Конспект по РТС

29. Оценка параметров сигнала со случайной фазой: совместная оценка времени запаздывания и частоты.
30. Понятие о разрешении и разрешающей способности.
31. Функция неопределенности в теории разрешения.
32. Разрешение по времени запаздывания. Простые и сложные сигналы.
33. Разрешение по времени запаздывания и частоте. Частотно-временная функция неопределенности сигнала.
34. Виды сложных сигналов. ЛЧМ-сигналы.
35. Фазоманипулированные сигналы. Коды Баркера.
36. М-последовательности. Основные свойства. Формирование М-последовательностей.
37. Оптимальный линейный фильтр сигналов известной формы
38. Примеры согласованных фильтров: СФ для прямоугольного видеоимпульса и пачки видеоимпульсов.
39. Оптимальная фильтрация случайных сигналов.
40. Нелинейная фильтрация. Общие соотношения.
41. Нелинейная фильтрация. Фильтрация фазы узкополосного сигнала.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

РТС – совокупность технических средств (устройств), предназначенных для передачи, извлечения и обработки информации с использованием радиоволн.

Радиоволны, несущие информацию, называются *радиосигналом*. Назначение информации – один из признаков классификации радиосигналов. По этому признаку РТС подразделяются на системы:

- Передачи информации;
- Извлечения информации;
- Разрушения информации (радиопротиводействия);
- Радиоуправления.

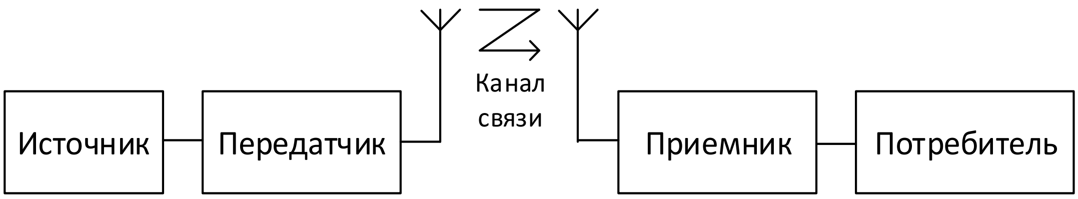
К *системам передачи информации* относятся системы радиосвязи (одноканальной, многоканальной радиорелейной или через ИСЗ), телеметрии, передачи команд, радиовещания и телевидения.

К *системам извлечения информации* относятся системы радиолокации и радионавигации, системы радионастройки, радионаблюдения, радиоастрономии.

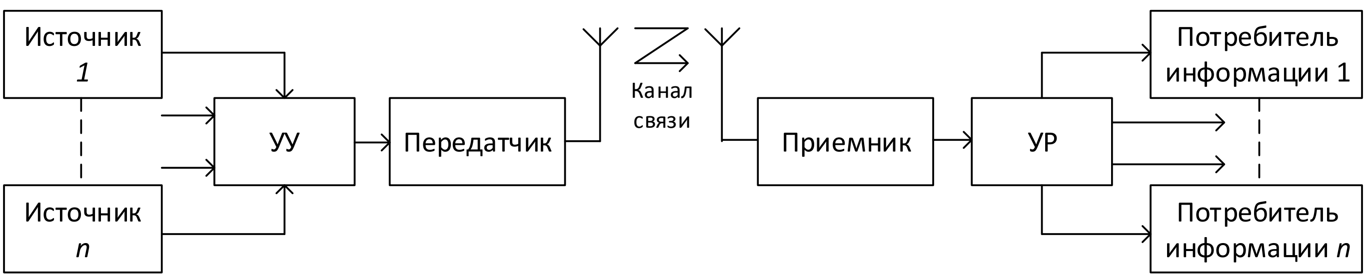
Системы разрушения информации предназначены для создания условий невозможности работы радиосистем противника.

Системы радиоуправления служат для управления работой различных объектов с использованием радиосигналов.

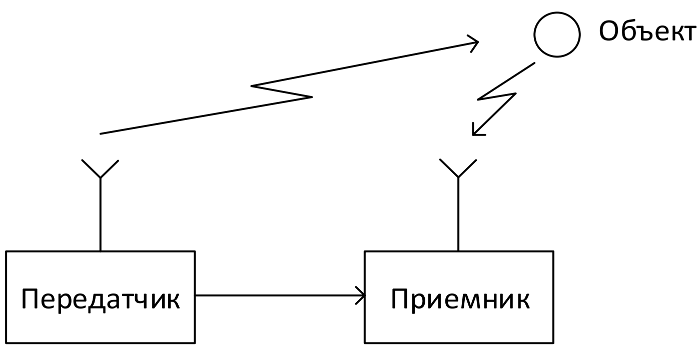
Структурная схема одноканальной системы передачи информации:



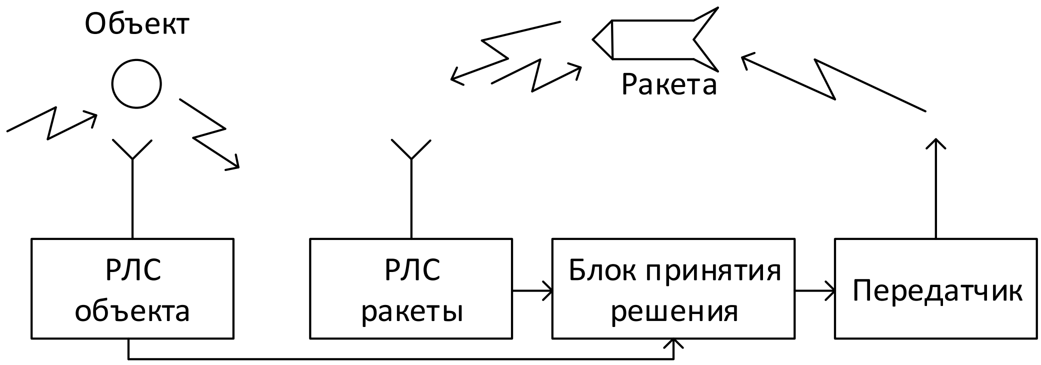
Структурная схема многоканальной системы передачи информации:



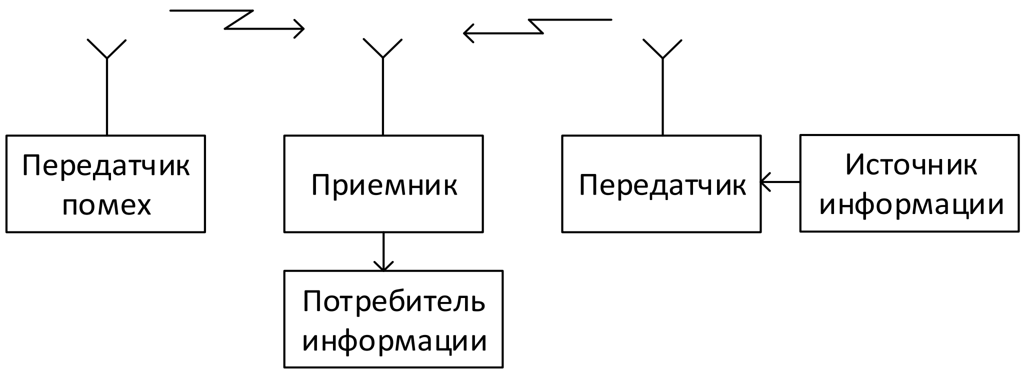
Структурная схема РТС извлечения инфорамции:



Структурная схема радиоуправления:



Структурная схема РТС разрушения информации:



По характеру сообщения и используемых сигналов различают:

- непрерывные;
- импульсные;
- цифровые системы.

РТС использует диапазон частот от 2 кГц до 300 ГГц, разделенный на поддиапазоны:

- 3 –30 кГц (ОНЧ);
- 30 –300 кГц (НЧ);
- 0,3–3 МГц (СЧ);
- 3 –30 МГц (ВЧ);
- 30–300 МГц (0ВЧ);
- 3 – 30 ГГц(СВЧ);
- 30-300 ГГц(КВЧ).

РТС извлечения информации классифицируют по информационному параметру радиосигнала на амплитудные, фазовые и частотные.

РТС ПИ в зависимости от вида модуляции сигнала разделяют на системы с АМ, ЧМ и ФМ, а импульсные РТС ПИ - на системы с ШИМ, ВИМ, АИМ модуляцией.

<u>Основные показатели РТС</u>

1) Назначение.

2) Точность измерения (достоверность)- степень искажения информации.

3) Разрешающая способность - свойство РТС разделять информацию при сдвиге радиосигналов по частоте, задержке, направлению прихода радиоволн.

4) Помехоустойчивость – способность РТС сохранять показатели качества при воздействии помех.

5) Скрытность - способность функционировать, не обнаруживая себя.

6) Пропускная способность – максимальное количество информации, которое может быть передано или извлечено системой за единицу времени.

7) Дальность действия – область пространства, в пределах которого возможна передача извлечение или разрушение информации, или управление объектом.

8) Электромагнитная совместимость – способность систем к совместной работе, не создавая взаимных помех.

9) Экологическая совместимость.

10) Надежность – свойство изделия выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение требуемого промежутка времени.

СИГНАЛЫ И ПОМЕХИ В РТС

Сигналы – физические явления, колебания, процессы, осуществляющие перенос информации. В радиотехнике сообщения передаются посредством радиоволн, т.е. электромагнитного поля (ЭМП). ЭМП математически описывается скалярной (напряженностью) или векторной функцией времени и пространственных координат, поэтому сигнал в РТС является пространственно-временным, задаваемым зависимостью $s(t,r)$, *r*-радиус-вектор рассматриваемой точки трехмерного пространства.

Помехи – вредное поле *x(t,r)* взаимодействующие с сигналом, в результате чего формируется результирующее поле *y(t,r)=F[s(t,r), x(t,r)]*, где *F[...]* – оператор описывающий закон комбинирования сигнала и помехи.

Часто в качестве сигнала, помехи и результирующего эффекта рассматривают не поля, а электрические колебания, наведенные полями в приемной антенне. При этом пространственно-временные зависимости заменяются временными:

$$y(t,r) = F[s(t),\ x(t)]. \tag{1.1}$$

Далее под сигналом будем понимать функцию времени, в которую тем или иным способом вложено передаваемое сообщение. Приемной стороне сигнал доступен лишь в смеси с помехой.

Наряду с временным описание сигнала широко используется частотное, т.е. преобразование Фурье:

$$s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-j2\pi ft)dt; \qquad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(f)\exp(j2\pi ft)df.$$

При описании радиосигналов используются понятия огибающей *S(t)* и фазы причем $\Phi(t) = 2\pi f_0 t + \gamma(t)$, причем:

$$s(t) = S(t)\cos\Phi(t) = S(t)\cos[2\pi ft + \gamma t]. \tag{1.2}$$

Гильбертова огибающая определяется как длина вектора с компонентами *s(t)* и $s_{\perp}(t)$:

$$S(t) = \sqrt{s^2(t) + s_{\perp}^2(t)}\,,$$

где $s_{\perp}(t)$ - преобразование Гильберта сигнала *s(t)*.

Последнее – реакция четырехполюсника с коэффициентом передачи $\tilde{h}(f) = -jsign(f)$, не вносящего амплитудных искажений и сдвигающего фазы всех гармонических составляющих *s(t)* на угол $-\pi/2$:

$$s_{\perp} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jsign(f))\tilde{s}(f)\exp(j2\pi ft)dt \qquad (1.3)$$

Во временной области преобразование Гильберта (1.3) выражается соотношениями:

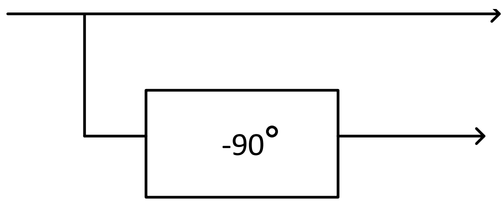
$$s_{\perp}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\theta)}{t-\theta} d\theta; \qquad s(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_{\perp}(\theta)}{t-\theta} d\theta.$$

После определения огибающей *S(t)* аргумент косинуса в (1.2) (гильбертова полная фаза) находится из равенства:

$$\cos\Phi(t) = \frac{s(t)}{S(t)},$$

причем в сумме $\Phi(t) = 2\pi f_0 t + \gamma(t)$ за несущую или центральную частоту сигнала, как правило, принимают “центр тяжести” энергетического спектра на положительной полуоси частот:

$$f_0 = \frac{\int_{0}^{\infty} f\left|\tilde{s}(f)\right|^2 df}{\int_{-\infty}^{0} \left|\tilde{s}(f)\right|^2 df}.$$



В радиосигналах гильбертова огибающая *S(t)* и текущая фаза *γ(t)* совпадают с законами управления амплитудой и фазой в модуляторе при формировании радиосигнала с несущей f_0.

Комплексное представление радиосигналов

Аналитический сигнал $\dot{s}(t)$ – комплекснозначная функция времени, получаемый прибавлением к *s(t)* мнимого слагаемого $js_{\perp}(t)$:

$$\dot{s}(t) = s(t) + js_{\perp}(t) = S(t)e^{j\varphi(t)} = \dot{S}(t)e^{j2\pi f_0 t},$$

где $\dot{S}(t) = S(t)e^{j\gamma t}$ - гильбертова комплексная огибающая учитывающая законы изменения во времени и амплитуды сигнала и начальной фазы несущей.

Физически наблюдаемый сигнал – вещественная часть аналитического сигнала:

$$s(t) = \mathrm{Re}[\dot{s}(t)] = \mathrm{Re}[\dot{S}(t)e^{j2\pi f_0 t}]. \tag{1.4}$$

Описание помех

Для разделения помех по признаку их вероятности используется многомерная плотность вероятности (ПВ). Понятие ПВ можно пояснить следующим образом. Сформируем *n*-мерный вектор-столбец $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ путем взятия отсчетов случайного процесса в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$. Случайный вектор описывается ПВ *W(x)* (совместной ПВ *n*-случайных величин), называемой *n*-мерной ПВ случайного процесса. Так как произведение $W(x)dx_1, dx_2, ..., dx_n$ есть вероятность того в моменты времени t_i реализация процесса $x(t_i)$ пройдет через бесконечно узкое окно $[x_i, x_i + dx_i]$, $i = \overline{1, n}$ (рис.1.2,а), то *n*-мерные ПВ при достаточно большом числе сечений n содержат сведения о вероятности поведения процесса *x(t)*.

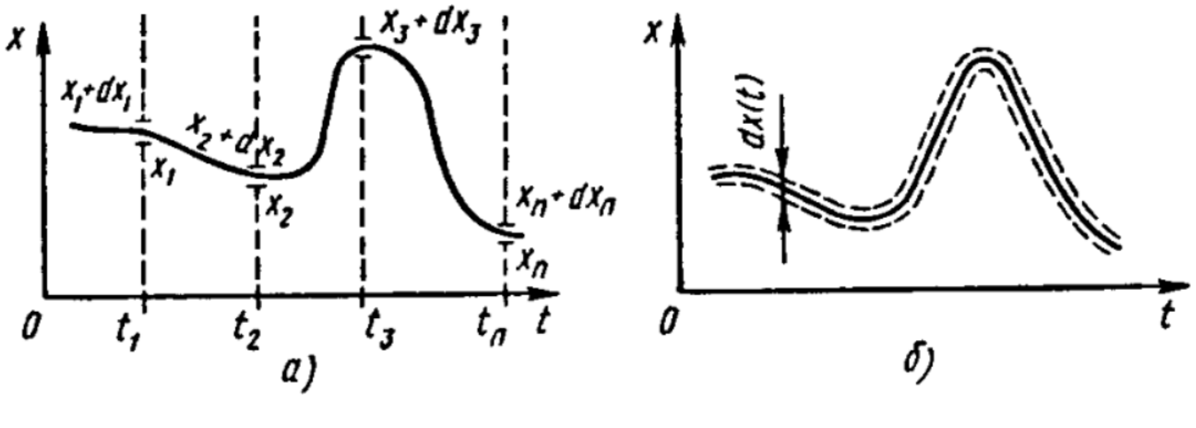


Рис. 1.2

При конечном времени наблюдения *T* и $n \to \infty$, $|t_i - t_{i-1}| \to 0$. Тогда предел ПВ *W(x)* будет характеризовать вероятность прохождения реализаций через изогнутый, бесконечно узкий коридор шириной *dx(t)*, образованный слившимся в две бесконечный близкие линии границами окон (рис 1.2,б). Считая любые реализации в коридоре не различными, т.е. за одну , можно считать , что предел

$$W\big(x(t)\big) = \lim_{x \to \infty} W(x), \quad \max|t_i - t_{i-1}| \to 0$$

есть вероятностная мера отдельных реализаций случайного процесса, называемая *функционалом плотности вероятности случайного процесса*.

Нормальный вектор и нормальный случайны процесс. Белый шум

Рассмотрим характеристики нормального случайного процесса.

Корреляционная матрица n-мерного вектора $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)^T$ с нулевым средним его компонентов симметрическая, главную диагональ образуют дисперсии компонентов:

$$K=\begin{Vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Здесь K_{ik} – корреляционный момент, среднее значение произведения компонентов $K_{ik}=\overline{x_i x_k}$, $K_{ii}=\overline{x^2}$ – дисперсия.

Квадратичная форма, прдставляющая результат умножения обратной матрицы K^{-1} на столбец слева и строку справа:

$$x^T K^{-1} x=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i K_{ik}^{-1} x_k\,. \tag{1.5}$$

Случайный вектор называют нормальным или гауссовским, если его ПВ экспоненциально убывает с ростом значения квадратичной формы (1.5). ПВ такого вектора с учетом условия нормировки:

$$W(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathrm{K}}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^T K^{-1} x\right). \tag{1.6}$$

Рассмотрим случайный процесс $y(t)$ с к корреляционной функцией

$$K(t,t+\tau)=\overline{[y(t)-\overline{y(t)}][y(t+\tau)-\overline{y(t+\tau)}]}\,.$$

При предельном переходе пределов квадратичной формы (1.5) является двойной интеграл:

$$\lim_{n\to\infty} x^T K^{-1} x=\int_0^T\int_0^T x(t_1)K^{-1}(t_1,t_2)x(t_2)dt_1 dt_2\,, \qquad \max_i\left|t_i-t_{i-1}\right|\to 0\,. \tag{1.7}$$

Обратная корреляционная функция является решением интегрального уравнения (1.7).

$KK^{-1}=1$, 1– единичная матрица, или $\sum_{s=1}^{n} K_{is}K_{sk}^{-1}=\delta_{ik}$, где δ_{ik} - символ Кронекера ($\delta_{ik}=0$ при $i \neq k$, $\delta_{ii}=1$).

В предельном переходе сумма рассматривается как интегральная. Функции дискретных переменных K_{is} и K_{is}^{-1} превращаются в функции непрерывных переменных $K(t_1;t)$ и $K^{-1}(t;t_2)$.

Таким образом функционал ПВ нормального процесса с нулевым средним:

$$W(x(t))=c\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T x(t_1)K^{-1}(t_1,t_2)x(t_2)dt_1dt_2\right]. \tag{1.8}$$

В большинстве рассматриваемых далее задач моделью помехи будет нормальный стационарный дельта-коррелированный процесс *n(t)* (белый шум). Для этого процесса:

$$K(\tau)=\left(\frac{N_0}{2}\right)\delta(\tau),$$

где $N_0/2$ - двусторонняя спектральная плотность.

Обратная корреляционная функция белого шума:

$$K^{-1}(t_1,t_2)=\left(\frac{2}{N_0}\right)\delta(t_2-t_1).$$

Функционал плотности вероятности белого шума:

$$W(n(t))=c\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T n^2(t)dt\right].$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

Содержание и классификация задач

Под обнаружением сигнала понимают анализ принятого колебания, завершающийся вынесением решения о наличии или отсутствии в нем полезного сигнала.

Различение М сигналов определяют как анализ принятого колебания, заканчивающийся принятием решения о том, какой из М сигналов, принадлежащих указанному заранее множеству присутствует в принятом колебании.

Обнаружение есть частный случай различения двух сигналов, один из которых равен нулю на всем интервале наблюдения.

Вероятностный характер наблюдаемого колебания с неизбежностью приводит к ошибкам в обнаружении или различении сигналов.

Методологическим базисом исследований по обнаружению и различению сигналов служит теория проверки гипотез.

Задачу проверки *M* гипотез можно сформулировать следующим образом. Пусть наблюдаемое колебание $y(t)$ является реализацией случайного процесса, который имеет распределение W_y (с n-мерной плотностью вероятности (ПВ) $W(y)$), принадлежащее одному из *M* непересекающихся классов. Необходимо, пронаблюдав реализацию $y(t)$, решить какому из классов принадлежит W_y. Предположение о том, что $W_y \in i$ называют гипотезой H_i. От того, какой из *M* возможных сигналов присутствует в $y(t)$ зависит ПВ ансамбля к которому принадлежит $y(t)$, так что каждому $s_i(t)$ сообщению соответствует некоторый класс W_i распределений ансамбля, представляемого $y(t)$. При этом решения H_i, одно из которых является итогом процедуры различения, является утверждением, что в принятом колебании присутствует именно i-й сигнал.

Гипотезу H_i называют простой, если класс W_i содержит только одно распределение. Любую другую гипотезу называют сложной.

РАЗЛИЧЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Статистические критерии различения детерминированных сигналов

Для синтеза оптимальных правил различения сигналов необходимо задаться показателем качества различения, т.е. количественной мерой ущерба, наносимого ошибочными решениями.

Одним из таких критериев является критерий минимума среднего риска (критерий Байеса).

Рассмотрим пример различения *M* детерминированных сигналов $s_0(t), s_1(t),\dots,s_{(M-1)}(t)$ на фоне помех с известной ПВ. В этом случае ПВ наблюдаемого колебания $y(t)$ вполне определенная функция, вид которой зависит от номера i. При этом имеется M-классов, содержащих по одному распределению, т.е. различение сигналов состоит в проверке простых гипотез. Априорная вероятность присутствия в $y(t)$ сигнала $s_i\left(t\right) - p_i$.

Для М-ичной цифровой связи p_i характеризует среднюю частоту, с которой $s_i(t)$ посылается в канал. Вероятность p_i можно назвать и априорной вероятностью истинности гипотезы H_i, записав $p_i=P(H_i)$. Очевидно, p_i подчинены условию нормировки, ибо события $H_0\dots,\ H_{M-1}$ составляют полную группу несовместных событий.

Обозначим условную вероятность перепутывания i-го сигнала с k-м:

$$p_{ik} = P\left(\breve{H}_k \mid H_i\right).$$

т.е. принятия решения о присутствии $s_k(t)$ в $y(t)$, при условии, что в $y(t)$ содержится $s_i(t)$. Введем M^2 неотрицательных величин r, каждая из которых характеризует риск (ущерб потери) от перепутывания i-го сигнала с k-м .

В каждой отдельной попытке различения сигналов решение оказывается случайным событием, поэтому случайным будет и значение риска. Безусловную вероятность риска r_{ik} можно найти по теореме умножения вероятностей.

$$r_{ik} = p(H_i)\, p\left(\overline{H_k} \mid H_i\right) = p_i\, p_{ik}\,.$$

Математическое ожидание риска (средний риск):

$$\bar{r} = \sum_{ik} r_{ik}\, p_i\, p_{ik}\,. \qquad (2.1)$$

Критерий Байеса предполагает минимизацию среднего риска (2.1).

Критерий идеального наблюдателя предполагает минимизацию полной вероятности ошибки:

$$P_{ош} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} p_i\, p_{ik}\,. \qquad (2.2)$$

Критерий идеального наблюдателя можно рассматривать как частный случай байесовского, положив $r_{ik} = r$.

Если неизвестны априорные вероятности ошибок и нельзя определить полную вероятность ошибки, используется ***критерий минимума суммы условных вероятностей ошибок***:

$$P_{ош\ усл} = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} p_{ik}\,. \qquad (2.3)$$

В частном случае $M=2$, $s_0(t)=0$ рассматриваемая задача состоит в обнаружении детерминированного сигнала $s_1(t)$ на фоне помех. Условные вероятности:

$p_{лт} = P(H_1 \mid H_0)$ - ложной тревоги; $p_{пс} = P(H_0 \mid H_1)$ - пропуска.

Средний риск при обнаружении:

$$\bar{r} = p_{лт}\, p_0 r_{01} + p_{пс}(1 - p_0) r_{10}\,,$$

где r_{01} и r_{10} риски, связанные с ложной тревогой и пропуском, p_0 – априорной вероятностью отсутствия сигнала в приятом наблюдении.

Соотношения (2.2) и (2.3) в этом случае можно представить в следующем виде:

$$P_{ош} = p_{лт} p_0 + p_{пс}(1 - p_0) \quad \text{или} \quad P_{ош\ усл} = p_{лт} + p_{пс}\,.$$

Критерий Неймана-Пирсона состоит в минимизации вероятности пропуска при ограничении сверху на вероятность ложной тревоги.

Правила оптимального обнаружения и различения

Пусть $W(y|H_i)$ – условная ПВ вектора y, при условии, что верна гипотеза H_i, т.е. что в принятом колебании $y(t)$ присутствует сигнал $s_i(t)$. При этом $\int W(y\,|\,H_i)dy = 1$ (интегрирование производится по всей области заданной функции). Процедура различения M-сигналов интерпретируется следующим образом. Положим, что n-мероное пространство векторов E^n разбито на M непересекающихся областей решения $G_0, G_1, \ldots, G_{M-1}$. Тогда принятие решения различителем сводится к указаннию номера области, в которую попал вектор наблюдения y.

Для нахождения оптимального правила разбиении подставим в (2.1) выражения для условных вероятностей ошибок

$$p_{ik} = \int W(y\,|\,H_i)dy\,,$$

вытекающие из определения областей $G_0, G_1, \ldots, G_{M-1}$. Тогда:

$$\bar{r} = \sum_{i,k=0}^{M-1} p_i r_{ik} \int_{G_k} W(y\,|\,H_i)dy = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{G_k} \sum_{k=0}^{M-1} p_i\,.$$

Очевидно, что формирование конфигурации областей решения сводится к распределению всех векторов y по M областям, включив каждый только в одну область.

При этом, как следует из последней формулы, каждый вектор войдет только в одно слагаемое суммы по k, отвечающее той области, за которой он закреплен. Поэтому минимума можно добиться, если охватить областью G_k именно те векторы y, для которых подынтегральное выражение в k-м интеграле минимально. Следовательно, такое разбиение на области будет минимизировать $\bar{r}$, при котором в G_k включаются векторы y, удовлетворяющие системе M неравенств:

$$\sum_{i=0}^{M-1} p_i r_{ik} W(y\,|\,H_i) \le \sum_{i=0}^{M-1} p_i r_{ir} W(y\,|\,H_i), \quad r = \overline{0, M-1}. \tag{2.4}$$

При переходе к непрерывному наблюдению n-мерные ПВ в (2.4) превратятся в функционалы ПВ $W(y(t)|H_i)$, т.е. область принятия решений $\hat{H}_k$ определится системой M неравенств:

$$\sum_{i=0}^{M-1} p_i r_{ik} W(y(t)\,|\,H_i) \le \sum_{i=0}^{M-1} p_i r_{ir} W(y(t)\,|\,H_i), \quad r = \overline{0, M-1}. \tag{2.5}$$

Таким образом, байесовский различитель, наблюдая реализацию $y(t)$, должен определить номер k, для которого совместно выполнены неравенства (2.5) и принять решение $\hat{H}_k$ о наличии в реализации сигнала с номером k:

$$\sum_{i=0}^{M-1} p_i r_{ik} W(y\,|\,H_i) \overset{\hat{H}_k}{\le} \sum_{i=0}^{M-1} p_i r_{ir} W(y\,|\,H_i), \quad r = \overline{0, \mathrm{M}-1}. \tag{2.6}$$

Величину $\bar{r}[y(t),k]=\sum_{i=0}^{M-1} p_i r_{ik} W(y\,|\,H_i)$ называют условием или апостиорным средним риском для конкретной реализации *y(t)*.

