**Экзаменационные вопросы по высшей математике (1 семестр)**

I. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1.1. Матричное исчисление

**1. Матрицы. Операции над матрицами и их свойства.**

*Матрица* – прямоугольная таблица чисел, размером , где m-число строк, а n - число столбцов. Числа, сост. М-цу, наз. её *элементами*. М-ца, все эл-ты которой равны нулю наз. *нулевой*. *След* м-цы – сумма эл-тов, стоящих на гл. диагонали. Квадр. М-ца, все эл-ты кот., расположенные вне главной диагонали, равны нулю, наз. *диагональной*. Диагональная м-ца, все эл-ты гл. диагонали у которой равны между собой, наз. *скалярной*. Скалярн. м-ца, все эл-ты гл. диагонали у которой =1, наз. *единичной*. Квадратная матрица наз. треугольной, если все элементы выше (ниже) гл. диагонали =0. 1) Сложение: суммой матриц A и B размерностей , каждый эл-т которой равен сумме соотв. эл-тов матриц A и B: . Св-ва: 1◦ Ассоцаитивность: А+(В+С)=(А+В)+С; 2◦ Коммутативность: А+В=В+А; 2) Вычитание: Разностью матриц А и В, размерностей , наз. матрица D, также размерности , каждый эле мент которой равен разности соотв. эл-тов м-ц А и В:; 3) Умножение матрицы на число: прозведением м-цы А на число ,наз. м-ца В, каждый эл-т которой равен произведению числа *с* на соотв. эл-т м-цы А. Св-ва: 1◦ Ассоцитивность; 2◦ Коммутативность; 3◦ Дистрибутивность: 3.1 Относительно сложения м-ц: с(А+В)=сА+сВ; 3.2 Отн. сложения чисел; 4) Произведение матриц: пр-нием м-цы на м-цу наз. такая м-ца , что:

Св-ва: 1◦ Ассоциативность; 2◦ Дистрибутивность отн. сложения м-ц; 3◦ В общем случае не коммутативно. Если AB=BA, то м-цы наз. *перестановочными*.

**2. Определитель матрицы и его свойства, способы вычисления.**

Квадратной матрице А порядка n можно сопоставить число det А (или IAI, или ~), называемое ее определителем( детерминантом)

Свойства определителей

1. Определитель не изменится если его строки заменить столбцами и наоборот
2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.
3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.
4. Общий множитель элементов какого-либо ряда опре­делителя можно вынести за знак определителя.
5. если все элементы некоторого ряда nроnорциональны соответствующим элементам nараллельного ряда, то такой определитель равен, нулю.
6. Если элементы какого-либо ряда определителя пред­ставляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.
7. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на лю­бое число .

Способы вычисления:

1. Для двойной
2. При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться nравuло-м треугольников (или Саррюса).

**3. Обратная матрица, её свойства. Теорема о существовании обратной матрицы.**

Квадратную м-цу наз. *невырожденной*, если её определитель ≠0, и *вырожденной*, если определитель =0.

 . Любая квадратная невыр. м-ца имеет только одну обратную м-цу (А\*).

**4. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц.**

Рассмотрим матрицу А размера m х n.

Выделим в ней k строк и k столбцов (k ~ min(mjn)). Из элемен­тов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-ro порядка. Все такие определители называются **ми­норами** этой матрицы.

перестановку местами любых двух строк матрицы;

умножение на ненулевую константу любой строки матрицы;

прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на ненулевое число.

**5. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение СЛАУ в матричной форме. Формулы Крамера. Теорема Кронекера–Капелли. Критерий неопределённости совместной СЛАУ. Общие и частные решения неопределённой СЛАУ.**

Сисема вида:

a11x1+a12x2+…+a1nxn=b1

…

am1x1+ am2x2+…+amnxn=bm

назыв. СЛАУ отн. х1, х2, …, хn. aij – коэффец. данной системы, bi – своб. члены. *Решением системы* наз. сов-ть чисел c1, c2, …, cn, при подстановке которых в систему все ур-ния образуют верные равенства. Система ур-ний паз. *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если у неё нет решений. Свместная система наз. *опередлённой*, если у неё одно единственное решение, и *неоперд.*, если решений бесконечное мн-во. Система наз. *однородной*, если все bi=0. *Тривиальное решение* – нулевой набор. М-ца Ā наз. *расширенной* и содержит в себе как коэфф-ты м-цы, так и своб. члены. Если Х – столбец неиз-ных, В – столб. своб. членов, то . Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместимости СЛАУ): Система совместна ранг её осн. м-цы = рангу ее расшир. м-цы. Следствие 1: если сист. совместна и ранг ее осн. м-цы = числу неизвестных n, то данная сист. явл. оперд. (имеет единств. реш.). Следствие 2: если сист. совм. и ранг ее осн. м-цы меньше числа неизв., то сист. неопредел. Матричный способ решения: для квадр. и невыр. м-ц. . Метод Крамера:

 z. Метод Гаусса: метод последовательного исключения переменных. Две СЛАУ с одним им тем же кол-вом неизв. наз. *эквивалентными*, если они либо обе несовм., если из решения совпадают.

