Задание № 1.

Определить оптимальный план выгрузки маршрута однородного груза на станции с помощью табличного симплексного метода линейного программирования

Постановка задачи. На станции необходимо выгрузить маршрут однородного груза из 80 вагонов. Каждый из трёх грузовых фронтов может вместить определённое количество вагонов (таблица).

Таблица 1.1 – **Количественные характеристики грузовых фронтов**

Грузовой фронт	Вместимость фронтов, ваг.	Затраты локомотиво-часов на один вагон	Доход, ден. ед./ваг.
1	n_1	t_1	d_1
2	n_2	t_2	d_2
3	n_3	t_3	d_3

Подаёт, расставляет, собирает и убирает их один локомотив, который работает 23 часа в сутки. Затраты локомотиво-часов маневровой работы, отнесённые на один вагон, различны для каждого грузового фронта. За выгрузку вагонов станция взимает с клиентов определённую плату. Но из-за различной технической оснащённости грузовых фронтов доход от выгрузки одного вагона не одинаков. Необходимо распределить вагоны по грузовым фронтам так, чтобы обеспечить максимальную выгрузку за сутки и максимальный доход.

Требуется:

1 Построить математическую модель задачи.

2 Решить задачу табличным симплексным методом.

3 Проанализировать решение, сделать вывод.

Таблица 1.2 – Варианты исходных данных

№ варианта	n_1	n_2	n_3	t_1	t_2	t_3	d_1	d_2	d_3
1	35	40	25	0,2	0,4	0,3	3	5	4
2	35	25	40	0,2	0,4	0,3	3	5	4
3	35	25	40	0,2	0,3	0,3	3	5	4
4	35	25	38	0,2	0,4	0,3	3	5	4
5	35	28	40	0,2	0,4	0,3	3	5	5
6	30	35	40	0,3	0,2	0,5	4	4	3
7	25	30	35	0,2	0,2	0,5	4	4	3
8	27	32	40	0,2	0,4	0,3	3	5	4
9	28	30	40	0,2	0,3	0,4	3	5	6
10	25	40	40	0,2	0,4	0,3	4	5	5
11	20	40	25	0,2	0,4	0,3	3	3	4
12	20	40	30	0,2	0,4	0,3	4	4	5
13	20	30	40	0,2	0,4	0,3	5	4	4
14	20	43	30	0,2	0,3	0,3	3	4	4
15	20	43	30	0,3	0,2	0,4	3	5	4
16	38	40	24	0,3	0,3	0,2	2	4	5
17	33	40	27	0,2	0,3	0,3	3	3	4
18	30	35	25	0,3	0,2	0,4	4	4	5
19	34	37	22	0,3	0,2	0,35	4	3	5
20	33	37	30	0,3	0,3	0,2	4	3	6

2.5.2. *Решение задачи линейного программирования симплекс-методом*

Пример. На станции необходимо выгрузить маршрут однородного груза из 80 вагонов. Каждый из трёх грузовых фронтов может вместить определённое количество вагонов (табл. 2.1).

Таблица 2.1. **Характеристика грузовых фронтов**

Грузовой фронт	Вместимость фронтов вагонов	Затрата локомотиво-часов на один вагон	Доход, ден. ед./ваг.
1	35	0.2	3
2	40	0.4	5
3	25	0.3	4

Подаёт, расставляет, собирает и убирает их один локомотив, который работает 23 часа в сутки. Затраты локомотиво–часов маневровой работы, отнесённые на один вагон, различны для каждого грузового фронта. За выгрузку вагонов станция взимает с клиентов определённую плату. Но из-за различной технической оснащённости грузовых фронтов доход от выгрузки одного вагона не одинаков. Необходимо распределить вагоны по грузовым фронтам так, чтобы обеспечить максимальную выгрузку за сутки и максимальный доход.

Обозначим число вагонов, предназначенных для выгрузки на первом грузовом фронте, через x_1, на втором – x_2, на третьем – x_3. Тогда целевая функция, выражающая общий доход станции от выгрузки вагонов

$$\max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

при ограничениях:

$x_1 + x_2 + x_3 \le 80$ (сумма поданных вагонов не должна превышать их наличия);

$0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 23$ (общее время на обработку грузовых фронтов не должно превышать ресурсов локомотиво-часов);

$x_1 \le 35$; $x_2 \le 40$, $x_3 \le 25$ (вместимость грузовых фронтов).

Математическая модель:

$\max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$;
$x_1 + x_2 + x_3 \le 80$;
$0.2x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 \le 23$;
$x_1 \le 35$; $x_2 \le 40$; $x_3 \le 25$.

Каноническая запись:

$z - 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5 = 0$;
$x_1 + x_2 + x_3 + y_1 = 80$;
$0.2x_1 + 0.4x_2 + 0.3x_3 + y_2 = 23$;
$x_1 + y_3 = 35$; $x_2 + y_4 = 40$; $x_3 + y_5 = 25$,

где дополнительные (остаточные) переменные:

y_1 – число не поданных под выгрузку вагонов;

y_2 – количество неиспользованных локомотиво-часов;
y_3, y_4, y_5 – неиспользованные вместимости грузовых фронтов.
y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 – базисные (опорные) переменные,
x_1, x_2, x_3 – небазисные (свободные) переменные.

Точку (0, 0, 0) используем как начальное допустимое решение.
y_1=80, y_2=23, y_3=35, y_4=40, y_5=25 – базисный план;
x_1=0, x_2=0, x_3=0 – начальный план.

I итерация – построение симплекс-таблицы:

Базисные переменные	z	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	Решение	θ
z	1	-3	-5↓	-4	0	0	0	0	0	0	
y_1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	80	80/1=80
y_2	0	0,2	0,4	0,3	0	1	0	0	0	23	23/0,4=57,5
y_3	0	1	0	0	0	0	1	0	0	35	
y_4	0	0	**1**	0	0	0	0	1	0	40	40/1=40 ←
y_5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	25	

Проверяем условие оптимальности: в z-строке среди коэффициентов при x_i max $|x_i| = |x_2|$. Следовательно, столбец x_2 – ведущий, а x_2 – вводимая в базис переменная. Проверяем условие допустимости: 80/1=80; 23/0.4=57.5; 40/1=40, min=40, следовательно y_4 – ведущая строка, а y_4 – исключаемая из базиса переменная. На пересечении ведущих строки и столбца 1 – ведущий элемент.

II итерация – поиск нового базисного решения.

Базисные переменные	z	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	Решение	θ
z	1	-3	0	-4↓	0	0	0	5	0	200	
y_1	0	1	0	1	1	0	0	-1	0	40	40/1=40
y_2	0	0,2	0	**0,3**	0	1	0	-0,4	0	7	7/0,3=23,3 ←
y_3	0	1	0	0	0	0	1	0	0	35	
x_2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	40	
y_5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	25	25/1=25

III итерация – поиск нового базисного решения.

Базисные переменные	z	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	Решение	θ
z	1	-1/3↓	0	0	0	40/3	0	-1/3	0	293.3	
y_1	0	1/3	0	0	1	-10/3	0	1/3	0	50/3	(50/3)·3=50
x_3	0	2/3	0	1	0	10/3	0	-4/3	0	70/3	(70/3)/(2/3)=35
y_3	0	**1**	0	0	0	0	1	0	0	35	35/1=35 ←
x_2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	40	
y_5	0	-2/3	0	0	0	-10/3	0	4/3	1	5/3	

IV итерация – поиск нового базисного решения.

Базисные переменные	z	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	Решение	θ
z	1	0	0	0	0	40/3	1/3	-1/3↓	0	305	
y_1	0	0	0	0	1	-10/3	-1/3	**1/3**	0	5	5/(1/3)=15 ←
x_3	0	0	0	1	0	10/3	-2/3	-4/3	0	0	
x_1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	35	
x_2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	40	40/1=40
y_5	0	0	0	0	0	-10/3	2/3	4/3	1	25	25/(4/3)=18,75

V итерация – поиск нового базисного решения.

Базисные переменные	z	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	Решение	θ
z	1	0	0	0	1	10	0	0	0	310	
y_4	0	0	0	0	3	-10	-1	1	0	15	
x_3	0	0	0	1				0	0	20	
x_1	0	1	0	0				0	0	35	
x_2	0	0	1	0				0	0	25	
y_5	0	0	0	0				0	1	5	

Коэффициенты в z–строке неотрицательны. Следовательно, y_4, x_3, x_1, x_2, y_5 – оптимальный базисный план.

z^*_{max}=310; x^*_1=35, x^*_2=25, x^*_3=20.

Задание № 2

Построить оптимальный план работы двух погрузчиков на двух площадках с помощью графического симплекс-метода линейного программирования

Постановка задачи. Двум погрузчикам разной мощности за 24 часа нужно погрузить на первой площадке V_1 т, на второй – V_2 т. Первый погрузчик на первой площадке может погрузить m_{11} т в час, на второй – m_{12} т в час. Второй – на первой площадке m_{21} т в час, на второй – m_{22} т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т, первым погрузчиком на первой площадке – d_{11} ден. ед., на второй – d_{12} ден. ед., вторым погрузчиком на первой площадке – d_{21} ден. ед., на второй – d_{22} ден. ед. Нужно составить план работы, т.е. найти, какой объём работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Требуется:

1) записать постановку задачи;
2) формализовать задачу посредством задания математической модели;
3) свести задачу с четырьмя неизвестными к задаче с двумя неизвестными;
4) решить задачу, применяя графический метод решения;
5) проанализировать решение, сделать вывод.

Таблица2.1 – Таблица исходных данных

i \ j	$П_1$	$П_2$	Лимит рабочего времени
I погрузчик	m_{11} d_{11} x_{11}	m_{12} d_{12} x_{12}	24
II погрузчик	m_{21} d_{21} x_{21}	m_{22} d_{22} x_{22}	24
Задание	V_1	V_2	

Таблица 2.1 – Варианты заданий исходных данных

№ вар.	V_1	V_2	m_{11}	m_{12}	m_{21}	m_{22}	d_{11}	d_{12}	d_{21}	d_{22}
1.	232	150	10	12	14	11	8	6	12	11
2.	200	170	11	12	14	13	9	7	12	13
3.	210	165	12	12	13	12	10	8	11	12
4.	230	166	11	11	12	11	10	9	11	11
5.	228	168	12	12	12	12	9	10	10	12
6.	215	140	13	13	12	11	10	11	11	11

№ вар.	V_1	V_2	m_{11}	m_{12}	m_{21}	m_{22}	d_{11}	d_{12}	d_{21}	d_{22}
7.	232	170	10	12	13	12	9	8	12	12
8.	230	155	10	12	12	10	7	9	11	10
9.	250	170	10	13	12	11	7	9	10	11
10.	230	180	11	12	13	12	9	9	11	12
11.	228	170	12	12	12	13	10	8	11	13
12.	234	169	11	13	13	12	9	9	12	12
13.	228	168	11	12	12	13	9	7	11	13
14.	245	170	10	13	11	13	8	7	10	13
15.	229	169	11	12	12	11	8	7	11	11
16.	228	167	11	12	12	9	8	9	10	9
17.	230	168	11	12	13	10	9	8	10	10
18.	280	170	10	13	13	13	8	8	11	13
19.	232	168	12	11	12	12	10	7	11	12
20.	230	165	11	12	13	11	8	10	11	11

1. Постановка задачи Двум погрузчикам разной мощности за 24 часа нужно погрузить на первой площадке 230 т, на второй – 168 т. Первый погрузчик на первой площадке может погрузить 10 т в час, на второй – 12 т. Второй – на каждой площадке может погрузить по 13 т в час. Стоимость работ, связанных с погрузкой 1 т, первым погрузчиком на первой площадке – 8 ден. ед., на второй – 7 ден. ед., вторым погрузчиком на первой площадке – 12 ден. ед., на второй – 13 ден. ед. Нужно составить план работы, т.е. найти, какой объём работ должен выполнить каждый погрузчик на каждой площадке, чтобы стоимость всех работ по погрузке была минимальной.

Таблица Исходные данные для задачи

i \ j	$П_1$	$П_2$	Лимит рабочего времени
I погрузчик	10 8 x_{11}	12 7 x_{12}	24
II погрузчик	13 12 x_{21}	13 13 x_{22}	24
Задание	230	168	

Р е ш е н и е . **2.** Обозначим через x_{ij} объём работ (в тоннах) i-го погруз-

чика ($i=1,\ 2$) на j-й площадке ($j=1,\ 2$). Условия задачи занесём в следующую таблицу:
Построим математическую модель задачи. Целевая функция описывает затраты, связанные с выполнением всех работ:

$$\min Z = 8x_{11}+7x_{12}+12x_{21}+13x_{22}.$$

Ограничения на лимиты рабочего времени: $\left.\begin{array}{l} x_{11}/10 + x_{12}/12 \le 24, \\ x_{21}/13 + x_{22}/13 \le 24, \end{array}\right\}$

на необходимость выполнить задание: $\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 230, \\ x_{12} + x_{22} = 168, \end{array}\right\}$

условие неотрицательности: $x_{ij} \ge 0$ ($i, j=1, 2$).

3. Исключаем из модели переменные x_{21} и x_{22}. Из ограничений-равенств имеем $x_{21} = 230 - x_{11}$, $x_{22} = 168 - x_{12}$.

Подставив выражения для x_{21} и x_{22} в ограничения–неравенства и целевую функцию, получим ЗЛП с двумя переменными x_{11} и x_{12}:

$$\min Z = 4944 - 4x_{11} - 6x_{12};$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x_{11} + 5x_{12} \le 1440, \\ x_{11} + x_{12} \ge 86, \\ x_{11} \le 230,\ \ x_{12} \le 168, \\ x_{11} \ge 0,\ \ x_{12} \ge 0. \end{array}\right\}$$

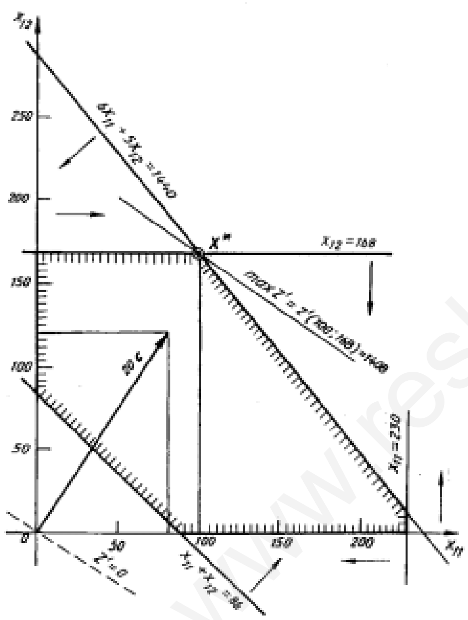


Рис. 1. Графическое решение задачи

Очевидно, что целевая функция $Z = 4944 - 4x_{11} - 6x_{12}$ достигает минимального значения при условии, что $Zr = 4x_{11} + 6x_{12}$ принимает максимальное значение. Имеем задачу:

$$\max Z' = 4x_{11} + 6x_{12};$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x_{11} + 5x_{12} \le 1440, \\ x_{11} + x_{12} \ge 86, \\ 0 \le x_{11} \le 230, \\ 0 \le x_{12} \le 168. \end{array}\right\}$$

4. Графическое решение полученной задачи представлено на рисунке 1.

Функция Zr достигает наибольшего значения при $x^*_{11} = 100$, $x^*_{12} = 168$.

Из выражений для x_{21} и x_{22} получим: $x^*_{21} = 130$, $x^*_{22} = 0$ ($x_{21} = 230 - x_{11}$, $x_{22} = 168 - x_{12}$).

5. Вывод. Согласно полученному оптимальному плану первый погрузчик должен погрузить 100 т на первой площадке и 168 т – на второй, второму погрузчику надлежит погрузить 130 т на первой площадке. Стоимость всех работ составит 3536 ден. ед. ($Z^* = 4944 - 4\cdot100 - 6\cdot168 = 3536$).

Задание № 3

Построить оптимальный транспортировки продукции от поставщиков потребителям

Постановка задачи. Филиалы фирмы A_1, A_2 и A_3 производят однородную (или взаимозаменяемую) продукцию и доставляют её потребителям B_1, B_2, B_3, B_4. В трёх пунктах производства сосредоточен груз в количествах соответственно a_1, a_2, a_3 единиц. Имеющийся груз необходимо доставить потребителям, спрос которых выражается величинами b_1, b_2, b_3, b_4 единиц. Известна стоимость c_{ij} производства и перевозки единицы продукции из i-го (i=1,2,3) пункта отправления в j-тый пункт назначения (j=1,2,3,4). Требуется составить план перевозок, который полностью удовлетворяет спрос потребителей в грузе, и при этом суммарные транспортные издержки минимизируются.

Требуется:

1) записать постановку задачи;
2) установить тип модели транспортной задачи;
3) формализовать задачу посредством задания математической модели;
4) построить начальный план перевозок методом северо-западного угла (или методом минимальной стоимости), определить соответствующие ему затраты на перевозки;
5) методом потенциалов найти оптимальный план и соответствующие ему затраты;
6) проанализировать решение, сделать вывод.

Таблица 3.1 – Варианты исходных данных

Вариант 1		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**2**	**3**	**2**	**4**	30
	2	**3**	**12**	**5**	**1**	40
	3	**7**	**2**	**4**	**6**	20
b_j		20	35	25	10	

Вариант 2		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**12**	**3**	**2**	**4**	10
	2	**7**	**5**	**15**	**1**	40
	3	**13**	**22**	**4**	**6**	20
b_j		25	10	20	15	

Вариант 3		Потребители				a_i
		1	2	3		
Постав-щики	1	**10**	**13**	**2**	**4**	20
	2	**7**	**5**	**15**	**11**	40
	3	**3**	**12**	**4**	**6**	25
b_j		25	15	10	35	

Вариант 4		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**8**	**3**	**20**	**4**	40
	2	**7**	**15**	**5**	**10**	20
	3	**3**	**2**	**4**	**6**	10
b_j		20	10	15	25	

Вариант 5		Потребители				a_i
		1	2	3		
Постав-щики	1	**20**	**3**	**8**	**4**	50
	2	**7**	**15**	**5**	**10**	20
	3	**3**	**9**	**4**	**6**	30
b_j		10	55	15	20	

Вариант 6		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**10**	**3**	**8**	**4**	50
	2	**7**	**15**	**5**	**20**	20
	3	**13**	**9**	**14**	**6**	30
b_j		15	20	10	55	

Вариант 7		Потребители				a_i
		1	2	3		
Постав-щики	1	**15**	**3**	**8**	**4**	15
	2	**7**	**10**	**5**	**15**	30
	3	**13**	**9**	**25**	**6**	10
b_j		25	5	10	15	

Вариант 8		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**15**	**3**	**8**	**14**	40
	2	**17**	**10**	**5**	**12**	50
	3	**20**	**9**	**4**	**6**	35
B_j		25	30	20	50	

Вариант 9		Потребители				a_i
		1	2	3		
Постав-щики	1	**5**	**3**	**8**	**24**	40
	2	**27**	**10**	**5**	**2**	50
	3	**12**	**9**	**4**	**6**	35
b_j		50	30	25	20	

Вариант 10		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**6**	**4**	**12**	**3**	15
	2	**5**	**6**	**7**	**18**	40
	3	**9**	**15**	**5**	**14**	25
b_j		30	15	25	10	

Вариант 11		Потребители				a_i
		1	2	3		
Постав-щики	1	**60**	**45**	**85**	**30**	200
	2	**55**	**65**	**70**	**80**	50
	3	**75**	**50**	**35**	**37**	120
b_j		150	45	75	50	

Вариант 12		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**50**	**45**	**120**	**90**	35
	2	**55**	**65**	**42**	**80**	100
	3	**70**	**50**	**35**	**40**	250
b_j		100	100	50	135	

Вариант 13		Потребители				a_i
		1	2	3		
Постав-щики	1	**60**	**70**	**15**	**30**	30
	2	**55**	**65**	**42**	**80**	50
	3	**40**	**50**	**35**	**37**	100
b_j		50	20	40	70	

Вариант 14		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**60**	**40**	**120**	**30**	37
	2	**55**	**65**	**42**	**80**	39
	3	**45**	**75**	**35**	**40**	194
b_j		45	70	65	90	

Вариант 15		Потребители				a_i
		1	2	3		
Постав-щики	1	**60**	**45**	**10**	**30**	300
	2	**55**	**65**	**42**	**80**	50
	3	**70**	**50**	**35**	**65**	150
b_j		100	50	200	150	

Вариант 16		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**60**	**40**	**120**	**30**	50
	2	**55**	**65**	**48**	**90**	200
	3	**45**	**50**	**35**	**70**	150
b_j		200	70	30	100	

Вариант 17		Потребители				a_i
		1	2	3		
Постав-щики	1	**60**	**45**	**90**	**25**	30
	2	**55**	**65**	**42**	**80**	150
	3	**40**	**50**	**135**	**37**	300
b_j		80	120	180	100	

Вариант 18		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**60**	**45**	**120**	**30**	150
	2	**55**	**65**	**42**	**85**	30
	3	**45**	**75**	**35**	**40**	300
b_j		100	80	180	120	

Вариант 19		Потребители				a_i
		1	2	3		
Постав-щики	1	**90**	**45**	**100**	**30**	300
	2	**55**	**65**	**42**	**80**	50
	3	**40**	**50**	**35**	**37**	150
b_j		170	100	200	30	

Вариант 20		Потребители				a_i
		1	2	3	4	
Постав-щики	1	**60**	**45**	**120**	**30**	260
	2	**55**	**70**	**42**	**88**	40
	3	**45**	**50**	**35**	**40**	200
b_j		200	100	30	170	

Транспортная задача является специальным типом задач линейного программирования. Экономическая постановка этой задачи следующая. Имеется m поставщиков и n потребителей некоторой продукции. Заданы тарифы (стоимость) перевозок единицы продукции от поставщиков к потребителям, известны объемы запасов у поставщиков и потребности каждого потребителя в продукции.

Требуется составить план поставок продукции от поставщиков к потребителям так, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальной.

Математическая постановка этой задачи имеет вид

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} X_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j,\ j = 1,2,...,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i,\ i = 1,2,...,m, \tag{4.24}$$

$$X_{ij} \geq 0.$$

Здесь X_{ij} – объем, c_{ij} – тариф поставки продукции от i-го поставщика к j-му потребителю, b_j – потребности потребителей в продукции, ai - запасы продукции у поставщиков.

Видно, что (4.24) является задачей линейного программирования со специальной матрицей. В задаче (4.24) имеется mn неизвестных X_{ij} и $m+n$ уравнений.

Решение транспортной задачи называется *оптимальным планом перевозок (поставок) продукции.*

Задача (4.24) называется *сбалансированной (закрытой),* если суммарный объем потребностей равен суммарному объему предложения продукции, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{4.25}$$

Если условие (4.25) не выполняется, то задача называется открытой. Для решения открытую задачу преобразуют в закрытую. Для этого в задачу вводят либо фиктивного поставщика недостающего объема продукции (если потребности больше предложения), либо фиктивного потребителя лишней продукции (если предложение больше потребностей), тарифы которых полагаются равными нулю.

При решении задачи используется свойство, которое состоит в том, что ранг матрицы A задачи (4.24) на единицу меньше числа уравнений $r(A)=m+n-1$. С учетом этого число ненулевых переменных $X_{ij}>0$ в опорном плане будет не больше ($m+n-1$).

Если число ненулевых X_{ij} в опорном плане равно (m+n-1), то план называется *невырожденным,* иначе – *вырожденным.*

Для решения задачи (4.24) составляется табл.4.4.

Таблица 4.4

Поставщики	Потребители				Запасы продукции	Индексы U
	1	2	…	n		
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1	
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2	

…..	…	…	…	…	…	
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	a_m	
Потребности в продукции	b_1	b_2	…	b_n		
Индексы V						

В случае открытой задачи в таблицу вводят либо фиктивного поставщика, либо фиктивного потребителя, с целью получения равенства (4.25), с соответствующим объемом продукции. Поэтому будем считать, что в таблице выполняется соотношение (4.25).

Алгоритм решения задачи (4.24) состоит из двух частей: построение начального опорного плана (набора чисел $X_{ij}>0$) удовлетворяющих соотношениям (4.24)) и построение оптимального плана.

При решении первой задачи осуществляют заполнение табл/ 4.4, а при решении второй задачи ее преобразование по определенному алгоритму.

Построения начального плана перевозок

Есть несколько методов построения начального опорного плана: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и другие.

Рассмотрим метод минимального элемента

1. Выбирают клетку табл. 4.4 с минимальным значением c_{ij}, в которую записывают min (a_i, b_j).

2. Из запаса i-го поставщика и потребностей j-го потребителя вычитают эту величину. Из дальнейших рассмотрений исключают поставщика, запасы которого исчерпаны и потребителя, спрос которого полностью удовлетворен.

3. Повторяют шаг 1 до тех пор, пока все запасы продукции не будут исчерпаны.

Метод северо-западного угла отличается от метода минимального элемента тем, что клетки заполняют последовательно по строкам, начиная с элемента X_{11}.

Построение оптимального плана

Для построения оптимального плана перевозок используется метод потенциалов, который является формой симплекс-алгоритма.

Здесь могут быть два варианта.

Вариант 1. Если опорный план вырожден, то в свободные клетки с минимальными значениями C_{ij} записывают перечеркнутые нули $\cancel{0}$, (фиктивные поставки) пока не получат невырожденный план. Число $\cancel{0}$ считается очень малой положительной величиной.

Дальше задача решается методом потенциалов.

Вариант 2. Опорный план невырожден, поскольку количество ненулевых X_{ij} равно $m+n-1$.

1. Для $X_{ij}>0$ составляется система уравнений:

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{4.26}$$

Неизвестные u_i, v_j называются индексами (потенциалами).

2. Поскольку в системе (4.26) количество уравнений на единицу больше числа неизвестных, то одному неизвестному надо присвоить произвольное значение (обычно 0). Система (4.26) решается последовательно подстановкой полученных значений в следующие уравнения.

После решения системы (4.26) для свободных клеток таблицы определяют потенциалы

$$S_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j) \qquad (4.27)$$

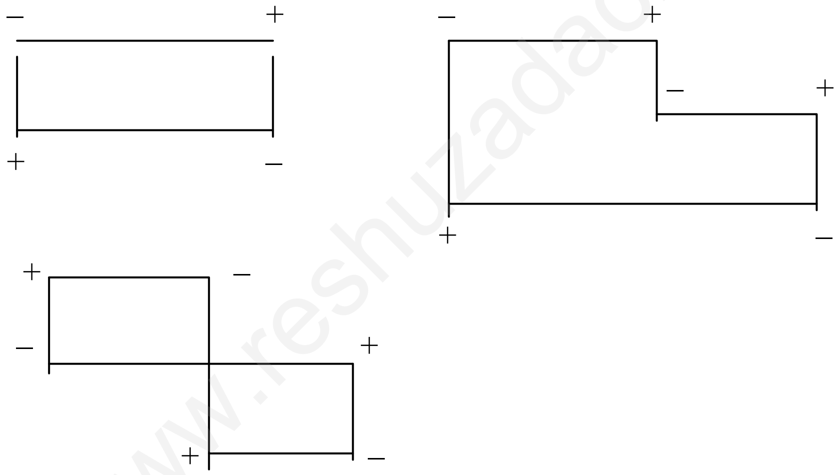
3. Если все $Sij \geq 0$, то полученный план оптимальный. Иначе выбирают клетку с минимальным Sij<0.Начиная с выбранной клетки матрицы перевозок, стоится замкнутый прямоугольный цикл (цепочка) с вершинами в заполненных клетках (в том числе символом $\boldsymbol{\theta}$).

Выбранной клетке присваивается знак "+", следующей вершине цикла по (или против) часовой стрелке– знак "–", далее "+", "–", и т.д. по циклу. Данная цепочка знаков обязательно заканчивается знаком "–". Цепочка называется вырожденной, если она состоит из одного элемента.

Среди клеток цикла, отмеченных знаком "–", выбирается клетка с наименьшим значением переменной X_{ij}, затем из нагрузки клеток , отмеченных знаком "–", вычитают это значение, а клетки , отмеченных знаком "+", прибавляют это значение . Получают новый опорный план, который проверяют на невырожденность и в случае необходимости выполняют переход к невырожденному по варианту 1.

После этого осуществляется переход к шагу 1.

Пример 4.4. В данном примере представлены возможные типы циклов.



Пример 4.5. Решить транспортную задачу, заданную матрицей вида

Поставщики	Потребители				Индексы U
	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 5	2 25	6	3 10	1
35	7 35	3	5	4	4
Индексы V	3	1	1	2	

Решение. Проверкой установлено, что задача является закрытой.

1. Опорный план построен методом минимального элемента, начиная с X_{13}=20 с минимальным значением C_{13}=1. Полученный опорный план невырожденный.

2. Для ненулевых X_{ij} записывается система индексных уравнений

$$U_1 + V_3 = 1;\ \ U_1 + V_4 = 2;\ \ U_2 + V_1 = 4;$$
$$U_2 + V_2 = 2;\ \ U_2 + V_4 = 3;\ U_3 + V_1 = 7.$$

Полагая U_1=0, находим остальные индексы, которые записывают в индексные строки таблицы.

3. Определяем потенциалы свободных клеток: S_{11}=5 –(0+3)=2; S_{12}=4 – (0+1)=3; S_{23}=6 – (1+1)=4; S_{32}=3 – (4+1)= –2; S_{33}=5 – (4+1)=0; S_{34}=4 – (4+2)= –2.

Полученный план неоптимальный, т.к. есть отрицательные потенциалы. Выбираем наименьший потенциал. В этом случае берем клетку (3;2).

4. Строим замкнутый цикл (3;2), (3;1), (2;1), (2;2). Клетке (3;2) присвоим знак “+”, следующей “–“ и т.д. по циклу. Выбираем среди отрицательных клеток минимальное значение X_{ij}, min (25,35)=25. К положительным клеткам цикла добавляем 25, а из отрицательных клеток вычитаем 25.

Получаем новую таблицу, план в которой является невырожденным.

Поставщики	Потребители				Индексы U
	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 30	2	6	3 10	1
35	7 10	3 25	5	4	4
Индексы V	3	1	1	2	

Находим индексы и записываем их в индексные сроки. Повторяем алгоритм. Получаем новую таблицу, план которой является вырожденным, поскольку количество ненулевых переменных 5 < 6 = $m + n$ – 1= 3+4-1

Поставщики	Потребители				Индексы U
	40	25	20	50	
60	5	4	1 20	2 40	0
40	4 40	2 **θ**	6	3	1
35	7	3 25	5	4 10	2
Индексы V	3	1	1	2	

Помещаем в клетку (2;2) символ **θ.** Вычисляем новые значения индексов.

Находим потенциалы свободных клеток:

S_{11}=5–3=2, S_{12}=4–1=3, S_{23}=6–2=3, S_{24}=3–3=0, S_{31}=7–5=2, S_{32}=5–3=2.

Потенциалы всех свободных клеток неотрицательны, поэтому полученный план оптимальный.

Задание № 4

Построить оптимальный план доставки груза от поставщиков потребителям как транспортную задачу в сетевой форме

Постановка задачи. Имеется сеть (рисунок 4.1) с десятью вершинами. Часть вершин (m) обозначают поставщиков продукции, остальные ($n = 10 - m$) – потребителей. Рёбра, соединяющие вершины, определяют возможные пути следования груза, а цифры на рёбрах – расстояния между станциями. Цифры со знаком «+» («плюс») у вершин означаютресурсы поставщиков, а со знаком «–» («минус») – потребности получателей. Необходимо прикрепить поставщиков к потребителям так, чтобы пробеги были наименьшими.

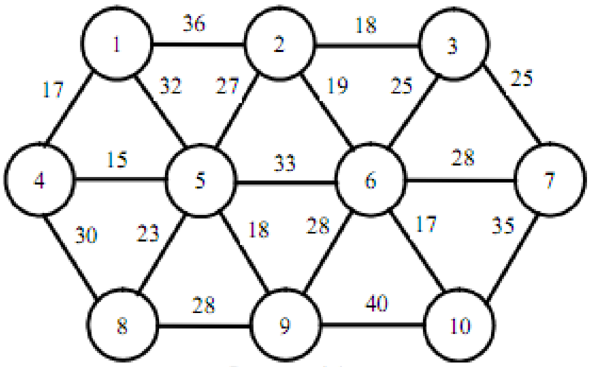


Рисунок 4.1

Таблица 4.1 – Варианты исходных данных (избытки и недостатки груза у поставщиков и потребителей)

№ варианта	Номер вершины сети									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	–60	–50	70	100	–10	–10	100	–20	–80	–40
2	–15	275	–20	–70	–10	–50	25	–100	–20	–15
3	–10	–90	150	–30	–20	–70	–50	200	–30	–50
4	–30	100	–10	–40	100	–50	100	–20	–60	–90
5	200	–120	–20	–50	–40	–30	–20	100	20	–40
6	–55	–60	150	–30	250	–15	–90	–100	–10	–40
7	–100	70	330	–20	–100	–40	–10	–10	–20	–100
8	–50	–60	–100	–60	50	–10	250	–30	100	–90
9	–80	200	–40	–95	–10	50	–10	100	–15	–100
10	100	–20	–60	–30	–50	170	25	–5	–10	–120
11	–10	200	–100	150	–50	–40	–22	–10	–18	–100
12	120	–90	140	–40	–70	–10	140	–60	–90	–40
13	–50	–50	–80	–80	–20	130	–75	150	–35	110
14	–30	120	–20	–10	140	–100	–50	–200	160	–10
15	–20	–30	250	150	–30	–40	–10	–20	–180	–70
16	–100	–70	–90	210	–90	–65	–85	200	–100	190
17	–45	–40	–40	–55	–70	–70	150	–30	100	100
18	–50	–50	80	120	–45	–30	150	–50	–55	–70
19	–100	–90	–70	200	–85	–65	–90	210	–100	190
20	130	–45	150	70	–45	–45	–45	–60	–50	–60

2.1.3 Постановка транспортной задачи в сетевой форме

Если задано множество точек плоскости (пространства) и указаны связи между ними, то говорят, что задан ***граф***. Если условия транспортной задачи заданы в форме графа, вершины которого моделируют поставщиков и потребителей, а ребра – связывающие их дороги, и одновременно с этим указаны запасы a_i груза и потребности b_j в нём, а также числа c_{ij}, являющиеся показателями принятого в задаче критерия оптимальности (тарифы, расстояния и т. п.), то говорят, что ***транспортная задача представлена в сетевой форме***.

Запасы груза в вершинах (кружках) будем записывать положительными, а потребности – отрицательными числами. На графе могут быть изображены вершины, в которых нет ни поставщиков, ни потребителей. Наличие таких вершин не влияет на способ решения, если считать, что запасы (потребности) груза в них равны нулю. Такие вершины называют ***нулевыми***. Алгоритм решения транспортной задачи в сетевой форме рассмотрим на конкретном примере в подразделе 2.3.

2.3 Решение задачи построения оптимального плана перевозок однородного груза в сетевой форме

При выполнении задания контрольной работы по данному разделу требуется:

1) записать постановку задачи;

2) установить тип модели транспортной задачи;

3) построить начальный план перевозок и определить его общую стоимость;

4) методом потенциалов найти оптимальный план перевозки груза по сети и определить его общую стоимость;

5) проанализировать решение, сделать вывод.

1 Постановка задачи. Задана сеть путей сообщения (рисунок 2.1, а); количественное распределение отправления a_i и прибытия b_j однородного груза по транспортным пунктам; значения критерия оптимальности – тарифы перевозок c_{ij} по всем звеньям (участкам) сети. Построить план перевозок однородного груза, при котором минимизируются транспортные затраты.

2 Установим тип модели транспортной задачи. У поставщиков I и II сосредоточено $30+70=100$ ед. груза. Получателям требуется $20+40+40=$ $=100$ ед. В данном случае запас совпадает со спросом, следовательно, рассматриваемая задача является задачей закрытого типа. Тарифы перевозок известны, это числа, которыми нагружены соответствующие рёбра сети.

3 Построим исходный опорный (начальный базисный) план. Поставки

груза из вершины в вершину будем обозначать стрелками с указанием объемов поставок.

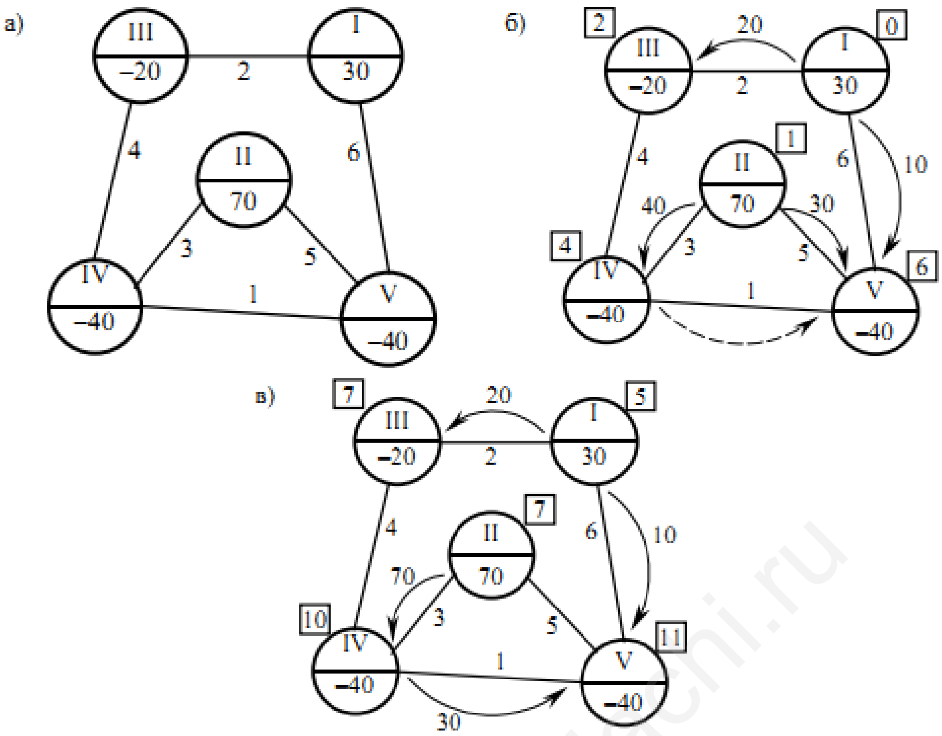


Рисунок 2.1 – Построение оптимального плана перевозок на сети путей сообщения

Опорный план должен удовлетворять следующим требованиям: 1) все запасы должны быть распределены, а потребности удовлетворены; 2) к каждой вершине должна подходить или выходить из нее хотя бы одна стрелка; 3) общее количество стрелок должно быть на единицу меньше числа вершин; 4) стрелки не должны образовывать замкнутый контур. План распределения груза на рисунке 2.1, б отвечает этим требованиям.

4 Далее следует проверить план на оптимальность. Для этого вычислим специальные показатели, называемые ***потенциалами***. Делается это так. Одной из вершин (например, вершине I) присвоим некоторое определенное значение потенциала (например, равное 0). Для большей наглядности потенциалы будем заключать в рамки. После этого, двигаясь по стрелкам, определяем потенциалы остальных вершин, руководствуясь правилом: если стрелка выходит из вершины, то к потенциалу этой вершины прибавляем показатель c_{ij} критерия оптимальности, если же направление стрелки противоположно, то c_{ij} вычитаем.

В нашем примере потенциал вершины III – $0+2=2$ (стрелка выходит из вершины I), потенциал вершины V – $0+6=6$ (стрелка выходит из вершины I), потенциал вершины II – $6-5=1$ (стрелка входит в вершину V), потенциал вершины IV – $1+3=4$ (стрелка выходит из вершины II).

После вычисления потенциалов находят так называемые ***оценки (характеристики) ребер*** без стрелок по следующему правилу: из большего потенциала вычитается меньший, а разность вычитается из показателя c_{ij}, отвечающего данному ребру. Если все ребра без стрелок имеют неотрицательные характеристики, то составленный план является ***оптимальным***.

Вычислим оценки s_{ij} ребер без стрелок в нашем примере: $s_{34}=4-(4-2)=2$, $s_{45}=1-(6-4)=-1$. Итак, ребро (IV, V) обладает отрицательной оценкой. Значит, план не является оптимальным.

Для улучшения плана надо «загрузить» то ребро без стрелки, которому соответствует отрицательная оценка. Если таких ребер несколько, то выбирается ребро с наибольшей по абсолютной величине отрицательной оценкой и к нему подрисовывается новая стрелка. При этом образуется замкнутый контур из стрелок. Новая стрелка направляется от вершины с меньшим потенциалом к вершине с большим потенциалом.

В нашем примере новая стрелка направлена от вершины IV к вершине V (на рисунке 2.1, б она показана штриховой линией).

Для определения объема поставки для «загружаемого» ребра рассматриваются все стрелки образовавшегося контура (если на сети – опорный план, то такой контур всегда существует, и притом только один!), имеющие направление, противоположное направлению новой стрелки, и среди них находится стрелка с наименьшей поставкой λ. Выбранная таким образом величина прибавляется ко всем поставкам у стрелок, имеющих то же направление, что и новая стрелка, и вычитается из поставок у стрелок, имеющих противоположное направление. Поставки у стрелок, не входящих в контур, сохраняются неизменными. Стрелка, по которой выбрано число λ, ликвидируется, и общее число стрелок остается прежним.

Преобразованный описанным способом опорный план приведен на рисунке 2.1, в. Новый опорный план исследуется на оптимальность подобно предыдущему. Пусть потенциал вершины IV равен, например, 10, тогда после вычисления остальных потенциалов для ребер без стрелок получим такие оценки: $s_{34}=4-(10-7)=1$, $s_{25}=5-(11-7)=1$. Они положительны, значит, опорный план на рисунке 2.1, в оптимален. Остается вычислить значения транспортных расходов: $20\cdot 2+10\cdot 6+30\cdot 1+70\cdot 3=340$.

5 Вывод. Построен оптимальный план перевозок груза (см. рисунок 2.1, в), при котором затраты на перевозки будут минимальны и составят 340 ден. ед.

Замечание. Если при построении или при преобразовании плана количество стрелок окажется недостаточным, то надо дорисовать недостающее число стрелок, снабдив их нулевыми поставками. Направления стрелок выбираются произвольно, однако они не должны образовывать замкнутый контур совместно с ранее построенными стрелками.

Задание 5

Решить задачу распределения инвестиций между предприятиями методом динамического программирования

Постановка задачи. Производственное объединение выделяет четырём входящим в него предприятиям кредит в сумме 100 млр ден. ед. для расширения производства и увеличения выпуска продукции. По каждому предприятию известен возможный прирост $z_i(u_i)$ (i=1,...,4) выпуска продукции (в денежном выражении) в зависимости от выделенной ему суммы u_i. Выделяемые суммы кратны 20 млр ден. ед. При этом предполагаем, что прирост выпуска продукции на i-м предприятии не зависит от суммы средств, вложенных в другие предприятия, а общий прирост выпуска продукции в производственном объединении равен сумме приростов, полученных на каждом предприятии объединения. Распределить кредит таким образом, чтобы общий прирост выпуска продукции на производственном объединении был максимальным.

Требуется:

1) записать постановку задачи;
2) формализовать задачу в терминах динамического программирования;
3) решить задачу, применяя математический аппарат динамического программирования;
4) проанализировать решение, сделать вывод.

12

Таблицы 1.1 – Варианты исходных данных (прирост выпуска продукции на предприятиях)

Варианты 1-10

Номер варианта	Номер предприятия	Прирост выпуска продукции на i-ом предприятии $z_i(u_i)$, млр ден. ед.	Часть средств, выделяемых предприятием (д. е.)				
			20	40	60	80	100
1			18	36	45	72	98
2			16	28	52	70	92
3			12	44	68	80	101
4			15	36	64	82	99
5	№ 1	$z_1(u_1)$	17	35	56	79	112
6			20	40	75	106	135
7			19	41	76	112	138
8			23	45	70	87	104
9			28	46	71	94	101
10			18	49	76	92	125
1			18	37	58	81	108
2			19	53	93	100	142
3			17	38	56	74	92
4			23	46	62	88	102
5	№ 2	$z_2(u_I)$	16	37	58	92	105
6			25	35	73	84	116
7			30	40	59	88	119
8			24	57	80	104	130
9			20	54	79	98	139
10			28	52	81	100	136
1			29	61	82	103	137
2			26	54	78	96	120
3			32	52	74	93	124
4			20	40	61	95	112
5	№ 3	$z_3(u_I)$	24	50	88	109	138
6			23	45	62	101	120
7			18	34	70	99	127
8			25	48	87	119	134
9			27	52	84	105	130
10			22	48	86	102	136
1			26	54	88	128	146
2			22	67	80	102	137
3			25	50	75	120	145
4			28	46	78	95	116
5	№ 4	$z_4(u_I)$	14	15	85	102	118
6			20	54	66	101	125
7			28	50	99	107	132
8			15	60	94	115	129
9			32	48	90	100	130
10			30	40	70	94	127

Варианты 11-20

Номер варианта	Номер предприятия	Прирост выпуска продукции на i-ом предприятии $z_i(u_i)$, млр ден. ед.	Часть средств, выделяемых предприятием (д. е.)				
			20	40	60	80	100
1	№ 1	$z_1(u_i)$	9	48	24	38	50
2			9	17	29	38	47
3			7	29	37	41	59
4			9	20	35	44	57
5			9	18	29	41	60
6			11	21	40	54	62
7			12	26	40	60	72
8			14	24	37	45	58
9			16	28	36	49	60
10			12	28	39	47	69
1	№ 2	$z_2(u_i)$	11	19	30	44	59
2			11	34	46	53	75
3			9	19	28	37	46
4			12	25	34	46	57
5			8	19	30	47	58
6			13	20	42	45	61
7			16	21	36	49	63
8			12	30	42	58	71
9			10	29	42	50	74
10			14	26	40	51	68
1	№ 3	$z_3(u_i)$	16	32	40	57	70
2			13	28	37	49	61
3			17	27	37	48	66
4			11	20	32	48	61
5			12	25	51	58	69
6			12	22	34	55	60
7			9	17	35	51	65
8			13	25	45	62	70
9			15	27	46	58	65
10			11	24	43	51	68
1	№ 4	$z_4(u_i)$	13	27	44	69	73
2			12	35	40	54	73
3			16	30	42	65	81
4			14	23	40	50	58
5			7	185	52	59	60
6			10	27	33	57	69
7			15	25	51	62	76
8			7	33	46	60	68
9			17	23	38	53	67
10			16	21	36	49	72

1. **Постановка задачи** Производственное объединение выделяет четырём входящим в него предприятиям кредит в сумме 100 млн. ден. ед. для расширения производства и увеличения продукции. По каждому предприятию известен возможный прирост $z_i(u_i)$ $(i=1,\dots n)$ выпуска продукции (в денежном выражении) в зависимости от выделенной ему суммы u_i. Выделяемые суммы кратны 20 млн ден. ед. (таблица 1.1). Предполагается, что прирост выпуска продукции на i-м предприятии не зависит от суммы средств, вложенных в другие предприятия, а общий прирост выпуска в производственном объединении равен сумме приростов, полученных на каждом предприятии объединения. Требуется так распределить кредит между предприятиями, чтобы суммарный прирост выпуска продукции на производственном объединении был максимальным. Используя выполненное решение, найти оптимальное распределение 40, 60 и 80 млн.ден.ед. между предприятиями объединения.

Таблица 1.1

Средства u_i, млн.ден.ед.	Предприятие			
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
	Прирост выпуска продукции на предприятиях $z_i(u_i)$, млн. ден. ед			
	$z_1(u_i)$	$z_2(u_i)$	$z_3(u_i)$	$z_4(u_i)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Решение. В рассматриваемой задаче физической системой S является производственное объединение, а в качестве шага процесса принятия решения следует понимать назначение той или иной суммы средств конкретному предприятию: на первом шаге – первому предприятию, на втором – второму и т.д. В рассматриваемом случае процесс разбивается на четыре шага.

Приступая к решению задачи, необходимо выяснить, какой практический смысл имеют математические символы, в которых записан общий принцип оптимальности Беллмана, применительно к данной задаче.

Состояние производственного объединения (состояние системы S) будет характеризоваться в каждый данный момент конкретным вариантом распределения кредита между предприятиями. Состояние производственного объединения (состояния системы S) перед выбором размера суммы, ассигнуемой i-му предприятию (перед i-м шагом), определяется величиной остатка кредита после выделения средств другим i-1 предприятиям (на предшествующих шагах). Поскольку возможны различные варианты распределения средств (от 0 до 100 млн. ден. ед.), то и состояния производственного объединения перед i-м шагом могут быть различными, и каждое из них будет характеризоваться соответствующим значением суммы. Совокупность этих значений и составит множество x_{i-1} Этим же символом обозначим и множество состояний системы перед i-м шагом.

Принятое на i-м шаге решение (управление) о сумме средств, выделяемых i-му предприятию, будет зависеть от величины остатка кредита к моменту выделения средств i-му предприятию (к началу i-го шага), а потому может принимать различные значения, совокупность которых и составляет множество u_i. Этим же символом будем обозначать и множество управлений на i-м шаге. В соответствии с условием задачи элементами множества u_i будут числа 0, 20, 40, 60, 80, 100.

Состояние производственного объединения после выделения средств i-му предприятию (состояние системы S в конце i-го шага) определяется величиной нераспределённой суммы средств, которая может быть различной в зависимости от выделенной i-му предприятию суммы (от выбранного управления из множества u_i), а потому и состояние объединения (состояние системы S) будет характеризоваться одним из элементов множества состояний в конце i-го шага, т.е. множества x_i. В условиях данной задачи будут числа 0, 20, 40, 60, 80, 100.

Целевая функция $z_i(x_{i-1},u_i)$ означает прирост на i-м предприятии при условии, что величина остатка кредита перед выделением ему выбранной из множества u_i суммы определялась элементом множества x_{i-1}. Выражение $F_i(x_{i-1},u_i)$ означает максимальный суммарный прирост, полученный на всех предприятиях, начиная с i-го, при условии, что перед выделением этому предприятию некоторой допустимой суммы, равной элементу множества u_i, остаток кредита характеризовался некоторым элементом множества x_{i-1}.

Процедуру условной оптимизации начинаем с четвёртого шага, на котором средства выделяются четвёртому предприятию. При N=4 с учётом максимизации целевой функции будем использовать следующее функциональное уравнение:

$$F_4(x_3,u_4)=\max_{u_4} z_4(x_3,u_4). \qquad (1.1)$$

Как видно из таблицы 1.1, все функции $z_i(u_i)$ (i=1,...,4) однозначны: каждому значению суммывыделенных средств соответствует единственное значение прироста выпуска продукции, а поэтому $F_4(x_3,u_4)=z_4(x_3,u_4)$. Состояние производственного обьдинения (состояние системы S) перед выделением средств четвёртому предприятию (перед четвёртым шагом) точно не определено, поэтому необходимо проанализировать все допустимые варианты (состояния из множества x_3). Это действительно так, поскольку пока неизвестны управления (величины ассигнований), выбиравшиеся ранее на первых шагах (для первых трёх предприятий). Подлежат анализу все элементы множества x_3 состояний: 0, 20, 30, 40, 60,80,100 и множества u_4 управлений: 0, 20, 30, 40, 60,80,100. Результаты условной оптимизации четвёртого шага приведены в таблице 1.2, где для каждого состояния из множества x_3 указаны единственное условно-оптимальное управление из множества u_4 и соответствующая условно-оптимальная величина F_4 прироста выпуска продукции, совпадающая на этом шаге с непосредственным приростом z_4.

Таблица 1.2

x_3	u_4	z_4	F_4
0	0	0	0
20	20	16	16
40	**40**	37	37
60	60	46	46
80	80	63	63
100	100	80	80

На втором этапе условной оптимизации исследуем третий шаг, для которого основное функциональное уравнение при i=3 имеет вид

$$F_3(x_2,u_3)=\max_{u_3}(z_3(x_2,u_3)+F_4(x_3)). \qquad (1.2)$$

Множества x_2 и x_3 состоят из элементов 0, 20, 30, 40, 60,80,100, множество u_3 допустимых управлений – из техже элементов. Для каждого допустимого состояния надлежит выбрать условно-оптимальное управление и найти условно-оптимальную величину прироста выпуска продукции. Так, если на момент выделения средств третьему предприятию в наличии имеется 20 млн ден. ед., то третьему предприятию можно выделить либо 0, либо 20 млн ден. ед. Используя условия задачи (таблица 1.1) и результаты условной оптимизации четвёртого шага (таблица 1.2), на основе равенства (1.2) находим

$$F_3(x_2,u_3)=\max_{0,20}(z_3(20,0)+F_4(20),z_3(20,20)+F_4(0))=$$

$$=\max_{0,20}(0+16,11+0)=16.$$

Отсюда видно, что максимальная величина прироста в рассматриваемом варианте составляет 16 млн ден. ед. И достигается в том случае, когда третьему предприятию средства не выделяются (прирост обеспечивается только четвёртым предприятием). Итак, если к моменту выделения средств третьему предприятию имеется 20 млн ден. ед., то условно-оптимальным управлением на третьем шаге будет выделение третьему предприятию суммы 0 млн ден. ед., при этом условно-оптимальное значение целевой функции равно 16.

