**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**Учреждение образования**

**«Белорусский государственный университет информатики**

**и радиоэлектроники»**

Индивидуальная работа по курсу

**«Теория вероятностей и математическая статистика»**

Вариант № 1

Выполнила:

Проверил:

д.ф.-м.н., профессор

Аксенчик А. В.

Минск 2014

**Задача №1.1**

Подбрасываются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших чисел равна восьми.

**Решение**

Событие *А* состоит в том, что сумма выпавших чисел будет равна восьми. Так как каждая игральная кость имеет 6 различных цифр от 1 до 6, то число всех возможных исходов *n* опыта равно числу размещений с повторением элементов из 6 по 2 :



Методом перебора всех возможных ситуаций можем найти, что существует 5 нужных комбинаций чисел. Точнее, *m* будет равна 5.

Вероятность того, что сумма выпавших чисел будет равна восьми:

Ответ: 0,14.

**Задача № 2.1**

Приведена схема элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вероятности отказа элементов 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно равны q1 = 0.1, q2 = 0.2, q3 = 0.3, q4 = 0.4, q5 = 0.5, q6 = 0.6. Найти вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход.

3

2

1

6

5

4

**Решение**

Схема состоит из трех участков. Первый содержит элемент 1, второй – элементы 2, 3 и 4, а третий – элементы 5 и 6.

Введем события:

А1 – Элемент 1 исправлен;

А2 – Элемент 2 исправлен;

А3 – Элемент 3 исправлен;

А4 – Элемент 4 исправлен;

А5 – Элемент 5 исправлен;

А6 – Элемент 6 исправлен.

B – Сигнал проходит от точки a к точке b

C - Сигнал проходит от точки b к точке c

D - Сигнал проходит от точки c к точке d

G - Сигнал проходит от точки a к точке d

В нашем случае B = A1.

Событие С сработает, если будут рабочие элементы 2, 3 и 4.

С = А2 + А3 + А4

Событие D – если работают элементы 5 и 6.

Событие G – если сигнал прошел через все блоки.

Ответ: 0,6.

**Задача №3.1**

На трех автоматических станках изготавливаются одинаковые детали. Известно, что 30% продукции производится первым станком, 25% - вторым и 45% - третьим. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,99, на втором – 0,988 и на третьем – 0,98. Изготовленные в течение дня на трех станках нерассортированные детали находятся на складе. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь не соответствует стандарту.

**Решение**

Событие А состоит в том, что попавшаяся деталь не соответствует стандарту.

Событие H1 – деталь принадлежит станку 1, все остальные станки исправны;

H2 – деталь принадлежит станку 2, все остальные исправны;

H3 – деталь принадлежит станку 3, все остальные исправны;

H4 – все станки неисправны;

H5 – неисправны только станки 1 и 2;

H6 – неисправны только станки 2 и 3;

H7 – неисправны только станки 1 и 3;

B1 – станок 1 исправен;

B2 – станок 2 исправен;

B3 – станок 3 исправен.

Сделаем следующие предположения:

По формуле полной вероятности, вероятность того, что взятая деталь окажется неисправной:

Ответ:0,04

**Задача №4.1**

Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,95. Какова вероятность того, что среди 10 изделий не более одного нестандартного?

**Решение**

Вероятность того, что из *n* = 10 изделий *k* = 9 окажутся удачными, определим по формуле Бернулли:

Ответ: 0.31

**Задача №5.1**

Дискретная случайная величина Х может принимать одно из пяти фиксированных значений x1, x2, x3, x4, x5 с вероятностями p1, p2, p3, p4, p5 соответственно. Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины Х. Рассчитать и построить график функции распределения.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |

**Решение**

1. Математическое ожидание и дисперсию величины Х:
2. Построим ряд распределения СВ X:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | >5 |
|  | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0 |
|  | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |

Построим график функции распределения:

**Задача №6.1**

Случайная величина *Х* задана плотностью вероятности:



Определить константу *С*, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения величины Х, а также вероятность ее попадания в интервал.