Рассмотрим частные случаи. Для идеального наблюдателя $r_{ik}=r, i\neq k$.Тогда (2.6) можно представить в виде:

$$\sum_{i=0,\mathrm{i}\neq\mathrm{k}}^{M-1} p_i r_{ik} W(y\,|\,H_i) \overset{\hat{H}_k}{\leq} \sum_{i=0,i\neq k}^{M-1} p_i r_{ir} W(y\,|\,H_i),\ r=\overline{0,\mathrm{M}-1}. \tag{2.7}$$

Учитывая формулу полной вероятности:

$$\sum_{i=0}^{M\text{-}1} p_i W(y(t)\,|\,H_i)=W(y(t)).$$

Согласно (2.7), получим:

$$p_k W\left(y(t)\,|\,H_k\right) \overset{\hat{H}_k}{\geq} p_k W(y(t)\,|\,H_i),\quad i=\overline{0,M-1}. \tag{2.8}$$

По теореме умножения вероятностей:

$$p_i W(y(t)\,|\,H_i)=W(y(t))P(H_i\,|\,y(t)).$$

Следовательно, (2.8) может быть переписано в виде:

$$P(H_k\,|\,y(t)) \overset{\hat{H}_k}{\geq} \mathrm{P}(H_i\,|\,y(t)),\quad i=\overline{0,M-1}. \tag{2.9}$$

Величина $\mathrm{P}(H_i\,|\,y(t))$ определяет апостериорную вероятность гипотезы H_i. Следовательно, идеальный наблюдатель действует по правилу максимума апостериорной вероятности (МАВ).

При использовании критерия минимума суммы условных вероятностей ошибок (2.3), правило различения можно получить из (2.8), учитывая $p_i=1/M,\ i=\overline{0,M-1}$:

$$W(y(t)\,|\,H_k) \overset{\hat{H}_k}{\geq} W(y(t)\,|\,H_i),\quad i=\overline{0,M-1}. \tag{2.10}$$

Функционал условной ПВ $W(y(t)|H_i)$ определенной при условии истинной гипотезы H_i (присутствия $s_i(t)$ в *y(t)*), – рассматриваемый как функция номера гипотезы *i* при фиксированной реализации *y(t)*, называют функцией (функционалом) правдоподобия (ФП).

Таким образом, различитель по критерию минимума суммы условных вероятностей ошибок (2.3) использует правило максимума правдоподобия (подбором *i*, максимизирующим функцию правдоподобия).

При обнаружении детерминированного сигнала ($M=2$), (2.6) можно переписать в виде:

$$p_0\, r_{01} W(y(t)|H_0) \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\lessgtr}} (1-p_0)\, r_{10} W(y(t)|H_1). \qquad (2.11)$$

Правило (2.11) обычно представляют в виде:

$$l = \frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\gtrless}} l_п = \frac{p_0\, r_{01}}{(1-p_0)\, r_{10}}, \qquad (2.12)$$

называя отношение двух значений ФП ***отношением правдоподобия.***

Таким образом, байесовский обнаружитель детерминированного сигнала должен для полученной реализации вычислить ОП и сравнить с порогом l.

При использовании критерия идеального наблюдателя в (2.12) следует положить $r_{01}=r_{10}$, что превратит его в правило МАВ.

Аналогично можно определить правила принятия решений для критериев минимума $P_{ош\ усл}$ и Неймана-Пирсона.

Обнаружители, оптимальные по любому из рассмотренных критериев, должны вычислять ОП и сравнивать его с порогом. От конкретного критерия зависит лишь величина порога.

Функция и отношение правдоподобия при различении сигналов на фоне нормального шума

Детерминированные сигналы. При различении M детерминированных сигналов на фоне аддитивного шума и гипотезе для ФП получаем из (2.9):

$$W(y(t)|H_i) = W_n(y(t)-s_i(t)) = c\exp\left\{-\frac{1}{N}\int_0^T \left[y(t)-s_i(t)\right]^2 dt\right\}. \qquad (2.13)$$

Из (2.13) следует, что для данной реализации пинимают решение о присутствии того из M сигналов, который наименее отклоняется от $y(t)$.

Раскроем скобки под интегралом в (2.13):

$$W(y(t)|H_i) = c_y \exp\left[\frac{2z_i - E_i}{N_0}\right], \qquad (2.14)$$

где $E_i = \int_0^T s_i^2(t)dt$ - энергия i-го сигнала; $z_i = \int_0^T y(t)s_i(t)dt$ - корреляционный интеграл (или просто корреляция) принятой реализации i-го сигнала; $c_y = c\exp\left[-\frac{1}{N}\int_0^T y^2(t)dt\right]$ - коэффициент, зависящий от $y(t)$ но не от i, и поэтому не влияющий на решения.

Отсюда вытекает физическая трактовка правила МП применительно к различению M сигналов равной энергии: принимают решение о наличии в $y(t)$ того сигнала, который имеет наибольшее сходство с $y(t)$.

В частном случае обнаружения детерминированного сигнала М=2, $s_0(t) = 0$, $z_0 = 0$, $E_0 = 0$, и, согласно (2.14), $W\left(y(t)|H_0\right) = c_y$. Соответственно:

$$z_1 = \int_0^T y(t)s_1(t)dt; \quad E_1 = \int_0^T s_1^2(t)dt\ ; \quad W(y(t)|H_1) = c_y \exp(\frac{2z_1 - E_1}{N_0}).$$

Подставив это выражение в (2.12) для ОП, получим:

$$l = \frac{W(y(t)|H_1)}{W(y(t)|H_0)} = \exp\left(\frac{2z - E}{N_0}\right). \tag{2.15}$$

<u>Сигналы со случайными параметрами</u>. Если сигнал зависит от априори неизвестных параметров, класс распределений, соответствующих конкретной гипотезе, будет содержать не одно распределение, а столько, сколько различных значений может принять вектор параметров θ_i. При этом гипотезы оказываются сложными параметрическими. Замена сложных гипотез простыми возможна, если неизвестные параметры сигнала могут интерпретироваться как случайные величины с заданной априорной ПВ $W_0(\theta_i)$. Рассмотрим случай дискретного наблюдения, принимая во внимание, что при истинности H_i ПВ вектора наблюдений y содержит в качестве параметра $\theta_i - W\left(y|H_i,\theta_i\right)$. В соответствии с теоремой умножения

$$W(y|H_i,\theta_i)W_0(\theta_i) = W(y,\theta_i|H_i). \tag{2.16}$$

Правая часть является условной совместной плотностью вероятности векторов y и θ, при условии присутствия в $y(t)$ i-го сигнала. Интегрируя совместную ПВ по θ, получим ПВ y при истинности H_i:

$$W(y|H_i) = \int W(y,\theta_i|H_i)d\theta_i. \tag{2.17}$$

Перейдя от дискретных наблюдений к непрерывным и объединив (2.16) и (2.17), получим:

$$W(y(t)|H_i) = \int W(y(t)|H_i,\theta_i)W_0(\theta_i)d\theta_i. \tag{2.18}$$

Таким образом, производится усреднение ФП, содержащей случайные параметры θ_i по всем их возможным значениям, используя известную вероятность появления $W_0\left(\theta_i\right)d\theta_i$.

При известных значениях параметров i-го сигнала сигнал становится детерминированным и в соответствии с (2.14) получим:

$$W(y(t)|H_i,\theta_i)=c_y\exp\left(\frac{2z_i(\theta_i)-E_i(\theta_i)}{N_0}\right),$$

где $E_i=\int\limits_0^T s_i^2(t,\theta_i)dt$ - энергия i-го сигнала с фиксированным и равным θ_i значением вектора неизвестных параметров; $z_i(\theta_i)=\int\limits_0^T y(t)s_i(t;\theta_i)dt$ - корреляция $y(t)$ с i-м сигналом, имеющим равное θ_i значение.

Используя (2.18), определим выражение для ФП:

$$W(y(\mathrm{t})|H_i)=c_y\int\exp\left[\frac{2z_i(\theta_i)-E_i(\theta_i)}{N_0}\right]W_0(\theta_i)d\theta_i. \tag{2.19}$$

При обнаружении детерминированного сигнала $M = 2$.

$$l=\int\exp\left[\frac{2z(\theta)-E(\theta)}{N}\right]W_0(\theta)d\theta. \tag{2.20}$$

где $z(\theta)$ – корреляция $y(t)$ с обнаруживаемым сигналом $s(t;\theta)=s_1(t;\theta_1)$ при фиксированном и равном θ значении вектора его неизвестных параметров ; $E(\theta)$ – энергия сигнала $s(t;\theta)$; $W_0(\theta)$ – априорная ПВ вектора случайных параметров обнаруживаемого сигнала. Действия, выполняемые согласно (2.20) соответствуют усреднению ОП для детерминированного сигнала с фиксированными значениями θ по всем возможным значениям θ. Поэтому (2.20) иногда называют усредненным ОП.

АЛГОРИТМЫ И УСТРОЙСТВА ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ И РАЗЛИЧЕНИЯ СИГНАЛОВ

Обнаружение детерминированного сигнала

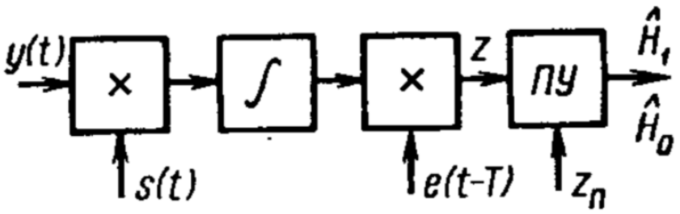
Процедура оптимального обнаружения, как следует из (2.12) сводится к вычислению ОП. Это правило сохраняется и при переходе к монотонным функциям от ОП. Выбрав в качестве *f(l) lnl*, получим следующее решающее правило:

$$\begin{aligned} &z>z_0-\text{ верна гипотеза } H_1 \text{ (сигнал есть)},\\ &z<z_0-\text{ верна гипотеза } H_0 \text{ (сигнала нет)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

здесь $z=\int\limits_0^T y(t)s(t)dt$ - корреляционный интеграл, определяющий степень сходства наблюдаемой реализации с ожидаемым сигналом $s(t)$.

Пороговый уровень z_0 зависит от принятого критерия обнаружения.

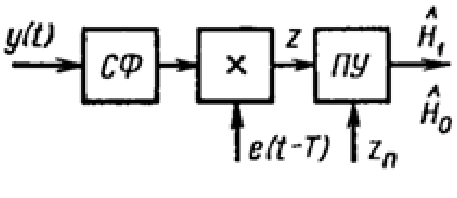
Устройство, реализующее алгоритм, называется корреляционным приемником (рис. 3.1).



$e(t-T)$ - сигнал стробирования;
ПУ – пороговое устройство;
z_n – пороговый уровень.

Рис. 3.1

Структура обнаружителя на основе согласованного фильтра (СФ) с импульсной характеристикой $h(t) = s(T-t)$, приведена на рис. 3.2.



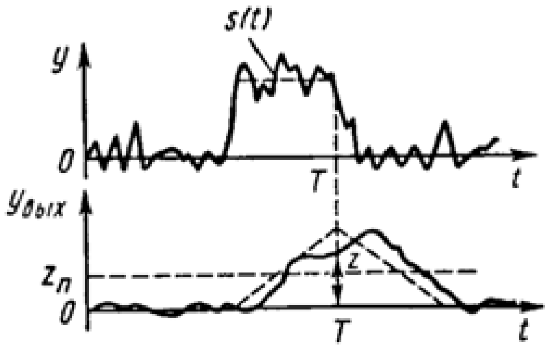


Рис. 3.2

Рис. 3.3

Реакция СФ на сигнал имеет вид корреляционной функции $K_s(\tau)$, смещенной на время T в сторону запаздывания:

$$s_{вых}(t) = K_s(t-T) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\theta)s(\theta-(t-T))d\theta.$$

Амплитуда на выходе СФ, следовательно, равна:

$$U_{н.вых} = s_{вых}(T) = K_s(0) = E. \qquad (3.2)$$

Белый шум на выходе СФ имеет корреляционную функцию по форме совпадающую с $K_s(\tau)$:

$$K_{вых}(\tau) = 0,5N_0K_s(\tau). \qquad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что дисперсия (мощность) шума на выходе СФ равна:

$$K_{вых}(0) = P_{ш.вых} = N_0E/2. \qquad (3.4)$$

На рис.3.3 приведены временные диаграммы сигналов на входе и выходе СФ при превышении порога.

Определим вероятности ошибок в оптимальном обнаружителе детерминированного сигнала, используя следующие выражения:

$$p_{лт} = P(\hat{H}_1 | H_0) = P(z \ge z_n | H_0) = \int_{z_n}^{\infty} W(z | H_0) dz;$$

$$p_{пс} = P(\hat{H}_0 | H_1) = P(z < z_n | H_1) = \int_{\infty}^{z_n} W(z | H_1) dz,$$

где $W\left(z \,|\, H_i\right)$ - ПВ корреляции *z* при гипотезе H_i, $i=0,1$.

Графическая иллюстрация соотношений приведена на рис. 3.4.

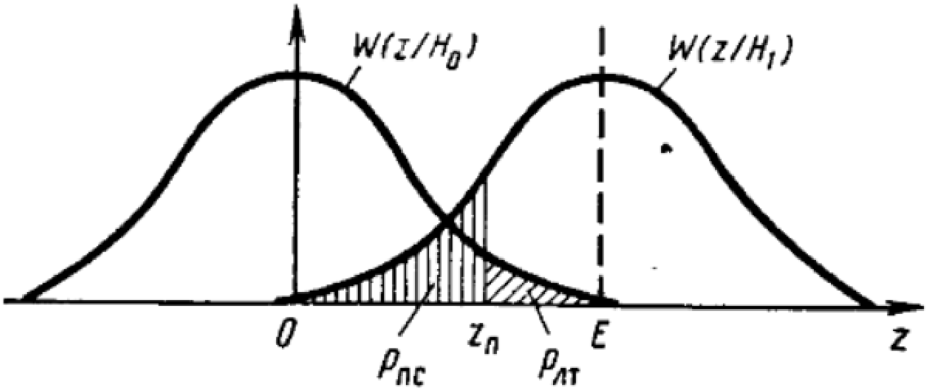


Рис. 3.4

Определим параметры нормального случайного процесса: среднее значение $\overline{z}$ и дисперсию $D\{z\}$. При отсутствии сигнала:

$$\overline{z} = \int_0^T \overline{y(t)} s(t) dt = \int_0^T \overline{n(t)} s(t) dt = 0, \quad \text{т.к. } \overline{n(t)} = 0.$$

При наличии сигнала на входе:

$$\overline{z} = \int_0^T \overline{y(t)} s(t) dt = \int_0^T \left[s(t) + n(t) \right] s(t) dt = \int_0^T s^2(t) dt = E.$$

Дисперсия $D\{z\}$, совпадающая с дисперсией помехи на выходе СФ, не зависит от присутствия сигнала на входе и с учетом (3.4) равна:

$$D\{z\} = N_0 E / 2.$$

Таким образом:

$$p_{лт} = \int_{z_n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{N_0 E}{2}}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\frac{N_0 E}{2}} \right) dz; \qquad p_{пс} = \int_{-\infty}^{z_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{N_0 E}{2}}} \exp\left(-\frac{(z-E)^2}{2\frac{N_0 E}{2}} \right) dz.$$

Введя безразмерную переменную $h = z\left(\sqrt{\dfrac{N_0 E}{2}}\right)^{-1}$, получим:

$$p_{лт} = 1 - \Phi(h); \quad p_{пс} = \Phi(h - q), \tag{3.5}$$

где $\Phi(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)dt$ - интеграл вероятности; $h = z_n(\sqrt{N_0 E/2})^{-1}$ - нормированный пороговый уровень; $q = \sqrt{2E/N_0}$ - параметр обнаружения, равный отношению сигнал/шум на выходе фильтра, согласованного с обнаруживаемым сигналом *s(t)*. С учетом функции *Φ(x)* приведенной на рис.3.5. С учетом, того что *Φ(-x)=1-Φ(x)*, выражение для $p_{пс}$ можно представить в виде:

$$p_{пс} = 1 - \Phi(q - k). \tag{3.6}$$

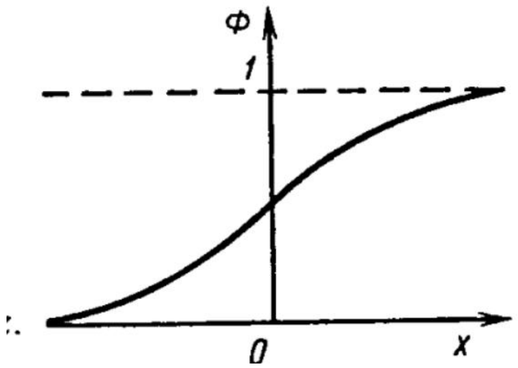


Рис. 3.5

С помощью соотношений (3.5) и (3.6) осуществляется расчет обнаружителя в соответствии с принятым критерием оптимальности. Так, при использовании критерия Неймана–Пирсона требуется минимизировать $p_{пс}$ при фиксированном значении $p_{лт}$. При этом из уравнения $p_{лт} = 1 - \Phi(h)$ следует найти нормированный порог $h = \Phi^{-1}(1 - p_{лт})$, где $\Phi^{-1}(*)$ – функция обратная *Φ(x)* (т.е. решение уравнения *Φ(x) = y* относительно *x*), и подставив полученное значение *h* в формулу для $p_{пс}$ (или $1 - p_{лт}$). Зависимости

$$p_{по} = 1 - p_{пс} = \Phi(q - h) = \Phi\left[q - \Phi^{-1}(1 - p_{лт})\right]. \tag{3.7}$$

От *q* при фиксированных значениях вероятности ложной тревоги называют характеристиками обнаружения (рис.3.6), сплошные линии).

Для определения минимального значения *q*, при котором достигается требуемая верность обнаружения можно воспользоваться соотношениями (3.5)-(3.7), из которых следует:

$$q_{\min} = \Phi^{-1}(1 - p_{лт}) + \Phi^{-1}(1 - p_{пс}). \tag{3.8}$$

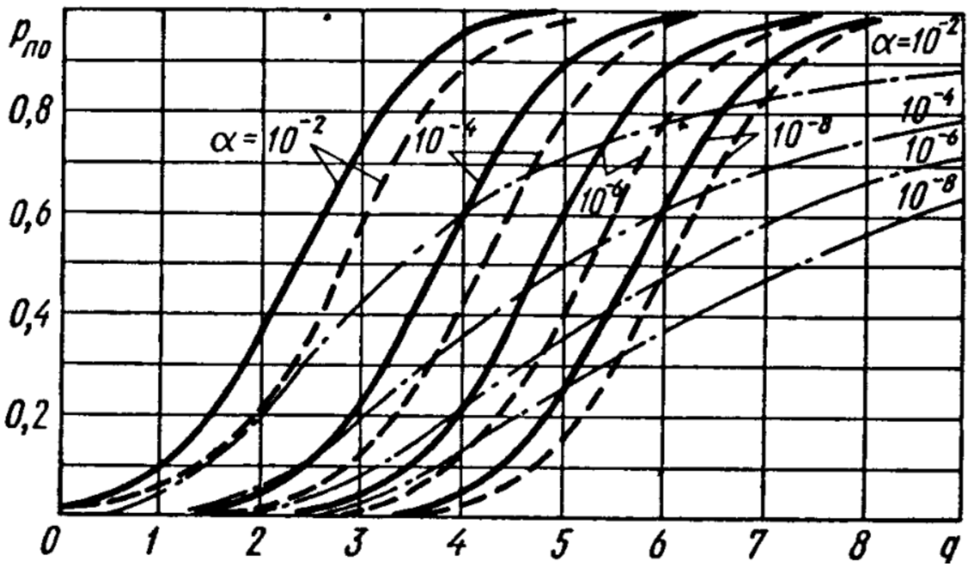


Рис. 3.6

<u>Обнаружение сигнала со случайной начальной фазой</u>

Пусть обнаруживаемый сигнал задан в виде:

$$s(t,\varphi) = S(t)\cos\left[2\pi f_0 t + \gamma(t) + \varphi\right]. \qquad (3.9)$$

где $S(t)$ и $\gamma(t)$ - определяются известными законами амплитудной и угловой модуляции, φ - случайная начальная фаза с априорной ПВ $W_0(\varphi)$.

Оптимальный обнаружитель должен формировать усредненное ОП и сравнивать его с порогом. Поскольку начальная фаза φ радиоимпульса является неэнергетическим параметром, т.е. $E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^T s^2(t)dt$, выражение (2.20) примет вид:

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[\frac{2z(\varphi) - E}{N_0}\right] W_0(\varphi)d\varphi. \qquad (3.10)$$

где $z(\varphi) = \int_0^T y(t)s(t,\varphi)dt$.

Вычислим корреляционный интеграл при фиксированном значении параметра φ. Представим сигнал $s(t,\varphi)$, используя формулу косинуса суммы, в виде:

$$s(t,\varphi) = S(t)\cos(\omega_0 t + \gamma(t))\cos\varphi - S(t)\sin(\omega_0 t + \gamma(t)\ )\sin\varphi.$$

Обозначим

$$s_1(t) = S(t)\cos(\omega_0 t + \gamma(t)); \qquad s_2(t) = -S(t)\sin(\omega_0 t + \gamma(t)).$$

Представим сигнал с учетом введенных обозначений в виде:

$$s(t,\varphi)=s_1(t)\cos\varphi+s_2(t)\sin\varphi .$$

Используя последнее выражение, значение корреляционного интеграла можно записать в виде:

$$z(\varphi)=z_1(t)\cos\varphi+z_2\sin\varphi ,$$

здесь $z_i=\int\limits_0^T y(t)s_i(t)dt,\ \ i=1,2$.

Введем величины Z и θ, определив их соотношениями:

$$Z=\sqrt{z_1^2+z_2^2}\,, \qquad \sin\theta=z_2/Z\,, \qquad \cos\theta=\frac{z_1}{z}\,.$$

С учетом этих величин значение корреляционного интеграла приводится к виду:

$$z(\varphi)=Z(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)=Z\cos(\varphi-\theta)\,. \tag{3.11}$$

Подставим полученные выражения в формулу (3.10):

$$l=\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp\left[\left(2Z/N_0\right)\cos(\varphi-\theta)\right]d\varphi . \tag{3.12}$$

Воспользовавшись модифицированной функцией Бесселя нулевого порядка:

$$I_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp\left[x\cos(\varphi-\theta)\right]d\varphi , \tag{3.13}$$

Вследствие монотонной зависимости $I_0(x)$ от своего аргумента соотношение (3.13) позволяет решающее правило записать в виде:

$$Z\underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\gtrless}}Z_\text{п}=\frac{N_0}{2}I_0^{-1}\left[\exp(E/N_0)l_\text{п}\right], \tag{3.14}$$

где $I_0^{-1}(\cdot)$ - функция, обратная $I_0(x)$.

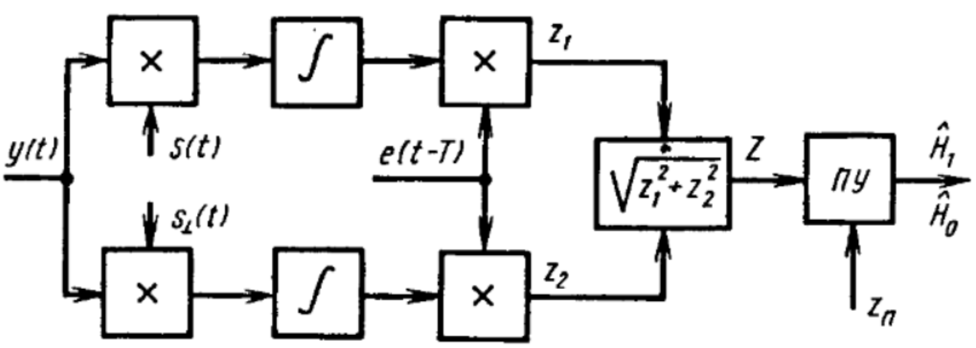


Рис. 3.7

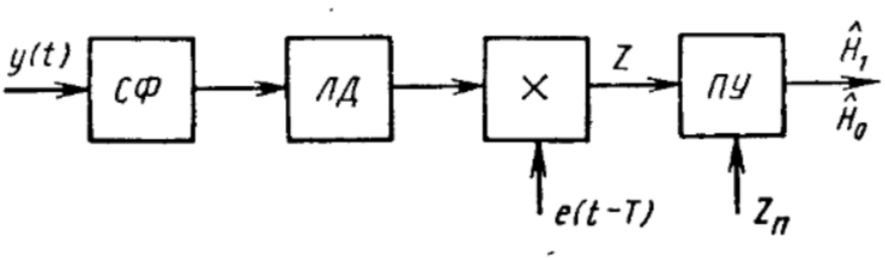
Структурную схему обнаружителя можно представить в виде (рис.3.7). Такую схему называют *квадратурным приемником*. Наличие 2-х каналов исключает потерю полезного сигнала вследствие незнания его начальной фазы. Схема требует информации о временном положении сигнала.

Обнаружитель может быть также реализован на СФ с комплексной огибающей импульсной характеристики $\dot{H}(t)=\dot{S}^{*}(T-t)$, *- знак комплексного сопряжения; $\dot{S}(t)=S(t)e^{j\gamma(t)}$ - комплексная огибающая сигнала $s(t;\varphi)$ при $\varphi=0$.

$$s(t,\varphi)=S(t)\cos\left[\omega_0 t+\gamma(t)+\varphi\right]=\mathrm{Re}\left\{\dot{S}(t)\exp\left[j\omega_0 t+\varphi\right]\right\}.$$

Такой фильтр согласован с сигналом $s(t,\varphi)$, имеющим некоторое фиксированное значение φ. При $\varphi=0$ фильтр согласован с первой квадратурной составляющей сигнала

Структурная схема СФ приведена на рис. 3.8.



ЛД – линейный амплитудный детектор

Рис. 3.8

Для того что бы рассчитать $p_{лт}$, $p_{пс}$ в рассматриваемом случае, достаточно вспомнить, что отсчеты огибающей узкополосного нормального шума с дисперсией σ^2 распределяются по закону Релея:

$$W(Z\,|\,H_0)=\begin{cases}(Z/\sigma^2)\exp[-Z^2/(2\sigma^2)],\ Z\ge 0;\\ 0,\ Z<0;\end{cases} \tag{3.16}$$

И подчиняются обобщенному закону Релея, если к шуму добавляется сигнал с амплитудой $U_м$:

$$W(Z\,|\,H_1)=\begin{cases}(Z/\sigma^2)\exp\left[-\dfrac{Z^2+U_M^2}{2\sigma^2}\right]I_0\left(\dfrac{ZU_M}{\sigma^2}\right),\ Z\ge 0;\\ 0,\ Z<0.\end{cases} \tag{3.17}$$

Учитывая, что на выходе СФ $\sigma^2=\dfrac{N_0E}{2}$, $U_M=E$, получим:

$$p_{лт}=\int\limits_{z_п}^{\infty}W(Z\,|\,H_0)dZ=\int\limits_{z_п}^{\infty}\frac{Z}{\frac{N_0E}{2}}\exp\left(-\frac{Z^2}{\frac{2N_0E}{2}}\right)dZ\,,$$

$$p_{пс}=\int\limits_{0}^{z_п}W(Z\,|\,H_1)dz=\int\limits_{0}^{z_п}\frac{Z}{\frac{N_0E}{2}}\left(-\frac{Z^2+E^2}{\frac{2N_0E}{2}}\right)I_0\left(\frac{ZE}{\frac{N_0E}{2}}\right)dZ\,.$$

Перейдя к нормированной переменной $h=Z/\sqrt{N_0E/2}$, получим:

$$p_{лт}=\exp(-h^2/2),\quad p_{пс}=Q(h,q)\,, \tag{3.18}$$

где $h=Z_п/\sqrt{N_0E/2}$ - нормированный порог; $q=\sqrt{2E/N_0}$ - параметр обнаружения; $Q(u,v)=\int\limits_0^u t\exp\left(-\frac{t^2+v^2}{2}\right)I_0(vt)dt$ - табулированная *Q*-функция Маркума (интегральное распределение Рэлея-Райса).

Для построения характеристики обнаружения необходимо выразить нормированный порог *h* через заданную вероятность ложной тревоги *pлт*. Согласно (3.18), $h=\sqrt{-2\ln p_{лт}}$. Подставив это в выражение для вероятности правильного обнаружения, придем к результату:

$$p_{по}=1-p_{пс}=1-Q(\sqrt{-2\ln p_{лт}},q)\,.$$

Характеристики обнаружения сигнала со случайной начальной фазой даны пунктиром на рис. 3.6.

Обнаружение сигнала со случайной амплитудой и начальной фазой

Модель сигнала представляется в виде:

$$s(t;\varphi,A)=AS(t)\cos(2\pi f_0t+\gamma(t)+\varphi)=\mathrm{Re}\left\{A\dot{S}(t)\exp\left[j(2\pi f_0t+\varphi)\right]\right\}.$$

При независимости амплитуды и начальной фазы совместная априорная ПВ *A* и φ:

$$W_0(A,\varphi)=W_0(A)W_0(\varphi)\,.$$

В соответствии с (2.20) отношение правдоподобия (ОП):

$$l=\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp\left[\frac{2z(A,\varphi)-E(A)}{N_0}\right]W_0(A)W_0(\varphi)dAd\varphi\,, \tag{3.20}$$

где $z(A,\varphi)=Az(\varphi)$; $E(A)=A^2E$; $z(\varphi)$ и E имеют тот же смысл, что и в (3.10), т.е. представляют собой корреляцию принятого колебания *y(t)* с сигналом единичной амплитуды $s(t,\varphi)=\mathrm{Re}\left\{\dot{S}(t)\exp\left[j(2\pi f_0 t+\varphi)\right]\right\}$ в функции от фазы φ и энергию $s(t;\varphi)$. Считая ПВ начальной фазы $W_0(\varphi)$ равномерной и выполняя (3.20) интегрирование по φ с учетом результатов, получим:

$$l=\int_0^\infty \exp\left(-\frac{A^2E}{N_0}\right)I_0\left(\frac{2AZ}{N_0}\right)dA. \qquad (3.21)$$

Величина Z определена в предыдущем разделе. Структура обнаружителей такая же, как и для сигнала с неизвестной начальной фазой. Вид ПВ амплитуды влияет только на величину порога.

Вероятность ложной тревоги определяется первым из выражений (3.18) Для вычисления вероятности пропуска необходимо задать вид распределения амплитуды, поскольку:

$$p_{nc}=\int_0^\infty p_{nc}(A)W_0(A)dA, \qquad (3.22)$$

где $p_{nc}(A)$ – вероятность пропуска сигнала с конкретным значением A. Чаще других на практике встречается релеевская модель флуктуации амплитуды:

$$W_0(A)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma_A{}^2}\exp\left(-\dfrac{A^2}{2\sigma_A^2}\right), & A\ge 0;\\ 0, \quad A<0.\end{cases} \qquad (3.23)$$

Обычно σ_A^2 выбирают из условия $\overline{A^2}=1$. Так как для рэлеевской случайной величины $\overline{A^2}=2\sigma_A^2$, то для выполнения условия $\overline{A^2}=1$, необходимо, чтобы $\sigma_A^2=1/2$.

Для рэлеевских флуктуаций А значение вероятности пропуска можно вычислить не прибегая к интегрированию в (3.22).

Действительно, мгновенные значения радиосигнала с начальной фазой, распределенной равномерно, и с амплитудной, флуктуирующей по закону Релея, нормальны с нулевым средним. Таким образом при истинности гипотезы H_1 на выходе СФ (рис 3.8) наблюдается сумма независимых нормальных процессов, один из которых (шум) имеет дисперсию $N_0E/2$ (см 3.4), а другой (сигнал) - $\sigma_A^2E^2=E^2/2$. Поскольку эта сумма нормальна и имеет нулевое среднее, ПВ при гипотезе H_1 описывается не (3.17), а (3.16), т.е. является рэлеевской (вместо обобщенной рэлеевской), причем фигурирующий в (3.16) параметр σ^2 теперь равен $N_0E/2+E^2/2$. Поэтому

$$p_{nc}=\int_0^{z_n}\frac{Z}{N_0E/2+E^2/2}\exp\left[-\frac{Z^2}{2\left(N_0E/2+E^2/2\right)}\right]dZ.$$

При $t = Z / \sqrt{N_0 E(1+E/N_0)/2}$ получим:

$$p_{nc} = 1 - \exp\left[-\frac{h^2}{2(1+q^2/2)}\right], \qquad (3.24)$$

где h имеет тот же смысл, что и в (3.18), а параметр обнаружения q соответствует сигналу с единичной амплитудой, т.е. усредненному по A значению мощности сигнала при флуктуациях, описываемых (3.23). Для построения характеристик обнаружения служит равенство, следующее из (3.24) и формулы $p_{лт}$ в (3.18):

$$p_{no} = 1 - p_{nc} = p_{лт}^{\frac{1}{1+q^2/2}}.$$

Характеристики обнаружения на рис.3.6 нанесены штрихпунктиром.

Обнаружение пакетов импульсов

Сигналы, представляющие собой последовательности из N импульсов, называют пакетом (пачкой) импульсов. Каждый импульс характеризуется амплитудой, частотой, начальной фазой, длительностью, моментом возникновения. Модель пакета:

$$s(t;\theta) = \mathrm{Re}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \dot{a}_i \dot{s}_0(t - iT_n; \theta_i)\right], \qquad (3.25)$$

где $\dot{a}_i$ - комплексные амплитуды, описывающие известный закон модуляции амплитуд и фаз импульсов внутри пакета (от импульса к импульсу), θ_i - вектор неизвестных параметров i-го импульса пакета.

Если зависимость между всеми параметрами импульсов пакета полностью известна, то такие импульсы и пакет в целом называют когерентными. В противном случае – пакет некогерентный. Полностью известную последовательность импульсов сигналов можно рассматривать как полностью известный одиночный сигнал сложной формы, определяемой формой данной пачки импульсов.

Когерентный пакет импульсов со случайной начальной фазой. Все N копий содержат одну и ту же случайную начальную фазу и не содержат других случайных параметров.

$$s(t;\varphi) = \mathrm{Re}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \dot{a}_i \dot{S}_0(t - iT_n) \exp\left[j\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)\right]\right], \qquad (3.26)$$

где φ - общая для всех импульсов случайная начальная фаза, подчиняющаяся равномерному распределению; $\dot{S}_0(t)$ - известная комплексная огибающая одиночного импульса.

Пакет является частным случаем сигнала со случайной начальной фазой и для него справедливы все расчетные формулы п. 3.2.

Структура может оказаться более удобной в реализации, если учесть специфику сигнала (3.26).

Пусть $\dot{a}_i = a_i$ действительны ($\arg a_i = 0, \pi, i = 0,1,...N-1$, т.е. a_i могут принимать как положительные, так и отрицательные значения). Подставив (3.26) в соответствующее выражение п.3.2, получим:

$$z_1 = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_{1i}; \qquad z_2 = \sum_{i=0}^{N-1} a_i z_{2i}.$$

где величины:

$$z_{1i} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \dot{Y}(t)\dot{S}_0(t-iT_n)dt\right] = \int_0^T y(t)S_0(t-iT_n)\cos(2\pi f_0 t + \gamma_0(t))dt;$$

$$z_{2i} = \int_0^T y(t)S_0(t-iT_n)\sin(2\pi f_0 t + \gamma_0(t))dt.$$

[$S_0(t)$ и $\gamma(t)$ - законы амплитудной и угловой модуляции стандартного радиоимпульса] могут быть сформированы как отсчеты на выходе фильтра, согласованного с одиночным импульсом (СФОИ), взятые в два момента времени отстоящие друг от друга на четверть периода $T_0 = 1/f_0$ несущей радиоимпульса. Обнаружитель может быть реализован по схеме рис. 3.10.

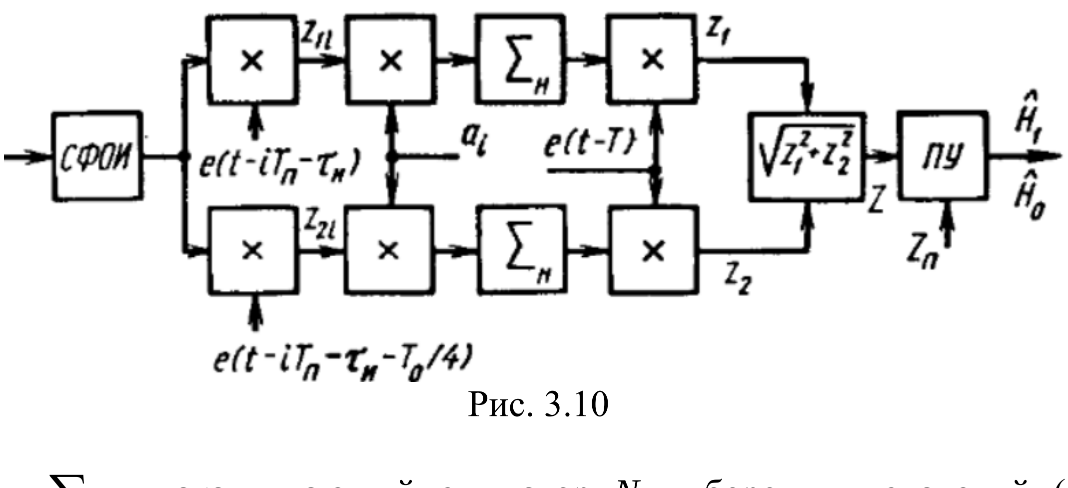


Рис. 3.10

Здесь $\sum_H$ - накапливающий сумматор N выборочных значений (z_{1i} и z_{2i}), ограничиваемый в момент окончания наблюдений (конца пакета) $T = (N-1)T_n + \tau_u$.

Показатели обнаружения определяются соотношениями (3.18) с учетом того, что в выражении для параметра обнаружения $q = \sqrt{2E/N_0}$ должна фигурировать энергия всего пакета $E = \sum_{i=0}^{N-1} E_i$. Если амплитуды импульсов одинаковы, то $E = NE_0$ и

$q = \sqrt{Nq_0}$, где q_0 – отношение сигнал/шум на выходе СФОИ; E_0 – энергия одиночного импульса.

Минимальное число импульсов, определяемое по заданным значениям вероятностей $p_{лт}$ и $p_{пс}$ и отношения сигнал/шум определяют с учетом (3.19) по формуле:

$$N_{\min} = \frac{\left[Q_2^{-1}\left(\sqrt{-2\ln p_{лт}}, p_{пс}\right)\right]^2}{q_0^2}.$$

Или при малых значениях $p_{лт}$ и $p_{пс}$ в соответствии с (3.8):

$$N_{\min} \approx \frac{\left[\Phi^{-1}(1-p_{лт}) + \Phi^{-1}(1-p_{пс})\right]^2}{q_0^2}.$$

Некогерентный пакет. Начальные фазы случайные и не зависят друг от друга:

$$s(t,\theta) = s(t;\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{N-1}) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=0}^{N-1} a_i \dot{S}_0(t-iT_n)\exp\left[j(2\pi f_0 t + \varphi_i)\right]\right\}, \qquad (3.27)$$

φ_i – случайные, независимые начальные фазы, подчиненные равномерному закону распределения $W_0(\varphi_i) = \frac{1}{2\pi}$, $|\varphi_i| \le \pi$.

Подставив соотношение (3.27) в (2.20) и повторив выкладки, приведенные к (3.13), получим равенство:

$$l = \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\prod_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp\left[\frac{2a_i Z_i \cos(\varphi_i - \arg\dot{z}_i)}{N_0}\right]d\varphi_i,$$

где величины Z_i и $\arg\dot{z}_i$ могут быть получены как отсчеты модули и аргументы комплексной огибающей на выходе согласования с одиночным сигналом фильтра в моменты времени $iT_n + \tau_n$ (τ_n - длительность одиночного импульса), а $E = \sum_{i=0}^{N-1} E_i$ - энергия пакета. После вычисления интегралов и перехода к достаточной статистике *ln l* придем к правилу:

$$\zeta = \sum_{i=0}^{N-1} \ln I_0\left(\frac{2a_i Z_i}{N_0}\right) \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\gtrless}} \zeta_п$$

Для прямоугольного пакета импульсов с одинаковыми амплитудами схема обнаружителя имеет вид (рис. 3.11).

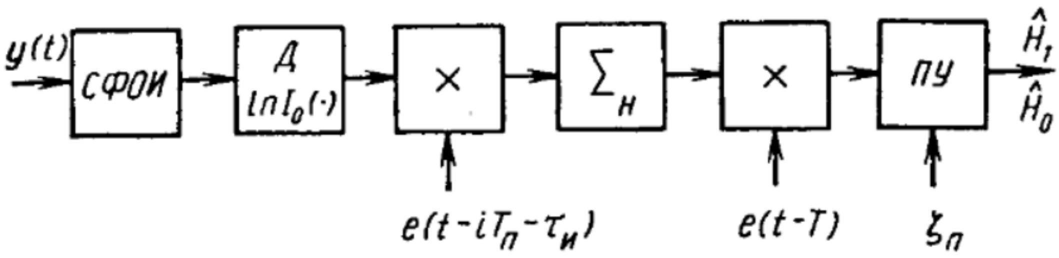


Рис. 3.11

Оптимальным детектором в схеме является детектор с характеристикой $\ln I_0\left(2Z/N_0\right)$.

При слабых и сильных сигналах возможны упрощения, основанные на приближениях функции $\ln I_0\left(x\right) \approx x^2/4$ при $x<<1$ и $\ln I_0\left(x\right) \approx x$ при $x>>1$.

При $q_0<<1$ оптимальным является квадратичный детектор, а при $q_0>>1$ – линейный.

Расчет качественных показателей для этих отношений сигнал/шум. При $q_0<<1$ с порогом $\xi_п$ сравнивается сумма $\xi = \sum_{i=0}^{N-1} u_{дi}$, где $u_{дi}$ - отсчеты на выходе квадратичного детектора. В этих условиях для получения представляющих практичекий интерес значений рлт и рпс необходимо накапливать большое число импульсов N. Тогда на основании центральной предельной теоремы величина ξ будет распределена по нормальному закону при обеих гипотезах. Можно показать, что при $q_0<<1$ появление сигнала приводит лишь к изменению среднего значения ξ, не влияя на дисперсию. Обозначив среднее значение отсчетов при истинности H_0 и H_1 через $\bar{u}_{дш}$ и $\bar{u}_{дс}$, а дисперсию через D_0 и учитывая, что при $T_п \geq \tau_и$ отсчеты $u_{дi}$ независимы, получим:

$$W\left(\xi \mid H_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N D_0}} \exp\left[-\frac{(\xi - N\bar{u}_{дш})^2}{2ND_0}\right],$$
$$W\left(\xi \mid H_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N D_0}} \exp\left[-\frac{(\xi - N\bar{u}_{дс})^2}{2ND_0}\right]. \qquad (3.28)$$

С учетом (3.28):

$$p_{лт} = \int_{\xi_п}^{\infty} W(\xi \mid H_0) d\xi = 1 - \Phi\left(\frac{\xi_п - N\bar{u}_{дш}}{\sqrt{ND_0}}\right),$$
$$p_{пс} = \int_{-\infty}^{\xi_п} W(\xi \mid H_1) d\xi = \Phi\left(\frac{\xi_п - N\bar{u}_{дс}}{\sqrt{ND_0}}\right). \qquad (3.28)$$

Введя нормированный порог $h = \frac{\xi_п - N\bar{u}_{дш}}{\sqrt{ND_0}}$, окончательно получим:

$$p_{лт} = 1 - \Phi(h), \quad p_{пс} = 1 - \Phi(\sqrt{N} q_{д0} - h), \qquad (3.29)$$

где величину $q_{д0} = (\bar{u}_{дс} - \bar{u}_{дш}) / \sqrt{D_0}$ можно считать отношением сигнал/шум на выходе детектора. Сравним эти результаты с полученными для когерентного пакета. Из выражение (3.29) и (3.5) следует, что для получения одинаковой верности обнаружения когерентного и некогерентного пакетов должно выполняться условие:

$$\sqrt{N_{НК}} q_{д0} = \sqrt{N_К} q_0 ,$$

где $N_К$, $N_{НК}$ - число импульсов, которое необходимо обработать в когерентном и некогерентном случаях. Если учесть, что для слабых сигналов $q_{до} \approx q_0^2 / 2$, то проигрыш во времени $T = NT_n$ при обнаружении некогерентного пакета составит $4 / q_0^2$ раз. Так, например, если $q_0 = 0{,}1$, то на обнаружение некогерентного пакета придется потратить в 400 раз больше времени, чем когерентного. Это означает, что некогерентная обработка слабых сигналов лишена смысла.

В случае $q_0 >> 1$ при неограниченном росте q_0 требуемые рлт и рпс можно обеспечить, обрабатывая лишб один импульс. При этом потери за счет незнания его фазы невелики. Таким образом, некогерентная обработка сильных сигналов почти столь же эффективна, как и когерентная.

<u>Флюктуирующие пакеты</u>. Изучение обнаружителей флюктуирующих пакетов ограничивают двумя случаями:

1) независимых флюктуаций (амплитуды импульсов – независимые случайные величины с распределением $W_0(a_i)$ модель (3.27));

2) дружных флюктуаций (в модели (3.26) $\dot{a}_i = a_{0i}$, где a_{0i} - детерминированные множители, определяющие закон амплитудной модуляции импульсов) пакета; A – случайная величина с $W_0(A)$.

Второй случай отличается от соответствующей общей модели со случайной амплитудой и начальной фазой лишь структурой комплексной огибающей $S(t)$. Структура обнаружителя соответствует рис.3.10.

Качественныые показатели при рэлеевских флуктуациях A определяются первым из соотношений (3.18) и формулой (3.24), в которых следует считать

$$E = E_0 \sum_{i=0}^{N-1} a_{0i}^2 , \qquad E_0 = \frac{1}{2} \int_0^T S_0^2(t) dt .$$

В первом случае с учетом независимости амплитуд и фаз импульсов ОП:

$$l = \prod_{i=0}^{N-1} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{a_i^2 E_0}{N_0} \right) \exp\left[\frac{2 a_i Z_i \cos(\varphi_i - \arg \dot{Z}_i)}{N_0} \right] W_0(a_i) da_i d\varphi_i . \qquad (3.30)$$

Априорная ПВ для рэлеевских флюктуаций:

$$W_0(a_i) = \begin{cases} 2 a_i \exp(-a_i^2), & a_i \ge 0; \\ 0, & a_i < 0. \end{cases}$$

После вычисления интегралов в (3.30):

$$l = c\prod_{i=0}^{N-1}\exp\left[-\frac{Z_i^2}{N_0^2(1+q_0/2)}\right],$$

где c = *const*. Перейдя к $\ln l$, получим правило

$$\zeta = \sum_{i=0}^{N-1} Z_i^2 \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\gtrless}} \zeta_п,$$

реализуемое схемой рис. 3.11, в котором детектор с характеристикой $\ln I_0(\cdot)$ заменен квадратичным. Подчеркнеа, что оптимальность квадратичного детектора, имеющая место для нефлуктуирующего некогерентного пакета лишь при $q_0 << 1$, для пакета независимо флуктуирующих импульсов сохраняется при людых q_0. Отметим также, что обнаружитель некогерентного независимого флуктуирующего пакета часто называют энергетическим приемником, так как вычисляемая в нем случайная величина ξ в отсутствие шума пропорциональна энергии пакета.

<u>Структуры и показатели различителей детерминированных сигналов</u>

<u>Различение двух детерминированных сигналов</u>. Действующий по правилу МП различитель двух детерминированных сигналов $s_0(t)$ и $s_1(t)$ равной энергии должен принимать решение о присутствии в колебании *y(t)* сигнала, имеющего с *y(t)* большую корреляцию.

$$z_1 \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\gtrless}} z_0, \qquad z_i = \int_0^T y(t)s_i(t)dt,\ i = 0,1$$

Перепишем это правило в следующем виде:

$$z = z_1 - z_0 = \int_0^T y(t)s_i(t)dt \underset{\hat{H}_0}{\overset{\hat{H}_1}{\gtrless}} 0, \tag{3.31}$$

где $s(t) = s_1(t) - s_0(t)$.

Структура, реализующая правило (3.31) приведена на рис. 3.12.

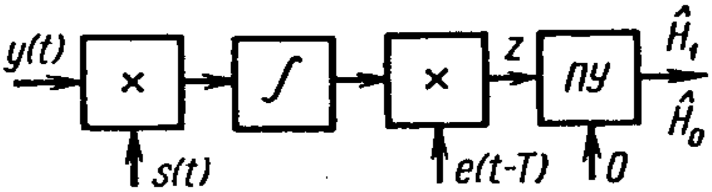


Рис. 3.12

Геометрическое толкование процедуры различения приведено на рис. 3.13.

Если через середину вектора $s(t)=s_1(t)-s_0(t)$ првоести перпендикуляр, разделяющий плоскость *P* на две полуплоскости (*aa'* на рис 3.13), то считается, что в *y(t)* присуствует тот сигнал, который лежит в той же полуплоскости, что и проекция *y(t)* на *P*.

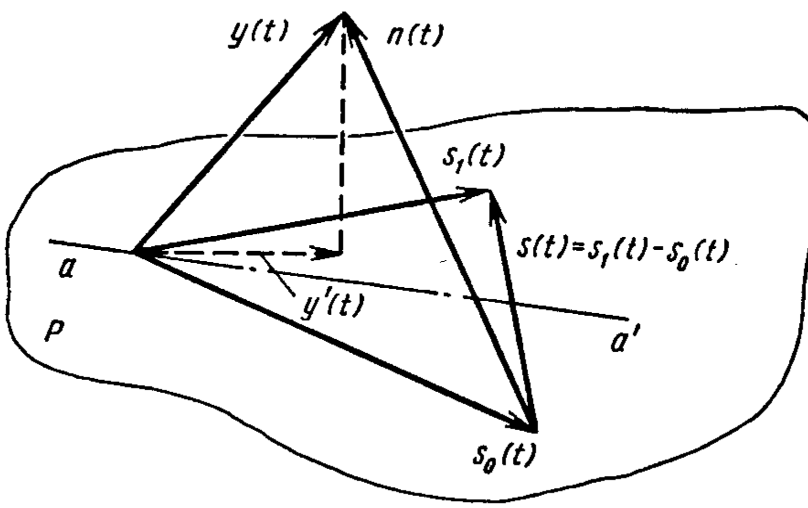


Рис. 3.13

Отсюда уже нетрудно прийти к выражениям для вероятнсотей перепутывания сигналов. Действительно, как видно из рис. 3.13 сигнал $s_0(t)$ будет ошибочно принять за сигнал $s_1(t)$ тогда и только тогда, когда проекция шумового веткора *n(t)* на направление *s(t)* окажется больше половины длинны d_{01} разности вектора $s(t)=s_1(t)-s_0(t)$.Так как проекция *n(t)* на направление *s(t)* равна $z_ш/d_{01}$, где $z_ш=\int_0^T n(t)s(t)dt$ - скалярное произведение (корреляция) *n(t)* и *s(t)*, то для вероятности перепутывания $s_0(t)$ с $s_1(t)$ имеем:

$$p_{01}=P(\hat{H}_1|H_0)=P(z_ш/d_{01}>\frac{d_{01}}{2})=\int_{d_{01}^2/2}^{\infty}W(z_ш)dz_ш.$$

Воспользовавшись нормальностью $z_ш$ как линейного преобразования *n(t)* и тем, что срезнее $z_ш=0$, а дисперсия $D\{z_ш\}=N_0E_s/2$, где E_s - энергия разностного сигнала, причем $d_{01}=\sqrt{E_s}$, получим:

$$p_{01}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{N_0d_{01}^2}{2}}}\int_{d_{01}^2/2}^{\infty}\exp\left[-\frac{z_ш^2}{2\frac{N_0d_{01}^2}{2}}\right]dz_ш=1-\Phi\left(\frac{d_{01}}{\sqrt{2N_0}}\right). \qquad (3.32)$$

Вероятность перепутывания уменьшается с ростом длины разностного вектора *s(t)*, т.е. с увеличением евклидова расстояния между $s_0(t)$ и $s_1(t)$.

$$d_{01}=\sqrt{\int\left[s_1(t)-s_1(t)\right]^2 dt}=\sqrt{2E-2\int s_0(t)s_1(t)dt}=\sqrt{2E(1-\rho)}\,,$$

в котором

$$p_{01}=1-\Phi(q\sqrt{\frac{1-\rho}{2}})\,, \tag{3.33}$$

где $q=\sqrt{2E/N_0}$ - уже известный параметр обнаружения, равный отношению сигнал/шум на выходе фильтра, согласованного с $s_i(t)$ при гипотезе H_i.

При равновероятных сигналах вероятности перепутывания одинаковы и полная вероятность ошибки равна:

$$P_{ош}=\frac{P_{01}+P_{10}}{2}=1-\Phi\left(q\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right). \tag{3.34}$$

Вероятность ошибки минимальна для противоположных сигналов и равна:

$$P_{ош}=1-\Phi\left(q\right). \tag{3.35}$$

Для ортогональных сигналов, для которых $\rho=0$:

$$P_{ош}=1-\Phi\left(q/\sqrt{2}\right). \tag{3.36}$$

Использование ортогональных сигналов требует двукратного увеличения энергии, что соответствует увеличению q в $\sqrt{2}$ раз для сохранения значения вероятности ошибки, как и для противоположных.

Различение М-сигналов. Различитель по правилу МП и в этом случае определяет присутствие в *y(t)* того сигнала, который имеет наибольшую корреляцию с *y(t).* Алгоритм можно записать в виде:

$$z_k \overset{\hat{H}_k}{\geq} z_i, \quad i=0,1,...,M-1. \tag{3.37}$$

Структурная схема, реализующая алгоритм, приведена на рис. 3.14.