Аналогичным образом осуществляется выбор условно-оптимальных управлений для всех остальных допустимых состояний из множества x_2. Например, если на момент выделения средств третьему предприятию имеется 60 млн ден. ед., то этому предприятию можно выделить либо 0, либо 20, либо 40, либо 60 млн ден. ед. Применяя равенство (1.2) получаем

$$F_3(x_2,u_3) == \max_{0,20,40,60}(0+46{,}11+37{,}36+16{,}45+0) = 52.$$

Из этого равенства видно, что максимальное значение в 52 млн ден. ед. Достигается в случае, если третьему предприятию будет выделено 40 млн ден. ед. Это и есть этом условно-оптимальное управление для рассмотренного варианта на третьем шаге. По аналогии находятся условно-оптимальные управления привыделении 80 млн ден. ед. и 100 млн ден. ед. Все вычисления для третьего шага приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

x_2	u_3	x_3	z_3	F_4	z_3+F_4	F_3
0	0	0	0	0	0	0
20	0	20	0	16	16	16
	20	0	11	0	11	–
40	0	40	0	37	37	37
	20	20	11	16	27	–
	40	0	36	0	36	–
60	0	60	0	46	46	–
	20	40	11	37	48	–
	40	20	36	16	52	52
	60	0	45	0	45	–
80	0	80	0	63	63	–
	20	60	11	46	57	–
	40	**40**	36	37	73	73
	60	20	45	16	61	–
	80	0	60	0	60	–

100	0	100	0	80	80	–
	20	80	11	63	74	–
	40	60	36	46	82	82
	60	40	45	37	82	82
	80	20	60	16	76	–
	100	0	77	0	77	–

Аналогично выполняются расчёты для i=2 и i=1. Результаты приведены в таблицах 1.4 и 1.5 соответственно. В этих таблицах сохранены только условно-оптимальные управления, а все заведомо невыгодные варианты опущены.

Таблица 1.4

x_1	u_2	x_2	z_2	F_3	z_2+F_3	F_2
0	0	0	0	0	0	0
20	0	20	0	16	16	16
40	0	40	0	37	37	37
60	0	60	0	52	52	52
80	0	80	0	73	73	73
100	20	80	12	73	85	85

Таблица 1.5

x_1	u_2	x_2	z_2	F_3	z_2+F_3	F_2
0	0	0	0	0	0	0
20	0	20	0	16	16	16
40	0	40	0	37	37	37
60	0	60	0	52	52	52
80	0	80	0	73	73	73
100	0	100	0	85	85	85

<u>Этап безусловной оптимизации</u> После завершения условной оптимизации переходим к безусловной оптимизации – поиску наиболее выгодного распределения кредита между предприятиями. Обращаемся к таблице 1.5, так как она соответствует первому шагу. Из этой таблицы видно, что при кредите в 100 млн. ден. ед. максимальный прирост выпуска продукции на всех четырёх предприятиях составляет 85 млн. ден. ед. (см. столбец F_1), если первому предприятию средств не выделять (см. столбец u_1). Остаток кредита 100-0=100 (см. столбец x_1) подлежит опти-

мальному распределению между остальными тремя предприятиями. Из таблицы 1.4 следует, что из 100 млн ден. ед. (см. столбец x_1) необходимо распределить между оставшимися двумя предприятиями. Из таблицы 1.3 находим, что из 80 млн ден. ед. (см. столбец x_2) третьему предприятию надо выделить 40 млн ден. ед. (см. столбец u_3) после чего остаётся 80-40=40 млн ден. ед. (см. столбец x_3). Наконей, из таблицы 1.2 следует, что последние 40 млн ден. ед. (см. столбец x_3) ассигнуются четвёртому предприятию (см. столбец u_4). Найденное оптимальное распределение кредита можно записать в виде вектора $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*) = (0;20;40;40)$. Именно такое распределение обеспечивает производственному объединению максимальный прирост выпуска продукции в 85 млн ден. ед.

Решив задачу о нахождении оптимального распределения 100 млн ден. ед. между четырьмя предприятиями, мы попутно можем получить оптимальное распределение кредита в 20, 40, 60 и 80 млн ден. ед. между теми же предприятиями. Эти распределения можно найти по таблицам 1.2-1.5, пользуясь рассмотренной методикой. Так, например, оптимальное распределение 60 млн ден. ед. по предприятиям обеспечивающее объединению максимальный прирост выпуска продукции в 52 млн ден. ед. следующее: $u_1^* = 0, u_2^* = 0, u_3^* = 40, u_4^* = 20$.

Задание 6

Методические указания

Сетевой моделью называется экономико-математическая модель, отражающая весь комплекс работ и событий, связанных с реализацией проекта в их логической и технологической последовательности и связи.

Основные понятия сетевой модели: *событие, работа, путь*.

Работа характеризует любое действие, требующее затрат времени или ресурсов.

Событиями называются начало или завершение одной или нескольких работ.

Путь – цепочка следующих друг за другом работ (дуг), соединяющих начальную и конечную его вершины.

При расчетах для сетевой модели определяются следующие характеристики ее элементов:

Характеристики событий

1. *Ранний срок свершения события*

$$t_p(0) = 0, \qquad (2.1)$$

$$t_p(j) = max_i \{t_p(i) + t(ij)\},\ \ j = 1 \div N \qquad (2.2)$$

характеризует самый ранний срок завершения всех путей в него входящих. Этот показатель определяется «прямым ходом» по графу модели, начиная с начального события сети.

2. *Поздний срок свершения события*

$$t_n(N) = t_p(N), \qquad (2.3)$$

$$t_n(i) = min_j \{t_n(j) - t(ij)\},\ \ i = 1 \div N\text{-}1 \qquad (2.4)$$

характеризует самый поздний срок, после которого остается ровно столько времени, сколько требуется для завершения всех путей следующих за этим событием. Этот показатель определяется “обратным ходом” по графу модели, начиная с завершающего события сети.

3. *Резерв времени события*

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i) \qquad (2.5)$$

показывает, на какой максимальный срок можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения всего комплекса работ.

Характеристики работы (i,j)

1. *Ранний срок начала работ* $t_{рн}(i,j)=t_р(i)$. (2.6)

2. *Ранний срок окончания работы* $t_{ро}(i,j)= t_{рн}(i,j) + t_{ij} =t_р(i) + t_{ij}$ (2.7)

3. *Поздний срок начала работы*: $t_{пн}(i,j)=t_п(j) – t_{ij}$. (2.8)

4. *Поздний срок окончания работы*: $t_{по}(i,j) = t_п(j)$. (2.9)

5. *Резервы времени работ*:

- *полный резерв* $R_п(i,j) = t_п(j) - t_р(i) - t_{ij}$. (2.10)
- *частный резерв* $R_1(i,j) = R_п(i,j) - R(i) = t_п(j) – t_п(i) - t_{ij}$. (2.11)
- *свободный резерв* $R_c(i,j) = R_п(i,j) - R(j) = t_р(j) – t_р(i) - t_{ij}$. (2.12)
- *независимый резерв* $R_н(i,j) = R_п(i,j) - R(i) – R(j) = t_р(j) – t_п(i) - t_{ij}$. (2.13)

В сетевой модели можно выделить так называемый *критический путь*. Критический путь $L_{кр}$ состоит из работ *(i,j),* у которых полный резерв времени равен нулю $R_п(i,j)=0$, кроме этого, резерв времени *R(i)* всех событий *i* на критическом равен *0*. Длина критического пути определяет величину наиболее длинного пути от начального до конечного события сети и равна $t_{кр}=t_р(N)= t_п(N)$. Заметим, что в проекте может быть несколько критических путей.

Для оценки трудности своевременного выполнения работ служит *коэффициент напряженности работ*:

$$К_н(i,j) = (t(L_{max})-t`_{кр}) / (t_{кр}-t'_{кр}) = 1 – R_п(i,j) / (t_{кр}-t'_{кр}), \quad (2.14)$$

где $t(L_{max}(i,j))$ – продолжительность максимального пути $L_{max}(i,j)$, проходящего через работу *(i,j);*

$t'_{кр}$ – продолжительность отрезка пути $L_{max}(i,j)$, совпадающего с критическим путем.

Оптимизация проекта по времени.

Сокращение времени завершения проекта, как правило, связано с привлечением дополнительных средств (количество рабочих, сверхурочные работы). Рассмотрим два примера задачи оптимизации проекта по времени с привлечением дополнительных средств.

Постановка задачи 1. Для сокращения времени выполнения проекта выделяется некоторая сумма дополнительных средств В. Задан сетевой график выполнения проекта, продолжительность каждой работы равна t_{ij}. Известно, что вложение дополнительных средств x_{ij} в работу (i,j) сокращает время ее выполнения от t до t'_{ij}, причем эта зависимость выражается как $t'_{ij} = f_{ij}(x_{ij}) \le t_{ij}$ (f_{ij} — известные функции). Для каждой работы существует минимально возможное время ее выполнения d_{ij}.

Если предположить, что продолжительность выполнения работ линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij} x_{ij}$, где k_{ij} — технологические коэффициенты использования дополнительных средств, то будем иметь задачу линейного программирования.

Требуется определить время начала t^H_{ij} и окончания t°_{ij} выполнения работ, а также количество дополнительных средств x_{ij}, которые необходимо вложить в работы (i,j), чтобы общее время выполнения проекта было минимальным, сумма вложенных дополнительных средств не превышала величины В, время выполнения каждой работы было не меньше минимально возможного времени.

Математически условия задачи можно записать следующим образом:

$$t_{кр} = t^{o}_{n-1,n} \ (min) \qquad (2.15)$$

$$\sum_{(i,j)} x_{ij} \le B; \qquad (2.16)$$

$$t^{\circ}_{ij} - t^{H}_{ij} \ge d_{ij}\,, \qquad (2.17)$$

$$t^{\circ}_{ij} - t^{H}_{ij} = f_{ij}\,, \qquad (2.18)$$

$$t^{H}_{rj} \ge t^{\circ}_{ir}\,, \qquad (2.19)$$

$$t^{\circ}_{ij} \ge 0, \ t^{H}_{ij} \ge 0. \qquad (2.20)$$

Выражение (2.15) – целевая функция. Ограничение (2.16) определяет сумму вложенных дополнительных средств: она не должна превышать величины B. Ограничения (2.17) показывают, что продолжительность каждой работы должна быть не менее минимально возможной ее продолжительности. Ограничения-равенства (2.18) показывают зависимость продолжительности каждой работы от вложенных в нее дополнительных средств. Ограничения (2.19) обеспечивают выполнение условий предшествования работ в соответствии с топологией сети: время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующих ей работ. Ограничение (2.20) — условие неотрицательности.

Если в последнее событие сети n входят сразу несколько работ, то необходимо добавить фиктивную работу (n,n+1), время выполнения которой равно нулю и добавить ограничение ($t^{\circ}_{n,n+1} - t^{H}_{n,n+1} = 0$) в (2.17).

Постановка задачи 2. Пусть задан срок выполнения проекта to, а расчетное время $t_{кр} \ge to$. В этом случае оптимизация комплекса работ сводится к сокращению продолжительности критического пути. Задача заключается в определении величины дополнительных вложений x_{ij} в отдельные работы проекта с тем, чтобы общий срок его выполнения не превышал заданной величины to, а суммарный расход дополнительных средств был минимальным. Время выполнения каждой работы должно быть не меньше минимально возможного времени d_{ij}.

Математическая запись этой задачи:

$$F(x) = \sum_{(i,j)} x_{ij} \ (min)$$

$$t^{o}_{n-1,n} \le to,$$

$$t^{\circ}_{ij} - t^{H}_{ij} \ge d_{ij}\,,$$

$$t^{\circ}_{ij} - t^{H}_{ij} = f_{ij}\,,$$

$$t^{H}_{rj} \ge t^{\circ}_{ir}\,,$$

$$t^{\circ}_{ij} \ge 0, \ \ t^{H}_{ij} \ge 0.$$

Смысл ограничений аналогичен соответствующим ограничениям постановки задачи 1.

В каждом варианте в сетевой график добавляется еще одна работа.

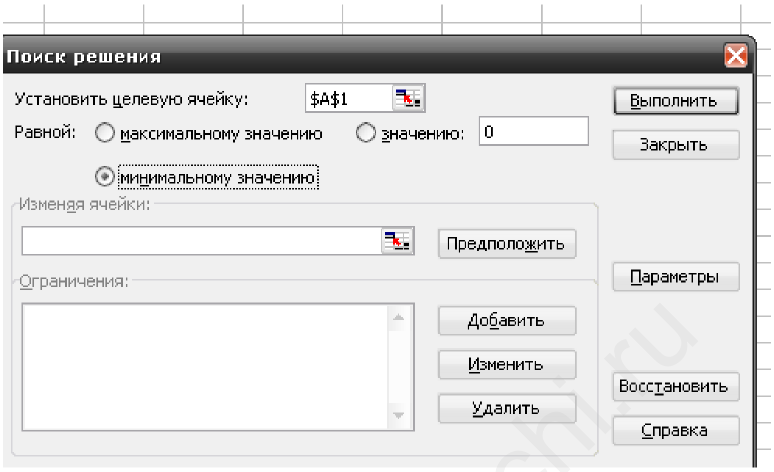
При оптимизации графика рекомендуется построить таблицу вида

Работы	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	$t_н(ij)$	$t_0(ij)$	xij	$t_0(ij)$- $t_н(ij)$	tij-kij*xij
1	2	3	4	5	6	7	8	9

В таблице заполняются столбцы 1-4. В столбцы 8-9 записываются формулы. В каждом варианте в ячейке в конце столбца xij рассчитывается сумма xij.

Задача решается при помощи функции *Сервис - «Поиск решения»***.**

В поле «Установить целевую ячейку» команды «Поиск решения» выделите ячейку со значением целевой функции модели (это будет или ячейка с суммой xij или ячейка t_0(n-1,n), т.е. время окончания последней работы). Чтобы **минимизировать** значение целевой ячейки, установите соответствующее положение переключателя.



В поле «Изменяя ячейки» введите адреса переменных модели, выделяя блок этих ячеек (во всех вариантах это будут столбцы $t_н$(ij), t_0(ij), xij).

Щелкните по полю Ограничения, после чего введите ограничения, накладываемые на решение задачи. Для этого нажмите кнопку Добавить. В поле Ссылка на ячейку выберите ячейку или диапазон ячеек, на значения которых накладываются ограничения. Во всех вариантах ограничения

to_{ij} - $tн_{ij} \geq d_{ij}$,

to_{ij} - $tн_{ij}$ = tij-kij*xij,

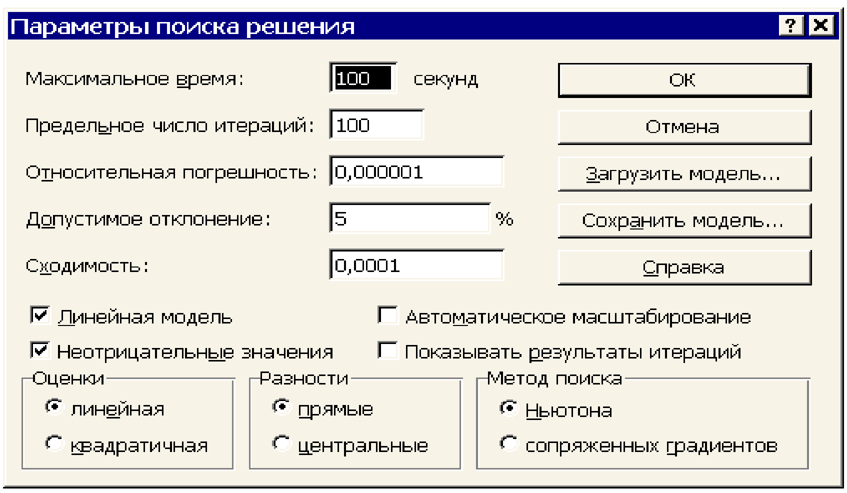
$tн_{rj} \geq to_{ir}$

будут одинаковы, только в одних вариантах добавится ограничение $t^o{}_{n-1,n} \leq$ to, где to берется по варианту (ограничение на время), а в других - это будет ограничение $\sum\limits_{(i,j)} x_{ij} \leq$ B,

где B берется по варианту (ограничение на затраты).

Чтобы ввести ограничение и приступить к набору нового, нажмите кнопку Добавить, а чтобы вернуться в диалоговое окно Поиск решения, нажмите кнопку OK.

В окне Параметры поиска решения для решения линейных задач надо установить флажки Линейная модель и Неотрицательные значения.



Нажмем кнопку ОК и вернемся в окно команды Поиск решения. Затем нажмем кнопку Выполнить, и, если все сделано правильно, то в таблице данных получим результаты решения задачи.

Пример. Дан сетевой график, найти все характеристики событий и работ.

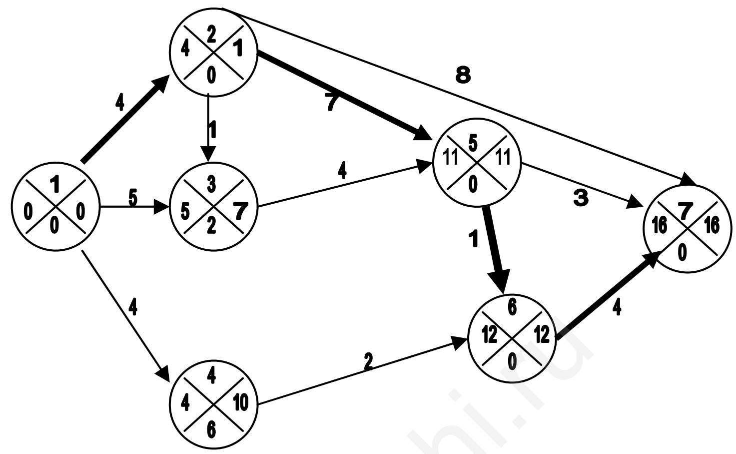


Рис.2.1**.** Сетевой график с характеристиками событий

1.Рассчитаем характеристики событий. Для наглядности каждое событие сетевого графика разделено на 4 сектора. Верхний сектор соответствует номеру события, в левом секторе записан ранний срок $t_p(i)$ наступления события *i*, в правом – поздний срок $t_n(i)$ наступления события *i*, в нижнем секторе представлен резерв времени *R(i)* события *i*. Эти же характеристики представлены в таблице, приведенной ниже.

i	$t_p(i)$	$t_n(i)$	*R(i)*
1	0	0	0
2	4	4	0
3	5	7	2
4	4	10	6
5	11	11	0
6	12	12	0
7	16	16	0

Анализ таблицы и сетевого графика показывает, что критический путь имеет вид (1-2-5-6-7), а его длина равна $t_{кр}$=16.

2. Перейдем к определению характеристик работ. Отдельная работа может начаться и окончиться в ранние, поздние или другие промежуточные сроки. В дальнейшем при оптимизации сетевого графика возможно любое размещение работ в заданном интервале.

Все расчеты сведены в табл.3.2.(столбцы 2-9)

Таблица 3.2.

работы	t_{ij}	$t_{рн}(ij)$	$t_{р0}(ij)$	$t_{пн}$	$t_{п0}=t_п(j)$	$R_п$	R_1	R_c	$R_н$	$К_н$
			(2+1)	(5-1)						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1,2)	4	0	4	0	4	0	0	0	0	--
(1,3)	5	0	5	2	7	2	4	2	2	0,8
(1,4)	4	0	4	6	10	6	6	0	0	0,5
(2,3)	1	4	5	6	7	2	2	0	0	0,7
(2,5)	7	4	11	4	11	0	0	0	0	--
(2,7)	8	4	12	8	16	4	4	4	4	0,4
(3,5)	4	5	9	7	11	2	0	2	0	0,7
(4,6)	2	4	6	10	12	6	0	6	0	0,5
(5,6)	1	11	12	11	12	0	0	0	0	--
(5,7)	3	11	14	13	16	2	2	2	2	0,6
(6,7)	4	12	16	12	16	0	0	0	0	--

Анализ таблицы и сетевого графика показывает, что критический путь имеет вид (1-2-5-6-7), а его длина равна $t_{кр}$=16.

3. После нахождения критического пути (1-2-5-6-7) длины 16 перейдем к определению коэффициентов напряженности работ. Рассмотрим работу (3,5) и найдем все полные пути, проходящие через эту работу, и соответствующие им длины:

L_1: 1-2-3-5-7; $t(L_1)$=12 ;

L_2: 1-3-5-7; $t(L_2)$=12 ;

L_3: 1-3-5-6-7; $t(L_3)$=14 ;

L_4: 1-2-3-5-6-7; $t(L_4)$=14 .