**Решение**

1. Вычислим константу исходя из условия нормировки:
2. Определим математическое ожидание СВ *Х:*
3. Определим дисперсию СВ *Х*:
4. Определим функцию распределения величины Х:



1. Определим вероятность попадания величины Х в заданный интервал :

Ответ: C = 1/8, M[X] = 5/3, D[X] = 8/9, P(x) = -0.6

**Задача №7.1**

Случайная величина *Х* распределена равномерно на интервале [*a,b*]. Построить график случайной величины *Y=ϕ(X)* и определить плотность вероятности *g(y).*



**Решение**

1. Построим график случайной величины  для в интервале значений  и определим диапазон значений :  [0;4]
2. В зависимости от числа обратных функций выделим следующие интервалы для :

обратных функций не существует



[4; ∞) 

1. Вычислим модули производных обратных функций:



1. Определим плотность вероятности величины :

**Задача №8.1**

Двухмерный случайный вектор (*Х, У*) равномерно распределен внутри выделенной жирными прямыми линиями (рисунок 4) области B. Двухмерная плотность вероятности *f(x,y)* одинакова для любой точки этой области B:

 

Вычислить коэффициент корреляции между величинами X и Y.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | y1 | y2 |
| 8.1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 |



**Решение**

1. Построим область *B* согласно координатам из таблицы и рисунку.

Проанализируем рисунок: область *B* на промежутке  ограничена сверху прямой  , снизу 

Следовательно, совместная плотность вероятности примет вид:



1. Найдём константу  из условия нормировки:

Таким образом:



Проверим полученный результат геометрически. Объём тела равен 1, т.е:



Следовательно, константа  рассчитана верно.

1. Вычислим математические ожидания:
2. Вычислим дисперсии:

Вычислим корреляционный момент:

1. Вычислим коэффициент корреляции между величинами X и Y:

Ответ: 

**Задача №9.1**

Вычислить математическое ожидание и дисперсию величин U и V, а также определить их коэффициент корреляции Ruv

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A0 | A1 | A2 | B0 | B1 | B2 | M1 | M2 | M3 | D1 | D2 | D3 | K12 | K23 | K13 |
| -9 | -1 | 9 | 2 | -3 | 5 | 1 | -2 | 2 | 1 | 4 | 9 | 1 | 3 | 1.5 |

**Решение**

Вычислим математические ожидания U и V

Вычислим дисперсии Du и Dv

Рассчитаем корреляционный момент Kuv

Таким образом

Рассчитаем величину Ruv

Ответ:Ruv = 0.11

**Задача №10.1**

По выборке одномерной случайной величины:

- получить вариационный ряд;

- построить график эмпирической функции распределения *F\*(x)*;

- построить гистограмму равноинтервальным способом;

- построить гистограмму равновероятностным способом;

- вычислить точечные оценки математического ожидания и дисперсии;

- вычислить интервальные оценки математического ожидания и дисперсии (γ = 0,95);

- выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины и проверить ее при помощи критерия согласия *χ2*  и критерия Колмогорова (*α* = 0,05).

График гипотетической функции распределения F0(x) построить совместно с графиком F\*(x) в той же системе координат и на том же листе.

Одномерная выборка № 1:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.19 | 0.97 | 0.59 | 0.01 | 0.94 | 1.10 | 0.23 | 0.86 | 0.38 | 0.13 | 0.53 | 0.92 | 1.07 | 0.12 | 1.32 | 0.20 | 0.13 |
| 0.35 | 0.38 | 0.58 | 3.35 | 0.94 | 1.27 | 1.98 | 0.22 | 2.25 | 0.73 | 0.03 | 1.18 | 1.06 | 1.12 | 0.41 | 2.73 | 0.99 |
| 0.84 | 1.15 | 0.14 | 0.36 | 0.53 | 1.10 | 0.04 | 0.84 | 0.18 | 1.32 | 0.29 | 0.17 | 0.29 | 0.93 | 1.13 | 0.04 | 0.08 |
| 0.23 | 0.01 | 0.04 | 0.38 | 0.11 | 0.72 | 0.31 | 0.47 | 0.59 | 0.17 | 0.50 | 0.02 | 0.07 | 1.11 | 0.62 | 0.97 | 0.08 |
| 0.69 | 1.51 | 0.26 | 1.26 | 2.06 | 2.50 | 4.13 | 1.13 | 0.16 | 1.15 | 0.18 | 0.15 | 1.33 | 0.26 | 0.42 | 1.14 | 0.37 |
| 0.96 | 0.84 | 1.14 | 0.02 | 0.87 | 0.13 | 1.07 | 0.27 | 1.60 | 1.01 | 0.91 | 1.46 | 0.81 | 0.19 | 0.80 |  |  |