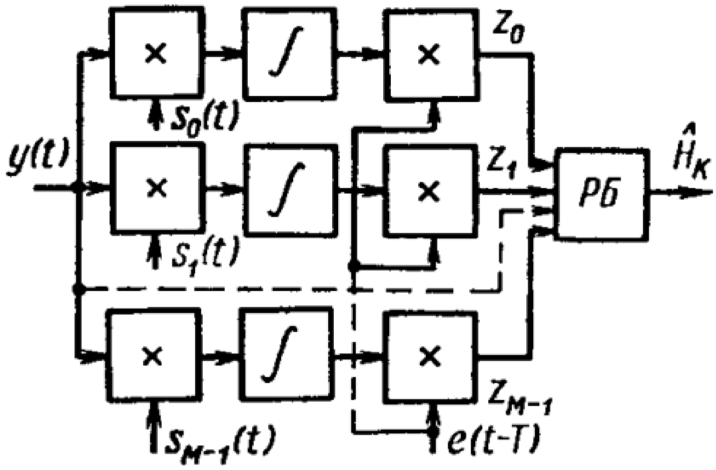


Рис. 3.14

При использовании геометрического представления оптимальный выбор *M*-детерминированных сигналов сводится к поиску конфигурации пучка *M*-векторов, в которой минимальное евклидово расстояние между парой векторов было максимальным. При равенстве энергий (длин векторов):

$$d_{ik} = \sqrt{\int \left[s_i(t) - s_k(t) \right]^2 dt} = \sqrt{2E\left(1 - \rho_{ik}\right)},$$

что тождественно условию минимума максимального коэффициента корреляции ρ_{ik} в ансамбле сигналов. Просуммировав ρ_{ik} по всем *i* и *k*, получим:

$$\sum_{i,k} \rho_{ik} = \frac{1}{E} \int \sum_{i,k} s_i(t) \cdot s_k(t) dt = \frac{1}{E} \int \left[\sum_{i=0}^{M-1} s_i(t) \right]^2 dt \geq 0, \qquad (3.38)$$

где неравенство следует из неотрицательности квадрата под модулем. Кроме того, в сумме слева M слагаемых при *i* = *k* равны единице, а остальные *M(M-1)* не больше $\rho_{\max}$, где $\rho_{\max} = \max\limits_{i \neq k} \rho_{ik}$. Поэтому $M + M(M-1)\rho_{\max} \geq 0$ и $\rho_{\max} \geq -1(M-1)$.

Конфигурацию из M векторов, в которой косинус угла между любой парой векторов равен *-1/(M-1)* называют правильным симплексом. Если эти векторы взять в качества M сигналов, то полученный детерминированный ансамбль при равновероятности всех $s_i(t)$ обеспечит минимум полной вероятности ошибки. Для любых равнокоррелированных сигналов:

$$P_{ОШ} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Phi^{M-1}\left(x + q\sqrt{1-\rho}\right) dx. \qquad (3.39)$$

Оценка (3.39) сверху

$$P_{ОШ\,l} = \sum_{\substack{i \\ i \neq l}} P\left(z_i > z_l \mid H_l\right) = \left(M-1\right)\left[1 - \Phi\left(q\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right)\right].$$

При равновероятных сигналах $\left(p_i = 1/M\right)$ получаем аддитивную границу полной вероятности ошибки:

$$P_{ОШ} = \frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1} P_{ОШ\,l} \le \left(M-1\right)\left[1-\Phi\left(q\sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right)\right]. \tag{3.40}$$

<u>Различение сигналов со случайными начальными фазами</u>

Если различаемые сигналы известны, за исключением начальной фазы, т.е. описываются моделью

$$s_i\left(t;\varphi\right) = \mathrm{Re}\left\{\dot{S}_i\left(t\right)\exp\left[j\left(2\pi f_0 t+\varphi\right)\right]\right\},$$

то применению правила МП должно предшествовать усреднение ФП $W\left(y\left(t\right)|\,H_i,\varphi\right)$, построенной для детерминированных сигналов с фиксированной фазой φ по всем ее возможным значениям с учетом априорной ПВ .

При равномерной ПВ фазы $W_0\left(\varphi\right) = 1/\left(2\pi\right)$ ФП повторяет результат (3.13) и с учетом равенства энергии

$$W\left(y\left(t\right)|\,H_i\right) = cI_0\left(\frac{2Z_i}{N_0}\right),$$

где c – коэффициент, содержащий сомножитли, не зависящие от i, а

$$Z_i = \left|\frac{1}{2}\int_0^T \dot{Y}\left(t\right)\dot{S}_i^*\left(t\right)dt\right| \text{ -} \tag{3.49}$$

модуль корреляции комплексных огибающих. Монотонность функции $I_0\left(*\right)$ позволяет записать правило МП в виде:

$$Z_k \overset{\hat{H}_k}{\ge} Z_i, \quad i = 0,1,\ldots,M-1. \tag{3.50}$$

Т.о. оптимальный различитель M-сигналов должен вычислить все M величин (3.49) и принять решение о присутствии в принятом колебании k-го сигнала, если максимальной является Z_k.

Способы технической реализации рассматривались ранее с квадратурными каналами. Тогда каждый канал M-канального устройства должен состоять из двух корреляторов и схемы объединения . Другая возможная реализация приведена на рис. 3.17.

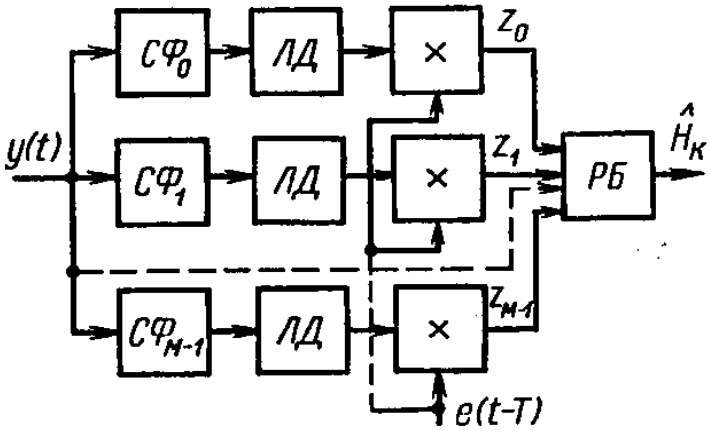


Рис. 3.17

Z_i находится как огибающая на выходе $СФ_i$. Вместо линейных детекторов можно применить детекторы огибающей с любыми монотонными характеристиками.

Для ансамбля ортогональных сигналов в усиленном смысле (ортогональных при любых значениях начальных фаз):

$$\int s_i(t;\varphi_i)s_k(t;\varphi_k)dt = 0 \quad \text{при любых } \varphi_i,\varphi_k \text{ и } i \neq k, \tag{3.51}$$

что эквивалентно, ортогональности детерминированных комплексных огибающих этих сигналов:

$$\int \dot{S}_i(t)\dot{S}_k^*(t)dt = 0 \quad i \neq k, \tag{3.52}$$

Примером являются сигналы, не перекрывающиеся по времени или по спектру.

В частности, вероятность перепутывания двух ортогональных в усиленном смысле сигналов со случайными фазами:

$$P_{ОШ} = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{q^2}{4}\right). \tag{3.53}$$

Аддитивная граница:

$$P_{ОШ} \leq \frac{M-1}{2}\exp\left(-\frac{q^2}{4}\right),$$

которой, как правило, пользуются для оценки вероятности ошибки , если число равновероятных ортогональных сигналов в усиленном смысле $M \geq 2$.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Содержание и классификация задач измерения параметров сигналов

Сигнал, поступающий на вход приемника информационной системы несет информацию, содержащуюся в значениях параметров. Пользователю для получения информации необходимо определить значения информационных параметров. Пааpаметры, несущие информацию называют *информационными*, другие неизвестные параметры – мешающими (неинформационными).

Модель измерения параметров: на интервале [0; T] присутствует колебание

$$y(t) = F\left[s\left(t;\lambda(t);\theta(t);x(t)\right)\right]. \tag{4.1}$$

где $F[*]$ – детерменированный оператор взаимодействия сигнала с помехами $x(t)$.

Полезный сигнал содержит r-мерный вектор информационных параметров $\lambda(t)$ и m-мерный вектор мешающих $\theta(t)$. По результатам анализа $y(t)$ необходимо вынести решение о значении полезных параметров сигнала в текущий момент времени. При постоянстве параметров $\lambda(t)$ на интервале наблюдения процедуру называют оценкой параметров сигнала.

При невозможности пренебрежения зависимостью $\lambda(t)$ от времени процедуру называют фильтрацией параметров сигналов.

Ошибки измерения параметров содержат случайную составляющую. Измеритель должен, используя оптимальные методы оценки, минимизировать негативные последствия ошибок.

Байесовские оценки случайных параметров сигналов

Положим, что сигнал содержит только информационные параметры. Пусть информационный параметр является векторной случайной величиной $\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\right)^T$ с известной априорной r-мерной ПВ. Задача измерителя – оценить векторный параметр. Будем полагать, что оценка однозначно определяется видом наблюдаемого колебания

$$\hat{\lambda} = F\left[y(t)\right]. \tag{4.2}$$

где $F\left[\cdot\right]$ - детерминированный оператоа, отображающих множество реализация y(t) в r-мерное пространство оценок.

Правила оценки состоят в отыскании оператора $F\left[\cdot\right]$.

Если параметр принимает лишь дискретные значения из конечного множества M, оценка состоит в определении какой из M-возможных сигналов

$$s_1(t) = s(t;\lambda_1), \qquad s_2(t) = s(t;\lambda_2).$$

присутствует в $y(t)$.

Следовательно, оценка дискретного параметра состоит в различении сигналов. Если (2.1) переписать в виде

$$\bar{\Pi} = \sum_{i,k} \Pi_{ik} P(\lambda_i) P\left(\hat{\lambda} = \lambda_k \mid \lambda_i\right), \tag{4.3}$$

где $P(\lambda_i)$ - априорная вероятность значения λ_i; $P\left(\hat{\lambda} = \lambda_k \mid \lambda_i\right)$ - условная вероятность ошибочной оценки параметра λ_i; Π_{ik} - плата за ошибку (функция потерь); то оператор, минимизирующий сумму, обеспечит оценку по критерию минимума среднего риска. Такие оценки называются байесовскими.

При переходе к оценке непрерывного случайного параметра , можно применить критерий (4.3), осуществив предельный переход от дискретных переменных к непрерывным и трактуя сумму как интегральную.

Введем следующие обозначения: $\Pi\left(\lambda, \hat{\lambda}\right)$ - функция потерь, $W\left(\hat{\lambda}, \lambda\right)$ - условная r-мерная ПВ оценки $\hat{\lambda}$ при условии истинности λ. При определенном переходе необходимо заменить $P(\lambda_i)$ на $W_0(\lambda)d\lambda$, а $P\left(\hat{\lambda} = \lambda_k \mid \lambda_i\right)$ на $W\left(\hat{\lambda} \mid \lambda\right)$. При этом выражение для среднего риска:

$$\bar{\Pi} = \int\int \Pi\left(\lambda, \hat{\lambda}\right) W_0(\lambda) W\left(\hat{\lambda} \mid \lambda\right) d\lambda d\hat{\lambda}, \tag{4.4}$$

Проанализируем сущность байесовских оценок параметров. Отдельно рассматривать случай непрерывных и дискретных параметров нет необходимости поскольку для последних можно воспользоваться представлением ПВ в виде суммы взвешенных δ-функций:

$$W_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{M} p_i \delta(\lambda - \lambda_i), \qquad W\left(\hat{\lambda} \mid \lambda\right) = W\left(\hat{\lambda} \mid \lambda = \lambda_i\right) = \sum_{k=1}^{M} p_{ik} \delta\left(\hat{\lambda} - \lambda_k\right).$$

Согласно теореме умножения вероятностей для случайных величин, $W_0(\lambda) W\left(\hat{\lambda} \mid \lambda\right) = W\left(\hat{\lambda}\right) W\left(\lambda \mid \hat{\lambda}\right)$, где $W\left(\hat{\lambda}\right)$ - безусловная ПВ оценки $\hat{\lambda}$; $W\left(\lambda \mid \hat{\lambda}\right)$ - условная ПВ случайной величины λ при условии, что оценкой является значение $\hat{\lambda}$. Тогда в соответствии с (4.4):

$$\bar{\Pi} = \int W\left(\hat{\lambda}\right) \int \Pi\left(\lambda, \hat{\lambda}\right) W\left(\hat{\lambda} \mid \lambda\right) d\lambda d\hat{\lambda}. \tag{4.5}$$

Внутренний интеграл можно записать как

$$\bar{\Pi}\left[y(t)\right] = \int \Pi\left(\lambda, \hat{\lambda}\right) W\left(\lambda \mid \hat{\lambda}\right) d\lambda = \int \Pi\left(\lambda, \hat{\lambda}\right) W\left(\lambda \mid y(t)\right) d\lambda, \tag{4.6}$$

поскольку соотношение (4.2) связывает оценку $\hat{\lambda}$ с видом наблюдаемого колебания y(t) и, следовательно, уровня ПВ

$$W\left(\hat{\lambda} \mid \lambda\right)=W\left(\lambda \mid F\left[y(t)\right]\right)=W\left(\lambda \mid y(t)\right).$$

Величина $\bar{\Pi}\left[y(t)\right]$ является условным математическим ожиданием функции потерь, вычисленным для фиксированной реализации усреднением по всем возможным значениям случайного параметра λ, называемая *условным средним риском*. Байесовские оценки можно отыскивать из условия минимума выражения (4.6).

Условную r-мерную ПВ $W\left(\hat{\lambda} \mid y(t)\right)$ называют апостериорной.

При высокой точности измерений $W\left(\lambda \mid y(t)\right)$ почти для всех реализаций *y(t)* имеет острый пик, расположенный в окрестности истинного значения λ.

Для конкретизации байесовской оценки необходимо выбрать функцию потерь $\Pi\left(\lambda,\hat{\lambda}\right)$. Наиболее часто используемыми функциями потерь являются:

1) Квадратичная функция потерь представляет собой квадратичную форму относительно отклонения (ошибки) $\lambda-\hat{\lambda}$ от истинного значения параметра λ:

$$\Pi\left(\lambda,\hat{\lambda}\right)=\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)^{T} B\left(\lambda-\hat{\lambda}\right), \tag{4.7}$$

где B - любая положительно определенная rxr матрица. Матрица называется положительно определенной, если скаляр $x^T Bx$ (квадратичная форма) положителен для любых ненулевых r-мерных вектор-столбцов x.

При оценке скалярного параметра λ *(r=1)* квадратичная функция потерь

$$\Pi\left(\lambda,\hat{\lambda}\right)=b\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)^{2},$$

где $b>0$, т.е. является параболой (рис. 4.1,а). В общем случае уравнение (4.7) задает $(r+1)$-мерный параболоид.

Подставив (4.7) в (4.6), найдем

$$\bar{\Pi}\left[y(t)\right]=\int\left(\lambda-\hat{\lambda}\right)^{T} B\left(\lambda-\hat{\lambda}\right) W\left(\lambda \mid y(t)\right) d\lambda .$$

Продифференцировав правую часть выражения по λ и приравняв результат нулю, для оптимальной оценки получим:

$$\hat{\lambda}_{опт}=\hat{\lambda}_{ps}, \tag{4.8}$$

где $\hat{\lambda}_{ps}=\int \lambda W\left(\lambda \mid y(t)\right) d\lambda$ - апостериорное математическое ожидание векторного параметра λ.

Расписав результат (4.8) для отдельных компонентов λ с учетом условия согласованности многомерных ПВ (формулы полной вероятности для случайных величин)

$$\int\int_{...}\int W(\lambda \mid y(t))d\lambda_1...d\lambda_{i-1}d\lambda_{i+1}...d\lambda_r = W(\lambda_i \mid y(t)).$$

Придем к результату:

$$\hat{\lambda}_{i\,опт} = \hat{\lambda}_{i\,ps} = \int \lambda_i W(\lambda_i \mid y(t))d\lambda_i. \qquad (4.9)$$

Таким образом, байесовская оценка *i*-го параметра $\hat{\lambda}_i$ есть его апостериорное среднее, математическое ожидание, вычисленное на основании апостериорной ПВ . Эту оценку называют также оценкой по центру тяжести.

Независимость байесовской оценки (4.8) от матрицы *B* в (4.7) позволяет, не нарушив общности считать матрицу *B* диагональной. Тогда функция потерь:

$$П(\lambda, \hat{\lambda}) = \sum_{i=1}^{r} b_i (\lambda - \hat{\lambda})^2, \text{ где } b_i > 0.$$

Смысл функции потерь: плата за ошибку растет пропорционально квадрату ошибки изменения каждого из *r*-параметров.

2) Прямоугольная функция потерь

$$П(\lambda, \hat{\lambda}) = 1 - rect\left(\frac{\lambda - \hat{\lambda}}{\Delta}\right), \qquad (4.10)$$

где $rect(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases}.$

Функция, описывающая прямоугольный импульс единичной амплитуды и длительности, симметричный относительно оси *x=0*.

Обобщая (4.10) для многомерного случая $(r \ge 1)$:

$$П(\lambda, \hat{\lambda}) = 1 - \prod_{i=1}^{r} rect\left(\frac{\lambda - \hat{\lambda}}{\Delta}\right), \qquad (4.11)$$

При такой функции потерь

$$\bar{П}[y(t)] = 1 - \int_{\hat{\lambda}_1 - \Delta_1/2}^{\hat{\lambda}_1 + \Delta_1/2} \dots \int_{\hat{\lambda}_r - \Delta_r/2}^{\hat{\lambda}_r + \Delta_r/2} W(\lambda \mid y(t))d\lambda_1 d\lambda_2 ... d\lambda_r. \qquad (4.12)$$

Если побочные максимумы ПВ не превышают ее значений в области

$$\lambda_i \in \left[\lambda_{i\,ps}^M - \frac{\Delta_i}{2};\;\; \lambda_{i\,ps}^M + \frac{\Delta_i}{2} \right],\;\; i = 1, 2, \ldots, r\,.$$

минимум риска будет достигнут при

$$\lambda_i = \lambda_{i\,ps}^M,\;\; i = 1, 2, \ldots, r\,.$$

Т.о. байесовской оценкой окажется оценка по максимуму (моде) апостериорной ПВ:

$$\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_{опт} = \hat{\lambda}_{ps}^M\,. \tag{4.13}$$

Правило МАВ можно получить и модифицировав функцию (4.11) до простой функции потерь:

$$\Pi\left(\lambda, \hat{\lambda}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{r} \delta\left(\lambda_i - \hat{\lambda}_i\right),$$

предполагающей одинаково опасными любые ошибки, но премирующей в бесконечном размере за точное совпадение оценки.

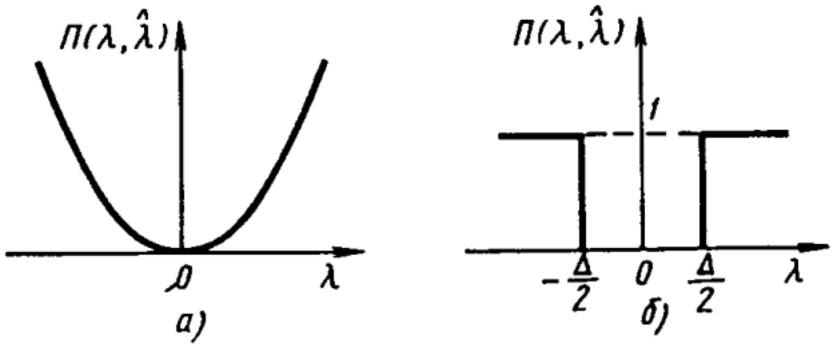


Рис. 4.1

Критерии оценки неслучайных параметров сигналов. Граница Крамера-Рао.

При отсутствии априорной информации о параметре λ переходят к небайесовским критериям качества. Один из критериев базируется на требованиях несмещенности оценки и минимума дисперсии оценки.

Условие несмещенность оценки:

$$\hat{\lambda} = \lambda \text{ или } \overline{\hat{\lambda} - \lambda} = 0\,. \tag{4.15}$$

Естественно, необходимо стремиться к наименьшему разбросу несмещенной оценки относительно истинного значения, чтобы дисперсия была минимально возможной (рис.4.2).

$$D\left\{\hat{\lambda} \,|\, \lambda\right\} = \overline{\left(\bar{\hat{\lambda}} - \lambda\right)^2} = \overline{\left(\hat{\lambda} - \lambda\right)^2} = \min\,. \tag{4.16}$$

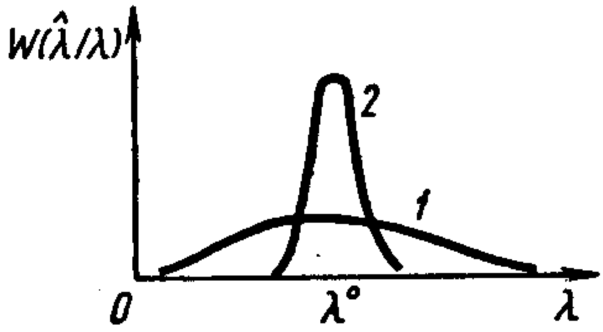


Рис. 4.2

Одновременное выполнение условий (4.15) и (4.16) – единый критерий качества. Основу правил оценки составляет соотношение, называемое границей Крамера-Рао, устанавливающее нижний предел условной дисперсии несмещенной оценки.

$$D\{\hat{\lambda}\,|\,\lambda\} \ge \left\{\left[\frac{d\ln W(y(t)\,|\,\lambda)}{d\lambda}\right]^2\right\}^{-1} = -\left[\frac{d^2\ln W(y(t)\,|\,\lambda)}{d\lambda^2}\right]^{-1}. \tag{4.17}$$

Оценка, для которой неравенство (4.17) превращается в равенство называют эффективной.

Необходимым и достаточным условием эффективности оценки служит обращение неравенства Буняковского-Шварца в равенство:

$$\begin{gathered}\int(\hat{\lambda}-\lambda)^2 W(y(t)\,|\,\lambda)dy(t)\int\left[\frac{d\ln W(y(t)\,|\,\lambda)}{d\lambda}\right]^2 W(y(t)\,|\,\lambda)dy(t) \ge \\ \ge \left|\int(\hat{\lambda}-\lambda)^2\sqrt{W(y(t)\,|\,\lambda)}\cdot\frac{d\ln W(y(t)\,|\,\lambda)}{d\lambda}\cdot\sqrt{W(y(t)\,|\,\lambda)}dy(t)\right|^2\end{gathered} \tag{4.18}$$

возможно тогда и только тогда, когда

$$\hat{\lambda}-\lambda = k(\lambda)\frac{d\ln W(y(t)\,|\,\lambda)}{d\lambda},$$

где $k(\lambda)$ - некоторая функция λ.

Величину

$$\overline{\left[\frac{d\ln W(y(t)\,|\,\lambda)}{d\lambda}\right]^2} = -\frac{\overline{d^2\ln W(y(t)\,|\,\lambda)}}{d\lambda^2} \tag{4.19}$$

называют информацией Фишера. Следовательно, никакая несмещенная оценка не может обладать условной дисперсией, меньшей величины, обратной информации Фишера.

Оценки по максимуму правдоподобия

В практических задачах мерой обеспечения высокой точности является увеличение времени наблюдения и увеличение отношения сигнал/шум. В этом случае асимптотически оптимальным правилом оценки является оценка по максимуму правдоподобия (ОМП). Поскольку максимум ФП достигается на тех же λ, что и максимум логарифма ФП, правило ОМП можно записать в виде:

$$\ln W\left(y(t)\,|\,\hat{\lambda}\right)=\max_{\lambda}\ln W\left(y(t)\,|\,\lambda\right) \qquad (4.20)$$

Свойства ОМП:

1. Если строго (а не только асимптотически) эффективная оценка существует,то ОМП и является этой оценкой.
2. ОМП инвариантна к замене переменных, что дает возможность находить ОМП одних параметров через ОМП других.
3. ОМП являются асимптотически байесовскими оценками
4. ОМП в условиях надежных измерений обладает практически наилучшими характеристиками.

При наличии у сигнала неинформационных параметров для построения ФП λ необходимо усреднить ФП по всем неинформационным параметрам с учетом известного распределения вероятностей возможных значений мешающих параметров θ.

$$W\left(y(t)\,|\,\lambda\right)=\int W\left(y(t)\,|\,\lambda_э\right)W_0 d\theta \qquad (4.21)$$

После этого ОМП $\hat{\lambda}$ находят путем максимизации по λ ФП или логарифма МП.

Оценка параметров сигнала на фоне аддитивного нормального шума

Считая шум $x(t)=n(t)$ стационарным и белым, выражение для функционала ПВ процесса y(t) при условии наличия в нем сигнала $s(t,\lambda_э)$, где $\lambda_э=\left(\lambda^T,\theta^T\right)^T$ - *(r+m)*-мерный вектор неизвестных параметров сигнала можнопредставить в виде:

$$W\left(y(t)\,|\,s(t;\lambda_э)\right)=c\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T\left[y(t)-s(t;\lambda_э)\right]^2 dt\right\}.$$

Рассматривая функционал как функцию условия λ при фиксированной реализации *y(t)* получим ФП параметра $\lambda_э$. После раскрытия скобок в показателе экспоненты получим

$$W\left(y(t)\,|\,\lambda_э\right)=c_y\exp\left[\frac{2z(\lambda_э)-E(\lambda_э)}{N_0}\right], \qquad (4.22)$$

где $z(\lambda_э)=\int\limits_0^T y(t)s(t;\lambda_э)dt$ - корреляционный интеграл; $E(\lambda_э)=\int s^2(t;\lambda_э)dt$ - энергия сигнала $s(t;\lambda_э)$; c_y - коэффициент, зависящий от *y(t)*.

Если сигнал не содержит мешающих параметров, ФП имеет вид:

$$W\left(y(t)\,|\,\lambda\right)=c_y\exp\left[\frac{2z(\lambda)-E(\lambda)}{N_0}\right], \qquad (4.23)$$

При известной ПВ $W_0(\theta)$:

$$W\left(y(t)\,|\,\lambda\right)=c_y\int\exp\left[\frac{2z(\lambda_э)-E(\lambda_э)}{N_0}\right]W_0(\theta)d\theta. \qquad (4.24)$$

Рассмотрим случай, когда в число неизвестных параметров входит фаза:

$$s(t,\lambda_э)=s(t,\lambda,\varphi)=\mathrm{Re}\left[\dot{S}(t,\lambda)\exp(j\varphi)\exp(j2\pi f_0t)\right],$$

где $\dot{S}(t,\lambda)$ - гильбертова комплексная огибающая сигнала, зависящая только от информационных параметров сигнала. При этом $\left(\lambda^T,\varphi\right)^T$ - *(r+1)*-мерный вектор. Тогда

$$z(\lambda_э)=\int\limits_0^T y(t)\mathrm{Re}\left[\dot{S}(t;\lambda)\exp(j\varphi)\exp(j2\pi f_0t)\right]dt=\int\limits_0^T\mathrm{Re}\left[\dot{y}(t)\right]\cdot\mathrm{Re}\left[\dot{s}(t;\lambda)\exp(j\varphi)\right]dt.$$

где $\dot{y}(t)$, $\dot{s}(t;\lambda)$ - аналитические сигналы, отвечающие $y(t)$ и $s(t,\lambda)=\mathrm{Re}\left[\dot{S}(t,\lambda)\exp(j2\pi f_0t)\right]$.

Выполнив преобразования, окончательно получим:

$$W\left(y(t)\,|\,\lambda_э\right)=c_y\exp\left\{\frac{2Z(\lambda)\cos\left[\varphi-\arg\dot{z}(\lambda)\right]-E(\lambda)}{N_0}\right\}. \qquad (4.25)$$

$$z(\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_0^T\dot{y}(t)\dot{s}^*(t;\lambda)dt. \qquad (4.25)$$

Здесь

$$Z(\lambda) = \left|\dot{z}(\lambda)\right|. \tag{4.26}$$

Если начальная фаза равновероятна на интервале $[-\pi;\ \pi]$

$$W_0(\varphi) = 1/(2\pi), \quad |\varphi| \le \pi. \tag{4.27}$$

Тогда, усредняя ФП, получим:

$$W\left(y(t)\,|\,\lambda\right) = c_y\,\mathrm{I}_0 \exp\left[\frac{2Z(\lambda)}{N_0}\right]\exp\left[-\frac{E(\lambda)}{N_0}\right]. \tag{4.28}$$

Из (4.24) и (4.28) следует, что ОМП λ при отсутствии y сигнала мешающих параметров есть значение λ, максимизирующее показатель правой части

$$z\left(\hat{\lambda}\right) - E\left(\hat{\lambda}\right)/2 = \max_{\lambda}\left[z(\lambda) - E(\lambda)/2\right]. \tag{4.29}$$

При измерении неэнергетических параметров правило (4.29) упрощается:

$$z\left(\hat{\lambda}\right) = \max_{\lambda} z(\lambda). \tag{4.30}$$

Следовательно, ОМП $\hat{\lambda}$ неэнергетического параметра соответствует его значению, при котором принятая реализация наибольшей корреляцией с $s(t;\lambda)$. Ее оценку в реальном времени можно сформировать располагая набором корреляторов (рис. 4.3).

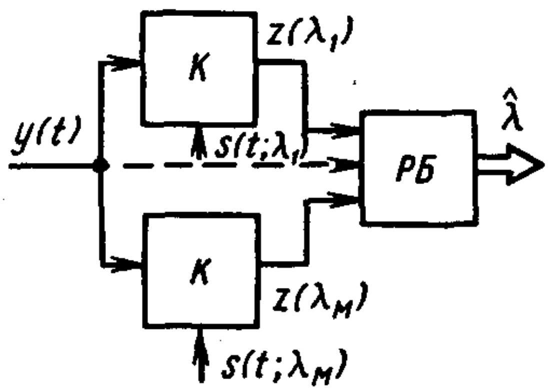


Рис. 4.3

Схема рис.4.3 является оптимальным различителем M детерминированных сигналов равной энергии, что подтверждает единство задач различения и оценки параметров.

Если среди оцениваемых параметров присутствует начальная фаза, правило ОМП параметров λ и φ имеет вид:

$$Z\left(\hat{\lambda}\right)-E\left(\hat{\lambda}\right)/2=\max_{\lambda}\left[Z(\lambda)-E(\lambda)/2\right]. \tag{4.31}$$

$$\hat{\varphi}=\arg\dot{z}\left(\hat{\lambda}\right). \tag{4.32}$$

где $\dot{z}\left(\hat{\lambda}\right)$, $Z\left(\hat{\lambda}\right)$ определяют по (4.25), (4.26).

Если параметр λ неэнергетический, то его оценка упрощается:

$$Z\left(\hat{\lambda}\right)=\max_{\lambda}Z(\lambda). \tag{4.33}$$

$$\hat{\varphi}=\arg\dot{z}\left(\hat{\lambda}\right). \tag{4.34}$$

Для комплексных огибающих:

$$\dot{z}(\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^T\dot{Y}(t)\dot{S}^*(t;\lambda)dt\,. \tag{4.35}$$

Для формирования структуры устройства учтем равненства, полученные на основе преобразований Гильберта и теоремы Парсеваля:

$$\int y(t)s(t;\lambda)dt=\int y_\perp(t)s_\perp(t;\lambda)dt\,,\qquad \int y(t)s_\perp(t;\lambda)dt=-\int y_\perp(t)s(t;\lambda)dt\,,$$

где $s_\perp(t;\lambda)=\mathrm{Im}\left[\dot{s}(t;\lambda)\right]$; $y_\perp(t;\lambda)=\mathrm{Im}\left[\dot{y}(t)\right]$ - преобразования Гильберта колебаний $s(t;\lambda)$ и $y(t)$.

Из соотношений (4.34) и (4.35) следует

$$Z(\lambda)=\left|z_1(\lambda)+jz_2(\lambda)\right|=\sqrt{z_1^2(\lambda)+z_2^2(\lambda)}, \tag{4.36}$$

где

$$\begin{matrix}z_1(\lambda)\\ z_2(\lambda)\end{matrix}=\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}\left[\dot{z}(\lambda)\right]=\int y(t)\begin{matrix}s(t;\lambda)\\ s_\perp(t;\lambda)\end{matrix}dt\,. \tag{4.37}$$

$$tg\arg z(\lambda)=z_2(\lambda)/z_1(\lambda). \tag{4.38}$$

Схему изменителя, работающего по правилу (4.33), (4.34) можно реализовать как набор *M* пар квадратурных корреляторов (рис.4.4), каждый из которых формирует пару корреляцийс двумя копиями квадратурных компонентов сигнала. Преобразователь *П* переводит декартовы координаты в полярные. *РБ* выбирает в качестве оценки значение λ_i, используемое в опорах пары корреляторов с наибольшим выходным эффектом.

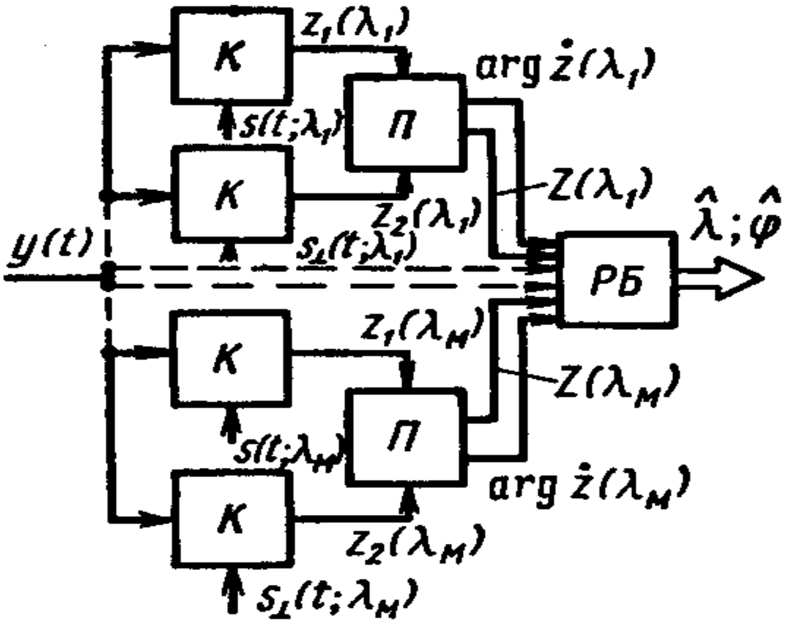


Рис. 4.4

Рассмотрим ОМП параметра λ со случайной фазой с равномерной априорной ПВ (4.27). Применив алгоритм (4.20) к ФП (4.28), получим:

$$\ln I_0\left[\frac{2Z(\hat\lambda)}{N_0}\right]-\frac{E(\hat\lambda)}{N_0}=\max_{\lambda}\left\{\ln I_0\left[\frac{2Z(\lambda)}{N_0}\right]-\frac{E(\lambda)}{N_0}\right\}. \qquad (4.39)$$

Если параметр λ – неэнергетический, то достаточно максимизировать по λ $Z(\lambda)$, так как правило ОМП

$$Z(\hat\lambda)=\max_{\lambda} Z(\lambda) \qquad (4.40)$$

совпадает с (4.33). Для формирования оценки может быть использована схема (рис.4.4), в которой нет необходимости вычислять и подавать на РБ $\arg\dot z(\lambda_i)$, поскольку фаза не оценивается. Схема оказывается обычным различителем М сигналов равной энергии, работающих по правилу МП со случайными начальными фазами.

ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ И РАСЧЕТА ТОЧНОСТИ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ

Оценка всех неизвестных параметров сигнала

Оценка амплитуды сигнала. Пусть сигнал имеет вид

$$s(t,A)=As_0(t),$$

где A – неизвестный параметр, амплитуда, сомножитель, задающий форму сигнала единичной энергии.

Поскольку А – энергетический параметр для определения структуры, реализующей ОМП, воспользуемся правилом (4.39), в котором

$$E(\lambda)=E(A)=\int s^2(t;A)dt=A^2E_0=A^2, \qquad z(\lambda)=z(A)=Az,$$

где

$$z=\int_0^T y(t)s_0(t)dt.$$

Тогда оценкой максимума правдоподобия $\hat{A}$ будет точка максимума по А функции $Az-A^2/2$. Единственный максимум этого квадрата двучлена соответствует значению A=z, так что $\hat{A}=z$. Таким образом, ОМП амплитуды сигнала, не содержащего мешающих параметров, можно получить как отсчет на выходе коррелятора с опорой $s_0(t)$ (рис. 5.1,а) или фильтра, согласованного с $s_0(t)$ (рис. 5.1,б), при подаче на входы названных устройств реализации *y(t)*.

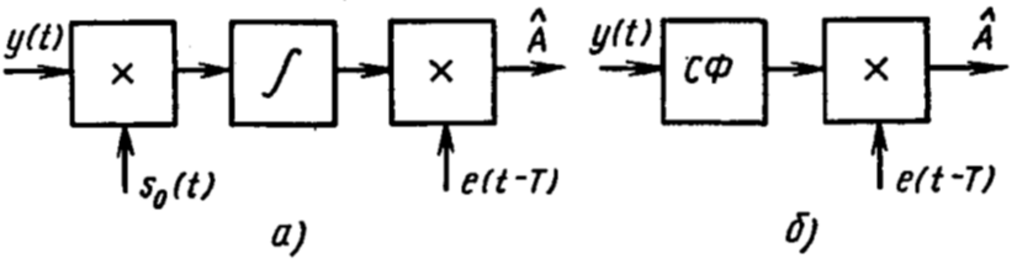


Рис. 5.1

Дисперсия ОМП совпадает с дисперсией корреляции z. Из

$$D\{z\}=\frac{N_0E_0}{2}=\frac{N_0}{2}$$

следует, что $D\{\hat{A}\,|\,A\}=N_0/2$. Показателем точности служит дисперсия относительной ошибки $\left(\hat{A}-A\right)/A$, которая равна $1/q^2$. Следовательно, повышение точности может быть обеспечена только увеличением отношения сигнал/шум $q(A)$ на выходе СФ.

<u>**Совместная оценка амплитуды и фазы**</u>. Пусть

$$s(t,A,\varphi)=\mathrm{Re}\left[A\dot{S}_0(t)\exp(j\varphi)\exp(j2\pi f_0t)\right],$$

где $\dot{S}_0(t)$ - известная комплексная огибающая.

Пусть, как и при оценке амплитуды

$$E_0 = \frac{1}{2}\int \left|\dot{S}(t)\right|^2 dt = 1, \qquad E(A) = A^2 E_0 = A^2.$$

Для получения структуры, реализующий ОМП, воспользуемся материалом 4.6, для случая, когда фаза измеряется вместе с другими параметрами. Подставив в

$$\dot{z}(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^T \dot{Y}(t)\dot{S}^*(t;\lambda)\,dt$$

вместо $\dot{S}(t;\lambda)$ величину $A\dot{S}_0(t)$, получим $\dot{z}(A) = A\dot{z}$, где $\dot{z} = \frac{1}{2}\int_0^T \dot{Y}(t)\dot{S}^*(t)\,dt$ - корреляция уомплексных огибающих принятого колебания и сигнала единичной энергии $s_0(t) = \mathrm{Re}\left[S_0(t)\exp(j2\pi f_0 t)\right]$. Так как $Z(A) = \left|\dot{z}(A)\right| = AZ$ $\left(Z = \left|\dot{z}\right|\right)$, то максимизируя правую часть (4.31) по А для ОМП оценки $\hat{A}$ амплитуды А имеем $\hat{A} = Z$, после чего для ОМП оценки фазы $\hat{\varphi}$ в соответствии с (4.32) найдем:

$$\hat{\varphi} = \arg Z\dot{z} = \arg \dot{z}$$

В соответствии с (4.36) – (4.38) Z и $\arg\dot{z}$ являются полярными координатами вектора с декартовыми компонентами

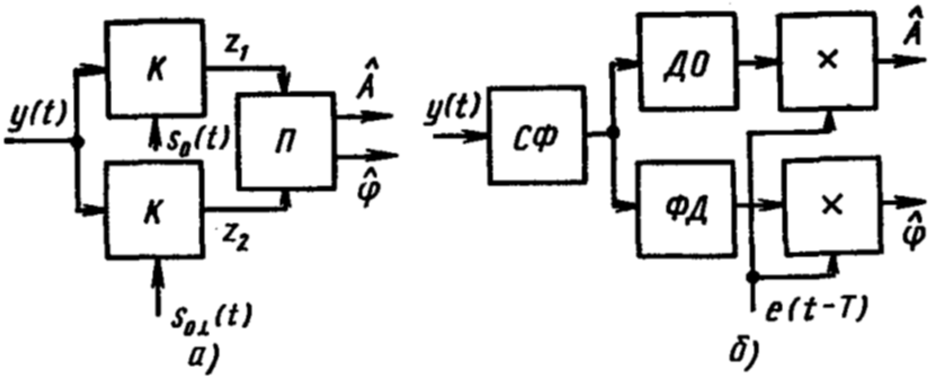
$$\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} = \int_0^T y(t) \begin{matrix} s_0(t) \\ s_{0\perp}(t) \end{matrix} dt,$$

где $s_0(t)$, $s_{0\perp}(t) = \mathrm{Im}\left[\dot{S}_0(t)\exp(j2\pi f_0 t)\right]$ - квадратурные составляющие сигнала $s_0(t;\varphi) = s(t;1;\varphi)$. Таким образом, для формирования $\hat{A}$ и $\hat{\varphi}$ необходимо вычислить корреляции y(t) с $s_0(t)$ и $s_{0\perp}(t)$ и перевести декартовы координаты в полярные по правилу:

$$\hat{A} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}; \qquad \hat{\varphi} = arctg\left(z_1/z_2\right) + \pi\frac{signz_1 - 1}{2}.$$

Второе слагаемое в последнем равенстве обусловлено тем, что значения арктангенса лежат в пределах $\left[-\pi/2;\ \pi/2\right]$, тогда как интервал определения фазы $\varphi\left[-\pi;\ \pi\right]$.

Структуры, осуществляющие оценку амплитуды и фазы, представлены на рис. 5.2,а,б. Схема включает пару квадратурных корреляторов К и преобразователь П декартовых координат в полярные.



ДО – детектор огибающей;

ФД – фазовый детектор.

Рис. 5.2

Применение второй схемы следует из того, что $\dot{z}$ - это отсчет комплексной огибающей на выходе фильтра, согласованного с $s_0(t)$ в момент окончания входного сигнала $t=T$. Поэтому $\hat{A}=|\dot{z}|$ и $\hat{\varphi}=\arg\dot{z}$ являются амплитудой и фазой колебания на выходе упомянутого фильтра и, следовательно, могут быть получены как выборки на выходе детектора огибающей ДО и фазового детектора ФД при $t=T$.

Дисперсия оценки амплитуды имеет то же значение, что и в предыдущем примере: $D\{\hat{A}\,|\,A,\varphi\}=N_0/2$, дисперсия оценки фазы

$$D\{\hat{\varphi}\,|\,A,\varphi\}\approx\frac{N_0}{2A^2}=1/q^2(A)$$

определяется отношением сигнал/шум на выходе СФ. Поэтому при неизвестной энергии сигнала изменением его формы или параметров точность оценки фазы (и амплитуды) нельзя.

Если требуется оценить только фазу или амплитуду, используются схемы рис. 5.2, но все операции и соответствующие элементы схемы для оценки другого параметра могут быть исключены.

<u>Оценка времени запаздывания сигнала</u>. При неизвестном времени запаздывания мдель сигнала может быть представлена в виде

$$s(t;\lambda)=s(t-\tau).$$

Пусть T_c – длительность сигнала, а время наблюдения $T\ge\tau+T_c$. Так как выражение $\int_0^T s^2(t-\tau)dt$ не зависит от τ, то время запаздывания – параметр неэнергетический, поэтому ОМП, согласно (4.40) можно получить с помощью схемы рис. 4.5, где опорными сигналами служат копии с различным временем задержки.

Рассмотрим иную реализацию $z(\lambda)=z(\tau)$. В правой части (4.40) можно записать

$$z(\tau)=\int_0^T y(t)s(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty} y(\theta)s\big(T_c-(T_c-\theta+\tau)\big)d\theta=\int_{-\infty}^{\infty} y(\theta)h_{опт}(T_c+\tau-\theta)d\theta$$

Здесь $h_{опт}(t)=s(T_c-t)$ - импульсная характеристика СФ с $s(t)$. Корреляцию $z(\tau)$ принятой реализации *y(t)* с копиями сигнала, имеющими различное время запаздывания, формирует СФ в последовательные моменты времени, отличающиеся от соответствующих τ лишь известным слагаемым T_c. Поэтому ОМП можно найти пропустив сначала *y(t)* через СФ, а затем зафиксировав момент t_M достижения колебанием на выходе СФ своего максимума на интервале наблюдения. Вычитание из t_M величины T_c позволяет определить искомую ОМП времени запаздывания $\hat{\tau}$. Ищложенное иллюстрируется на рис. 5.3,а, где РБ – решающий блок, фиксирующий момент максимума на выходе СФ, а также эпюрами на рис. 5.3,б, оцифровка которых соответствует номерам точек на рис. 5.3.а.

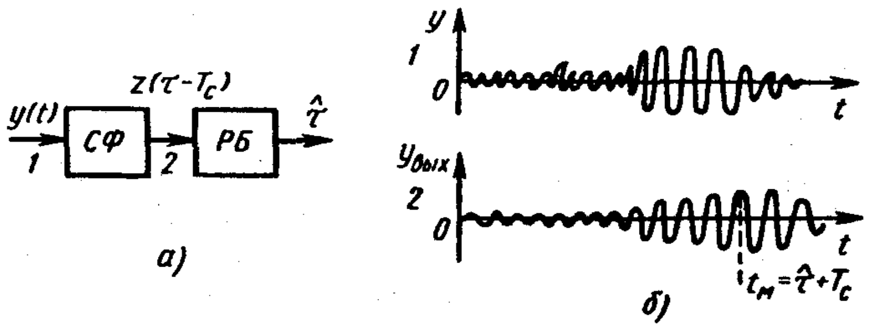


Рис. 5.3

Дисперсия ОМП определяется выражением:

$$D\{\hat{\tau}\mid\tau\}=\frac{1}{(2\pi f_э)^2 q^2},\quad q>>1. \tag{5.3}$$

где $f_э=\left[\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} f^2\left|\tilde{s}(f)\right|^2 df\right]^{1/2}=\left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2\left|\tilde{s}(f)\right|^2 df}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{s}(f)\right|^2 df}\right]^{1/2}$ - эффективная или среднеквадратическая частота спектра сигнала *s(t)*. Как видно, $f_э^2$ является моментом инерции плоской фигуры под кривой $\left|\tilde{s}(f)\right|^2/E$ (энергетическим спектром сигнала, нормированным так, чтобы площадь под ним была единичной) относительно оси *f=0* и потому характеризует «размах» спектра относительно нулевой частоты. Если измеряется время запаздывания видеосигнала, спектр которого сосредоточен в области вблизи нулевой частоты, то $f_э$ имеет смысл ширины спектра *s(t)*, которая связана обратной зависимостью с протяженностью по τ корреляционной функции сигнала *s(t)*, т.е. длительностью отклика СФ на *s(t)* (в данном случае названная корреляционная функция в точности совпадает с ФН по параметру τ). Следовательно, расширение спектра «обостряет» максимум сигнала на выходе СФ, и этот более острый максимум под действием шума одного и того же уровня будет флуктуировать по времени относительно своего истинного положения с меньшим разбросом, чем тупой. В этом и заключена физическая природа снижения $D\{\hat{\tau}\mid\tau\}$ с расширением спектра видеосигнала.

Для радиосигнала, у которого спектр сконцентрирован в окресности центральных частот $\pm f_0$, где $f_0 = \int\limits_0^\infty f\left|\tilde{s}(f)\right|^2 df \Big/ \int\limits_0^\infty \left|\tilde{s}(f)\right|^2 df$ - «центр тяжести» плоской фигуры под кривой $\left|\tilde{s}(f)\right|^2$,

$$f_э^2 = \left[\int\limits_0^\infty (f - f_0)^2 \left|\tilde{s}(f)\right|^2 df \Big/ \int\limits_0^\infty \left|\tilde{s}(f)\right|^2 df\right] + f_0^2.$$

Так как первое слагаемое здесь является моментом инерции плоской фигуры под $\left|\tilde{s}(f)\right|^2 \Big/ E$ при $f>0$ относительно ее центра тяжести, то его степень 1/2 определяет некоторую эффективную ширину спектра $\tilde{s}(f) F_э$, для узкополосных сигналов значительно меньшую центральной частоты: $F_э << f_0$. Поэтому $f_э \approx f_0$ и дисперсия (5.3):

$$D\{\hat{\tau}\mid\tau\} = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 q^2}, \quad q >> 1, \tag{5.4}$$

что свидетельствует о возможности повышения точности ОМП τ за счет увеличения центральной частоты спектра радиосигнала, т.е. номинала несущей. Физика подобного явления очевидна – увеличивая f_0, можно сделать более острым пик высокочастотного заполнения сигнала на выходе СФ, временное положение каторого и дает оценку.

<u>Оценка параметров сигнала со случайной фазой</u>

Рассмотрим вопросы синтеза структур и определим потенциальную точность измерителей при равновероятности неинформационной начальной фазы сигнала Примем за основу правило ОМП (4.50).

<u>Оценка времени запаздывания</u>. Модель сигнала с единственным измеряемым параметром:

$$s(t;\lambda;\varphi) = s(t-\tau;\varphi) = \mathrm{Re}\left[\dot{S}(t-\tau)\exp(j\varphi)\exp(j2\pi f_0 t)\right].$$

Оптимальный измеритель может быть реализован по схеме рис. 4.4, в которой исключены преобразователи П, а на входы корреляторов поданы пары квадратурных составляющих с различными для пар значениями времени задержки.

Альтернативный вариант, как и в (5.1) реализуется на основании равенства (4.45)

$$z(\tau)=\frac{1}{2}\int_0^T \dot{Y}(t)\dot{S}^*(t-\tau)dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{Y}(\theta)\dot{S}^*\left(T_c-(T_c-\theta+\tau)\right)d\theta=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{Y}(\theta)\dot{H}_{опт}(T_c+\tau-\theta)d\theta.$$

где $\dot{H}_{опт}(t)=S^*(T_c-t)$ - комплексная огибающая импульсной характеристики фильтра, согласованного с сигналом $s(t)=\mathrm{Re}\left[\dot{S}(t)\exp(j2\pi f_0 t)\right]$ (с копией сигнала, имеющей нулевую либо любую фиксированную начальную фазу φ). Полученный комплексный интеграл Дюамеля показывает, что величина $Z(\tau)=\left|\dot{z}(\tau)\right|$, аргумент максимума которого как функции τ есть ОМП $\hat{\tau}$, воспроизводится с задержкой на известную длительность сигнала T_c огибающей на выходе СФ. Поэтому оценку запаздывания можно получить пропустив $y(t)$ через последовательно соединенные СФ и детектор огибающей ДО и зафиксировав момент t_M максимума выходной величины последнего. Вычитание из t_M значения T_c позволяет получить ОМП $\hat{\tau}$. Соответствующая схема дана на рис. 5.4.а, а эпюры, пронумерованные, как и точки схемы, - на рис. 5.4,б.

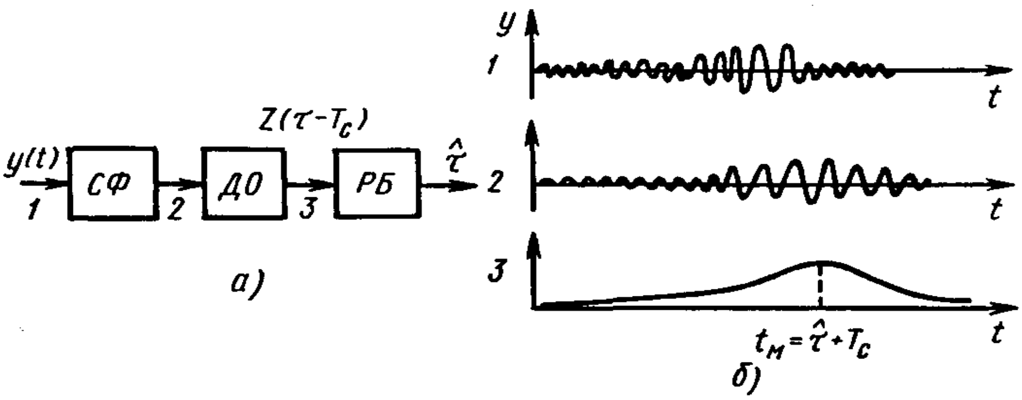


Рис.5.4

Дисперсия оценки задержки:

$$D\{\hat{\tau}\,|\,\tau\}=\frac{1}{(2\pi F_э)^2 q^2},\quad q>>1, \tag{5.5}$$

$$F_э=\left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2\left|\tilde{\dot{S}}(f)\right|^2 df \Big/ \int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\dot{S}}(f)\right|^2 df\right]^{1/2} - \tag{5.6}$$

эффективная (среднеквадратическая) ширина спектра комплексной огибающей $\dot{S}(t)$ сигнала $s(t;\varphi)$. Очевидно, что $F_э^2$ - момент инерции квадрата модуля спектра $\dot{S}(t)$ (нормированного так, чтобы площадь под ним была единичной) относительно оси $f=0$, или, что то же самое, квадрата модуля спектра сигнала $s(t)$ (с аналогичной нормировкой) относительно его центральной частоты $f=f_0$. Поэтому $F_э$ называют эффективной (среднеквадратической) шириной спектра сигнала.

Таким образом, точность ОМП запаздывания сигнала со случайной фазой можно повысить и не прибегая к увеличению энергии сигнала, ибо расширение спектра также уменьшает условную дисперсию ОМП. Тривиальным способом увеличения $F_э$ является укорочение сигнала, т.е. уменьшение его длительности T_c. Следует подчеркнуть, что точность оценки τ сигнала со случайной фазой не зависит от номинала несущей f_0 поскольку за ОМП принимают временное положение максимума огибающей радиосигнала (а не его высокочастотного заполнения, как в 5.1) на выходе СФ (рис. 5.4,б).

Оценка частоты. Модель сигнала можно записать в виде:

$$s(t;F;\varphi)=\mathrm{Re}\left\{\dot{S}(t)\exp(j\varphi)\exp\left[j2\pi(f_0+F)t\right]\right\},$$

где F – частотная расстройка (отношение частоты от номинала f_0).

Учитывая, что F – неэнергетический параметр, в соответствии с (4.40) с учетом (4.36):

$$Z(\lambda)=\left|z_1(\lambda)+jz_2(\lambda)\right|=\sqrt{z_1^2(\lambda)+z_2^2(\lambda)} \tag{4.37}$$

где

$$\begin{matrix} z_1(\lambda) \\ z_2(\lambda) \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{Re} \\ \mathrm{Im} \end{matrix}\left[\dot{z}(\lambda)\right]=\int_0^T y(t)\begin{matrix} s(t;\lambda) \\ s_\perp(t;\lambda) \end{matrix}dt,$$

Получим структуру измерителя в виде многоканального корреляционного приемника (рис. 4.4), в которой исключены преобразователи П, а в качестве опорных сигналов в i-й паре корреляторов взяты пары квадратурных компонентов

$$s(t;F_i)=\mathrm{Re}\left\{\dot{S}(t)\exp\left[j2\pi(f_0+F_i)t\right]\right\},\quad s_\perp(t;F_i)=\mathrm{Im}\left\{\dot{S}(t)\exp\left[j2\pi(f_0+F_i)t\right]\right\}$$

сигнала с центральной частотой $f_0+F_i,\ i=1,2,...,M$.

Другая модификация оптимального измерителя частоты, основанная на интерпретации $Z(F)$ как огибающей на выходе фильтра, согласованного с сигналом $s(t;F)$ в момент окончания наблюдения t=T, приведена на рис. 5.5. Эта схема представляет собой набор M резонаторов СФ, настроенных каждый на свою частоту f_0+F_i. Решающий блок (РБ) выдает в качестве оценки частоту настройки того резонатора, колебания на выходе которого в момент T имеют максимальную амплитуду. Точность оценки, определяемая величиной дисперсии, тем выше, чем больше продолжительность сигнала:

$$D\left\{\hat{F} \mid F\right\} = \frac{1}{\left(2\pi T_э\right)^2 q^2}, \quad q >> 1,$$

где

$$T_э = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(t - t_0\right)^2 \left|\dot{S}\left(t\right)\right|^2 dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{S}\left(t\right)\right|^2 dt \right]^{1/2} -$$

эффективная (среднеквадратическая) длительность сигнала, квадрат которого есть момент инерции фигуры под кривой $\left|\dot{S}\left(t\right)\right|^2 \Big/ \left(2E\right)$ (под квадратом огибающей сигнала, нормированным так, чтобы площадь под ним была равна единице) относительно центра тяжести

$$t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t \left|\dot{S}\left(t\right)\right|^2 dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{S}\left(t\right)\right|^2 dt.$$

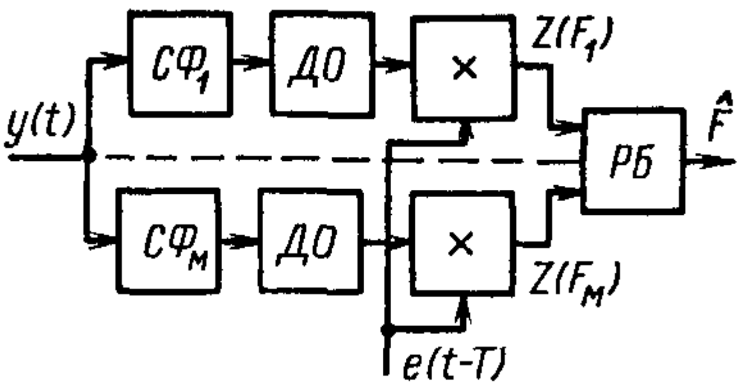


Рис. 5.5

<u>**Совместная оценка времени запаздывания и частоты.**</u> Пусть у сигнала со случайной равновероятной начальной фазой измерению подлежат время запаздывания τ и частотная расстройкаи F относительно номинала f_0. Вектор измеряемых параметров при этом двумерный $\lambda = \left(\tau; F\right)^T$:

$$s\left(t - \tau; F; \varphi\right) = \mathrm{Re}\left\{\dot{S}\left(t - \tau\right) \exp\left(j\varphi\right) \exp\left[j2\pi\left(f_0 + F\right)t\right]\right\}.$$

Для совместных измерений τ и F, как всегда при оценке неэнергетических параметров сигнала, пригодна универсальная структура рис. 4.6, в которой не нужны элементы преобразователей П, вычисляющие $\arg \dot{z}\left(\tau, F\right)$. При этом опорами i-й пары порреляторов служат квадратурные компоненты $s\left(t - \tau_i; F_i\right)$ и $s_\perp\left(t - \tau_i; F_i\right)$, $i = 1,2,\ldots,M$, причем i-я пара от k-й отличается в общем случае временем запаздывания и частотой опор. Число каналов M в такой схеме выбирают из условия достаточно точной дискретной аппроксимации функции двух переменных $Z(\lambda)=Z(\tau;F)=|\dot{z}(\tau;F)|$.

При использовании СФ и детекторов огибающей число параллельных каналов можно уменьшить. Согласно равенству (4.35), в котором $\lambda=(\tau;F)$, а в качестве $S=(t;\lambda)$ подставлено $\dot{S}(t-\tau)\exp(j2\pi Ft)$:

$$|\dot{z}(\tau,F)|=\left|\frac{1}{2}\int_0^T \dot{Y}(t)\dot{S}^*(t-\tau)\exp(-j2\pi Ft)dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2}\int_0^T \dot{Y}(t)\dot{S}^*\left(T_c-(T_c-\theta+\tau)\right)\exp\left\{-j2\pi F\left[T_c-(T_c-\theta+\tau)\right]\right\}d\theta\right|,$$

т.е. с учетом $\tau\geq 0,\ \tau\leq T-T_c$.

$$Z(\tau;F)=|\dot{z}(\tau;F)|=\left|\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{Y}(\theta)\dot{H}_{onm\,F}(T_c+\tau-\theta)d\theta\right|, \tag{5.9}$$

где $\dot{H}_{onm\,F}(t)=\dot{S}^*(T_c-t)\exp\left[-j2\pi F(T_c-t)\right]$ - комплексная огибающая импульсной характеристики фильтра, согласованного с сигналом $s(t;F)=\dot{S}(t)\exp\left[-j2\pi(f_0+F)t\right]$. Поэтому правая часть (5.9) для любого фиксированного значения F представляет собой огибающую на выходе СФ при подаче на вход наблюдаемой реализации *y(t)*. При фиксированнои значении F $Z(\tau;F)$ как функция τ воспроизводится с запаздыванием на T_c огибающей на выходе согласованного фильтра, частота настройки которого равна f_0+F. Для воспроизведения $Z(\tau;F)$ при всех возможных F следует взять набор М СФ, настроенных каждый на свою частоту. При этом число М СФ выбирают из условия удовлетворительного дискретного приближения $Z(\tau;F)$ как функции F, оно существенно меньше числа параллельных корреляторов в схеме рис. 4.4. Вычислив, следует определить оценки по правилу:

$$Z(\hat{\tau};\hat{F})=\max_{\tau,F} Z(\tau,F). \tag{4.40}$$

Измеритель, показанный на рис. 5.6, отличается от измерителя частоты на рис. 5.5 только тем, что в нем на РБ подают непрерывные процессы с выходов детекторов огибающей (ДО), а не их отсчеты в момент окончания наблюдений $t=T$. Временное положение максивального выброса в одном из каналов после вычитания поправки T_c служит ОМП времени запаздывания $\hat{\tau}$, частота настройки канала, на выходе которого он зафиксирован, служит ОМП частоты $\hat{F}$.

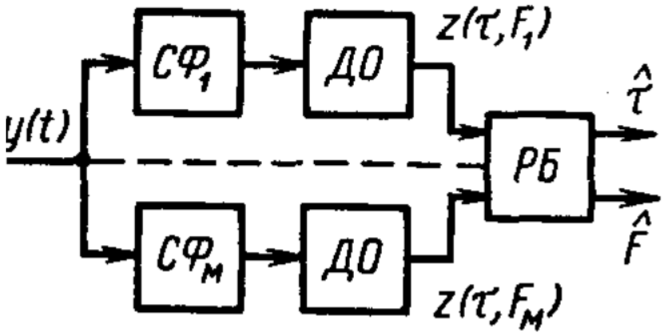


Рис. 5.6

Условные дисперсии совместных ОМП τ и F в асимптотических приближениях:

$$D\left\{\hat{\tau} \mid \tau; F\right\} = \frac{1}{\left(2\pi F_э\right)^2 \left(1-\rho_{tf}^2\right) q^2}, \quad q >> 1.$$

$$\dot{D}\left\{\hat{F} \mid \tau; F\right\} = \frac{1}{\left(2\pi T_э\right)^2 \left(1-\rho_{tf}^2\right) q^2}, \quad q >> 1$$

где

$$\rho_{tf} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} t F_0(t) S^2(t)\, dt\right] \Bigg/ \left[F_э T_э \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)\, dt\right] -$$

коэффициент частотно-временной связи (коэффициент корреляции случайных величин $\hat{\tau}$ и $\hat{F}$ при *q>>1*). Подчеркнем, что для любых сигналов без частотной модуляции, а также для сигналов с симметричной амплитудно-частотной модуляцией $\rho_{tf} = 0$. Для сигналов названных типов, наиболее распространенных на практике, дисперсии ОМП τ и F при совместных и раздельных измерениях времени запаздывания и частоты одинаковы. При этом ФН называют частотно-временной.

$$\Psi(\tau, F) = \left|\frac{1}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(t) \dot{S}^*(t-\tau) \exp(-j 2\pi F t)\, dt\right|.$$

Геометрически ФН описывает некую поверхност над плоскостью τ, F, причем, ее максимум, равный единице, находится в точке $\tau = F = 0$. Для достижения высокой точности совместного измерения необходимо иметь достаточно острый пик ФН в точке $\tau = F = 0$.

РАЗРЕШЕНИЕ СИГНАЛОВ

Понятие о разрешении и разрешающей способности

В активной радиолокации время запаздывания эхо-сигнала и доплеровский сдвиг частоты несут информацию о дальности и скорости цели, а положение нормали к фронту отраженной волны – об угловых координатах цели. Если две цели расположены на малом расстоянии, то разность времен запаздывания эхо-сигнала может оказаться меньше длительности зондирующего сигнала. Эхо-сигналы накладываются друг на друга, образуя суперпозицию (рис. 6.1).

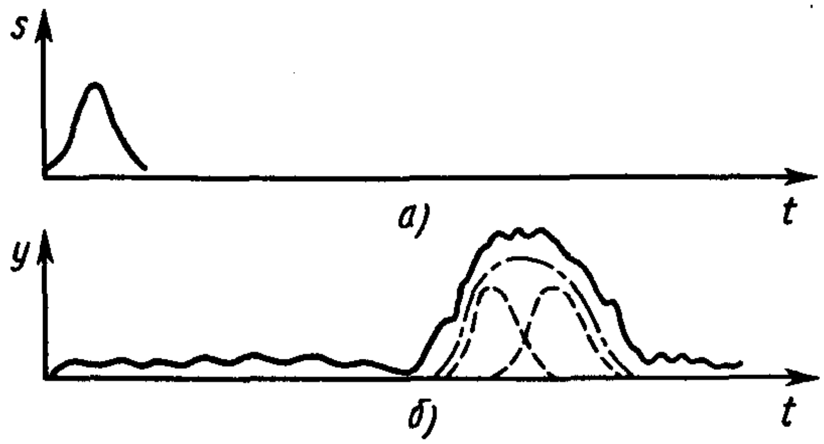


Рис. 6.1

В этом случае определение числа сигналов и измерение параметров становится невозможным. В этом и состоит проблема разрешения по задержке. Аналогично можно ввести понятие разрешения по углу, если угловое расстояние двух целей сравнимо с шириной луча, и разрешение по частоте. С необходимостью раздельного извлечения информации из налагающихся друг на друга сигналов приходится сталкиваться в радионавигации и управлении движением.

Разрешение сводится к уже рассматриваемым ранее процедурам различения, измерения параметров, обнаружения сигналов.

Пусть известно, что в *y(t)* присутствует не более *n* однотипных сигналов, у каждого из которых значение λ принадлежит своей области. Если извлечение информации означает выяснение того, сколько и каких именно сигналов действительно содержится в наблюдении *y(t),* то эту задачу можно интерпретировать как проверку $M = 2^n$ гипотез, т.е обычное различение $M = 2^n$ некоторых новых сигналов. Например, при *n=2* приходим к проверке 4-х гипотез.

Если число и номера разрешаемых сигналов установлены и извлечение информации состоит в измерении параметров каждого из них, что означает переход к традиционным процедурам оценки либо фильтрации параметров сигналов.

Не выходя за рамки статистического подхода, можно вложить в понятие разрешения более узкий смысл.

Интерпретация разрешения по параметру λ позволяет определить его как обнаружение либо измерение параметров некоторого полезного сигнала в условиях совокупного мешающего воздействия флюктуационных шумов и помех в виде суперпозиций копий полезного сигнала, отличающихся от последнего значениями λ. Термин “разрешающая способность” при этом означает способность к выполнению соответствующей функции (обнаружения, измерения параметров) в присутствии помех названной природы. Иногда используют уточняющее название “ разрешение-обнаружение” и “разрешение-измерение”, желая этим подчеркнуть, что в первом случае целью разрешения служит установление факта наличия *i*-го сигнала в наблюдении , во втором – измерение параметров этого сигнала.

Таким образом, *разрешение сигналов по векторному параметру λ есть извлечение информации из каждого из наблюдаемых одновременно однотипных сигналов, использующее тот факт, что образующие суперпозицию индивидуальные сигналы отличаются друг от друга значениями λ.*

Разрешающая способность радиоэлектронного прибора есть способность давать такой суммарный отклик на суперпозицию двух отличающихся значениями параметра λ сигналов, в котором просматриваются два максимума, соответствующих отдельным сигналам.

Мерой разрешающей способности при этом может служить минимальная разница значений λ накладывающихся сигналов, при которой указанные два максимума еще не воспринимаются как один.

Функция неопределенности в теории разрешения

Рассмотрим вопрос влияния законов и параметров модуляции сигналов на разрешающую способность и критерии выбора сигналов, связанные с характеристиками разрешающей способности.

Пусть необходимо установить присутствие на входе некоторого устройстваполезного сигнала

$$s(t,\lambda)=\mathrm{Re}\left[\dot{S}(t,\lambda)\exp\left(j2\pi f_0 t\right)\right]$$

с комплексной огибающей $\dot{S}(t,\lambda)$, имеющей значение некоторого неэнергетического параметра, равное λ. При этом, известно, что в наблюдении присутствует помеха в виде белого шума n(t) и, возможно, мешающего сигнала, модель которого имеет вид:

$$s\left(t;\lambda_M;\dot{A}_M\right)=\mathrm{Re}\left[\dot{A}_M\dot{S}(t;\lambda)\exp\left(j2\pi f_0 t\right)\right],$$

у которой комплексная амплитуда $\dot{A}_M=A_M\exp\left(j\varphi_M\right)$, а неэнергетический параметр равен λ_M. Мешающий сигнал может присутствовать или отсутствовать в составе суммарной помехи. Речь идет об обнаружении-разрешении, т.е. о проверке двух сложных гипотез:

$$\begin{cases} H_0:\ y(t)=n(t)+s\left(t;\lambda_M;\dot{A}_M\right); \\ H_1:\ y(t)=n(t)+s\left(t;\lambda_M;\dot{A}'_M\right)+s(t;\lambda). \end{cases}$$

На качественном уровне определим связь характеристик разрешения с законом модуляции $\dot{S}(t,\lambda)$. При фиксированных значениях $\dot{A}_M$ и $\dot{A}'_M$ гипотезы H_0 и H_1 будут тем заметнее отличаться одна от другой, чем больше евклидово расстояние между парой сигналов, так как проверка H_0 относительно H_1 и есть различение двух названных сигналов. Так как квадрат евклидова расстояния равен энергии разности сигналов, то

$$d_{12}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[s\left(t;\lambda_M;\dot{A}'_M\right) + s\left(t;\lambda\right) - s\left(t;\lambda_M;\dot{A}_M\right) \right]^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}\left(t;\lambda\right) + \dot{A}_\Delta \dot{S}\left(t;\lambda_M\right) \right|^2 dt\,,$$

где $\dot{A}_\Delta = \dot{A}'_M - \dot{A}_M$. Воспользовавшись тем, что $|\dot{x}|^2 = \dot{x}\dot{x}^*$, после раскрытия прямых скобок получим

$$\begin{aligned} d_{12}^2 &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{S}\left(t;\lambda\right)\right|^2 dt + \frac{\left|\dot{A}_\Delta\right|^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot{S}\left(t;\lambda\right)\right|^2 dt + \mathrm{Re}\left[\dot{A}_\Delta^* \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(t;\lambda\right)\dot{S}^*\left(t;\lambda\right) dt \right] = \\ &= E\left[1 + \left|\dot{A}_\Delta^*\right| + 2\,\mathrm{Re}\frac{\dot{A}_\Delta^*}{2E}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(t;\lambda\right)\dot{S}^*\left(t;\lambda_M\right) dt \right], \end{aligned} \qquad (6.2)$$

где энергия сигнала

$$s\left(t;\lambda\right) E = \frac{1}{2}\int_{-\hbar}^{\infty} \left|\dot{S}\left(t;\lambda\right)\right|^2 dt$$

не зависит от λ, поскольку параметр λ - неэнергетический. Второе слагаемое в скобках последнего выражения можно записать как

$$2A_\Delta \Psi\left(\lambda,\lambda_M\right)\cos\left[\arg\dot{\psi}\left(\lambda,\lambda_M\right) - \varphi_\Delta\right],$$

где A_Δ и φ_Δ - модуль и аргумент $\dot{A}_\Delta$;

$$\dot{\varphi}\left(\lambda,\lambda_M\right) = \frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}\left(t;\lambda\right)\dot{S}^*\left(t;\lambda_M\right) dt \text{ -}$$

комплексный коэффициент корреляции двух копий комплексной огибающей сигналов, отличающихся значениями λ; $\Psi\left(\lambda,\lambda_M\right) = \dot{\psi}\left(\lambda,\lambda_M\right)$ - функции неопределенности (ФН) сигнала. При любом фиксированном значении $A_\Delta \neq 0$ значение $\varphi_\Delta = \arg\left(\dot{A}'_M - \dot{A}_M\right)$ может оказаться равным $\arg\psi\left(\lambda,\lambda_M\right) \pm \pi$ (неизвестность начальной фазы мешающего сигнала вынуждает считать априори равновероятными любые ее значения), что и обратит в минимум $d_{12\,мин}^2$ квадрат расстояния (6.2):

$$d_{12\,мин}^2 = E\left[1 + A_\Delta^2 - 2A_\Delta \Psi\left(\lambda,\lambda_M\right)\right].$$

Следовательно, для максимизации минимального по φ_Δ значения квадрата евклидова расстояния (6.2), т.е. обеспечения лучшей разрешающей способности следует стремиться к минимизации уровня ФН $\Psi(\lambda,\lambda_M)$. Таким образом, зависимость качества разрешения от формы сигнала $\dot{S}(t;\lambda)$ проявляется в «управлении» разрешающей способностью через уровень ФН $\Psi(\lambda)$.

Разрешение по времени запаздывания

Простые и сложные сигналы.

В соответствии с изложенным выше, качество разрешения двух копий сигнала

$$s(t,\tau_1,\varphi_1)=\mathrm{Re}\left[\dot{S}(t-\tau_1)\exp(j2\pi f_0)\exp(j\varphi_1)\right] \text{ и}$$
$$s(t,\tau_2,\varphi_2)=\mathrm{Re}\left[\dot{S}(t-\tau_2)\exp(j2\pi f_0)\exp(j\varphi_2)\right]$$

с временем запаздывания τ_i и случайными начальными фазами φ_i, $i=1,2$ определяется уровнем ФН по времени запаздывания. Такая ФН стационарна и имеет вид:

$$\Psi(\tau)=\left|\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(t)\dot{S}^*(t-\tau)dt\right| \qquad (6.3)$$

где $\tau=\tau_2-\tau_1$; $\Psi(\tau)$ - модуль нормированной корреляционной функции комплексной огибающей.

$$\dot{\psi}(\tau)=\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(t)\dot{S}^*(t-\tau)dt\,. \qquad (6.4)$$

Следовательно, две копии сигнала, отличающиеся временем запаздывания на τ, разрешаются тем успешнее, чем меньше уровень корреляционной функции комплексной огибающей при данном τ.

Мера разрешающей способности – минимальное расхождение времен запаздывания двух копий сигнала, начиная с которого последние разрешаются удовлетворительно с обеспечением заданных показателей качества .Хорошо разрешаются по времени запаздывания лишь сигналы с достаточно короткими корреляционными функциями $\psi(t)$.

Таким образом, можно сделать следующий вывод: для гаррантии хорошего разрешения при любых временных сдвигах, не меньших некоторого заданного минимума $\tau_{мин}$, следует применять сигналы, у которых ФН $\Psi(\tau)$ [либо корреляционная функция комплексной огибающей $\dot{\psi}(t)$] имеет основной пик внутри интервала $\left[-\tau_{мин}/2;\tau_{мин}/2\right]$ и малый уровень боковых лепестков, т.е. выбросов за пределами этого интервала.

Достичь этого можно уменьшая длительность импульса, что, однако приведет к уменьшению энергии. Увеличение пиковой мощности связано с рядом ограничений: ограничение ресурсов передатчиков, конечной электрической антенно-фидерных трактов, ЭМС и др.

Поэтому необходимы такие сигналы, которые бы имели корреляционную функцию комплексной огибающей более узкую, чем сам сигнал. Если сигнал с таким свойством поступает на СФ, то длительность реакции последнего оказывается значительно меньше T_c, т.е. происходит сжатие сигнала в СФ. Благодаря этому эффекту и оказывается возможным разрешение сигналов, перекрывающихся на входе СФ. Изложенное иллюстрируется на рис. 6.2.

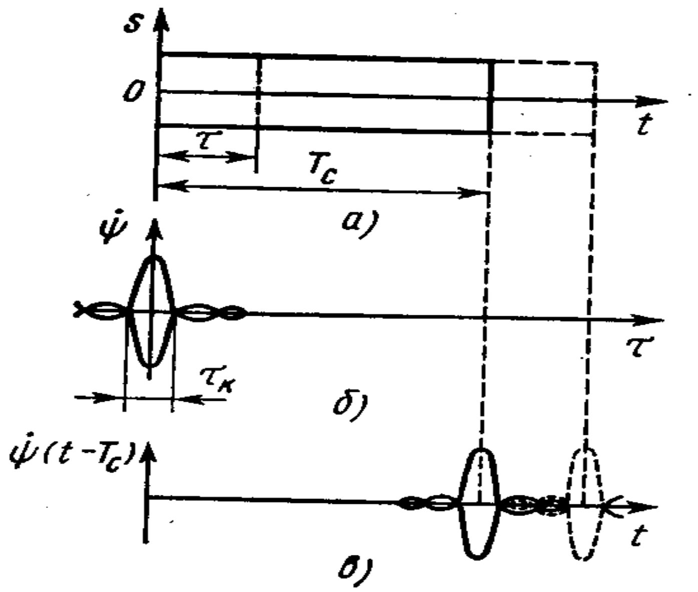


Рис. 6.2

Пусть радиоимпульс (сплошной прямоугольник на рис. 6.2,а) имеет корреляционную функцию $\dot{\psi}(t)$ в виде радиоимпульса длительностью $\tau_к << T_c$, показанного на рис. 6.2,б. Тогда реакция СФ на «сплошной» импульс (рис. 6.2,а) будет иметь вид сплошного импульса (рис. 6.2,в), т.е. повторить кривую рис. 6.2.б, смещенную вправо на длительность входного сигнала T_c. Если на входной импульс наложится его копия, сливающаяся с ним (пунктир на рис. 6.2,а) то, если $\tau > \tau_к$ реакция на нее СФ (пунктир на рис. 6.2,в) не совпадет с реакцией на первый импульс. Т.о. сжатие в СФ обеспечивает разрешение $\tau_{мин}$, не связанное в одном случае с длительностью T_c сигнала.

Сигналы в виде одиночных импульсов без угловой модуляции, называемые простыми, имеют действительную неотрицательную комплексную огибающую $\dot{S}(t)$. Поэтому для них значение не может быть заметно меньше длительности импульса. Чтобы соблюсти условие $\tau_к << T_c$ необходимо осуществить модуляцию фазы или частоты в пределах длительности сигнала. Это приведет вместе с укорочением корреляционной функции расширение спектра $\Delta f_{СФ} \approx 1/\tau_к$.

Но амплитудно-частотный спектр $\left|\tilde{s}(f)_{СФ}\right|$ сигнала на выходе СФ повторяет по форме энергетический спектр входного сигнала $\left|\tilde{s}(f)^2\right|$, так что ширина спектра Δf_c последнего примерно совпадает с $\Delta f_{сф}$:

$$\Delta f_c \approx \Delta f_{сф} \approx 1/\tau_к .$$

Итак, для того, чтобы сигнал обладал свойством сжатия в СФ ширина его спектра должна удовлетворять неравенству:

$$\Delta f_c \approx 1/\tau_к << 1/T_c ,$$

т.е. база B должна быть большой: $B = \Delta f_c T_c >> 1$. Сигналы с большими базами называют сложными (широкополосными, шумоподобными). Сжитие сложных сигналов происходит в согласованных фильтрах.

<u>Разрешение по времени запаздывания и частоте. Частотно-временная функция неопределенности сигнала</u>

При необходимости разрешения сигнала по времени и частоте качество разрешения определяется видом частотно-временной ФН:

$$\Psi(\tau, F) = \left|\frac{1}{2E}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(t)\dot{S}^*(t-\tau)\exp(-j2\pi Ft)dt\right|.$$

Геометрически ФН задает некоторую поверхность над координатной плоскостью τ, F,при этом в начале координат высота поверхности равна единице. Для повышения разрешения желательно чтобы ФН $\psi(\tau, F)$ как можно быстрее спадала по мере удаления точки τ, F от начала координат (рис. 6.3).

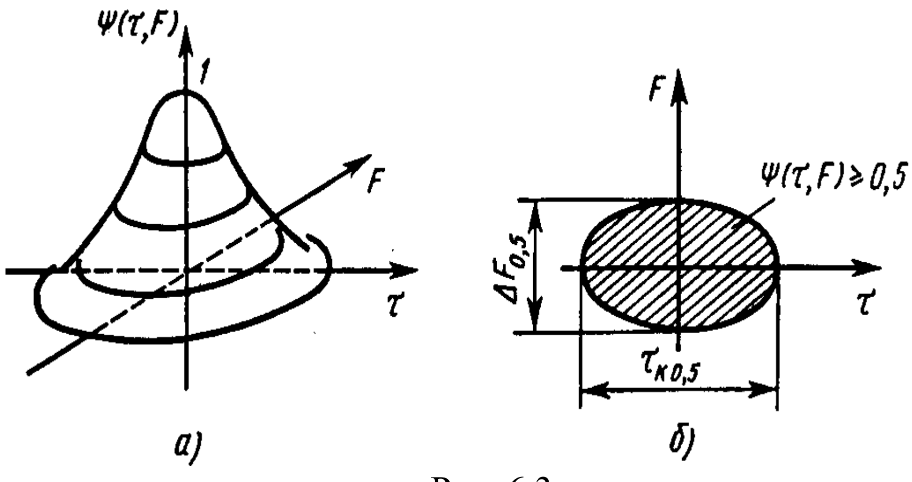


Рис. 6.3

Сечение ФН $\psi(\tau,0)$ плоскостью *F=0* есть ФН по запаздыванию, ее протяженность по оси τ характеризует достижимую разрешающую способность по τ. Протяженность по оси *F* сечения $\Psi(0,F)$ определяет разрешающую способность по частоте. Функция

$$\Psi(0,F)=\left|\frac{1}{2E}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}(t)\right|\exp(-j2\pi Ft)dt\right|$$

повторяет по форме амплитудно-частотный спектр сигнала, т.е. определяется законом аиплитудной модуляции сигнала. Ширина спектра сечения $\Psi(0,F)$ вдоль оси *F* близка к ширине действительной огибающей сигнала. Протяженность сечения $\psi(\tau,0)$по τ имеет порядок длительности корреляционной функции комплексной огибающей сигнала.

Чтобы отразить рельеф поверхности, задаваемой ФН, следует нанести на плоскость τ,F сечения поверхности $\Psi(\tau,F)$ горизонтальными плоскостями через выбранный интервал по высоте. Сечение на высоте $\Psi(\tau,F)=0{,}5$, называют *областью высокой корреляции либо диаграммой неопределенности*. Длины отрезков по координатным осям ДН определяют разрешающие способности по времени и частоте. Если на вход схемы (рис.5.6), фильтры которой настроены на разные частоты, подать сумму двух копий сигнала, разнесенных по времени и частоте настолько, что уровень $\Psi(\Delta\tau,\Delta F)$ достаточно мал, то поверхность, сечениями которой вдоль оси t служат огибающие с выходов СФ, будет иметь два раздельных выброса.

Построим ФН радиоимпульса с прямоугольной огибающей:

$$\dot{S}(t)=\begin{cases}1, & |t|\le T_c/2;\\ 0, & |t|>T_c/2.\end{cases}$$

$$\Psi(\tau,F)=\frac{1}{T}\left|\int\limits_{-\frac{T_c}{2}+\tau}^{\frac{T_c}{2}}\exp(-j2\pi Ft)dt\right|=\left|\frac{\sin\pi F(T_c-\tau)}{\pi FT_c}\right|.$$

Вычислив аналогичный интеграл для интервала $T_c\le\tau<0$, учитывая, что при сдвиге τ большем по абсолютному значению T_c , копии сигнала не перекрываются, получим:

$$\dot{S}(t)=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin\pi F(T_c-\tau)}{\pi FT_c}\right|, & |\tau|\le T_c;\\ 0, & |\tau|>T_c.\end{cases}$$

ФН и ее сечения приведены на рис. 6.4.

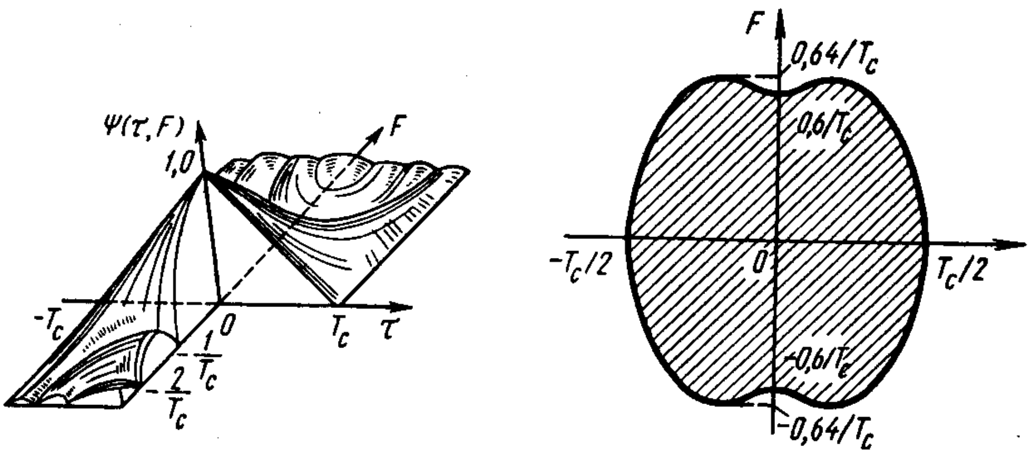


Рис. 6.4

Сечение ФН плоскостью *F=0* есть равнобедреный треугольник с основанием $2T_c$:

$$\psi(\tau,0)=1-|\tau|/T_c\,,\quad |\tau|\le T_c\,;\qquad \Psi(\tau,0)=0,\quad |\tau|>T_c\,.$$

Сечение ФН плоскостью $\tau=0$ есть функция вида

$$\Psi(0,F)=\left|\frac{\sin\pi F T_c}{\pi F T_c}\right|,$$

соответствующая значению амплитудно-частотного спектра видеоимпульса.

Область высокой корреляции для ФН, показанная на рис.6.4, заключает в себе отрезки осей, имеющие длины, связанные обратной пропорцией. Следовательно, для прямоугольного радиоимпульса улучшения разрешающей способности по τ можно достичь лишь ценой ухудшения по частоте.

Противоречивость показателей разрешения по τ и по F характерна для всех простых сигналов. В основе ее лежит инвариантность к виду сигнала объема V *тела неопределенности*, тела, заключенного между плоскостью τ,F и поверхностью, описываемой квадратом ФН $\Psi^2(\tau,F)$.

Это утверждение, известное как *принцип неопределенности Вудворта*, доказывается следующим образом.

Согласно определению ФН:

$$V=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi^2(\tau,F)\,d\tau dF=\frac{1}{4E^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot S(t_1)\dot S^*(t_1-\tau)\times$$
$$\times\dot S^*(t_2)\dot S(t_2-\tau)\exp\left[-j2\pi F(t_1-t_2)\right]dt_1dt_2d\tau dF\,.$$

Вычислив интеграл по F и воспользовавшись фильтрующим свойсвом полученной $\delta-$ функции, имеем:

$$V=\frac{1}{4E^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot S(t_1)\dot S^*(t_1-\tau)\times\dot S^*(t_2)\dot S(t_2-\tau)\delta(t_1-t_2)\,dt_1dt_2d\tau=$$

$$= \frac{1}{4E^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}(t) \right|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left| \dot{S}(t-\tau) \right|^2 d\tau = 1.$$

Т.о., тело неопределенности имеет единичный объем независимо от конкретного закона модуляции сигнала.

Из последнего соотношения следует, что объем тела неопределенности, имеющего длительность T_c и ширину спектра Δf_c обязательно сосредоточен в пределах прямоугольника со сторонами $2T_c$ и $2\Delta f_c$.

Идеальная ФН должна иметь кнопочный вид единичной высоты на прямоугольном пьедестале площадью $4\Delta f_c T_c$ (рис. 6.5).

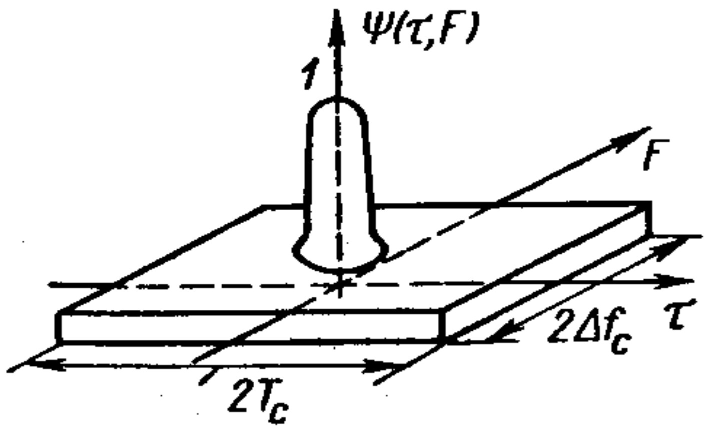


Рис. 6.5

Для простых сигналов это недостижимо вследствие того, что площадь прямоугольника имеет порядок единицы и весь объем тела неопределенности сосредоточен в области высокой корреляции.

Приближение к идеальной форме возможно лишь в классе сложных сигналов. Для них $\tau_к \approx 1/\Delta f_c$, а длина отрезка оси F в пределах той же области $\Delta F_{0,5} \approx 1/T_c$ - та же, что и для простых.

Площадь области высокой корреляции $\tau_{к\,0,5}\Delta F_{0,5} \approx 1/\left(\Delta f_c \Delta T_c\right)$, объем основного пика

$$V_{осн} \approx 1; \qquad \tau_{к\,0,5}\Delta F_{0,5} \approx \frac{1}{\Delta f_c \Delta T_c} = \frac{1}{B}.$$

При $B \gg 1$ объем основания составит малую долю полного объема и последний практически весь придется на пьедестал, площадь которого $4\Delta f_c T_c = 4B$ значительно больше единицы.

Средний квадрат уровня боковых лепестков ФН можно найти разделив объем пьедестала ($1-V_{осн}$) на площадь основания. Результат примерно равен $1/2\sqrt{B}$.

Однако большое значение базы еще на гарантирует близости ФН к идеальной. Пример – ФН ЛЧМ-сигнала (рис. 6.6).

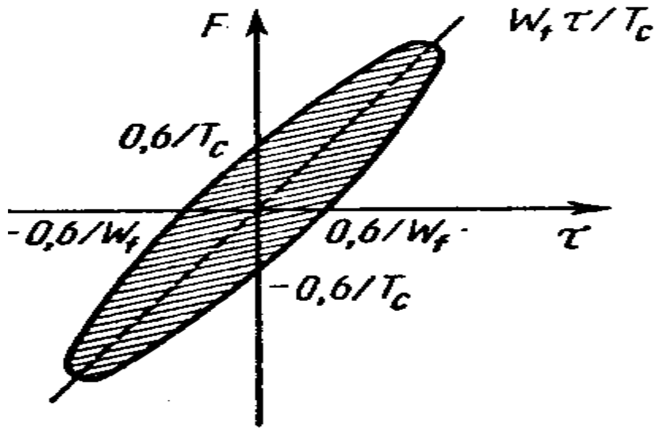


Рис. 6.6

Отрезки осей τ и F в в пределах области имеют длины $1.2/W_f$ и $1.2/T_c$. Т.о, выбором девиации W_f (ширины спектра) и длительности T_c можно добиться либо высокой разрешающей способности по задержке (при взаимной нулевой частотной расстройке интерферирующих сигналов), или по частоте (интерферирующие копии совмещены по времени).

Более похожую на кнопочную форму ФН имеют многие ФМн сигналы. Область высокой корреляции, как и для простых сигналов, симметрична относительно осей τ, F, однако размер ее вдоль оси τ примерно в $B \approx N$ раз меньше - T_c/N. Выбрав T_c и N достаточно большими, основному пику можно придать иглообразную форму.

Виды сложных сигналов

Сложные сигналы можно разбить на частотно-модулированные (ЧМ) сигналы, многочастотные (МЧ) сигналы, фазоманипулированные (ФМ) сигналы (сигналы с кодовой фазовой модуляцией - КФМ сигналы), дискретные частотные (ДЧ) сигналы(сигналы с кодовой частотной модуляцией - КЧМ сигналы), частотноманипулированные (ЧМ сигналы), дискретные составные частотные (ДСЧ) (составные сигналы с кодовой частотной модуляцией – СКЧМ сигналы). В скобках указаны другие названия.

Сигналы с непрерывной частотной модуляцией. Пусть в течение длительности сигнала мгновенное начение частоты заполнения линейно нарастает от $f_0 - W_f/2$ до $f_0 + W_f/2$, W_f - девиация частоты. Принимая за точку $t=0$ момент, соответствующий середине сигнала, запишем выражения для часты и фазы:

$$f(t) = f_0 + \frac{W_f t}{T_c}, \qquad \Phi(t) = 2\pi \int_0^t f(t)dt = 2\pi\left(f_0 t + \frac{W_f t^2}{2T_c}\right).$$

Такой сигнал называют ЛЧМ-сигналом (рис. 6.7)

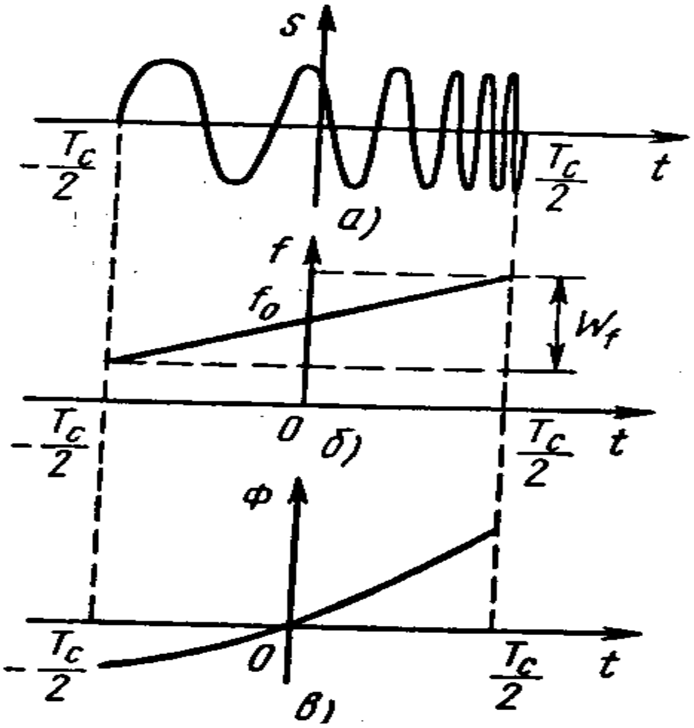


Рис. 6.7

$$s(t) = \begin{cases} A\cos\Phi(t) = A\cos\left[2\pi\left(f_0 t + \dfrac{W_f t^2}{2T_c}\right)\right], \ |t| \le T_c/2 \\ 0, \ |t| \ge T_c/2 \end{cases}$$

или

$$s(t) = \begin{cases} \mathrm{Re}\left\{A\exp\left[j2\pi\left(f_0 t + \dfrac{W_f t^2}{2T_c}\right)\right]\right\}, \ |t| \le T_c/2 \\ 0, \ |t| \ge T_c/2 \end{cases}$$

Комплексная огибающая прамоугольного ЛЧМ-импульса:

$$\dot{S}(t) = \begin{cases} A\exp\left(j\dfrac{W_f t^2}{T_c}\right), \ |t| \le T_c/2 \\ 0, \ |t| \ge T_c/2 \end{cases}$$

При девиации $W_f >> 1/T_c$ ширина спектра ЛЧМ-импульса близка к W_f, база $B \approx W_f T_c >> 1$.

Так как огибающая постоянна, то его энергия

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}(t)\right|^2 dt = \frac{A^2 T_c}{2}.$$

Определим корреляционную функцию интегрированием по отрезку $\left[-T_c/2+\tau;\, T_c/2;\right]$:

$$\dot{\psi}(\tau)=\frac{1}{T_c}\int\limits_{-T_c/2+\tau}^{T_c/2}\exp\left\{j\frac{\pi W_f}{T_c}\left[t^2-(t-\tau)^2\right]\right\}dt.$$

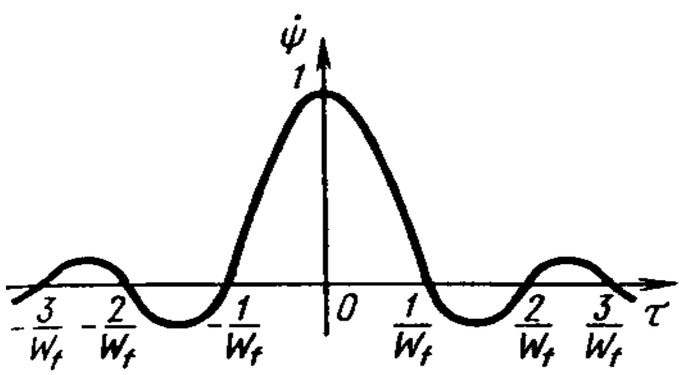
Раскрыв скобки в показателе экспоненты, после замены переменных $t-\tau/2\to t$ получим:

$$\dot{\psi}(\tau)=\frac{1}{T_c}\int\limits_{-T_c/2+\tau/2}^{T_c/2-\tau/2}\exp\left(j\frac{\pi W_f}{T_c}\tau t\right)dt=\frac{\sin\pi W_f\tau(1-\tau/T_c)}{\pi W_f t},\ 0\le\tau\le T_c.$$

Воспользовавшись очевидным равенством $\dot{\psi}(\tau)=\dot{\psi}^*(-\tau)$ и тем, что $\dot{\psi}(\tau)=0$ при $|\tau|>T_c$, придем к выражению, справедливому для любых τ:

$$\dot{\psi}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\sin\pi W_f\tau\left(1-\dfrac{|\tau|}{T_c}\right)}{\pi W_f\tau}, & |\tau|\le T_c.\\ 0,\ |\tau|>T_c\end{cases}$$

Точная формула в случае больших девиаций $W_f=1/T_c$, т.е. больших баз, допускает наглядное приближение. В этом случае абсолютное значение дроби становится большим уже при малых $|\tau|/\mathrm{T}_c$, т.е. $\dot{\psi}(\tau)$ затухает до пренебрежимого уровня. Поэтому в той области значений τ, где с уровнем приходится считаться, сомножитель $1-|\tau|/T_c$ в аргуменет синуса практически равен единице. Это и приводит к аппроксимации (рис. 6.8).



$$\dot{\psi}(\tau)\approx\frac{\sin\pi W_f\tau}{\pi W_f\tau}$$

Рис. 6.8

Длительность корреляционной функции $\tau_к=2/W_f$. ЛЧМ-импульс имеет прямоугольный спектр с шириной $\Delta f_c=1/(\tau_u/2)=W_f$. Но так как спектр сигнала на выходе СФ повторяет по форме квадрат амплитудно-частотного спектра входного сигнала, то амплитудно-частотный спектр ЛЧМ-сигнала приближенно можно считать равномерным в диапазоне $\left[f_0 - W_f/2,\ f_0 + W_f/2 \right]$ и равным нулю вне этого отрезка. Боковые лепестки достигают уровня в 4,7 (13 дБ) раза ниже основного лепестка.

На рисунке 6.9,а сплошными и пунктирными линиями условно обозначены соответственно сильный и слабый ЛЧМ-импульсы, сдвинутые друг относительно друга по времени на $3/(2W_f)$. В этом случае из-за интерференции откликов СФ на перекрывающиеся ЛЧМ-сигналы боковые лепестки сильного сигнала на выходе фильтра (сплошные линии на рис. 6.9,б) могут замаскировать основной пик слабого выходного импульса (пунктир на рис. 6.9,б).

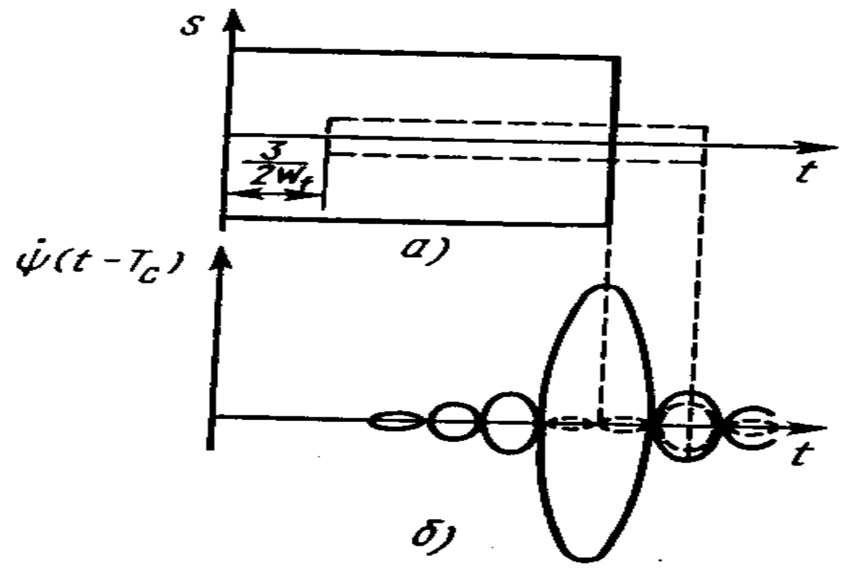


Рис. 6.9

<u>Дискретные и фазоманипулированные сигналы</u>. Модель дискретного сигнала может быть записана в виде:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \dot{a}_i \dot{s}_0(t - iT_n)\right] = \mathrm{Re}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \dot{a}_i \dot{S}_0(t - iT_n)\exp(j2\pi f_0 t)\right] = \\ = \sum_{i=0}^{N-1} |\dot{a}_i| \dot{S}_0(t - iT_n)\cos\left[2\pi f_0 t + \gamma_0(t - iT_n) + \varphi_i\right]. \quad (6.10)$$

где $\dot{s}_0(t) = \dot{S}_0(t)\exp(j2\pi f_0 t)$ - аналитический сигнал, вещественная часть которого опичывает отдельный импульс пакета, $s_0(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{s}_0(t)\right]$, $\dot{S}_0(t) = S_0(t)\exp\left[j\gamma_0(t)\right]$ - комплексная огибающая одиночного импульса $s_0(t)$, учитывающая форму его действительной огибающей $S_0(t)$, а также закон внутриимпульсной угловой модуляции $\gamma_0(t)$, T_n – период повторения, $\dot{a}_i = |a_i|\exp(j\varphi_i)$ - комплексная амплитуда *i*-го импульса, модуль и аргумент которого задают действительную амплитуду и начальную фазу импульса. Набор $\dot{a}_i$, устанавливающий закон изменения амплитуд и начальных фаз дискретного сигнала от импульса к импульсу называют последовательностью или кодом (рис. 6.10).

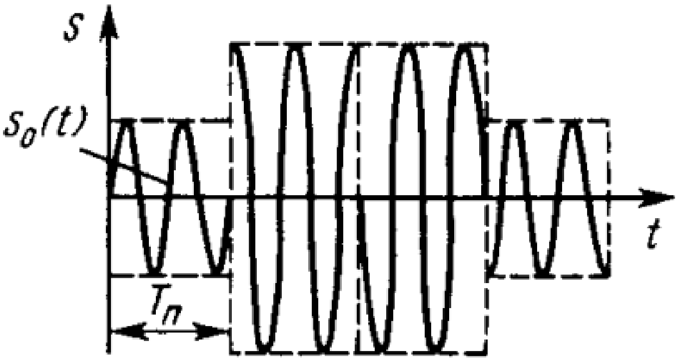


Рис. 6.10

Вычислим корреляционную функцию $\dot{\psi}(\tau)$ комплексной огибающей

$$\dot{S}(t)=\sum_{i=0}^{N-1}\dot{a}_i\dot{S}_0(t-iT_n) \tag{6.11}$$

дискретного сигнала (6.10). Подставив (6.11) в (6.4), найдем

$$\dot{\psi}(\tau)=\frac{1}{2E}\sum_{i,l=0}^{N-1}\dot{a}_i\dot{a}_l^*\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_0(t-iT_n)\dot{S}_0^*(t-\tau-lT_n)dt \tag{6.12}$$

где $E=\sum_{i=0}^{N-1}|\dot{a}_i|^2 E_0$ - энергия всего пакета; $E_0=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\dot{S}_0(t)\right|^2dt$ - энергия одиночного импульса $s_0(t)$. Введя корреляционную функцию $\dot{\psi}(t)$ комплексной огибающей $\dot{S}_0(t)$ одиночного импульса

$$\dot{\psi}(\tau)=\frac{1}{2E_0}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}_0(t)\dot{S}_0^*(t-\tau)dt, \tag{6.13}$$

перепишем (6.12) в виде:

$$\dot{\psi}(\tau)=\frac{E_0}{E}\sum_{i,l=-\infty}^{\infty}\dot{a}_i\dot{a}_l^*\dot{\psi}_0(\tau-(i-l)T_n), \tag{6.14}$$

условившись считать нулевыми те $\dot{a}_i, \dot{a}_l$, в последней сумме, индексы которых отрицательны или превышают *N-1*. Заменив индекс суммирования *l* в (6.14) на *m=i-l*, получим:

$$\dot{\psi}(\tau)=\frac{E_0}{E}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\dot{a}_i\dot{a}_{i-m}^*\dot{\psi}_0(\tau-mT_n)=\frac{E_0}{E}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\dot{a}_i\dot{a}_{i-m}^*\dot{\psi}_0(\tau-mT_n),$$

Введем корреляционную функцию $\psi_a(m)$ кодовой последовательности $\dot{a}_0,\dot{a}_1,...,\dot{a}_{N-1}$

$$\dot{\psi}_a(m)=\frac{E_0}{E}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\dot{a}_i\dot{a}^*_{i-m}\,, \qquad (6.15)$$

где по-прежнему все $\dot{a}_i, \dot{a}_{i-m}$ с индексами вне диапазона *0, 1, …, N-1* считаются нусевыми. Тогда соотношение (6.14) можно записать в виде:

$$\dot{\psi}(\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\dot{\psi}_a(m)\dot{\psi}_0(\tau-mT_n)\,. \qquad (6.16)$$

При $m\geq 0$ $\dot{a}_i, \dot{a}^*_{i-m}=0$ для всех $i<m$ и $i\leq N$, поэтому подробная расшифровка записи (6.15) такова:

$$\begin{cases}\dot{\psi}_a(m)=\begin{cases}\dfrac{E_0}{E}\displaystyle\sum_{i=m}^{N-1}a_i a^*_{i-m}, & 0\leq m\leq N-1\\ 0, \quad m>N-1\end{cases}\\ \dot{\psi}_a(-m)=\dot{\psi}^*_a(m)\end{cases}. \qquad (6.17)$$

<u>Фазоманипулированные сигналы (ФМ)</u> представляют собой последовательность радиоимпульсов, фазы которы изменяются по заданному закону. Обычно фаза принимает два значения (0 или π). Радиочастотному ФМ сигналу соответствует видео-ФМ-сигнал, состоящий из положительных и отрицательных импульсов. При числе импульсов N длительность одного импульса равна $\tau_0=T/N$, а ширина спектра равна приближенно ширине спектра сигнала $F_0=1/\tau_0=N/T$. База ФМ сигнала $B=FT=N$.

<u>Сигналы Баркера</u>. Среди двоичных *N*-элементарных кодовых последовательностей с $a_i=\pm 1$, *i=0,1,…,N-1* лучшими считаются те, для которых максимальная величина корреляционной функции равна $\psi_{a\,макс}=1/N$. Указанным свойствам обладают коды Баркера, существующие при *N=2,3,4,5,7,11,13*. Сигнал, манипулированный кодом Баркера *N=7* приведен на рис. 6.11.