Через работу (3,5) проходит два максимальных пути длины 14. Выберем второй из них. Тогда $t'_{кр}$=9 - длина части (1-2, 5-6-7) пути (1-2- 3-5-6-7), совпадающей с критическим путем (1-2-5-6-7). Воспользуемся формулой расчета коэффициента напряженности, в результате получим, что

$R_н(3,5) = 1-R_п(3,5)\ /\ (t_{кр}-t'_{кр})$=1-2/(16-9)=0,7.

Для остальных работ коэффициент напряженности находится аналогичным способом.

Пример. Оптимизация сетевого графика.

Для сокращения срока реализации проекта, представленного сетевым графиком (рис.2.2), заказчик выделил 14 ед. дополнительных средств. Продолжительность выполнения работ линейно зависит от дополнительно вложенных средств и выражается соотношением

$$t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}\, x_{ij}\ .$$

Известно, что $k_{12} = 0{,}1$; $k_{13} = 0{,}2$; $k_{23} = 0{,}5$; $k_{24} = 0{,}3$; $k_{35} = 0{,}6$; $k_{45} = 0{,}1$. Над каждой работой поставлены ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij}.

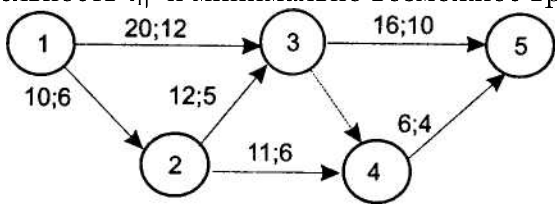


Рис. 2.2

Требуется оптимизировать сетевой график по времени, то есть найти такие $t^{н}_{ij}$, t°_{ij}, x_{ij}, чтобы:

а)время выполнения всего проекта было минимальным;

б)сумма дополнительно вложенных средств не превышала 14 ед.;

в)продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины d_{tj}.

Добавим на сетевом графике фиктивную работу (5, 6), как показано на рис. 2.3.

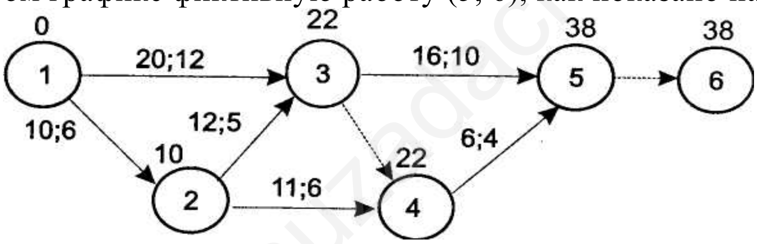


Рис. 2.3

Тогда целевая функция запишется в виде $t_{кр} = t^{\circ}_{5,6}$ (min)

Запишем ограничения задачи:

а) сумма вложенных средств не должна превышать их наличного количества $x_{12} + x_{13} + x_{45} + x_{23} + x_{24} + x_{35} \le 14$;

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$t^{0}_{12}-t^{н}_{12} \ge 6$; $t^{0}_{13}-t^{н}_{13} \ge 12$; $t^{0}_{23}-t^{н}_{23} \ge 5$; $t^{0}_{24}-t^{н}_{24} \ge 6$;

$t^{0}_{34}-t^{н}_{34} = 0$; $t^{0}_{35} - t^{н}_{35} \ge 10$; $t^{0}_{45} - t^{н}_{45} \ge 4$; $t^{0}_{56}-t^{н}_{56} = 0$;

в)зависимость продолжительности работ от вложенных средств

$t^{0}_{12}-t^{н}_{12} = 10-0{,}1\, x_{12}$; $t^{0}_{13}-t^{н}_{13} = 20-0{,}2\, x_{13}$; $t^{0}_{24}-t^{н}_{24} = 11- 0{,}3\, x_{24}$; $t^{0}_{35} - t^{н}_{35} = 16-0{,}6\, x_{35}$; $t^{0}_{45}-t^{н}_{45} = 6 - 0{,}1\, x_{45}$; $t^{0}_{23}-t^{н}_{23} = 12 - 0{,}5\, x_{23}$.

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы

$t^{н}_{12} = 0$; $t^{н}_{13} = 0$; $t^{н}_{23} \ge t^{0}_{12}$; $t^{н}_{34} \ge t^{0}_{13}$; $t^{н}_{34} \ge t^{0}_{23}$; $t^{н}_{24} \ge t^{0}_{12}$; $t^{н}_{35} \ge t^{0}_{13}$; $t^{н}_{35} \ge t^{0}_{23}$; $t^{н}_{45} \ge t^{0}_{24}$; $t^{н}_{56} \ge t^{0}_{35}$; $t^{н}_{56} \ge t^{0}_{45}$; $t^{н}_{45} \ge t^{0}_{34}$.

д) условие неотрицательности неизвестных

$t^{H}_{ij} \ge 0$; $t^{\circ}_{ij} \ge 0$; $t^{\circ}_{ij} \ge 0$, $(i, j) \in U$.

Решив данную задачу симплекс-методом на ПЭВМ, получаем:

$t^{н}_{12} = 0$; $t^{\circ}_{12} = 10$; $t^{н}_{13} = 0$; $t^{0}_{13} = 20$; $t^{н}_{23} = 10$; $t^{0}_{23} = 20$;

$t^{н}_{24} = 10$; $t^{\circ}_{24} = 21$; $t^{н}_{34} = 20$; $t^{0}_{34} = 20$; $t^{н}_{35} = 20$; $t^{\circ}_{35} = 30$;

$t^{н}_{45} = 24$; $t^{\circ}_{45} = 30$; $t^{H}_{56} = 30$; $t^{0}_{56} = 30$; $x_{12} = 0$; $x_{13} = 0$; $x_{23} = 4$; $x_{24} = 0$; $x_{35} = 10$; $x_{45} = 0$; $t_{KP} = 30$.

Таким образом, при дополнительном вложении 14 ед. комплекс работ может быть выполнен за 30 ед. времени. При этом средства распределятся следующим образом: 4 ед. в работу (2, 3) и 10 ед. в работу (3, 5) (рис.2.4).

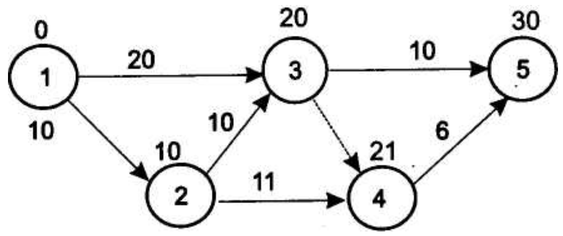


Рис. 2.4

Задания для самостоятельного решения

1. Построить сетевой график (длина работы - t_{ij})
2. Выделить критический путь и найти его длину.
3. Определить резервы времени каждого события .
4. Определить резервы времени (полные, частные первого вида, свободные и независимые) всех работ и коэффициенты напряженности работ, не лежащих на критическом пути.
5. Выполнить оптимизацию сетевого графика по времени.

Работы	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}
	В-1			В-2			В-3			В-4			В-5		
1,2	10	6	0,6	11	5	0,6	16	14	0,6	9	5	0,1	8	5	0,5
1,3	8	5	0,1	7	2	0,1	4	2	0,1	15	11	0,1	5	4	0,2
2,3	14	10	0,3	4	3	0,4	8	3	0,4	7	4	0,4	3	1	0,4
2,4	6	2	0,8	8	6	0,8	5	2	0,8	9	3	0,8	12	8	0,8
3,4	5	4	0,9	9	5	0,9	10	7	0,5	4	2	0,9	14	6	0,9
3,5	12	7	0,5	13	10	0,2	8	3	0,2	6	5	0,2	3	2	0,2
4,5	4	2	0,3	15	8	0,3	3	2	0,6	11	8	0,7	7	3	0,3
	B=210			to=25			B=180			to=18			B=150		

Работы	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}
	В-6			В-7			В-8			В-9			В-10		
1,2	9	6	0,6	2	1	0,6	10	3	0,6	9	5	0,1	14	5	0,5
1,3	8	3	0,1	7	2	0,1	4	2	0,1	8	6	0,1	5	2	0,2
2,4	14	12	0,3	6	2	0,4	9	1	0,4	7	1	0,4	3	1	0,4
2,5	16	2	0,8	8	6	0,8	5	2	0,8	13	3	0,8	12	5	0,8
3,4	5	2	0,9	19	15	0,9	10	6	0,5	4	2	0,9	13	6	0,9
3,5	12	7	0,5	13	10	0,2	5	3	0,2	16	10	0,2	3	2	0,2
4,5	4	2	0,3	15	4	0,3	3	2	0,6	11	8	0,7	7	2	0,3
	to=16			B=200			to=19			B=250			to=21		

Работы	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}

	B-11			B-12			B-13			B-14			B-15		
1,2	9	6	0,6	2	1	0,6	10	3	0,6	9	5	0,1	14	5	0,5
1,3	8	3	0,1	7	2	0,1	4	2	0,1	8	6	0,1	5	2	0,2
1,4	14	12	0,3	6	2	0,4	9	1	0,4	7	1	0,4	3	1	0,4
2,3	16	2	0,8	8	6	0,8	5	2	0,8	13	3	0,8	12	5	0,8
2,5	5	2	0,9	19	15	0,9	10	6	0,5	4	2	0,9	13	6	0,9
3,5	12	7	0,5	13	10	0,2	5	3	0,2	16	10	0,2	3	2	0,2
4,6	4	2	0,3	15	4	0,3	3	2	0,6	11	8	0,7	7	2	0,3
5,6	10	7	0,4	11	8	0,7	5	4	0,2	12	6	0,5	6	4	0,9
	B=165			to=22			B=140			to=20			B=180		

Работы	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}	t_{ij}	d_{ij}	k_{ij}
	B-16			B-17			B-18			B-19			B-20		
1,2	7	4	0,6	2	1	0,6	10	3	0,6	9	5	0,1	14	5	0,5
1,3	5	3	0,1	7	2	0,1	4	2	0,1	13	6	0,1	5	2	0,2
2,5	14	12	0,3	6	2	0,4	9	1	0,4	7	1	0,4	3	1	0,4
3,4	16	2	0,8	13	6	0,8	5	2	0,8	13	3	0,8	12	5	0,8
3,5	5	2	0,9	19	15	0,9	11	6	0,5	4	2	0,9	10	6	0,9
4,6	12	7	0,5	13	10	0,2	5	3	0,2	16	10	0,2	3	2	0,2
5,6	4	2	0,3	15	4	0,3	3	2	0,6	11	8	0,7	7	2	0,3
	to=24			B=220			to=17			B=245			to=18		