**Решение**

Построим гистограмму равноинтервальным способом. Для построения гистограммы составим интервальный статистический ряд, учитывая, что длина у всех интервалов должна быть одинаковая.

 - количество интервалов

 - ширина интервала;

- частота попадания СВ X в j-ый интервал;

 - статистическая плотность в j-ом интервале.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | Aj | Bj | hj | vj | pj\* | fj\* |
| 1 | 0,01 | 0,42 | 0,41 | 42 | 0,42 | 1,02439 |
| 2 | 0,42 | 0,83 | 0,41 | 14 | 0,14 | 0,341463 |
| 3 | 0,83 | 1,24 | 0,41 | 29 | 0,29 | 0,707317 |
| 4 | 1,24 | 1,65 | 0,41 | 8 | 0,08 | 0,195122 |
| 5 | 1,65 | 2,06 | 0,41 | 2 | 0,02 | 0,04878 |
| 6 | 2,06 | 2,47 | 0,41 | 2 | 0,02 | 0,04878 |
| 7 | 2,47 | 2,88 | 0,41 | 2 | 0,02 | 0,04878 |
| 8 | 2,88 | 3,29 | 0,41 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 3,29 | 3,7 | 0,41 | 1 | 0,01 | 0,02439 |
| 10 | 3,7 | 4,11 | 0,41 | 0 | 0 | 0 |

Построим гистограмму равновероятностным способом

Для построения гистограммы составим интервальный статистический ряд, учитывая что частота попадания СВ X в в каждый j-ый интервал должна быть одинаковая.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | Aj | Bj | hj | vj | pj\* | fj\* |
| 1 | 0,01 | 1 | 0,99 | 10 | 0,1 | 0,10101 |
| 2 | 1 | 0,165 | -0,835 | 10 | 0,1 | -0,11976 |
| 3 | 0,165 | 0,245 | 0,08 | 10 | 0,1 | 1,25 |
| 4 | 0,245 | 0,38 | 0,135 | 10 | 0,1 | 0,740741 |
| 5 | 0,38 | 0,59 | 0,21 | 10 | 0,1 | 0,47619 |
| 6 | 0,59 | 0,85 | 0,26 | 10 | 0,1 | 0,384615 |
| 7 | 0,85 | 0,98 | 0,13 | 10 | 0,1 | 0,769231 |
| 8 | 0,98 | 1,13 | 0,15 | 10 | 0,1 | 0,666667 |
| 9 | 1,13 | 1,325 | 0,195 | 10 | 0,1 | 0,512821 |
| 10 | 1,325 | 4,13 | 2,805 | 10 | 0,1 | 0,035651 |

Вычислим точечные оценки математического ожидания и дисперсии:





Вычислим интервальные оценки математического ожидания и дисперсии (γ = 0,95)











По виду графика эмпирической функции распределения и гистограмм выдвигаем двухальтернативную гипотезу о законе распределения случайной величины X:

H0 – величина X распределена по экспоненциальному закону:



H1 – величина X не распределена по экспоненциальному закону



Таким образом получаем полностью определенную гипотетическую функцию распределения:



Проверим гипотезу о экспоненциальном законе по критерию Пирсона . Вычислим значение критерия  на основе равноинтервального статистического ряда:



Теоретические вероятности попадания в интервалы вычислим по формуле:



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 0 | 0,42 | 0,013 | 0,425 | 0,412 | 0,42 | 0,000 |
| 2 | 0,42 | 0,83 | 0,425 | 0,665 | 0,240 | 0,14 | 0,042 |
| 3 | 0,83 | 1,24 | 0,665 | 0,805 | 0,140 | 0,29 | 0,161 |
| 4 | 1,24 | 1,65 | 0,805 | 0,887 | 0,081 | 0,08 | 0,000 |
| 5 | 1,65 | 2,06 | 0,887 | 0,934 | 0,047 | 0,02 | 0,016 |
| 6 | 2,06 | 2,47 | 0,934 | 0,962 | 0,028 | 0,02 | 0,002 |
| 7 | 2,47 | 2,88 | 0,962 | 0,978 | 0,016 | 0,02 | 0,001 |
| 8 | 2,88 | 3,29 | 0,978 | 0,987 | 0,009 | 0 | 0,009 |
| 9 | 3,29 | 3,7 | 0,987 | 0,992 | 0,005 | 0,01 | 0,004 |
| 10 | 3,7 | 100 | 0,992 | 1,000 | 0,008 | 0 | 0,008 |
| Сумма: | | | | | 1,000 | 1,000 | 0,243 |

Проверим правильность вычислений :



Вычислим критерий Пирсона:



Определим число степеней свободы:



Выбираем критическое значения критерия Пирсона из таблицы [1, стр.63] для степени свободы и заданного уровня значимости :



Так как условие не выполняется, то гипотеза H0 об экспоненциальном законе распределения не принимается (однако нет оснований ее отклонить).

**Задача №10.1**

По выборке двухмерной случайной величины:

- вычислить точечную оценку коэффициента корреляции;

- вычислить интервальную оценку коэффициента корреляции ;

- проверить гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости ;

- вычислить оценки параметров *a0* и *a1* линии регрессии ;

- построить диаграмму рассеивания и линию регрессии.

Двумерная выборка №1:

(-11.03;-10.74) (2.22; -8.72) (-5.28; -2.96) ( -1.86; -6.39) ( -2.81; 1.61) ( -6.39;-5.63) ( -3.04; -7.92)

( -1.26; -5.98) (-5.87; -3.86) (-2.84; -3.45) ( -3.75; -3.31) ( -9.25; -8.91) (-8.59; -5.81) ( -2.49; -3.04)

( -5.64;-11.00) ( -3.84; -7.75) (-4.12; -3.56) (-5.90; -5.63) (-2.46; -7.49) ( -0.06; -3.62) ( -4.70; -9.40) (2.57; -1.16) ( -7.37; -5.09) (-3.20; -3.43) (-7.20; -2.45) ( -0.73; -1.98) ( -5.99; -5.66) ( -2.76; -4.16)

(-5.45; -2.52) (-9.00; -1.30) ( -0.10; -8.55) ( -6.24; -2.06) (-2.94; -4.68) (-1.54; -2.33) (-1.44; -9.95) (0.63; -6.17) (-4.71; 1.64) (-10.73; -1.48) (-4.44;-12.69) (-3.44; -7.23)(-1.23; -4.27) (-1.03; -7.81)

(-7.06; -3.94) ( -5.22;-10.72) (-3.12; -8.23) (-3.23;-3.23) (-8.29; -5.97) (-0.35; -6.60) (-4.65; -2.56)

(-2.92; -2.09)

**Решение**

Для удобства все промежуточные вычисления поместим в таблицу, вычислим:

Оценки математических ожиданий по каждой переменной:



Оценки начальных моментов второго порядка по каждой переменной:



Оценку смешанного начального момента второго порядка:



Оценки дисперсий:



Оценку корреляционного момента:



Результаты промежуточных вычислений

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | x | y | x2 | y2­ | x\*y |
|  | -11,03 | -10,74 | 121,661 | 115,348 | 118,462 |
| 2,22 | -8,72 | 4,928 | 76,038 | -19,358 |
| -5,28 | -2,96 | 27,878 | 8,762 | 15,629 |
| -1,86 | -6,39 | 3,460 | 40,832 | 11,885 |
| -2,81 | 1,61 | 7,896 | 2,592 | -4,524 |
| -6,39 | -5,63 | 40,832 | 31,697 | 35,976 |
| -3,04 | -7,92 | 9,242 | 62,726 | 24,077 |
| -1,26 | -5,98 | 1,588 | 35,760 | 7,535 |
| -5,87 | -3,86 | 34,457 | 14,900 | 22,658 |
| -2,84 | -3,45 | 8,066 | 11,903 | 9,798 |
| -3,75 | -3,31 | 14,063 | 10,956 | 12,413 |
| -9,25 | -8,91 | 85,563 | 79,388 | 82,418 |
| -8,59 | -5,81 | 73,788 | 33,756 | 49,908 |
| -2,49 | -3,04 | 6,200 | 9,242 | 7,570 |
| -5,64 | -11 | 31,810 | 121,000 | 62,040 |
| -3,84 | -7,75 | 14,746 | 60,063 | 29,760 |
| -4,12 | -3,56 | 16,974 | 12,674 | 14,667 |
| -5,9 | -5,63 | 34,810 | 31,697 | 33,217 |
| -2,46 | -7,49 | 6,052 | 56,100 | 18,425 |
| -0,06 | -3,62 | 0,004 | 13,104 | 0,217 |
| -4,7 | -9,4 | 22,090 | 88,360 | 44,180 |
| 2,57 | -1,16 | 6,605 | 1,346 | -2,981 |
| -7,37 | -5,09 | 54,317 | 25,908 | 37,513 |
| -3,2 | -3,43 | 10,240 | 11,765 | 10,976 |
| -7,2 | -2,45 | 51,840 | 6,003 | 17,640 |
| -0,73 | -1,98 | 0,533 | 3,920 | 1,445 |
| -5,99 | -5,66 | 35,880 | 32,036 | 33,903 |
| -2,76 | -4,16 | 7,618 | 17,306 | 11,482 |
| -5,45 | -2,52 | 29,703 | 6,350 | 13,734 |
| -9 | -1,3 | 81,000 | 1,690 | 11,700 |
| -0,1 | -8,55 | 0,010 | 73,103 | 0,855 |
| -6,24 | -2,06 | 38,938 | 4,244 | 12,854 |
| -2,94 | -4,68 | 8,644 | 21,902 | 13,759 |
| -1,54 | -2,33 | 2,372 | 5,429 | 3,588 |
| -1,44 | -9,95 | 2,074 | 99,003 | 14,328 |
| 0,63 | -6,17 | 0,397 | 38,069 | -3,887 |
| -4,71 | 1,64 | 22,184 | 2,690 | -7,724 |
| -10,73 | -1,48 | 115,133 | 2,190 | 15,880 |
| -4,44 | -12,69 | 19,714 | 161,036 | 56,344 |
| -3,44 | -7,23 | 11,834 | 52,273 | 24,871 |
| -1,23 | -4,27 | 1,513 | 18,233 | 5,252 |
| -1,03 | -7,81 | 1,061 | 60,996 | 8,044 |
| -7,06 | -3,94 | 49,844 | 15,524 | 27,816 |
| -5,22 | -10,72 | 27,248 | 114,918 | 55,958 |
| -3,12 | -8,23 | 9,734 | 67,733 | 25,678 |
| -3,23 | -3,23 | 10,433 | 10,433 | 10,433 |
| -8,29 | -5,97 | 68,724 | 35,641 | 49,491 |
| -0,35 | -6,6 | 0,123 | 43,560 | 2,310 |
| -4,65 | -2,56 | 121,661 | 6,554 | 11,904 |
| -2,92 | -2,09 | 4,928 | 4,368 | 6,103 |
| -11,03 | -10,74 | 27,878 | 115,348 | 118,462 |
| 2,22 | -8,72 | 3,460 | 76,038 | -19,358 |
| Сумма: | -200,14 | -260,23 | 1263,9 | 1861,1 | 1046,2 |

Точечную оценку коэффициента корреляции:



Вычислим интервальную оценку коэффициента корреляции с заданной надёжностью , По таблице функции Лапласа [1, стр, 61] :





Таким образом, доверительный интервал для коэффициента корреляции имеет вид:



Проверим гипотезу о корреляционной зависимости:



Так как объём выборки велик (n>50), то критерий вычислим по формуле:



По таблицы функции Лапласа ,

Так как , то гипотеза  принимается, т,е, величины и  не коррелированны

Вычислим оценки параметров линии регрессии:

