x)->Q(x)))

§ 5.4. Эквивалентные соотношения. Префиксная нормальная форма

Формулы называются *эквивалентными,* если при любых подстановках констант они принимают одинаковые значения. В частности, все ТИ-формулы (и все ТЛ-формулы) эквивалентны. Если формулы F_1 и F_2 эквивалентны, $F_1 \sim F_2$ - ТИ-формулы.

Множество ТИ-формул логики предикатов входит в любую теорию, исследование этого множества - важная цель логики предикатов. При этом выделяются две проблемы:

1) получение ТИ-формул (проблема построения *порождающей процедуры* для множества ТИ-формул);
2) проверка формулы на истинность *(проблемаразрешающей процедуры).*

В отличие от логики (алгебры) высказываний, где есть стандартная разрешающая процедура (вычисление формул на наборах значений переменных), с помощью которой очевидна организация порождающей процедуры построения множества ТИ-формул, в логике предикатов прямой перебор всех значений переменных может быть невозможен, если предметные переменные имеют бесконечные области определения.

Поэтому в логике предикатов используются различные косвенные приемы, в том числе *эквивалентные соотношения,* позволяющие выполнить корректные преобразования предикатных формул. В логике (алгебре) предикатов справедливы все эквивалентные соотношения логики (алгебры) высказываний, а также собственные эквивалентные соотношения, включающие связки $\forall$ и $\exists$ (ниже под *Y* будем понимать переменное высказывание или формулу, не содержащую *x):*

|$\exists$ *xP(x)* ~ $\forall$ x| P(x). (5.3)

|$\forall$ *x P*(x) ~ $\exists$ x |*P(x).* (5.4)

$\forall x (P_1(x) \& P_2(x)) \sim (\forall x />,(*) \& V^* P_2(x)).$ (5.5)

$\exists * (P_1(x) \vee P_2(x)) \sim (\exists x P_1(x) \vee \exists x P_2(x)).$ (5.6)

$\forall x \forall y P(x, y) \sim \forall y \forall x P(x, y).$ (5.7)

$\exists x \exists y P(x, y) \sim \exists y \exists x P(x, y).$ (5.8)

$\forall x(P(x) \& Y) \sim (\forall x P(x) \& Y).$ (5.9)

$\forall x(P(x) \vee Y) \sim (\forall x P(x) \vee Y).$ (5.10)

$\exists x(P(x) \& Y) \sim (\exists x P(x) \& Y).$ (5.11)

$\exists x(P(x) \vee Y) \sim (\exists x P(x) \vee Y).$ (5.12)

Используя соотношения (5.3), (5.4), можно выразить один квантор через другой. Соотношения (5.5) и (5.6) показывают дистрибутивность квантора общности $\forall x$ относительно конъюнкции & и квантора существования $\exists x$ относительно дизъюнкции v. Если в этих выражениях поменять местами кванторы $\forall x$ и $\exists x$, то получим соотношения, верные лишь в одну сторону (см. пример 1):

$\exists x(P_1(x) \& P_2(x)) \to (\exists x P_1(x) \& \exists x P_2(x));$ $(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \to \forall x(P_1(x) \& P_2(x)).$

Поэтому в таких случаях эквивалентных преобразований применяют переименование переменной x в одном из предикатов на новую переменную:

$(\exists x P_1(x) \& \exists y P_2(y)) \sim \exists x \exists y (P_1(x) \& P_2(y));$

Соотношения (5.7), (5.8) отражают в некотором смысле коммутативность одноименных кванторов (возможность менять местами одноименные кванторы), что несправедливо для разноименных кванторов, например $\forall x \exists y P(x, y)$ и $\exists y \forall x P(x, y)$ не эквивалентны. Соотношения (5.9) - (5.12) позволяют формулу, не содержащую переменную *x,* выносить за пределы действия квантора, связывающего эту переменную. Указанных соотношений (5.3) - (5.12), а также эквивалентных соотношений логики (алгебры) высказываний достаточно для выполнения преобразований формул логики (алгебры) предикатов.

Как и в логике высказываний, в логике предикатов существуют эквивалентные нормальные формы представления любых предикатных формул, в том числе префиксная (или пренексная) нормальная форма.

Префиксной нормальной формой (ПНФ) называется формула, имеющая вид:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n F$$

где $Q_1 x_1, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n$ - кванторы; F-формула, не имеющая кванторов, с операциями $\{\&, \vee, |\}$. В логике предикатов для любой формулы существует эквивалентная ей префиксная нормальная форма.

Процедура получения ПНФ:

1. Используя формулы

$$P_1 \sim P_2 = (P_1 \to P_2) \& (P_2 \to P_1), \quad (5.13)$$

$$P_1 \to P_2 = |P_1 \vee P_2, \quad (5.14)$$

заменить операции ->, ~ на &, v, |.

2. Воспользовавшись выражениями (5.3), (5.4), а также правилом двойного отрицания и правилами де Моргана

$$||P = P \quad (5.15)$$

$$|(P_1 \vee P_2) = |P_1 \& |P_2 \quad (5.16)$$

$$|(P_1 \& P_2) = |P_1 \vee |P_2 \quad (5.17)$$

представить предикатную формулу таким образом, чтобы символы отрицания были расположены непосредственно перед символами предикатов.

3. Для формул, содержащих подформулы вида $\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)$, $\exists x P_1(x)$

$\& \exists x P_2(x)$,

ввести новые переменные, позволяющие использовать соотношения (5.9) - (5.12).

4. С помощью формул (5.5) - (5.12) получить формулы в виде ПНФ.

Пример 1. В соответствии с соотношениями (5.5) и (5.6) квантор общности обладает свойством дистрибутивности относительно конъюнкции, а квантор существования - относительно дизъюнкции. Показать, что если в указанных формулах поменять местами кванторы $\forall x$ и $\exists x$, то полученные при этом соотношения будут верны лишь в одну сторону:

$$\exists x (P_1(x) \& P_2(x)) \text{-}^{\wedge}(\exists x P_1(x) \& \exists x P_2(x)); \quad (5.18)$$

$$(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \to \forall x (P_1(x) \vee P_2(x)). \quad (5.19)$$

^ В соотношениях (5.18) и (5.19) левая часть более сильная, чем правая, поскольку она требует для своей истинности выполнения более жестких условий, чем правая. Так, в левой части (5.18) требуется, чтобы $P_1(a)$ и $P_2(a)$ были истинны для одного и того же a, тогда как в правой части P_1 и P_2 могут быть истинны при различных a_1 и a_2 Что касается (5.19), то здесь требуется, чтобы в левой части хотя бы один предикат выполнялся для всех $a \in M$; в правой части достаточно, чтобы один предикат был истинен там, где ложен другой. В этих рассуждениях, по существу, содержатся доказательства справедливости (5.18) и (5.19).

Для иллюстрации рассмотрим примеры. Пусть предметная область предикатов $M=\{a, b, c\}$. При этом допустим, что истиной являются только $P_1(a)$, $P_1(b)$, $P_2(c)$. Тогда левая часть (5.19) не выполняется, а ее правая часть является истинной, следовательно, левая и правая части не равны. И обратно, если выполняется левая часть, то ясно, что непременно выполняется и правая часть, т.е. соотношение (5.19) справедливо.

Пусть теперь на $M=\{a, b, c\}$ истинны $P_1(a)$ и $P_2(b)$. Тогда левая часть (5.18) не выполняется, тогда как правая часть будет истинной. Но если справедлива левая часть, то непременно справедлива и правая часть.

Из доказанного следует, что в рассмотренных случаях нельзя непосредственно получить ПНФ предикатной формулы. Ее удается построить введением новых переменных:

$$\exists x P_1(x) \& \exists y P_2(y) \sim \exists x \exists y (P_1(x) \& P_2(y)); \ (5.20)$$

$$\forall x P_1(x) \vee \forall y P_2(y) \sim \forall x \forall (P_1(x) \vee P_2(y)). \ (5.21)$$

Пример 2. Привести к ПНФ следующую предикатную формулу:

$$\rceil(\exists x \forall y P_1(x, y) \& \exists x \forall y P_2(x, y))$$

>• Поскольку в данной предикатной формуле имеются два высказывания $\exists x \forall y P_1(x, y)$ и $\exists x \forall y P_2(x,y)$, объединенные связкой & и общим отрицанием $\rceil$, то, применив правило де Моргана (5.17) к исходной формуле, получим:

$$\rceil(\exists x \forall y P_1(x, y) \& \exists x \forall y P_2(x, y)) \sim \quad \rceil\exists x \forall y P_1(x, y) \vee \rceil\exists x \forall y P_2(x, y)$$

Воспользуемся далее эквивалентным соотношение (5.3):

$$\rceil\exists x \forall y P_1(x, y) \vee \rceil\exists x \forall y P_2(x, y) \sim \forall x \rceil\forall y P_1(x, y) \vee \forall x \rceil\forall y P_2(x, y)$$

Продолжая перемещение символов отрицания непосредственно к символам предикатов, используем соотношение (5.4): $\forall x \rceil\forall y P_1(x, y) \vee \forall x \rceil\forall y P_2(x, y) \sim \forall x \exists y \rceil P_1(x, y) \vee \forall x \exists y \rceil P_2(x, y)$

Так как квантор общности $\forall x$ не дистрибутивен относительно дизъюнкции v, поменяем в каком-либо предикате, например во втором, переменную x на новую переменную z: $\forall x \exists y \rceil P_1(x, y) \vee \forall x \exists y \rceil P_2(x, y) \sim\sim \forall x \exists y \rceil P_1(x, y) \vee \forall z \exists y \rceil P_2(z, y)$

..