**6. Однородные СЛАУ. Алгоритм Гаусса решения произвольной СЛАУ.:**

Система линейных уравнений является однородной, если свободный член **каждого** уравнения системы равен нулю. Например:


Совершенно ясно, что **однородная система всегда совместна**, то есть всегда имеет решение.

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов реше­ ний линейных алгебраических систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных .

**При решении систем методом Гаусса и выполнении соответствующих преобразований с матрицей системы работать можно только со строками!!!**



Будем считать, что элемент All не равно О (если al1 = О, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при Хl отличен от нуля) . Преобразуем систему (4.3), исключив неизвестное Хl во всех урав­нениях, кроме первого (используя элементарные преобразования си­стемы). Для этого умножим обе части первого уравнения на -- сложим почленно со вторым уравнением системы . Затем умножим обе части первого уравнения на -- и сложим с третьим уравнением си­стемы . Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему



Аналогичным образом, считая главным элементом a22 не равным О, ис­ключим неизвестное Х2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

Система линейных уравнений является однородной, если свободный член **каждого** уравнения системы равен нулю. Например:


Совершенно ясно, что **однородная система всегда совместна**, то есть всегда имеет решение.

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов реше­ ний линейных алгебраических систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных .

**При решении систем методом Гаусса и выполнении соответствующих преобразований с матрицей системы работать можно только со строками!!!**



Будем считать, что элемент All не равно О (если al1 = О, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при Хl отличен от нуля) . Преобразуем систему (4.3), исключив неизвестное Хl во всех урав­нениях, кроме первого (используя элементарные преобразования си­стемы). Для этого умножим обе части первого уравнения на -- сложим почленно со вторым уравнением системы . Затем умножим обе части первого уравнения на -- и сложим с третьим уравнением си­стемы . Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему



Аналогичным образом, считая главным элементом a22 не равным О, ис­ключим неизвестное Х2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно.

1.2. Векторная алгебра

**7. Операции над векторами (проецирование, сложение, вычитание, умножение на число), их свойства. Декартова система координат. Координаты, направляющие углы и косинусы вектора, его длина. Операции над векторами в координатной форме. Деление отрезка в заданном отношении.**

*Вектором* наз. направл. отрезок. Модулем в-ра наз. длину соответствующего отрезка. В-р, длина кот. =0, наз. *нулевым.* В-р, длина кот. =1, наз. единичным в-ом (ортом). В-ры наз. *коллиниарными*, если они лежат либо на одно, либо на паралл. прямых. В-ра наз. *компланарными*, если они лежат в одной либо в паралл. пл-стях. 1) Сложение. Суммой в-ров , кот. стоится по правилу: от конца в-ра отклад. в-р , от его конца - и т.д. до р- ра. В-р , идущий от начала первого в-ра в конец последнего и есть искомая сумма. Св-ва: Ассоциативность, коммутативность, . 2) Вычитание. Разностью в-ов наз. такой в-р , что . 3) Произведение в-ра на число. Пр-нием в-ра на число назыв. в-р , если k>0, и проположнонапр., если k<0. Св-ва: 1◦ Если эти в-ра коллинеарные. 2◦ Если в-р , то в-ра a,b,c компланарные. 3◦ Ассоциотивность . 4◦ Дистрибутивность (отн. сложения в-ов и отн. слож. чисел). 5◦ Любой в-р равен пр-нию своего модуля и соотв. ему орта. 4) Проекция в-ра на ось. *Ось* – любая прямая, на кот. задано направление. *Проекцией* точки А на ость наз. т. А1, являющаяся основанием из т. А на ось перпендикуляра. Геометр. пр-ция в-ра – спроекц. сначала т. А, а потом т.В. Алгебр. пр-ция – длина отрезка A1B1 взятая со знаком «+» или «-» , в завис. от направления. Св-ва пр-ций: 1)Проекции равных в-ов на одну и ту же ось равные; 2) Пр-ции вектора на 2 параллельные одинаковонапр. оси равны; 3) Аддитивность (Пр-ции суммы нескольких в-ов на одну и ту же ось равна сумме пр-ций слагаемых в-ов на эту же ось (для геометр. и для алгебр.). Справедливо для разности векторов; 4) Однородность: при умн. в-ра на число, его пр-ция тоже умн.; 5) прℓā = |ā|\*cosα (α – угол между в-ром и осью); 6) Геометр. пр-ция в-ра ā на ось ℓ - произведение орта данной оси на алгебр. проекцию в-ра ā на эту ось. Декартова сист. коорд: Тройка в-ов a,b,c назыв. правой, если кротчайший поворот a к b происходит против часовой стрелки, если смотреть с конца в-ра c. Если данный поворот происх. по час. стрелке, то тройка называется левой. – основная формула векторной алгебры

*ax*=||\* cosα

cos2α+cos2β+cos2ϒ = 1

Операции над в-рами в коорд. форме:

1. Сложение (вычитание) векторов

2. Умножение вектора на число

3. Коллинеарность в-ров:

Если aǁb , то a = k\*b при

Если a и b коллинеарны, то их соотв. координаты пропорциональны

*Деление отрезка в заданном отношении:*

**8. Скалярное произведение векторов, его геометрическая интерпретация, свойства. Критерий ортогональности. Операция скалярного умножения в координатной форме. Нахождение проекций.**

***Геометрическая интерпретация.*** **Скалярным произведением** двух векторов a и b будет скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов умноженного на косинус угла между ними:

a · b = |a| · |b| cos α

***Алгебраическая интерпретация.*** **Скалярным произведением** двух векторов a и b будет скалярная величина, равная сумме попарного произведения координат векторов a и b.

**Свойства:**

1)Коммутативность а(вектор)\*b(вектор)=b(в)\*a(в)

2)Ассоциативность относительно числовых множителей (k(a(в))\*b(в)=k((a(в))\*b(в))

3)Дистрибутивность отн сложения векторов a(в)\*(b(в)+c(в))= a(в)\*b(в)+ a(в)\*c(в)

4)Если скалярное произведение двух не нулевых векторов равно нулю, то эти вектора ортогональны:

a ≠ 0, b ≠ 0, a · b = 0   <=>   a ┴ b

5) Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля:

a · a = |a|2

Вектора a и b называются ортогональными, если угол между ними равен 90°.

|  |
| --- |
|  |
|  |

***Условие ортогональности векторов.***Два **вектора** a и b **ортогональны (перпендикулярны)**, если их [скалярное произведение](http://ru.onlinemschool.com/math/library/vector/multiply/) равно нулю.

**Скалярным произведением двух векторов** на плоскости или в трехмерном пространстве в прямоугольной системе координат называется сумма произведений соответствующих координат векторов  и .

То есть, для векторов  на плоскости в [прямоугольной декартовой системе координат](http://www.cleverstudents.ru/vectors/cartesian_rectangular_coordinates.html) **формула для вычисления скалярного произведения** имеет вид
,
а для векторов  в трехмерном пространстве скалярное произведение в координатах находится как
.

Чтобы найти проекцию вектора  на вектор , надо [скалярное произведение указанных векторов](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_4_10.php) поделить на [длину (модуль) вектора](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_4_6.php) ,

В случае если векторы заданы на плоскости и имеют координаты  и , то проекция вектора  на вектор  вычисляется по формуле:





**9.** **Векторное произведение векторов, его геометрическая интерпретация, свойства. Ориентация тройки векторов. Критерий коллинеарности векторов. Операция векторного умножения в координатной форме.**

Векторным произведением в-ров a и b называется такой вектор с, что:

1. ,

2.

3. Тройка a, b, c – правая

Св-ва векторного произведения:

1® Антикоммутативность

2® Ассоциативность отн. чисел множителя

3® Дистрибутивность отн. суммы векторов

4® Критерий коллинеарности 2-х векторов:

Вект. пр. исп. для:

1) Проверки коллинеарности

2)Нахождения Sпар

**10. Смешанное произведение векторов, его геометрическая интерпретация, свойства. Критерий компланарности. Операция смешанного умножения в координатной форме.**

 – результатом является число

Смеш. произв. в-ров = объёму параллелепипеда, постр. на них

Св-ва смеш. пр.:

1® При круговой перестановке множителей смеш. пр. не изменится

2® Смеш. пр. не изменится при перестановке местами операций векторного и скалярного произведений:

3® При перестановке местами 2-х множителей, смеш. пр. меняет знак

4® В-ра a, b, c компланарны их

В геометрии см. пр. используется для:

1) Проверки компланарности в-ров

2) Для нахождения объёма параллелепипеда или тетраэдра

3) Определения ориентации тройки векторов:

- правая:

- левая:

1.3. Линии и поверхности первого порядка

**11. Прямая в . Различные способы ее задания. Взаимное расположение прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой.**

Положение прямой *l*  на пл-сти определ. 2-мя величинами: 1) углом φ – углом между прямой и положит. напр. Ох; 2) Некот. т. *l*. *Направл. в-ом* прямой *l* наз. любой ненулевой в-р, паралл. данной прямой. .

1. *-* уравнение прямой с угл. коэфф. *k.*
2. – ур-ние прямой, проход. через 2 точки.
3. – каноническое ур-ние.
4. , где – параметрич. ур-ние.

Взаимн. располож. прямых по их канонич. (параметр.) ур-ниям:

2)

3)

1. , где a,b – величины отрезков, отсекаемых на коорд. осях. – ур-ние прямой в отрезках

В-р , наз. её в-ом нормали.

1 .

 2.

3.

Расстояние от точки до прямой:

**12. Плоскость в . Различные способы ее задания. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями, взаимное расположение плоскостей.**

1) Общее уравнение: Ax+By+Cz+D=0, где A2+B2+C2≠0.

Рассмотрим в-р

 и



Вектор называется нормалью к пл-сти П, то ест это в-р, ей перпендикулярный.

1 .

 2.

 3.

2) Ур-ние пл-сти, проход. через 3 точки:

Тогда

3) Ур-ние пл-сти в отрезках:

, где a, b, c -величины отрезков, отсекаемые на коорд. осях

4) Параметрич. ур-ние пл-сти:



Взаимное располож. прямой и пл-сти:

2)

3) Угол между прямой и пл-стью опред. как угол между прямой и её пр-цией на эту пл-сть.

4) Расстояние от т.M0(x0,y0,z0) до пл-сти:

**13. Прямая в . Способы ее задания. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых в пространстве.**

1) Параметрические: , где

2) Ур-ние прямой, проход. через 2 точки:

3) Канонические ур-ния:

4) Общее ур-ние прямой. В этом случае прямая считается как пересечение 2-х плоскостей:

Для нахождения т. необходимо решить данную систему, взяв одну из перем. свободной. Замеч: В пр-ве у прямой не сущ. в-ра нормали. Взаимн. располож. прямых в опред. расположением их направл. в-ов.

2)

3)

Рассм. в-р . Если =0, то эти в-ра компланарны, если нет – о скрещ.

 *–* расст. между скрещ. прямыми

1.4. Линии и поверхности второго порядка

**14. Линии второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), их определения и канонические уравнения. Приведение уравнений линий второго порядка к каноническому виду. Общая классификация линий второго порядка.**

**Общее уравнение** линии второго порядка имеет вид , где – произвольные действительные числа

Элипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плос­кости, называемых фокусамu, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

1.   – каноническое уравнение эллипса;
2.  – [**мнимый**](http://www.mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html) эллипс;
3.  эксцентисетет

Гиnерболой, называется множество всех точек плоскости, мо­дуль разности расстояний от ка­ждой из которых до двух данных то­ чек этой плоскости, называемых фо­кусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фо­кусами.

 – каноническое уравнение гиперболы; эксцентриситет: 

Параболой. называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом., и данной прямой, называемой дuректрисой.. Расстояние от фокуса F до директрисы называется nара.м.еmро.м. параболы и обозначается через р (р > О).

   – каноническое уравнение параболы;

Простейшей кривой второго порядка является окружность. Напомним, что окружностью радиуса R с центром в точке О назы­вается множество всех точек М плоскости, удовлетворяющих условию МоМ = R. Пусть точка О в прямоугольной системе координат Оху имеет координаты хо , Уо, а М(х;у) произвольная точка окружности.

 **Классификация линий второго порядка по инвариантам**



15. Цилиндрические поверхности.

II. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление

2.1. Введение в математический анализ.

**16. Числовая последовательность и ее предел, свойства. Число e.**

**Числовой последовательностью** назыв. ф-ция f:

**Пределом** пос-сти наз. число *a,*если для

•Послед., имеющая конечный предел наз. **сходящейся**, в противном случае – **расходящейся.**

Св-ва предела послед-ти:

1® Любая сход. послед.имеет единств. предел

2® Любая сход. послед. является ограниченной

3® Предел суммы (раз-сти) 2-х сход. пос-тей равен сумме (разности) их пределов.

4® Предел произведения 2-х сход. послед.

5® Предел отношения (как и произв., )

6® Если

7® Если предел пос-сти

Последовательность с общим членом    имеет конечный предел при  .
 Для обозначения этого предела используется символ e:



Число  e  является иррациональным, приближенное значение которого равно

e = 2.7182818284590

**17. Предел функции по Коши и по Гейне. Односторонние пределы. Арифметические свойства пределов функций в точке.**

• (предел ф-ции по Гейне) Число А наз. пределом ф-ции f(x) при x->x0, если для любой пос-ти =>

• (предел ф-ции по Коши) Число А наз. пределом ф-ции f(x) при x->x0, если для =>

|f(x)-A|<

Односторонний предел — предел числовой функции, подразумевающий «приближение» к предельной точке с одной стороны. Такие пределы называют соответственно левым и правым пределами.

Число  называется **правым пределом функции**  **в точке** , если для   такое, что для любого  и , выполняется неравенство  (рис. 1). Правый предел обозначается 

Число  называется **левым пределом функции**  **в точке** , если для   такое, что для любого  и , выполняется неравенство  (рис. 2). Левый предел обозначается 

Арифметич. св-ва предела: *Пусть существуют две функции  и , имеющие пределы  и  соответственно, при . Тогда предел суммы, разности, произведения, и, если , частного этих функций равны соответственно сумме, разности, произведению и частному значения этих пределов, т.е. , если , то .*

**18. Бесконечно малые функции. Связь между конечным пределом функции и б.м.ф. Арифметические свойства б.м.ф. Классификация б.м.ф. Критерий эквивалентности б.м.ф.**

Если существует предел , то функция  называется **бесконечно малой в точке**

**Связь между конечным пределом функции и б.м.ф** Если функция f(x) имеет предел, равный А, то ее можно представить как сумму числа А и бесконечно малой функции а(х), т. е. если lim x-x0 f(x) = А, то f(x) = А + а(х)

Св-ва б.м.ф.:

1®Сумма (разность) конечного числа б.м.ф. есть ф-ция б.м.

2® Произвед. б.м.ф. на огранич. есть ф-ция б.м.

3® Произвед. конечного числа б.м.ф. есть ф-ция б.м.

4® f(x) б.м. при х -> х0, то ф. 1/f(x) – б.б. при х -> х0.

* **Если limx→aα(x)β(x)=0, то говорят, что функция α(x) является *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с функцией β(x);**
* Если limx→aα(x)β(x)=A≠0, то говорят, что функции α(x) и β(x) являются *бесконечно малыми одинакового порядка малости*;
* Если limx→aα(x)βn(x)=A≠0, то говорят, что функция α(x) является *бесконечно малой порядка*nотносительно функции β(x);

|  |  |
| --- | --- |
| sinx∼x | 1−cosx∼x22 |
| arcsinx∼x | ex−1∼x |
| tanx∼x | ax−1∼xlna |
| arctanx∼x | (1+x)k−1∼kx |
| ln(1+x)∼x | loga(1+x)∼xlna |
|  |  |
|  |  |

* Если limx→aα(x)β(x)=1, то говорят, что бесконечно малые функции α(x) и β(x) *эквивалентны* при x→a.

В частности, следующие функции являются эквивалентными:

Б.м. функции  и  называются **эквивалентными** или **равносильными б.м. одного порядка при** , если .

**19. Замечательные пределы. Основные эквивалентности**.



**20. Непрерывность функций в точке, непрерывность слева и справа, связь двусторонней непрерывности с односторонними. Арифметические свойства непрерывных функций. Точки разрыва функции и их классификация.**

Пусть функция у = f(x) определена в точке A а и в некоторой окрестности этой точки. Функция у = f(x) называется непрерывной в точке A, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, 


Если приближаться по оси  к точке  **слева** (красная стрелка), то соответствующие значения «игреков» будут идти по оси  к точке  (малиновая стрелка). Математически данный факт фиксируется с помощью **левостороннего предела**:


Обратите внимание на запись  (читается «икс стремится к ка слева»). «Добавка» «минус ноль» символизирует бесконечно малое отрицательное число, по сути это и обозначает, что мы подходим к числу  с левой стороны.

Аналогично, если приближаться к точке «ка» **справа**  (синяя стрелка), то «игреки» придут к тому же значению , но уже по зелёной стрелке, и **правосторонний предел** оформится следующим образом:


 «Добавка»  символизирует бесконечно малое положительное число, и запись  читается так: «икс стремится к ка справа».

|  |  |
| --- | --- |
|   |     Для существования обычного (двустороннего) предела функции  http://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/Calc1-ru/3/01_files/image001.png  в точке  a  необходимо и достаточно равенство между собой односторонних пределов:http://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/Calc1-ru/3/01_files/image543.png http://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/Calc1-ru/3/01_files/image544.png |

Свойства непрерывных функций

 Сумма(разность) непрерывных функций есть функция непрерывная в этой точке

Произведение непрерывных функций есть функция непрерывная в этой точке.

Отношение двух непрерывных функций в точке x0 функций также явл. Ф-цией непрерывной в этой точке.

* Если функции  и  непрерывны в точке , то функции  и  тоже непрерывны в точке .
* Если функция  непрерывна в точке  и функция  непрерывна в точке , то их [композиция](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BC%D0%BF%D0%BE%D0%B7%D0%B8%D1%86%D0%B8%D1%8F_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D0%B8%D0%B9)  непрерывна в точке .
* **Точки разрыва функции и их классификация.**

Точка , в которой нарушено хотя бы одно из трех условий [непрерывности функции](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_21.php), а именно:

1. функция  определена в точке и ее окрестности;
2. существует конечный [предел функции](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_9.php)  в точке ;
3. это предел равен значению функции в точке , т.е. 

называется **точкой разрыва функции**.

Если существуют [левый и правый пределы функции](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_7_10.php) в точке и они равны друг другу, но не совпадают со значением функции  в точке :  или функция  не определена в точке , то точка  называется **точкой устранимого разрыва**.

Если в точке  существуют конечные пределы  и , такие, что , то точка  называется **точкой разрыва первого рода**.

Если хотя б один из пределов  или  не существует или равен бесконечности, то точка называется **точкой разрыва второго рода**..

**21. Свойства функций непрерывных на отрезке: теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши.**

Теорема 1. (Больцано-Коши) Пусть функция f непрерывна на отрезке [a, b], причем f(a) 6= f(b). Тогда для любого числа C, заключенного между f(a) и f(b) найдется точка γ ∈ (a, b), что f(γ) = C.

Будем говорить, что функция f, определенная на множестве E достигает на нем своей верхней (нижней) границы β = supE f (α = infE f), если существует такая точка x0 ∈ E, что f(x0) = β (f(x0) = α). Теорема 2. (первая теорема Вейерштрасса) Если f непрерывна на [a, b], то она ограничена на нем, т.е. существует такое число M, что |f(x)| 6 M, при всех x ∈ [a, b]. Теорема 3. (вторая теорема Вейерштрасса) Если f непрерывна на [a, b], то она достигает на нем своей верхней и нижней грани

2.2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

**22. Производная функции в точке, двусторонняя и односторонние. Геометрический смысл производной функции, уравнения касательной и нормали к графику функции. Таблица производных !!!**

Производнаяфункции в точке





Если функция , непрерывна слева в точке , то есть  и , то этот предел называют ***левой производной*** функции  в точке .
Левая производна кратко записывается .

 Если функция , непрерывна справа в точке , то есть  и , то этот предел называют ***правой производной*** функции в точке .
Правая производна кратко записывается .

***Геометрический смысл производной.***Рассмотрим график функции  *y*= *f* ( *x*):



Из рис.1  видно, что для любых двух точек A и B графика функции:



где   - угол наклона секущей AB.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку A и двигать по направлению к ней точкуB, то  неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая АВ приближается к касательной АС. Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке A. Отсюда следует:*производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.*В этом и состоит *геометрический смысл*производной.

***Уравнение касательной.***Выведем уравнение касательной к графику функции в точке A ( *x*0 ,  *f* ( *x*0) ). В общем случае уравнение прямой с угловым коэффициентом*f* ’( *x*0)  имеет вид:

*y* = *f* ’( *x*0) ·*x + b .*

Чтобы найти *b*,воспользуемся тем, что касательная проходит через точку A:

*f* ( *x*0) = *f* ’( *x*0) · *x*0*+ b*,

отсюда,  *b* =  *f* ( *x*0) – *f* ’( *x*0) ·*x*0, и подставляя это выражение вместо  *b*, мы получим  *уравнение касательной*:

*y* =*f* ( *x*0) +  *f* ’( *x*0) · ( *x – x*0) .

ур-ние нормали





 **23. Правила дифференцирования. Дифференцирование параметрически заданных функций, неявных функций. Логарифмическая производная.**



Предположим, что функциональная зависимость  от  не задана непосредственно , а через промежуточную величину — . Тогда формулы



задают **параметрическое представление функции** одной переменной.



Далее, разделив второе уравнение на первое, и с учетом того, что , получим выражение для первой производной функции, заданной параметрически:



Для нахождения второй производной  выполним следующие преобразования:



Для нахождения производной y′(x) неявно заданной функции нет необходимости преобразовывать ее в явную форму. Для этого, зная уравнение F(x,y)=0, достаточно выполнить следующие действия:

* Сначала необходимо продифференцировать обе части уравнения по переменной x, предполагая, что y− это дифференцируемая функция x и используя правило вычисления производной от сложной функции. При этом производная нуля (в правой части) также будет равна нулю.
* **Логарифмическая производная**– производная от натурального логарифма модуля (абсолютной величины) – данной функции: 
* Используя формулу производной сложной функции, найдем, что
 (\*)
* Логарифмическую производную используют, например, при дифференцировании (нахождении производной или дифференциала) степенно-показательной функции.

**24. Дифференциал функции, правила вычисления. Геометрический смысл дифференциала функции. Таблица дифференциалов.**

Пусть функция  дифференцируема в точке , то есть приращение этой функции можно представить в виде суммы двух слагаемых: линейного относительно  и нелинейного членов:



где  при .

**Дифференциалом функции** называется линейная относительно  часть приращения функции. Она обозначается как  или . Таким образом:



1. **Константу** можно выносить за знак дифференциала.



2. **Дифференциал суммы/разности**.

Дифференциал суммы/разности функций равен суме/разности [дифференциалов](http://www.webmath.ru/poleznoe/formules_8_3.php) от каждого из слагаемых.



3. **Дифференциал произведения**.



4. **Дифференциал частного**.



**Геометрический смысл дифференциала.** Дифференциал функции y = f(x) равен приращению ординаты касательной, проведённой к графику этой функции в точке M(x; y), при изменении x (аргумента) на величину 

**25. Производные и дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы первого дифференциала.**

Пусть производная некоторой функции *f* дифференцируема. Тогда производная от производной этой функции называется **второй производной** функции *f* и обозначается *f"*. Таким образом,

*f"*(*x*) = (*f'*(*x*))*'*.

Если дифференцируема (*n* - 1)-я производная функции *f*, то ее ***n*-й производной** называется производная от (*n* - 1)-й производной функции *f* и обозначается *f(n)*. Итак,

*f(n)*(*x*) = (*f(n-1)*(*x*))*'*,   *n* ϵ **N**,   *f(0)*(*x*) = *f*(*x*).

Число *n* называется **порядком производной**.

**Дифференциалом *n*-го порядка** функции *f* называется дифференциал от дифференциала (*n* - 1)-го порядка этой же функции. Таким образом,

*dnf*(*x*) = *d*(*dn*-1*f*(*x*)),   *d*0*f*(*x*) = *f*(*x*),   *n* ϵ **N**.

Формула [дифференциала](http://ios.sseu.ru/public/eresmat/gloss/g33.htm) функции имеет вид

,

где  - дифференциал  независимой переменной.

Пусть теперь дана [сложная](http://ios.sseu.ru/public/eresmat/gloss/g5.htm) ([дифференцируемая](http://ios.sseu.ru/public/eresmat/gloss/g30.htm)) функция , где , . Тогда по формуле производной сложной функции находим

,

так как .

Итак, , т.е. формула дифференциала имеет один и тот же вид для независимой переменной  и для промежуточного аргумента , представляющего собой дифференцируемую функцию от .

Это свойство принято называть свойством *инвариантности формулы или формы дифференциала*. Заметим, что производная этим свойством не обладает.

**26 Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.**

**Теорема Ролля.** (О нуле производной функции, принимающей на концах отрезка равные значения)

Пусть функция 

1. непрерывна на отрезке ;
2. дифференцируема на интервале ;
3. на концах отрезка  принимает равные значения .

Тогда на интервале  найдется, по крайней мере, одна точка  , в которой .

**Следствие.** (Геометрический смысл теоремы Ролля)

Найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.

**Следствие.**

Если , то теорему Ролля можно сформулировать следующим образом: между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется, хотя бы один, нуль производной.

**Теорема Лагранжа.** (О конечных приращениях)

Пусть функция 

1. непрерывна на отрезке ;
2. дифференцируема на интервале .

Тогда на интервале  найдется по крайней мере одна точка  , такая, что



**Замечание**

Теорема Ролля есть частный случай теоремы Лагранжа, когда .

**Следствие.** (Геометрический смысл теоремы Лагранжа)

На кривой  между точками  и  найдется точка , такая, что через эту точку можно провести касательную, параллельную хорде  (рис. 1).