Воспользовавшись дважды эквивалентным соотношением (5.10) или соотношением (5.21), получим:

$\forall x \exists y | P_1(x, y) \vee \forall z \exists y | P_2(z, y) \sim \forall x \forall z (\exists y | P_1(x, y) \vee \exists y | P_2(z, y))$

Поскольку квантор существования $\exists y$ дистрибутивен относительно дизъюнкции v (см. (5.6)), окончательно получим префиксную нормальную форму для исходной предикатной формулы:

$\forall x \forall z (\exists y | P_1(x, y)) \vee \exists y | P_2(z, y)) \sim \forall x \forall z \exists y (| P_1(x, y) \vee | P_2(z, y))$

Пример 3. Получить ПНФ предикатной формулы:

$\forall x \forall y (\exists z (P_1(x, z) \& P_2(y, z)) \to \exists u P_3(x, y, u)$

>• Для получения ПНФ удалим из исходной формулы связку ->, используя формулу булевой алгебры (5. 14):

$\forall x \forall y (\exists z (P_1(x, z) \& P_2(y,z)) \to \exists u P_3(x, y, u) \sim$
$\sim \forall x \forall y (| \exists z (P_1(x, z) \& P_2(y,z)) \vee \exists u P_3(x, y, u)$

Избавимся от отрицания перед квантором $\exists z$, используя (5.3):

$\forall x \forall y (| \exists z (P_1(x, z) \& P_2(y,z)) \vee \exists u P_3(x, y, u) \sim$
$\sim \forall x \forall y (\forall z |(P_1(x, z) \& P_2(y,z))) \vee \exists u P_3(x, y, u)$.

Воспользуемся далее правилом де Моргана (5.1 7):

$\forall x \forall y (\forall z |(P_1(x, z) \& P_2(y,z))) \vee \exists u P_3(x, y, u) \sim$
$\forall x \forall y (\forall z (| P_1(x, z) \vee | P_2(y,z))) \vee \exists u P_3(x, y, u)$

Так как последний предикат не зависит от переменной z, используем соотношение (5.10):

$\forall x \forall y (\forall z (| P_1(x, z) \vee | P_2(y,z))) \vee \exists u P_3(x, y, u) \sim$
$\forall x \forall y \forall z (| P_1(x, z) \vee | P_2(y,z)) \vee \exists u P_3(x, y, u)$

Аналогично для вынесения квантора $\exists u$ (благодаря независимости первых предикатов от переменной u) воспользуемся (5. 12):

$\forall x \forall y \forall z (| P_1(x, z) \vee | P_2(y,z)) \vee \exists u P_3(x, y, u) \sim$
$\sim \forall x \forall y \forall z \exists u (| P_1(x, z) \vee | P_2(y,z)) \vee P_3(x, y, u))$.

Полученная в результате выполненных эквивалентных преобразований формула является ПНФ исходной формулы.

Пример 4. Получить ПНФ предикатной формулы

$(| \exists u P_1(u) \to | \forall y \forall u P_2(u)) \to \forall x P_3(x)$

>• Для получения ПНФ осуществим эквивалентные преобразования, указывая каждый раз справа номер используемого эквивалентного соотношения:

$(| \exists u P_1(u) \to | \forall y \forall u P_2(y, u)) \to \forall x P_3(x) \sim$ по (5.14)

$\sim (|| \exists u P_1(u) \to | \forall y \forall u P_2(y, u)) \to \forall x P_3(x) \sim$ по(5.15)

$\sim (\exists u P_1(u) \vee | \forall y \forall u P_2(y, u)) \to \forall x P_3(x) \sim$ по (5.14)

$\sim | (\exists u P_1(u) \vee | \forall y \forall u P_2(y, u)) \vee \forall x P_3(x) \sim$ по (5.16)

$\sim (| \exists u P_1(u) \& || \forall y \forall u P_2(y, u)) \vee \forall x P_3(x) \sim$ по(5.15)

$\sim (| \exists u P_1(u) \& \forall y \forall u P_2(y, u)) \vee \forall x P_3(x) \sim$ по (5.3)

$\sim (\forall u | P_1(u) \& \forall y \forall u P_2(y, u)) \vee \forall x P_3(x) \sim$ по (5.5)

$\sim \forall u\ (\rceil P_1(u)\ \&\ \forall y P_2\ (y,u))\ v\ \forall x P_3(x) \sim$ по(5.9)

$\sim \forall u \forall y (\rceil P_1(u)\ \&\ P_2\ (y,u))\ v\ \forall x P_3(x) \sim$ по(5.10)

$\sim \forall u \forall y\ \forall x\ (\rceil P_1(u)\ \&\ P_2\ (y,u))\ v\ P_3(x)) \sim$ по (5.7)

$\sim \forall x \forall y \forall u(\rceil P_1(u)\ \&\ P_2\ (y,u))\ v\ P_3(x)) \sim$

Упражнения

1. Проиллюстрировать справедливость соотношений (5.18) и (5.19) для предикатов P_l (x)-"х-четное число" и $P_2(x)$ - "х-нечетное число" и недопустимость замены в (5.18) и (5.19) символа -> на ~, т.е. показать, что для данных предикатов указанные соотношения справедливы лишь в одну сторону.
2. Получить ПНФ следующих предикатных формул:

а) $\exists x \forall y\ P_1(x,y) \rightarrow \forall x \exists y\ P_2(x,y)$;

б) $\exists x \forall y\ P_1(x,y)\ v\ \exists x\ P_2(x)) \rightarrow \exists y \forall z\ P_3(y,z)$,

в) $\rceil(\exists x \forall z P_1(x,z) \rightarrow \exists y \exists z\ P_2(y,z))\ \&\ \rceil\exists y \exists z P_3(y,z)$;

г) $(\exists x \forall z\ P_1(x,z)\ v\ \rceil\forall x \forall y\ P_2(x,y)) \rightarrow \rceil\forall z\ P_3(z)$;

д) $(\forall x \exists y \forall z P_1(x,y,z)\ v\ \rceil\forall y\ P_2(y)) \rightarrow \rceil\ \forall x \forall z\ P_3(x,z)$;

е) $\rceil(\forall x \forall y \forall z \rceil P_1(x,y,z) \rightarrow \exists y \exists z P_2(y,z))\ \&\ \ \forall x \forall z P_3(x,z)$;

ж) $(\forall x \forall y P_1(x,y) \rightarrow \exists x \exists y \forall z\ P_2(x,y,z)) \rightarrow \forall z\ P_3(z)$;

з) $\rceil\forall x \exists y P_1(x,y) \rightarrow (\forall y \forall z P_2(y,z) \rightarrow \rceil\forall z\ P_3(z))$;

и) $(\rceil\exists y P_1(y) \rightarrow \rceil\forall x \forall y P_2(x,y)) \rightarrow \forall z\ P_3(z)$;

к) $\rceil(\forall x \forall y\ P_1(x,y))\ v\ \forall x \exists y\ P_2(x,y))$.

6. Основы теории алгоритмов

6.1. Интуитивное понятие об алгоритме

6.2. Три типа алгоритмических моделей

6.3. Кризис теории множеств антиномии.

6.4. Модели алгоритмов.

6.5. Машины Тьюринга

6.1. Интуитивное понятие об алгоритме6

Крупнейшим достижением науки XX века является теория алгоритмов – новая математическая дисциплина.

Слово «алгоритм» происходит от имени узбекского ученого-математика Хорезми (Ал-Хорезми), который в IX веке н.э. разработал правила 4-х арифметических действий над числами в десятичной системе счисления.

В 30-е годы XX в. Понятие алгоритма стало объектом математического изучения, а с появлением ЭВМ получило широкую известность. Разработка алгоритмов является необходимым этапом автоматизации.

Интуитивное понятие алгоритма.

Алгоритм – это правило, сформированное на некотором языке и определяющее процесс переработки допустимых исходных данных в искомые результаты. Допустимыми исходными данными для этого правила являются предложения языка исходных данных.

Правила описания алгоритмов:

- Понятность для исполнителя
- Массовость (т.е. допустимость для него всех предложений языка исходных данных)
- Определенность (все шаги алгоритма детерминированы и четко определены)
- Результативность **************

Говорят, что алгоритм применим к допустимому исходному данному, если с его помощью, отправляясь от этого исходного данного, можно получить искомый результат. При этом алгоритмический процесс оканчивается после конечного числа шагов и на каждом шаге нет препятствий для его выполнения.

Поскольку требование завершения алгоритмического процесса за конечное число шагов не учитывает реальных возможностей, связанных с затратами времени и ресурсов, то говорят, что при этом алгоритм <u>потенциально выполним.</u>

Как и в повседневной жизни, роль алгоритмов в науке и технике очень велика. Алгоритм – это братство науки и техники. Каждый новый алгоритм немедленно вписан в золотой фонд науки. При этом интересны как новые алгоритмы, так и алгоритмы для решения вновь поставленных проблем. Охота за алгоритмами увлекательное и важное дело, которому отдают большую часть времени многие ученые.

<u>Об источниках алгоритмов:</u> практика, научная теория, совокупность накопленных алгоритмов, изобретательность разработчика.

<u>6.2. Три типа алгоритмических моделей</u>

Различный выбор исходных средств формализации приводит к моделям алгоритмов разного вида. Можно выделить три основных типа универсальных алгоритмических моделей, различающихся исходными эвристическими соображениями относительно того, что такое алгоритм.

Первый тип связывает понятие алгоритма с вычислениями и числовыми функциями. Наиболее развитая и изученная модель этого типа – рекурсивные функции – первый способ формализации понятия алгоритма.

Второй тип основан на представлении об алгоритме как о некотором детерминированном устройстве, способном выполнять в каждый отдельный момент лишь примитивные операции (машина Тьюринга).

Третий тип алгоритмических моделей – это преобразование слов в произвольных алфавитах, в которых элементарными операциями являются подстановки, т.е. замена куска слова (подслова) другим словом (Нормальный алгоритм Маркова, каноническая система Посто).

Эти (и другие) модели эквивалентны в том смысле, что классы решаемых ими задач совпадают.

Тезис Сёрга:

Класс задач, решаемых в любой из этих формальных моделей, и есть класс всех задач, которые могут быть решены интуитивно алгоритмическими методами.

Одна из причин, побудивших заняться теорией алгоритмов, – это подозрительность математиков в связи с накоплением упорно не поддающихся решению задач на нахождение алгоритмов.

Например:

<u>Задача о квадратуре круга.</u>

Требуется найти алгоритм построения с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу.

<u>Задача трисекции угла.</u>

Требуется найти алгоритм деления произвольного угла с помощью циркуля и линейки на три равные части.

<u>Задача удвоения куба.</u>

Найти алгоритм, позволяющий на стороне любого куба с помощью циркуля и линейки построить сторону куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба.

Доказать алгоритмическую неразрешимость задач на основе интуитивного представления алгоритма невозможно.

Невозможность решения этих задач строго доказана. Появилась необходимость выявления неразрешимых проблем. В теории алгоритмов есть раздел – разработка методов доказательства не существований алгоритмов.

Вторая причина разработки теории алгоритмов – необходимость обоснования математики, поскольку появления антиномий привели к тому, что все в математике стало казаться неустойчивым. Многие математики стали искать выход или пути преодоления противоречий. Среди них выделялись те, кто усмотрел причину кризиса математики в том, что ряд математических обьектов и методов является неконструктивным. Пример, актуально бесконечное множество. Расходуя ограниченное количество ресурсов на каждом шаге, имеющим фиксированную длительность, построить такое множество ни реально, ни потенциально нельзя; нельзя проверить обладает ли все элементы такого множества каким либо свойством из-за ограниченной скорости проверки. Следовательно, все части теории множеств, имеющие дело с актуальной …. доверить нельзя. С оставшейся же частью можно и нужно работать. В качестве полученных новых математических объектов должна ….. алгоритма.

6.3. Кризис теории множеств антиномии.

До середины XIX века никто не сомневался в истинности математических результатов, залогом чего считалась истинность аксиом. Исследования Лобачевского сокрушили веру в аксиомы и заставили задуматься над тем, что же является фундаментом математики. Оказалось, что все вопросы можно свести к рассмотрению только натуральных чисел и некоторых отношений между ними. Была доказана возможность полной арифметизации матанализа и теории функций. На втором Международном Математическом Конгрессе было заявлено, что теперь в математике остались только целые числа и конечные или бесконечные множества целых чисел. Математика полностью арифметизирована. И вот тогда, когда математика обрела надежный фундамент сама арифметика пошатнулась из-за того что в теории множеств были обнаружены противоречия, вошедшие в историю математики под названием антиномий.

Две теории Кантора из теории множеств.

Кардинальное число множества M называется его мощностью и обозначается m.

Теорема 1: Для любого кардинально числа m справедливо неравенство $m<2^m$, где 2^m – мощность множества всех подмножеств бесконечного множества.

Теорема 2: Мощность m' подмножества множеств, имеющих мощность m удовлетворяет неравенству $m' <= m$

Парадокс Кантора.

Пусть M множество всех множеств обозначим его кардинальное число буквой m. В силу теоремы 1 кардинальное число множества его подмножества 2^m удовлетворяет условию $2^m > m$ с другой стороны множество m есть множество всех множеств его подмножества являются множествами и значит являются элементом M, а их множества являются подмножествами множества M. По теореме 2 должно иметь место неравенство $2^m <= m$ полученные два неравенства противоречат друг другу. Для создание пародоксальной ситуации мы привлекли к рассмотрению очень своеобразное множество всех множеств для него характерно то, что оно является своим собственным элементом т.е. $M \not\subset M$ а бывают ли такие такие множества. Действительно множества коров не может быть своим собственным элементом, так как оно не корова. А рассмотрим акционеров, которые могут быть юридическими лицами т.е. отдельные граждане и акционерное общество. Если целое АО потом Х скупило часть своих акций, то Х является как множеством акционеров, так и самим акционером т.е. $X \not\subset X$. Парадокс возникает и с множествами, не содержащими себя в качестве своих элементов.

Парадокс Рассела (парадокс брадобрея).

Один из солдат оказался по профессии парикмахером, узнав об этом командир приказал ему брить всех тех и только тех кто сам себя не бреет. Все было хорошо пока не пришло время побрить самого себя оказалось, что побрить самого себя нельзя, так парикмахер брил только тех кто себя не бреет. Не брить себя тоже нельзя, потому что приказано брить всех, кто себя не бреет.

Открытие антиномий потрясло математику и математиков, как землетрясение. Нужно сказать, что математики поразному отреагировали на это заявление : одни стали во всем сомневаться, другие на антиномии не отреагировали. Но многие стали искать пути устранения противоречий: некорректные поиски множества, пересмотрение логики, формалисты решили, что математика должна аксиомотезирована, причина кризиса в том что ряд математических объектов и методов является некоструктивным: нельзя работать с актуально бесконечными множествами или завершения бесконечных множеств. Разделяют интуинционизм (для выбора объекта в качестве исходного для дальнейших … является для его интуитивной очевидностью), коструктивизм.

6.4. Модели алгоритмов.

Под алгоритмом понимается проесс последовательного построения(вычесления) величин, протекающим в дескрктном времени так, что в каждый следующий момент времени система величин получается по *** закону из системы величин, имевшихся в педыдущий момент.

Общие черты, характерные для алгоритмического процесса:

- Элементарность шагов алгоритма
- Детерменированность
- Массовость

Если имеем дело с задачами , решения которых неизвестно и относительно которых имеются предположения, что они по сути своей не могут быть решены алгоритмиескими методами, интуитивных представлений об алгоритме недостаточно. Доказать алгоритмическую неразрешенность задач на основе интуитивных представлений об алгоритме невозможно. Еще в 30-е годы были предприняты попытки формализовать это понятие и были предложены различные модели алгоритмов:

- Машины Тьюринга
- Рекурсивные функции
- Алгоритмы Маркова

6.5. Машины Тьюринга

В 1937г. английский математик Тьюринг опубликовал работу в которой он уточняя понятие алгоритма, прибегал к воображаемой вычислительной машине.

Машина должна перерабатывать какие то объекты в исходные результаты. Этими объектами являются слова, построенные из символов-букв.

МТ состоит из бесконечной в обе стороны ленты, разбитой на ячейки, и рабочей головки. Машина работает в дискретные моменты времени t=0,1,2… В каждый момент времени во всякой ячейке ленты записана одна буква из некоторого конечного алфавита $A=\{a_0, a_1, a_2 \ldots a_n\}$, называемым внешним алгоритмом машины, а головка находится в одном состояний из конечного множества внутренних состояний $Q=\{q_0, q_1 \ldots q_z\}$. Будем считать,что a_0-пустой символ, т.е. в ячейке ничего не написано.

Основной частью машины является логический блок, который работает следующим образом.

В каждый момент времени рабочая головка обозревает одну ячейку ленты и в зависимости от того, что там написано и от своего внутреннего состояния она заменяет символ в обозреваемой ячейке, переходит в новой состояние и сдвигает на одну ячейку или остается на месте. Введем для обозначения этого движения символы d_{-1}, d_0, d_{+1} соответственно. Т.о. работа МТ задается системой команд вида:

$$q_j{*}a_i\text{-}q_k{*}a_x{*}d_y$$

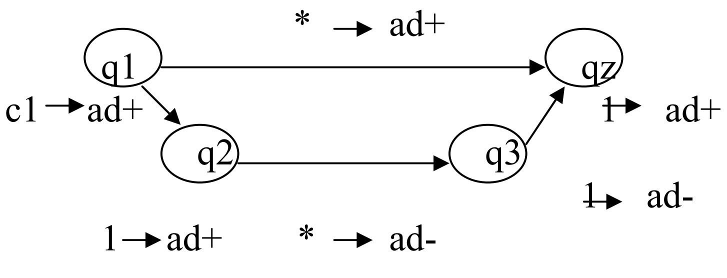
Все случаи сочетания q_j и a_i лдя разных *j* и *j* и все реакции машины на них можно представить в виде функциональной таблицы с двумя входами. Если головка в состоянии q_j читаем символ a_i, то в следующий момент она записывает в эту ячейку символ a_x переход.. в состояние q_k и в зависимости от того каково dy гловка сдвигает на одну ячейку влево, вправо или остается на месте.

	q_1, q_2 …	q_j	q_z
a_0			
a_i		q_k a_x d_y	
a_n			

Примеры.

1 Посторoить МТ, реализущую. «сложение» чисел.

В МТ все числа представляются в единичном коде, состоящем их X единиц. Поэтому сложить а и в значит переработать слова $1^а * 1^в$ в слово $1^{а+в}$. Это преобразование выполняет МТ с 4-мя состояниями системой команд вида



q1* → q2ad+
q11 → q2ad+
q21 → q21d+
qz* → q31d-
q31 → q31d-
q3a → qzad+

МТ, которая вычисляет функцию a(X)=X+1
число X запишем в виде строки, состоящей из букв 1 (палочек)

	q1	q2
a	1d0q2	-
1	1d-q1	1d0q2

При работе машины возможны два случая:

1) работа машины после конечного числа шагов прекратили с выдачей сигнала «останов.»
2) Машина никогда не останавливается, никакого результата она не дает.

В первом случае говорят, что машина применила к исходному данному, во втором – не применима. Соответствия устанавливаются между теми исходными данными, к которым они применимы, и результат ее работы представляет собой некоторую функцию (в математическом смысле).

Если для функции f(x) можно построить МТ, которая к ней применима, то говорят, что f(x) вычислена по Тьюрингу. Функцию, для вычисления которой существует МТ, называют вычислимой.

Тезис Тьюринга: любая вычислимая функция вычислимая по Тьюрингу, или всякий алгоритм может быть реализован машиной Тьюринга.

Проблема остановки:

Можно ли построить машину То такую что для любой машины Тк любых исходных данных а для машины Т.

Теорема: не существует машины То , решающей проблему остановки для произвольной машины Т.

Неразрешимость проблемы остановки можно интерпретировать как несуществование общего алгоритма для отладки программы.

7.Элементы теории автоматов

7.1. Понятие о конечном автомате как преобразователе дискретной информации
7.2 Представление конечных автоматов.
7.3 Понятие о регулярных выражениях алгебры событий.
7.4 . Задачи абстрактной теории конечных автоматов

7.1. Понятие о конечном автомате как преобразователе дискретной информации

7.2 Представление конечных автоматов

Конечный автомат удобно представлять таблицей переходов и таблицей выходов.

Функция переходов

	a1	a2	a3	a4
q1	q1	q2	q1	q2
q2	q3	q1	q3	q1
q3	q3	q1	q1	q1

В клетке таблицы помещается состояние, в котором автомат переходит из состояния q при поступлении на его вход сигнала a.

Функция выходов

	a1	a2	a3	a4
q1	b1	b1	b2	b1
q2	b1	b2	b2	b1
q3	b2	b2	b1	b1

В клетках таблицы помещается выходной сигнал, который выдает автомат, при переходе из состояния q и поступления на его вход сигнала a.

Зная начальное состояние автомата и входную последовательность, нетрудно получить соответствующую последовательность выходных сигналов.

a1	a2	a2	a1	a3	a4	a1	a4
q1	q1	q2	q1	q1	q1	q2	q3
b1	b1	b2	b1	b2	b1	b1	b1

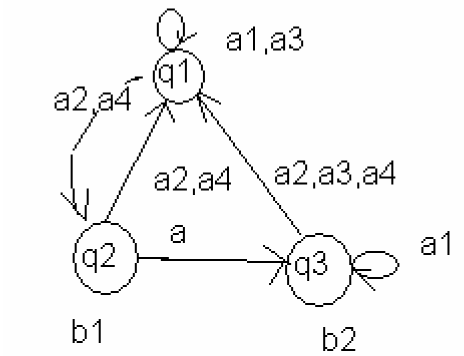
Автомат Мура представляется одной таблицей переходов, к которой добавлен один столбец со значение функций выходов.

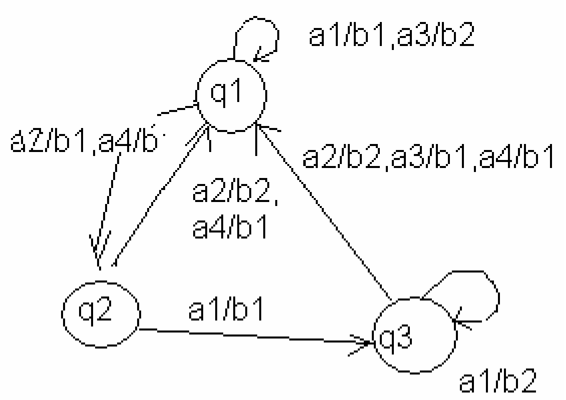
	a1	a2	a3	a4	Φ
q1	q1	q2	q1	q2	b1
q2	q3	q1	q3	q1	b1
q3	q3	q1	q1	q1	b2

Можно свести таблицу переходов и таблицу выходов в одну таблицу, называемой таблицей переходов (для автомата Мили).

	a1	a2	a3	a4
q1	q1,b1	q2,b1	q1,b2	q2,b1
q2	q3,b1	q1,b2	q3,b2	q1,b1
q3	q3,b2	q1,b2	q1,b1	q1,b1

Более наглядным при не большом числе состояний является представление автомата в виде графа переходов, который является ортграфом, вершины соответствуют состоянию автомата, а дуги соответствуют переходам одного состояния из другого. При этом дуга помечается всеми выходными сигналами, которые вызывают соответствующие переходы и выходные сигналы.





Еще один из способов представления автомата – матрица переходов, строки и столбцы которой помечаются состояние автомата.

В случае автомата Мура на пересечении строки qi и столбца qj записываются входные сигналы, переводящие автомат из состояния qi в состояние qj, а строки помечаются также и выходными сигналами.

В случае автомата Мили элементы матрицы переходов, кроме входных сигналов, вызывающие соответствующие переходы, содержат выходные сигналы, которые сопровождают эти переходы.

	q1	q2	q3
q1,b1	a1,a3	a2,a4	—
q2,b1	a2,a4	—	a1
q3,b2	a2,a3,a4	—	a1

	q1	q2	q3
q1	a1/b1,a3/b2	a2/b1,a4/b1	—
q2	a2/b2,a4/b1	—	a1/b1
q2	a2/b3,a3/b1 a4/b1	—	a1/b1

Оказывается, что всякое входных последовательностей в выходные, могут быть реализованы как с помощью автомата Мили, так и автомат Мура, т.е. существует однозначное преобразование, приводимое автомат Мили в автомат Мура и наоборот!

7.3 .Понятие о регулярных выражениях алгебры событий.

Поведение автомата можно было бы описать, поставив каждой входной последовательности однозначно в соответствие выходную последовательность. Но в общем случае это невозможно сделать, из-за бесконечного множества этих входных последовательностей. Выход был найден – использование конечных формул для представления бесконечного множества последовательностей. Эти конечные формулы получили название – «регулярные выражения».

Последовательность входных сигналов будем называть входным словом. Любое множество входных слов назовем событием. Множество входных слов Si, которое вызывает появление на выходе автомата сигнал bi. Назовем событием, представленном в автомате М выходным сигналом bi. Разработана специальная алгебра – алгебра событий. В этой алгебре используются три операции: дизъюнкция, произведение и итерация событий и задаются некоторые законы(правила ТИФ)

Пример:

S1= {a1, a2a1, a1a1}
S2= {a2a2, a1a2}
S=S1∨S2 = {a1, a2a1, a1a1, a2a2, a1a2}
S=S1∧S2= {a1a2a2, a1a1a2a2a1a2a2, a2a1a1a2, a1a1a2a2, a1a1a1a2}
S={S} = e∨S∨SS∨….., где е – пустое слово(бесконечное множество конечных и бесконечных слов)

Элементарное событие – любое множество, состоящее из одного слова ? или из пустого слова е. Любое событие, представимое конечной формулой алгебры событий, символы элементарных событий, называемое регулярным событием, а сама такая формула – регулярным выражением.
Теорема Клини. Любое регулярное выражение представимо в конечном автомате.
Для задания автомата, имеющего выходной алфавит B=(b1, b2…bi) достаточно разбить множество входных слов на i события S1, S2,… Si, представленных соответственно выходным сигналам b1, b2,.. bi. Поэтому соответственно можно определить реакцию автомата на любое входное слово.
Некоторые примеры представленные регулярным выражением событий во входном алфавите A={a1, a2…. ai}

1)События, содержащие все однобуквенные и только однобуквенные слова алфавита А

S1=a1 ∨ a2∨ …. ∨ ai

2)События, состоящие из всех двухбуквенных слов алфавита А

S2=(a1 ∨ a2∨ …. ∨ ai)(a1 ∨ a2∨ …. ∨ ai)

3)События, состоящие из всех слов алфавита А

S3= { a1 ∨ a2∨ …. ∨ ai }

В алфавите (x, y, z) =A регулярное выражение

4) S4=x{x∨y∨z}(y∨z)

задает регулярное событие, состоящее из всех слов, которые начинаются буквой x и заканчиваются буквой y или z .

A={x1, x2}

5)описать автомат, выдающий сигнал w1, всякий раз, когда происходит изменение входной буквы с x1на x2, т.е. сигнал w1 должен выдаваться в ответ на любые последовательности, кончающиеся буквами x1 x2

S5={ x1∨x2}x1x2

7.4 . Задачи абстрактной теории конечных автоматов

Задача анализа автомата заключается в следующем:
Задан конечный автомат M=(A, B, Q, Ф) и задано его начальное состояние q принадлежит Q. Требуется найти регулярное выражение для события S, представленного в этом автомате выходным сигналом b принадлежащим B.
Согласно теореме Клини это задание всегда имеет решение.

Задача синтеза автомата заключается в формировании множества состояний Q=(q1,….qi) и в построении функции переходов и функции выходов по заданному поведению автомата в виде регулярных выражений.

Эта задача, как и задача анализа, для конечного автомата всегда имеет решение. Очевидно, что одно и тоже поведение может быть реализовано автоматами с различным числом состояний. Отсюда возникает задача минимизации числа состояний автомата.

Состояние qi автомата M1 и состояние qj автомата M2 эквивалентны, если автомат M1 при начальном состоянии qi, а автомат M2 при начальном состоянии qj под воздействием любой входной последовательности выдают одинаковые последовательности на выходе.

Автоматы M1 и M2 эквивалентны, если для каждого состояния qi автомат M1 имеет хотя бы одно эквивалентное ему состояние qj автомата M2 и если для каждого состояния qj автомата M2 имеется хотя бы одно эквивалентное ему состояние qi автомата M1.

Задача минимизации автомата ставится следующим образом: для заданного автомата M найти эквивалентный ему автомат с min числом состояний.

8 Комбинаторика

8.1. Классификация комбинаторных задач
8.2. Основные правила и формулы комбинаторики
8.3. Метод рекуррентных соотношений
8.4. Производящие функции
8.5. Задачи на существование комбинаторных решений (поиск трансверсалей и общих трансверсалей)
8.6. Комбинаторные задачи выбора
8.7. Задача о покрытии булевой матрицы
8.8. Задача о диагностическом тесте
8.9. Экстремальные комбинаторные задачи

.

Область математики, в которой изучаются вопросы о том , сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется комбинаторикой.

1.1. **Типы задач комбинаторного анализа**.

В комбинаторном анализе объектом исследования являются дискретные множества, структура которых может быть достаточно сложной в зависимости от того, какие связи и отношения существуют между элементами или подмножествами этих множеств.

Над дискретными множествами производят операции. Одни из них вызывают изменение структуры множеств, другие—изменяют их состав. Простейшими операциями 1-го типа являются обычные перестановки элементов, к операциям второго типа относится выделение подмножеств элементов (или выборки) , операции применяют в задачах комбинаторного анализа неоднократно, в самых разнообразных комбинациях, при наложении различных условий. Это создаёт практически неисчерпаемые возможности дискретных построений или комбинаторных конфигураций (решений).

Можно выделить три типа задач комбинаторного анализа:

1) перечислительные задачи, связанные с подсчётом комбинаторных конфигураций, удовлетворяющих заданным условиям (существование внутренне устойчивых подмножеств вершин ранга).
2) задачи существования или не существования конфигураций, удовлетворяющих заданным условиям и нахождение алгоритма построения конфигураций (существует ли Гамильтонов цикл в графе?)
3) экстремальные комбинаторные задачи, связанные с выделением из заданной совокупности конфигураций таких, которые обладали бы избранным свойством в наибольшей или наименьшей степени (Гамильтонов цикл минимальной длины)

1.2**Выборки и упорядочения**

Рассмотрим конечное множество $E_n=\{a_1,a_2..a_k\}$ из n элементов. Набор элементов $\{ a_{i1},..a_{i1} \}$ принадлежит E_n из множества E_n называется выборкой объекта r из n-элементного множества или (n,r)-выборкой .Выборка называется упорядоченной, если порядок следования элементов в ней задан и неупорядоченной в противном случае. В выборке могут допускаться повторения (выборка с повторениями) и не допускаться повторения (выборка без повторений).

Упорядоченная (n,r)-выборка называется (n,r)-размещением (обозначение A(n,r)). Частный случай размещения A(n,r) называется n-перестановкой и обозначается P(n).

Неупорядоченная (n,r)-выборка называется (n,r)-сочетанием (обозначение
C(n,r)).

Если в (n,r)-сочетаниях допускаются повторения, то можно говорить о (n,r)-сочетании с повторениями $\hat{C}(n,r)$

Если в (n,r)-размещениях допускаются повторения, то говорят об (n,r)-размещении с повторениями ($\hat{A}(n,r)$).

Наконец можно рассматривать n-перестановки, в которых есть определённое число n_i элементов i-го типа (i=k),обозначение $P(n_1,n_2,..n_n)$, где

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Можно привести примеры и более сложных выборок или комбинаторных конфигураций.

К перечисленным задачам комбинаторики относятся задачи на подсчёт числа выборок, удовлетворяющих тому или иному условию. В задачах существования комбинаторики решается вопрос о существовании комбинаторных объектов с тем или иным свойством.

В экстремальных комбинаторных задачах из множества допустимых комбинаторных решений выбирается то, которое обладает тем или иным свойством в большей (меньшей) степени.

Общие правила комбинаторики

1. Правило суммы.
   Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B можно выбрать m способами, то выбор "либо A, либо B" можно осуществить (n+m) способами.
2. Правило произведения.
   1.3Если объект A можно выбрать n способами и если после каждого такого выбора объект B можно выбрать m способами, то выбор пары (A, B) в указанном порядке можно осуществить (n*m) способами.

С понятием выборки связывают как саму операцию выделения подмножества заданного множества, так и её результат: выбранное множество.

Пусть из n-множества A_n получена r-выборка $(a_1,a_2,..,a_r)$, где $a_i \in A_n, i=1,2,..r$, $r<=n$. В r-векторах либо учитывается порядок следования в них элементов (и тогда они называются r-перестановками), либо не учитывают (и в этом случае их называют r-сочетаниями)

Например, $A_4=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$

n=4,r=2

К (r) перестановкам относятся подмножества : (a_1,a_2), (a_1,a_3), (a_1,a_4), (a_2,a_3), (a_2,a_4), (a_3,a_4) ,(a_2,a_1),(a_3,a_1)…(a_4,a_3)

К (r) сочетаниям относятся только элементы только 1-ой строки этой совокупности пар.

Если в (r)-выборках возможно повторное появление элементов, они называются (r)-выборками (перестановками или сочетаниями) с повторениями.

Так, в нашем примере, чтобы получить выборки с повторениями следует добавить такую совокупность элементов (a_1,a_1), (a_2,a_2), (a_3,a_3), (a_4,a_4), (a_5,a_5)

Заполним таблицу подсчёта (r)-выборки с различными свойствами. При этом будем использовать два важных комбинаторных правила:

Правило суммы:

Пусть объект A может быть выбран n способами, а объект B—другими m способами. Тогда выбор "либо A либо B" может быть осуществлён (n+m) способами.

Правило произведения:

способами.

Правило произведения:

Пусть объект A можно выбрать n способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать m способами. Тогда выбор "A и B" в указанном порядке можно осуществить n*m способами.

Типы(r)выборок	с повторениями	без повторений
(r)-перестановки	$\hat{P}(n,r)=n*n*..*n=n^r$	$P(n,r)=n(n-1)..(n-r+1)$ $P(n,n)=n!$ $0!=1$

(r)-сочетания	C(n,r)-?	$C(n,r)=P(n,r)/r!=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Обозначим искомое число (r)—перестановок без повторений через P(n,r). В множестве имеется n возможностей для выбора 1-го элемента перестановки. Как только этот выбор сделан, остаётся (n-1) возможностей для выбора 2-го элемента (n,r)—перестановки .

По правилу произведения : $P(n,r)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

При подсчёте (r)-перестановок с повторениями после выбора любого элемента перестановки остаются всё те же n возможностей для выбора следующего элемента. По правилу произведения $P\hat{}(n,r)=n*n*\ldots*n=n^r$.

Типичная задача этого типа из ТВ

1.Из урны с n одинаковыми шарами поочерёдно вынимают r шаров. При этом возможны 2-а случая: вынутый шар либо возвращают (выбор с возвращением), либо не возвращают (выбор без возвращения). Сколькими способами можно реализовать выбор? Ответ: P(n,r) или P^(n,r).

2. Сколько существует подмножеств из множества A_n, т.е. чему равно $|P(A_n)|$. Ответ: $|P(A_n)|=2^n$. В самом деле, любая r-выборка $R=(a_{i1},a_{i2}..a_{ir})$, $a_k \in A_n$, r=1,2..n входит в $P(A_n)$.

Этой выборке можно поставить в соответствие n-выборку, состоящую из элементов 2-ух видов: нулей, если элемент не входит в R, и единиц, если элемент входит в R. Но число таких n-выборок, т.е. n-перестановок с повторениями из 2-множества {0,1} равно 2^n , что и является искомым результатом.

Подсчитаем теперь число (r)-сочетаний C(n,r). Пусть все элементы в (r)-сочетаниях различны. Легко видеть , что число (r)-сочетаний в r! раз меньше, чем число (r)-перестановок. Следовательно, $C_n^r=P(n,r)/r!$

Легко заметить, что (r)-сочетания множества A_n являются его r-подмножествами .

Задача о числе $(r_1,r_2..r_k)$-разбиений n-множества

Найти число упорядоченных разбиений множества S таких, что $S=\bigcup_{i=1} T_i$,

$T_i \cap T_j=\varnothing$ при i не равно j , причём T_i есть r_i- подмножества множества S, i=1..k. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{k} r_i = n$$

Рассуждаем аналогично. Для выбора r_1-подмножества T_1 из S имеется C_n^{r1} возможностей ; после этого для выборки r_2-подмножества T_2 имеется C_{n-r1}^{r2} способов и т.д. Применяя правило произведения, получили :

$$P_n(r_1,r_2..r_k)=n!/(r_1!r_2!..r_k!)= C_n^{r1} * C_{n-r1}^{r2} *\ldots* C^{rk}_{n-\sum_{i=1}^{k} r_i}$$

Таким образом (r)-сочетание можно интерпретировать как (r,n-r)-разбиение.
Подсчитаем, наконец, число (r)-сочетаний с повторениями. На этот раз воспользуемся очень распространённым подходом для решения перечислительных задач—используем метод рекуррентных соотношений. Обозначим число (n,r)-сочетаний с повторениями через $\hat{C}(n,r)$. Очевидно, что $\hat{C}(n,1)=n$; $\hat{C}(1,r)=1$.
Зафиксируем в A_n некоторый элемент. Тогда каждое (r)-сочетание либо содержит этот элемент, либо нет. Если имеет место 1-ый случай, то остальные (r-1)-элементов этого (n,r)-сочетания можно выбрать $\hat{C}(n,r-1)$ способами.
Если имеет место 2-ой случай, то искомое r-сочетание выбираем из (n-1) элементов и тогда число таких сочетаний равно $\hat{C}(n-1,r)$. Используя правило суммы, получим:
(*)

$$\hat{C}(n,r)=\hat{C}(n,r-1)+\hat{C}(n-1,r)$$
$$\hat{C}(n,0)=\hat{C}(n,1)-\hat{C}(n-1,1)=1$$

Последовательно получим:

$$\hat{C}(n,2)=\hat{C}(n,1)+\hat{C}(n-1,2)=\hat{C}(n,1)+\hat{C}(n-1,1)+\hat{C}(n-2,2)=\ldots=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1=n(n+1)/2=C_{n+1}^2$$

$$\hat{C}(n,3)=C_{n+2}^3$$

Легко убедится, что :

$$\begin{cases} \hat{C}(n,r)=C_{n+r-1}^{r} \\ \hat{C}(n,1)=n,\ \hat{C}(1,r)=1 \end{cases}$$

Можно было эту задачу решить и таким оригинальным способом. К (r)-сочетанию с повторением из n-множества (например к bcb из S=(a,b,c,d,e,))припишем n элементов множества и полученные n+r элементов запишем по порядку , помещаем одинаковые элементы рядом (a|bbb|cc|d|e). Затем подмножества одинаковых элементов разделим n-1 черточками. Наконец, заменим все элементы между черточками на точки (.|…|..|.|.) 8+4-1=11
n-элементов одного типа

r-элементов другого типа
Таким образом, мы сопоставим (r)-сочетанию с повторением расстановку (n-1) чёрточек в (n+r-1) промежутках между (n+r) точками. Всего существует $C^{n-1}_{n+r-1} = C^{r}_{n+r-1}$ способов расстановки (n-1) чёрточек на (n+r-1) местах.

$$\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!\,r!} = C^{r}_{n+r-1}$$

4. Производящие функции

Долгое время основным содержанием комбинаторного анализа был подсчёт количества конфигураций различного типа. Мы с вами рассмотрим прямые методы подсчёта числа комбинаторных решений. Теперь познакомимся с косвенными методами подсчёта количества подсчёта комбинаторных конфигурации. Одним из таких методов является *метод производящих функций*.

Рассмотрим произведение конечного числа линейных биномов

$$\prod_{r=1}^{n} \left(1 + x_r \cdot t\right) := \sum_{r=0}^{n} a_r \cdot t^r \qquad \left[1\right]$$

где $a_r\left(x_1 .. x_n\right) := \sum\limits_{\left(1 \le i_1 \le i_2 \le i_r \le n\right)} x_{\left(i_1\right)} \cdot x_{\left(i_2\right)} .. x_{\left(i_r\right)}$

Слагаемым a_r можно сопоставить r-сочетания из n-элементов $x_1, x_2, ... x_n$

Выражение (1) назовём нумератором r-сочетаний из n-элементов. Если в (1) положить все x_i=1, то

$$\sum_{r=0}^{n} a_r(1, 1, 1 .. 1) \cdot t^r := (1 + t)^r$$

где a_r (1,1,1..1) есть число r-сочетаний из n-элементов. Действительно, если разложить функции сочетаний $(1+t)^n$ в ряд Тейлора по степеням t, то получим

$$(1 + t)^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \cdot t^r = \sum_{r=0}^{n} C^r_n \cdot t^r$$

Функцию f(t)=$(1+t)^n$ называют производящей функцией последовательности чисел

$\{ C_n^r,\ r=0,1,2..n\}$

Определение. Рассмотрим числовую последовательность $a=(a_0,a_1,a_2,...)$.

$$f_a(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$$

Ей взаимно однозначно соответствует ряд

Если этот ряд сходится, то он называется производящей функцией последовательности a. Оперировать с ним гораздо удобнее и проще, нежели с самой последовательностью, особенно когда он сходиться к функции, обладающей удобной аналитической формой.

Рассмотрим несколько задач перечисленного типа.

1) Найти нумератор и производящую функцию для r–сочетаний с

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + x_i \cdot t + x_i^2 \cdot t^2 + \ \ldots\ \right) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \cdot t^r$$

$$f(t) = \left(1 + t + t^2 + t^3 ..\ \right)^n = (1-t)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-n)\cdot(-n-1)..(-n-r+1)}{r!} \cdot (-1)^r t^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r \cdot t^r$$

неограниченными повторениями из n элементов.

Таким образом, число r-сочетаний с неограниченными повторениями из n элементов равно

C_{n+r-1}^r

2) Найти нумератор и производящую функцию r-сочетаний с повторениями,

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + x_i \cdot t + x_i^2 \cdot t^2 + \ \ldots\ \right) = t^n \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i t}$$

$$f(t) = \left(1 + t + t^2 + t^3 ..\ \right)^n = t^n (1-t)^{-n} = t^n \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r \cdot t^r$$

в которых присутствует хотя бы один элемент каждого вида.

Сделаем замену n+r=k, получаем

$$f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{k-n} t^k = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} t^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_k t^k$$

Следовательно, число искомых r-сочетаний равно 0 при r<n и

C_{r-1}^{n-1} при $r \geqslant n$

3) Найти нумератор и производящую функцию r-сочетаний из n элементов, где допускается лишь чётное число появлений для каждого из элементов.

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \cdot t^r = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + x_i \cdot t + x_i^2 \cdot t^2 + \dots \right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i^2 \cdot t^2}$$

$$f(t) = \left(1 + t^2 + t^4 .. \right)^n = (1 - t^2)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^{r} \cdot t^{2r}$$

4) Найти нумератор и производящую функцию r-сочетаний из n элементов, где допускается не более j повторений каждого элемента.

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \cdot t^r = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + x_i \cdot t + x_i^2 \cdot t^2 + \dots + x_i^j t^j \right)$$

$$f(t) = \left(1 + t + t^2 + t^3 .. + t^j \right)^n$$

Рассматриваемая наша произв. функция называется производящей функцией для числа сочетаний. Вследствие разнообразных постановок задач появилось разнообразие видов произв. функций. Так, работают с произв. функциями для перестановок.
где a_r число r-перестановок с теми или иными свойствами.

$$E(t) := \sum_{r=0}^{\infty} a_r \cdot \frac{t_r}{r!}$$

5) $$\sum_{r=0}^{\infty} \left(x_1 + x_2 .. x_n\right)^r \cdot \frac{t^r}{r!} = \exp\left[\left(x_1 + x_2 .. x_n\right) t\right]$$ льную производящую функцию для r-

числом повторений из n элементов.

$$E(t) = \exp(n t) = \sum_{r=0}^{\infty} n^r \cdot \frac{t_r}{r!}$$

6) Найти экспоненциальный нумератор и экспоненциальную производящую функцию с повторениями, где каждый элемент должен появится хотя бы один раз.

$$p(x_1, x_2 .. t) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(x_i \cdot t)^{\lambda}}{\lambda!} = \prod_{i=1}^{n} \left(\exp(x_i t) - 1\right)$$

$$E(t) = \left(e^t - 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k e^{t(n-k)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^r$$

$$P(n,r) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^r$$

Найти экспоненциальный нумератор и экспоненциальную производящую функцию для r-перестановок из n элементов с повторениями, где каждый элемент может встречаться лишь чётное количество

3. Формула включений и исключений .

Пусть имеем N-множество элементов и h свойств $\alpha 1, \alpha 2, .. \alpha k$. Каждый из этих элементов может обладать или не обладать любым из этих свойств.

Обозначим из N($\alpha i1, \alpha i2, .. \alpha in$)число предметов, обладающих свойствами $\alpha i1, \alpha i2, .. \alpha in$.

Тогда число предметов не обладающих ни одним из указанных свойств, обозначается как N($\bar{\alpha}1, \bar{\alpha}2, .. \bar{\alpha}k$) и равно

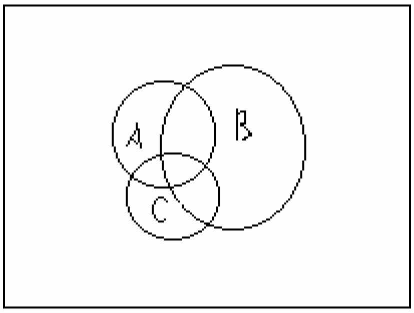
$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, . \bar{\alpha}_h) =$$

$$N - \sum_{i=1}^{\kappa} N\left[\alpha_i\right] + \sum_{(1 \le i < j \le h)} N(\alpha_i \alpha_j) - \sum_{(1 \le i < j < l \le h)} N(\alpha_i \alpha_j \alpha_l) - .. - (-1)^k N(\alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_k)$$

С помощью этой функции можно перечислить элементы в различных множествах

$$n(\bigcup^{m} A_i) =$$

$$\sum_{n} nA_i - \sum_{(1 \le i < j \le m)} n(AiAj) + \sum_{(1 \le i < j \le n)} n(AiAjAk) + .. (-1)^{n-1} - n(A_1 A_2 .. A_n)$$



$$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(AB)-n(AC)-n(BC)+n(ABC)$$

Метод рекуррентных соотношений.

При решении многих комбинаторных задач пользуются методом сведения данной задачи к задаче, касающейся меньшего числа объектов. Этот метод называется методом рекуррентных соотношений(от латинского recur- возвращаться). Пользуясь рекуррентным соотношением можно свести задачу от n объектов к задаче от(n-1) объектам, потом к задаче от(n-2) объектах и т. д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить. Во многих случаях удаётся получить из рекуррентного соотношения явную формулу для решения комбинаторной задачи.

Например, формулу для числа перестановок из n предметов $P_n=n!$ можно получить помощью рекуррентного соотношения.

Пусть у нас есть n объектов $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$. Число различных мест , которые может знать элемент a_n, равно n . Это означает, что перестановка из n элементов в n раз больше, чем перестановка из (n-1) элементов. Тем самым устанавливается соотношение

$$P_n=n\,P_{n-1}$$

Потом $P_1=1$, нетрудно получить, что

$$P_{n-1}=n\,(n-1)\ldots\, 2*1$$

Рекуррентные соотношения.

1) Задача о ханойской башне.

Заданы башенки из n дисков различных размеров нанизанных на колышек так, что нижний диск- наибольший, а снизу вверх размеры дисков упорядочены по убыванию и два свободных колышка.

задача состоит в том , чтобы переместить всю башенку, сохранив порядок дисков, на один из свободных колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший, за минимальное число шагов.

Решим эту задачу методом рекуррентных соотношений.

Пусть T_n- искомое минимальное число шагов (перекладывания), выполнив которые можно решить поставленную задачу.

Покажем, что T_n определяем:

равно:

$$(*)\quad \begin{cases} T_0=0 \\ T_n=2T_{n-1}+1, \text{ при } n>0 \end{cases}$$

Действительно, перемещая по шагам n-1 меньших дисков на любой свободный колышек за Tn-1 перемещение, сохранив при этом порядок, перекладываем самый большой диск(одно перекладывание) на свободный колышек и помещаем на него n-1 диск сверху, снова за Tn-1 шагов .
Решим рекуррентным соотношением(*) :
T0=0, T1=1, T2=3, T3=7, T4=15, T5=31 => $T_n=2^n-1$
Пусть $T_{n-1}=2^{n-1}-1$, тогда $T_n=2T_{n-1}+1=2^n-1$, что и требовалось доказать.

1) Найдём число сочетаний с повторениями из n элементов по r методом рекуррентных соотношений.

Искомое число $\hat{C}(n,r)$. Очевидно, что $\hat{C}(n,1)=n$, $\hat{C}(1,r)=1$. Зафиксируем в n-множестве некоторый элемент. Если этот элемент вошёл в нашу выборку, то остальные (r-1) элементов можно выбрать $\hat{C}(n,r-1)$ способами, а если этот элемент не вошёл в нашу выборку ,то такое сочетание выбираем из (n-1) элементов и число сочетаний рано $\hat{C}(n-1,r)$. Используя правило нуля, получим :

$$\mathbf{\hat{C}(n,r)=\hat{C}(n,r-1)+\hat{C}(n-1,r)}$$
$$\mathbf{C(n,0)=\hat{C}(n,1)-C(n-1,1)=1}$$
$$\mathbf{\hat{C}(n,1)=n, C(n-1,1)=1}$$

Последовательно получаем:

$$\hat{C}(n,2)=\hat{C}(n,1)+\hat{C}(n-1,2)=\hat{C}(n,1)+\hat{C}(n-1,1)+\hat{C}(n-2,2)$$

$$=\ldots=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\frac{n(n+1)}{2}=C^2_{\ n+1}$$

$$\hat{C}(n,3)=C_{n+2}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{cases} \mathbf{\hat{C}(n,r)=C^r_{\ n+r-1}} \\ \mathbf{\hat{C}(n,1)=n,\ \hat{C}(1,r)=1} \end{cases}$$

Система различных представлений (трансверсаль)

Вопросы существования и построения тех или иных комбинаторных конфигураций принадлежат к самым сложным и красивым задачам комбинаторной математики .

Следующая задача о системе различных представителей (с.р.п.) является типичной задачей существования комбинаторных решений.
Даны пять множеств:

$\{\quad\}$ $\{\quad\}$

$S_1 = \ 1,2,3$ $\qquad\qquad$ $T_1 = \ 1,2$

$S_2 = \{1,2,4\}$ $\qquad\qquad$ $T_2 = \{1,2\}$

$S_3 = \{1,2,5\}$ $\qquad\qquad$ $T_3 = \{1,2\}$

$S_4 = \{3,4,5,6\}$ $\qquad\qquad$ $T_4 = \{3,4,5,6\}$

$S_5 = \{3,4,5,6\}$ $\qquad\qquad$ $T_5 = \{3,4,5,6\}$

Требуется выбрать такие различные числа $t=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$, что x_i принадлежит S_i,
$i=1..5$.Одним из способов выбора является:

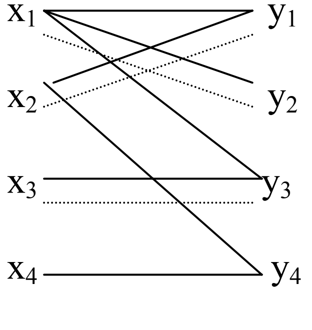
$$t=(x_1=1,x_2=2,x_3=5,x_4=3,x_5=4)$$

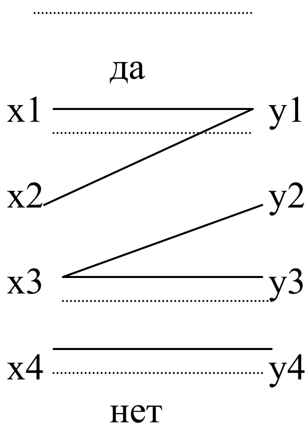
Но, если взять множества $T_1..T_5$, то такой выбор окажется невозможным ,т.к. нельзя выбрать три различных числа из множества T_1,T_2,T_3. Возникает вопрос:
При каких условиях подмножества S_i, $i=1..n$ множества S обладают различными представителями x_i, $i=1..n$, т.е. x_i принадлежит S_i и x_i не равно x_j , если $i \neq j$?
В теореме Холла представлено необходимое условие существования с.р.п. (трансверсали).
Система различных представителей для последовательности $<S_1,S_2,S_n>$ существует тогда и только тогда ,когда выполняется условие:

$$\left| \bigcup_{i \in I} S_i \right| >= |I|$$

,для любого $I<=\{1,2,..n\}$

К поиску трансверсалей сводится ряд задач распределения ресурсов вычислительной системы среди пользователей .В разделе “теория графов ” мы столкнёмся с задачами, решение которых сводится к поиску трансверсалей : поиск паросочетаний в двудольном графе ,поиск покрытий.
Например, задача о свадьбах.
Каждая из m девушек имеет друзей из множества m юношей. Может ли каждая девушка выйти замуж за знакомого с ней юношу?
Решение:
Строится граф отношения знакомства $R_{знакомств}$
$(x,y) \in R_{знакомств}$





паросочетания в двудольном графе $\gamma : X \longrightarrow Y$

Задача о комиссиях –частный случай задачи о свадьбах.

Имеем n комиссий , причём A_i—множество членов i-той комиссии. Нужно в каждой комиссии выбрать председателя так, чтобы ни один человек не был председателем более чем в одной комиссии.

Общая система различных представителей (общие трансверсали)

Рассмотрим две последовательности множеств $A=\{A_1,\ldots,A_n\}$ и $B=\{B_1,...,B_n\}$ определим общую систему представителей для наших последовательностей как произвольную последовательность элементов $<x_1,x_2,\ldots,x_n>$ обладающую тем свойством, что она является трансверсалью как для последовательности A, так и для последовательности B. Последовательности A и B имеют общую трансверсаль тогда и только тогда, когда для всех подмножеств I и Q множества $\{1,2,\ldots,m\}$ выполняется условие:

$$\left|\left(\cup A_i\right) \cap \left(\cup B_q\right)\right| >= |I| + |Q| - m \text{ , } i \in I \text{ , } q \in Q$$

<u>Пример</u>

$A_1 =\{a,b,c\}$ $B_1=\{b,c,f\}$ $T_1=(b,c,e)$

$A_2 =\{a,c,d\}$ $B_2=\{a,c,f\}$ $\Longrightarrow$ $T_2=(c,a,d)$

$A_3 =\{d,b,e\}$ $B_3=\{c,d,e\}$ $T_3=(c,a,d)$

Продемонстрируем использование общих трансверсалей в задаче коммутационных сетей, используемых в телефонной связи.

Заданы два множества "абонентов" X и Y и пусть $|X|=|Y|=N$

Составим проект установки, состоящей из одиночных переключателей, которая могла бы реализовать систему связей, определённую взаимно однозначным отображением $\gamma : X \longrightarrow Y$ (перестраиваемая сеть размерностью N*N)(Пусть N=nh, где n, h—целые числа больше единицы)

Самым простым решением является использование отдельных мелодий каждой парой абонентов $\langle x,y\rangle \in X*Y$. Отображение γ основывается на замыкании переключателей для пар.

Рассмотрим ещё одну теорему : пусть $A_1 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n = X$, $|A_i| = |B_i| = h$ для $1 \le i \le n$ и $|X| = nk$. Тогда существует k общих систем различных представителей, которые в сумме исчерпывают все элементы множества X. Одним из применений этой теоремы является задача составления расписания занятий.

В идеализированной формулировке эта задача представлена некоторым множеством занятий X мощности nk и двумя разбиениями $X = W_1 \cup \ldots \cup W_n$ и $X = S_1 \cup \ldots \cup S_n$, где W_i—множество занятий проводимых i-тым преподавателем, S_i—множество занятий проводимых в i-той аудитории. $|W_i| = |S_i| = k$, $1 \le i \le n$

Решение задачи даст k общих систем различных представителей для последовательности $\langle W_1 \ldots W_n\rangle$ и $\langle S_1 \ldots S_n\rangle$, причём эти системы в сумме исчерпывают всё множество занятий X.

Если, например, каждое занятие длится 1 час , то проводя занятие очередной j-той системы в течение i-того часа, j=1...k мы получаем расписание занятий, в котором все занятия проводятся в течение k часов , при этом всё это время занята каждая аудитория и каждый преподаватель.

Решим несколько перечислительных задач

тип конфигураций	без повторений	с повторениями
(n,r)размещения	$A(n,r)=n(n-1)(n-2)..(n-r+1)$	$\hat{A}(n,r)=n^r$
(n,r)сочетания	$C(n,r)=C^r_n=\frac{n!}{r!(n-r)!}$	$\hat{C}(n,r)=C^r_{n+r-1}$
n перестановки	$P(n)=n!=A(n,n)$	$Pn(n1,n2..nk)=\frac{n!}{n_1!n_2!..n_k!}$

2) $A(n,r)=n(n-1)(n-2)..(n-r+1)$

При получении любого из размещений выбор первого слева элемента из n элементов можно реализовать n способами, второй элемент (n-1) способами, r-ый элемент можно реализовать (n-r+1) способами. Используется правило умножения.

2)$A(n,n)=P(n)=n!/(n-n)!=n!/0!=n!$, $0!=1$

3) $\hat{A}(n,r)=n^r$

Действительно, при выборе 1-го слева элемента конфигурации имеем n способов, для выбора 2-го элемента те же n способов и т.д. В итоге :

$$\underbrace{n*n\ldots*n}_{r\ раз}=n^r$$

4) $C(n,r)= \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Поскольку в A(n,r) содержится r! перестановок каждого r-элементного подмножества из n-элементного множества, то любая перестановка фиксированных r-элементов и есть одно и то же сочетание. Следовательно , в подмножестве A(n,r) каждое сочетание по r входит r!раз, следовательно,
в подсчёт A(n,r) каждое сочетание по r входит r! раз, следовательно,

$C(n,r)=C^r_n=A^r_n/r!= \frac{n!}{r!(n-r)!}$

1) Пусть на диск нанесены 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

$\hat{A}(n,r)=\hat{A}(12,5)=12^5=248832$

Число неудачных попыток равно 248831

2) При передаче сообщений по телеграфу используется код Морза. В этом коде буквы, цифры и знаки обозначают точками и тире. Для одних букв минимум один знак Е- , а для некоторых букв используется пять знаков Э..-.. . Почему необходимо пять знаков? Нельзя ли обойтись меньшим числом ?

Решение: нельзя. Действительно, с помощью одного знака можно передать две буквы $\hat{A}^1_2=2$, с помощью двух знаков—четыре буквы($\hat{A}(2,2)=2^2$), с помощью трёх знаков—восемь букв $\hat{A}(2,3)=2^3=8$, с помощью четырёх знаков—шестнадцать букв $\hat{A}(2,4)=2^4=16$. По правилу суммы с помощью четырёх знаков можно передать 2+4+8+16=30 букв . А в русском языке 32 буквы, да ещё цифры и знаки препинания. Если используются 5знаков, то ещё прибавить 2^5= 32 символа.

3) В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какой должна быть наибольшая численность населения государства? (наибольшее число зубов равно32)

   Решение : 2^{32}

4) У англичан принято давать детям три имени. Сколькими способами можно назвать ребёнка, если ему дать не более трёх имён ,а общее число имён равно300?

   300*299*298

5) Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга ?

Решение: Ясно, что при таком расположении на каждой горизонтали и вертикали стоит по одной ладье. Пусть a_1—номер занятого поля на 1-ой горизонтали, a_2—на второй, .., a_8—на восьмой горизонтали, тогда $(a_1,a_2,..,a_8)$ будет некоторая перестановка из чисел 1,2,..,8 (все числа в этой перестановке различны). Таким образом , число искомой расстановки равно числу перестановки P(8)=8!=40320.

6)Каков будет ответ, если ладьи отличаются друг от друга (например пронумерованы).В том случае из каждого расположения не пронумерованных ладей получим n! расположение пронумерованных ладей, и то есть $(n!)^2$ способами можно расположить ладей, чтобы они не "били" друг друга.

7) Сколькими способами можно поставить на шахматную доску восемь ладей ?

Решение: ответ—сколькими способами из 64 клеток можно выбрать 8 клеток :$C(64,8)=\frac{64!}{8!\,56!}$

На доске из m горизонталей и n вертикалей k ладей можно поставить числом способов $C(n,m,k)=\frac{mn\ !}{k!\,(mn-k)!}$

Если же ставить не k одинаковых ладей, а k различных фигур, то ответ даст формула размещений $A(mn,k)=\frac{mn!}{(mn-k)!}$

8) В кондитерском магазине продаётся четыре сорта пирожных : наполеон,
эклеры, песочное, слоёное. Сколькими способами можно купить семь пирожных ?

Решение: эта задача не является задачей на размещение с повтором. Она ближе к задаче на сочетание ,однако в комбинации могут входить и повторяющиеся элементы. Эта задача на сочетания с повторами.

Для решения данной задачи поступим следующим образом: зашифруем каждую покупку с помощью 0 и 1. Пием столько 1-ц, сколько куплено Н.; затем "0", отделяющий Н. от Э. и т.д. В итоге каждой покупке будет соответствовать комбинация 7 единиц и 3 нуля.

Например, 0| 1110 |11110|
0Э| 3Н | 4П |0С

Следовательно, число различных покупок равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из семи единиц и трёх нулей, то есть : $P_{10}(7,3)=\frac{10!}{3!\,7!}=120$

9) Найти $\hat{C}(\mathbf{n},\mathbf{r})=C^{r}_{n+r-1}$ Имеются предметы n различных типов. Сколько r комбинаций можно сделать из них , если не принимать во внимание порядок элементов комбинации?

Решение: зашифруем каждую комбинацию с помощью 0 и1.Для каждого типа написать столько единиц, сколько предметов этого типа входит в комбинацию, различные типы отделить друг от друга нулём. При этом единиц должно быть r, а число нулей будет на единицу меньше, чем число типов предметов, то есть (r-1). Таким образом получаем перестановку из r единиц и (r-1) нулей :

$$P_{r+n-1}(r,n-1)= \frac{(r+n-1)!}{r!\,(n-1)!} = \hat{C}(n,r)=C^r_{n+r-1}$$

10)Доказать , что n элементов множества $X=\{x_1..x_n\}$ имеет в точности 2^n подмножеств .

Решение: каждому подмножеству $Y \subseteq X$ сопоставим бинарную (двоичную) последовательность $\{b_1,b_2,..,b_n\}$ определяемую следующим образом:

$$b_i=\begin{cases} 0,\text{если } x_i \notin Y \\ 1,\text{если } x_i \in Y \end{cases}$$

тем самым мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между элементами множества P(x) всех подмножеств множества X и всеми бинарными последовательностями. Здесь на помощь приходит формула размещения с повторами

$$\hat{A}(2,n)=2^n$$

Заметим , что данная последовательность $\{b_1,b_2...b_n\}$ становится удобным машинным представлением подмножества Y. Действительно, можно последовательно получать все числа из интервала $0 \le r \le 2^n - 1$, а их двоичные представления дадут все подмножества n элементного множества

последовательность $b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0 \Longleftrightarrow$ число $r = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$

11) Число всех k элементов подмножества n элементного множества будем обозначать (n k) = C^k_n биномиальный коэффициент (число сочетаний из n по k).

Свойства C^k_n:

1)

$$\sum_{i=0}^{n} C^i_n = 2^n$$

2)

$$\sum_{i=0}^{n} i\,C^{i}_{n} = n2^{n-1}$$

3)

$C^{k}_{n}=C^{n-k}_{n}$

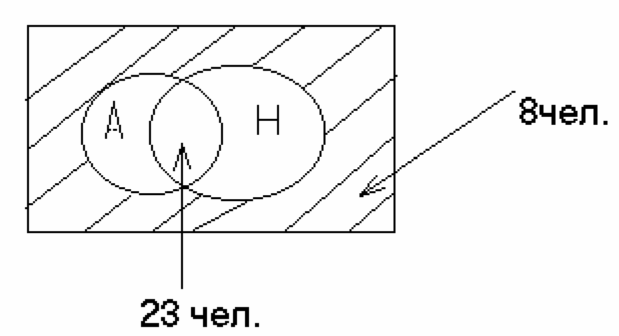
4)
$C^{k}_{n}=C^{k}_{n-1}+C^{k-1}_{n-1}$

5)Тождество Коши
$C^{k}_{m+n}=$

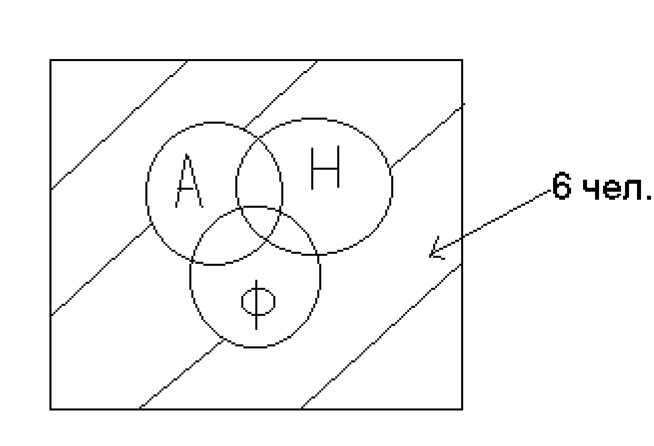
$$\sum_{s=0}^{k} C_{m}^{s}\cdot C_{n}^{k-s}$$

11)В НИИ работает 67 человек. Из них 47 знает А, 35-Н, 23-оба языка. Сколько человек в институте не знает ни А, ни Н?
а)

$n=67 \quad n(\bar{A}\bar{H})=n-n(A)-n(H)+n(AH)=67-47-35+23=8$



$n(AH)=23$, $n(A)=47$, $n(H)=35$
б) $n(Ф)=20$
$n(AФ)=12$
$n(HФ)=11$
$n(AHФ)=5$
$n(\bar{A}\bar{H}\bar{Ф})=67-47-35-20+23+12+11-5=6$



Задача о беспорядках.

Задача о беспорядках, в которых ни один из членов не занимает своего первоначального положения $a_i \neq i$, i=1..n.

Сколько существует беспорядков из n элементов?

Решение:

Введём множество свойств $P(p_1 \dots p_n)$

P_i—элемент перестановки i сохранил своё место.

$N(\bar{p}_1, \bar{p}_2 \dots \bar{p}_n)$ -?

$$N(\bar{p}_1, \bar{p}_2 \dots \bar{p}_n) = N - \sum N(p_{i1}) + \sum N(p_{i1} \cdot p_{i2}) - \dots (-1)^n N(p_{i1}, p_{i2}, \dots p_{in}) = n! - C^1_n (n-1)! + C^2_n (n-2)! - C^3_n (n-3)! + \dots (-1)^n C^n_n 0!$$

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

Задача о шляпах.

Четверо человек сдали свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвратятся наугад. Найти вероятность того, что в точности К человек получат свои шляпы назад?

Решение:

$N(\bar{p}_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4) = 4![1 - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4!] = 1/2 - 1/6 + 1/24 = 9$

$p = D_3/4! = 9/1*2*3*4 = 3/1*2*4 = 3/8$