Доказанная формула называется **формулой Лагранжа** или **формулой конечных приращений**. Она может быть переписана в виде:



**Теорема Коши**

**Теорема**

**Теорема Коши.** (Об отношении конечных приращений двух функций)

Если функции  и :

1. непрерывны на отрезке ;
2. дифференцируемы на интервале ;
3. производная  на интервале ,

тогда на этом интервале найдется по крайней мере одна точка  , такая, что



**27. Правило Лопиталя и его применение для раскрытия неопределенностей.**

Теорема Лопиталя:

Если:

1.  или ;
2.  и  дифференцируемы в окрестности ;
3.  в окрестности ;
4. существует ,

то существует .

Пределы также могут быть односторонними.

При неопределённостях другого типа:    –  ,  0 ,  00 ,  0,     нужно проделать предварительно ряд *тождественных*  преобразований, чтобы привести их  к  какой-то из двух  неопределённостей:  либо  0 / 0 ,  либо   / .  После этого можно применять правило Лопиталя. Покажем некоторые из возможных преобразований указанных неопределённостей.

**28**. Формула Тейлора. Разложение по формуле Тейлора многочлена, основные разложения элементарных функций.



Его можно представить в виде суммы степеней , взятых с некоторыми коэффициентами. Продифференцируем его раз по переменной , а затем найдем значения многочлена и его производных в точке :













Таким образом, получаем, что



Полученное выражение называется **формулой Маклорена** для многочлена  степени .

Рассуждая аналогично, можно разложить многочлен  по степеням разности , где  - любое число. В этом случае будем иметь:



Это выражение называется **формулой Тейлора** для многочлена  в окрестности точки .

29. Дифференциальное исследование функций одной переменной: 1. исследование функции на монотонность, локальные экстремумы, наибольшее и наименьшее значения на отрезке; 2. исследование функции на выпуклость, точки перегиба; 3. асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции.

**Практика**

Типы задач, которые необходимо уметь решать:

1.1. Матричное исчисление

1. Выполнение операций над матрицами: сложение (вычитание), умножение на число и умножение матриц.

2. Вычисление определителя матрицы: по определению, по теореме разложения, с использованием свойств (определители высоких порядков).

3. Нахождение обратной матрицы.

4. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

5. СЛАУ: решение методами Крамера и Гаусса (общее и частное решения), исследование на совместность по теореме Кронекера–Капелли.

1.2. Векторная алгебра

6. Скалярное произведение векторов: нахождение по определению, по координатам. Проверка ортогональности векторов. Нахождение проекций. Вычисление угла между векторами.

7. Векторное произведение векторов: нахождение по определению. Вычисление площади параллелограмма (треугольника).

8. Смешанное произведение векторов: нахождение по определению. Проверка ориентации тройки векторов, компланарности. Вычисление объема параллелепипеда (тетраэдра).

1.3. Линии и поверхности первого порядка

9. Прямая в . Различные уравнения. Расстояние от точки до прямой.

10. Плоскость в . Различные уравнения. Расстояние от точки до плоскости. Угол между плоскостями, взаимное расположение плоскостей.

11. Прямая в . Различные уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых в пространстве.

1.4. Линии и поверхности второго порядка

12. Умение записывать уравнение эллипса (гиперболы, параболы) по имеющимся данным (точки, полуоси, эксцентриситет).

13. Приведение уравнений 2-го порядка к каноническому виду (параллельный перенос, поворот\*).

II. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление

2.1. Введение в математический анализ.

14. Нахождение предела числовой последовательности. Число е.

15. Нахождение предела функции: 1). разложением числителя и знаменателя на множители; 2). домножением на сопряженное выражение; 3). с использованием эквивалентных функций.

16. Исследование функции на непрерывность: нахождение точек разрыва, определение их типа, схематичное построение графика.

2.2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

**17. Таблица производных !!!** (без знания таблицы производных сдать экзамен НЕЛЬЗЯ)

18. Нахождение производных по основным правилам (производная суммы, произведения, дроби).

19. Нахождение производных сложных, неявных, параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

20. Нахождение дифференциала функции.

21. Производные и дифференциалы высших порядков. Вторая производная параметрически заданной функции.

22\*. Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ролля, Лагранжа, Коши.

23. Использование правила Лопиталя для нахождения пределов.

24. Разложение по формуле Тейлора многочлена, а также основных функций.

25. Исследование функций на: 1. монотонность, локальные экстремумы, наибольшее и наименьшее значения на отрезке; 2. исследование функции на выпуклость, точки перегиба.