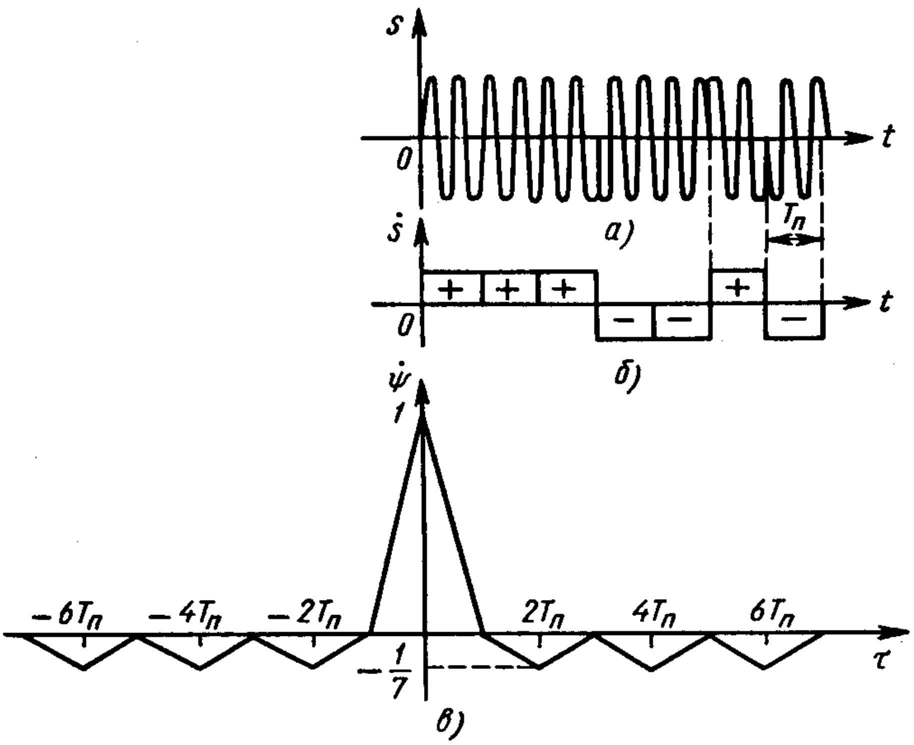


Рис. 6.11

Вычисление корреляционной функции в дискретных точках можно выполнить с помощью ромбовидной таблицы (таблица 6.1). В левой стороне таблицы записывается последовательность снизу вверх в виде вертикального столбца. Если в верхней строке этого столбца стоит плюс, то эта последовательность переписывается без изменения в горизонтальную строку, а если в указанном месте находится минус, то знаки всех элементов меняются на противоположные. Каждая последующая строка записывается со сдвигом вправо на один элемент. Просуммировав элементы каждого вертикального столбца, определим значения автокорреляционной функции последовательности в дискретных точках.

Структура СФ для двоичного ФМ сигнала приведена на рис. 6.12.

Таблица 6.1

0	-	-	-	+	+	-	+						
1		+	+	+	-	-	+	-					
0			-	-	-	+	+	-	+				
0				-	-	-	+	+	-	+			
1					+	+	+	-	-	+	-		
1						+	+	+	-	-	+	-	
1							+	+	+	-	-	+	-
	-1	0	-1	0	-1	0	7	0	-1	0	-1	0	-1

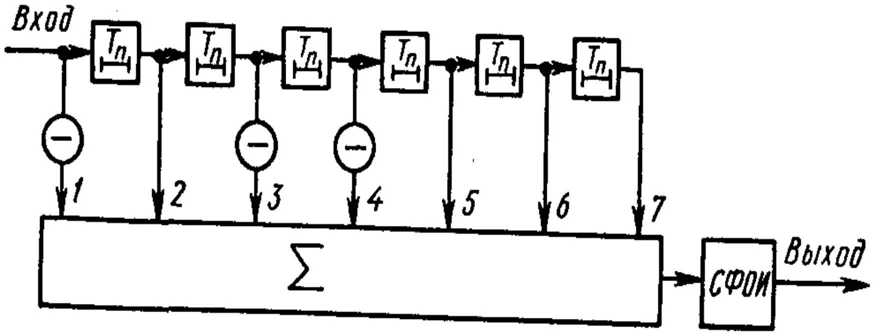


Рис. 6.12

<u>М-последовательности. Основные свойства</u>. М-последовательность является преиодической с периодом из N символов. Боковые пики периодической АКФ сигналов, образованных М-последовательностью, равны -1/T. В общем случае состоит из нескольких видов импульсов. Импульсы различного вида встречаются в периоде одинаковое число раз, т.е. равновероятно. Формируются М-последовательности с помощью линейных схем на основе сдвигающих регистров. При этом, если используется регистр с k разрядами и в М-последовательности используется p различных видов импульсов, то $N = p^k - 1$.

Число разрядов регистра $k = \dfrac{\log(N+1)}{\log p}$.

АКФ усеченной М-последовательности (непериодической последовательности длинной в период N) имеет величину боковых пиков, близкую к $1/\sqrt{N}$.

Формирование М-последовательностей.

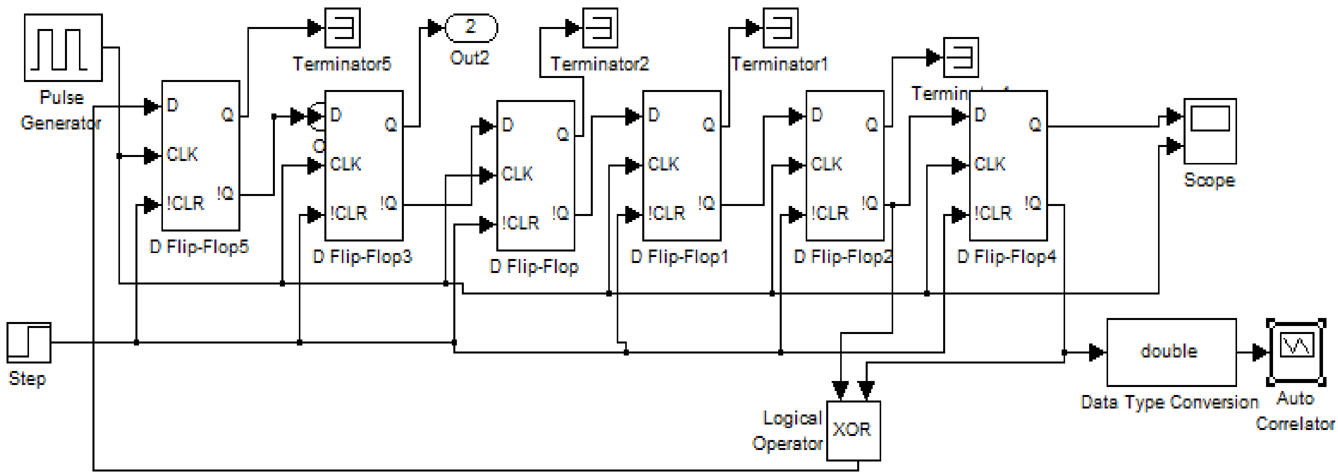


Рис. 6.13 – Схема формирования М-последовательностей

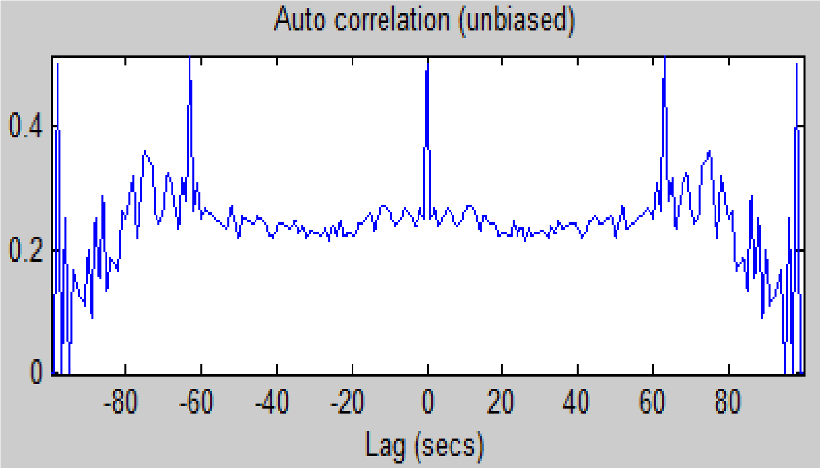


Рис. 6.14 – АКФ М-последовательностей

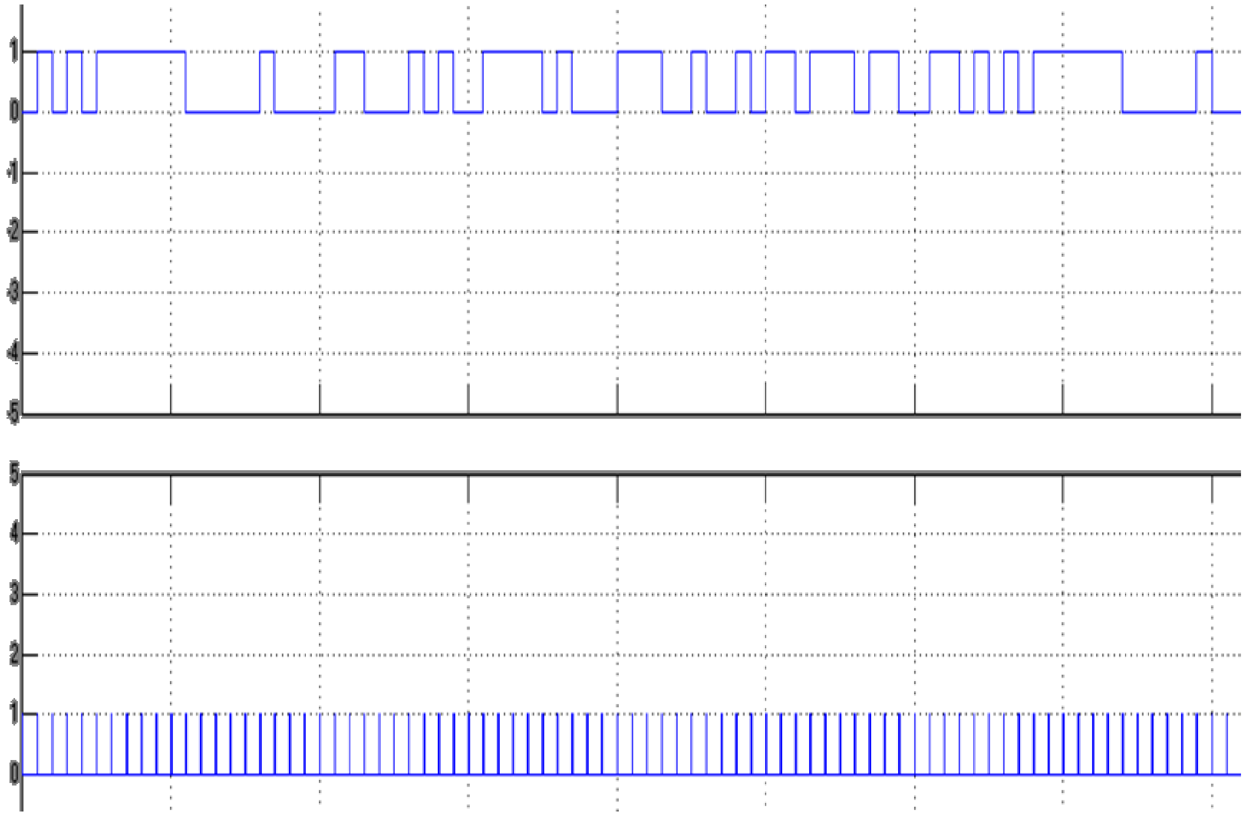


Рис. 6.15 – Временные диаграммы М-последовательностей

ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

Частотно-избирательная система, выполняющая обработку суммы сигнала и шума некоторым наилучшим образом, называется ***оптимальным фильтром (ОФ).***

Следует отличать ОФ обнаружения от фильтров, оптимальных по критерию минимума среднеквадратической ошибки (СКО).

При известной форме сигнала оптимальный фильтр должен обеспечить обнаружение сигнала с максимально возможной вероятностью. При неизвестной заранее форме сигнала оптимальный фильтр должен минимизировать среднеквадратичную ошибку воспроизведения полезного сигнала на выходе фильтра.

Оптимальный линейный фильтр (ОЛФ) сигналов известной формы

Будем полагать, что системой, осуществляющей обработку суммы сигнала и шума, служит стационарный линейный фильтр с частотной передаточной функцией

$$K(j\omega) = |K(j\omega)|\, e^{j\varphi_k(\omega)}. \tag{1}$$

Спектральная плотность известного по форме сигнала

$$S_{вх}(j\omega) = |S_{вх}(j\omega)|\, e^{j\varphi_s(\omega)}. \tag{2}$$

Используя спектральный метод анализа, можно найти полезный сигнал на выходе фильтра в любой момент времени t_0:

$$S_{вых}(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_{вх}||K|\, e^{j(\omega t_0 + \varphi_s + \varphi_k)} d\omega. \tag{3}$$

Положим, что кроме полезного сигнала на входе фильтра действует помехе виде белого шума с постоянным на всех частотах энергетическим спектром W_0. Дисперсия шума на выходе фильтра:

$$\sigma^2_{вых} = \frac{W_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |K|^2 d\omega. \tag{4}$$

Отношение сигнал/шум q на выходе фильтра:

$$q = \frac{|S_{вых}(t_0)|}{\sigma_{вых}} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |S_{вх}||K|\, e^{j(\omega t_0 + \varphi_s + \varphi_k)} d\omega}{(\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |K|^2\, d\omega)^{1/2}}. \tag{5}$$

Оптимальный фильтр - устройство, максимизирующее q в некоторый момент времени t_0.

Частотная передаточная функция согласованного фильтра

Задача нахождения функции решается на основании неравенства Коши-Буняковского

$$\left|\int F_1(x) F_2^*(x) dx\right| \le \left(\int |F_1(x)|^2 \int |F_2|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{6}$$

для произвольных функций.

Знак равенства имеет место лишь тогда, когда $F_1(x) = CF_2(x)$, где С – постоянное число.

Сравнивая между собой левую часть неравенства (6) и числитель формулы (5), положим, что

$$F_1(\omega)=|S_{вх}|e^{j\varphi_s}; \qquad F_2^*(\omega)=|K|e^{j(\omega t_0+\varphi_k)}. \tag{7}$$

Максимум числителя в (5) будет достигаться при условии, что функции F_1 и F_2 пропорциональны друг другу, т.е.

$$|S_{вх}|e^{j\omega_s}=C|K|e^{-j(\omega t_0+\varphi_k)}.$$

Равенство комплексных чисел означает равенство как модулей, так и аргументов:

$$|S_{вх}|=C|K|; \qquad \varphi_s=-\omega t_0-\varphi_k.$$

Отсюда:

$$K_{опт}(j\omega)=B|S_{вх}|e^{-j\varphi_s}e^{-\omega t_0} \tag{8}$$

где $B=1/C-$ коэффициент пропорциональности.

Формулу (8) удобно записать в виде

$$K_{опт}(j\omega)=BS_{вх}^*e^{-j\omega t_0}. \tag{9}$$

Т.о. частотная передаточная функция определяется спектральной плотностью сигнала. На основании общих свойств спектральных представлений сигнала экспоненциальный сомножитель вида $\exp(-j\omega t_0)$ указывает на факт смещения выходного сигнала фильтра по оси времени на величинууказывает на факт смещения выходного сигнала фильтра по оси времени на величину t_0.

Сигнал на выходе СФ:

$$S_{вых}(t)=\frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{вх}S_{вх}^*e^{j\omega(t-t_0)}d\omega. \tag{10}$$

достигает абсолютного максимума

$$S_{вых\max}(t)=\frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|S_{вх}^*|^2\,d\omega=BE. \tag{11}$$

в момент времени t_0, когда все элементарные спектральные составляющие входного сигнала складываются когерентно , т.е. имея одно и те же фазовые сдвиги.

Т.о., эффект согласованной фильтрации связан с коррекцией фазовых соотношений между отдельными спектральными компонентами выделяемого сигнала.

Импульсная характеристика СФ

Применим обратное преобразование к (9):

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{опт}(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^*_{вх}(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega. \qquad (12)$$

Известно, что любой вещественный сигнал характеризуется свойством $S_{вх}(-\omega) = S^*_{вх}(\omega)$. Поэтому

$$h(t) = \frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^*_{вх}(-\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = -\frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{вх}(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = Bs_{вх}(t-t_0). \qquad (13)$$

Т.о. импульсная характеристика СФ представляет собой масштабную копию входного сигнала, которая располагается в зеркальном порядке вдоль оси времени (знак минус при *t* в последней формуле). Помимо этого, смещена вправо, т.е. в сторону запаздывания относительно сигнала $s_{вх}(-t)$ на величину t_0.

Необходимое, но не достаточное условие физической реализуемости: t_0, параметр, определяющий момент максимального мгновенного значения сигнала на выходе, должен быть не меньше, чем длительность выделяемого импульса. В противном случае импульсная характеристика оказывается отличной от нуля при $t<0$, т.е.до момента поступления δ-импульса на вход. ОФ должен использовать энергию всего сигнала.

Форма полезного сигнала. Исследуем форму выходного сигнала при поступлении на вход $s_{вх}(t)$. На основании (10) запишем:

$$s_{вых}(t) = \frac{B}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_{вх}(\omega)|^2 e^{j\omega(t-t_0)}d\omega. \qquad (14)$$

Т.о. выходной сигнал с точностью до множителя *B* совпадает с функцией автокорреляции входного сигнала, сдвинутой в сторону запаздывания на величину t_0.

$$s_{вых}(t) = BK_s(t-t_0). \qquad (15)$$

Отношение сигнал/шум на выходе ОФ. Если N_0 - значение спектральной плотности на входе фильтра,то

$$N_{вых}(\omega) = N_0 |K_{опт}(j\omega)|^2 = N_0 B^2 |S_{вх}(\omega)|^2. \qquad (16)$$

Дисперсия шума на выходе:

$$\sigma^2_{вых} = \frac{N_0 B^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S_{вх}(\omega)|^2 d\omega = N_0 B^2 E_s.$$

Отсюда отношение сигнал/шум на выходе:

$$q = \frac{|s_{вых\max}|}{\sigma_{вых}} = \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}. \quad (17)$$

Примеры СФ

СФ для прямоугольного видеоимпульса.

$$s(t) = \begin{cases} A \text{ при } |t| \le T/2 \\ 0 \text{ при } |t| \ge T/2 \end{cases}$$

где T – длительность импульса.

Вычислим спектральную плотность

$$S_{вх}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{0}^{T} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega T}\right).$$

Находим частотный коэффициент передачи СФ, приняв $t_0=T$, т.е. максимум отклика на выходе приходится на момент окончания импульса:

$$K_{opt}(j\omega) = B \frac{1 - e^{-j\omega T}}{-j\omega} e^{-j\omega T} = B \frac{1}{j\omega}\left(1 - e^{-j\omega T}\right).$$

Модель СФ для одиночного видеоимпульса приведена на рис. 6.16.

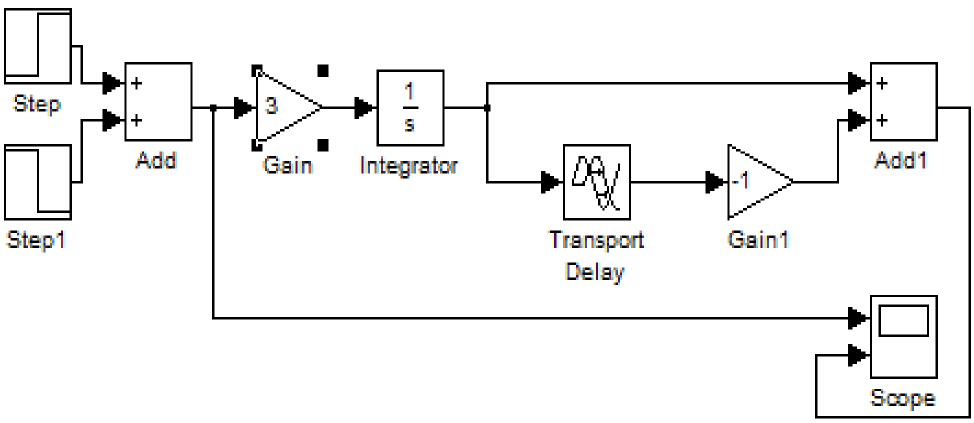


Рис. 6.16

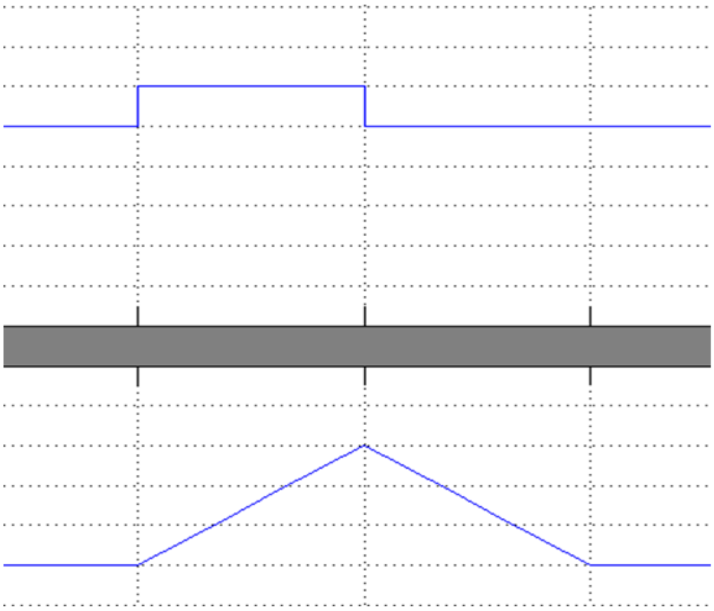


Рис. 6.17

СФ для пачки видеоимпульсов.

Пусть пачка состоит из N импульсов длительностью τ и периодом следования T. Если $S_0(\omega)$ - спектральная слотность отдельного импульса, то спектральная плотность пачки:

$$S_n(\omega) = S_0\left(1 + e^{-j\omega T} + e^{-j\omega 2T} + e^{-j\omega 3T} + \ldots + e^{-j\omega(N-1)T}\right).$$

Потребуем, чтобы максимальный отклик был в момент окончания последнего импульса пачки $t_0 = (N-1)T + \tau_u$. Тогда

$$K_{opt}(j\omega) = K_{0opt}\left(1 + e^{-j\omega T} + e^{-j2\omega T} + e^{-j3\omega T} + \ldots + e^{-j(N-1)\omega T}\right),$$

где K_{0opt} - коэффициент передачи одиночного видеоимпульса.

Модель СФ для пачки видеоимпульсов приведена на рис. 6.18. Временные диаграммы приведены на рис. 6.19.

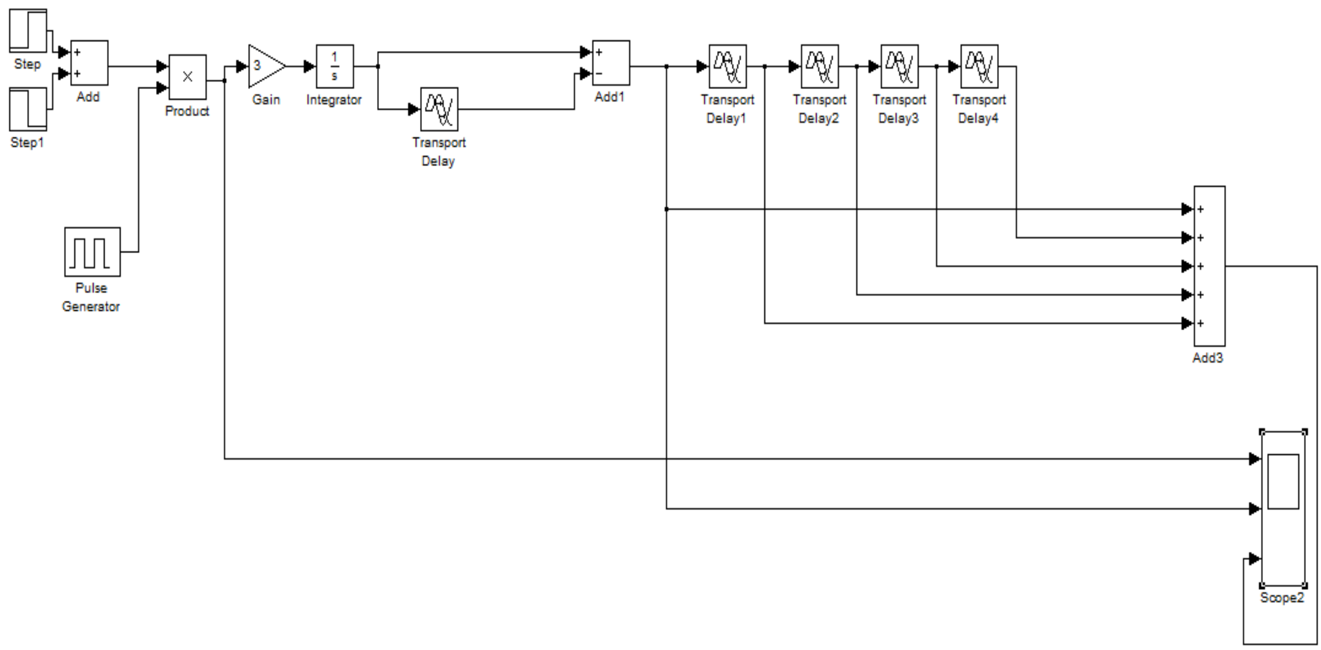


Рис. 6.18

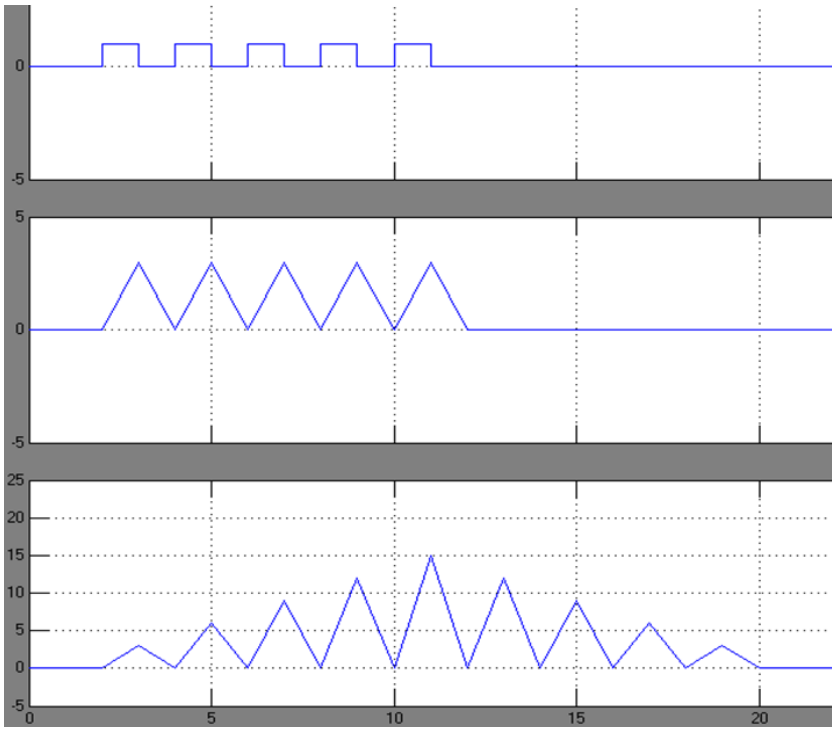


Рис. 6.19

<u>Оптимальная фильтрация случайных сигналов</u>

Положим, что на вход фильтра с $K(j\omega)$ поступает полезный сигнал *u(t)* со спектральной плотностью $W_u(\omega)$. Реализация выходного сигнала *y(t)* отличается от *u(t)* на величину ошибки *e(t)*:

$$e(t)=u(t)-y(t).$$

Оф должен обеспечивать минимум дисперсии сигнала ошибки.

Если $W_e(\omega)$ - плотность вероятности сигнала ошибки, то дисперсия

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_e(\omega) d\omega .$$

Свяжем функцию $W_e(\omega)$ с энергетическими спектрами $W_u(\omega)$ и $W_v(\omega)$. С этой целью рассмотрим схему устройства, позволяющего получить на выходе сигнал ошибки (рис. 6.20).

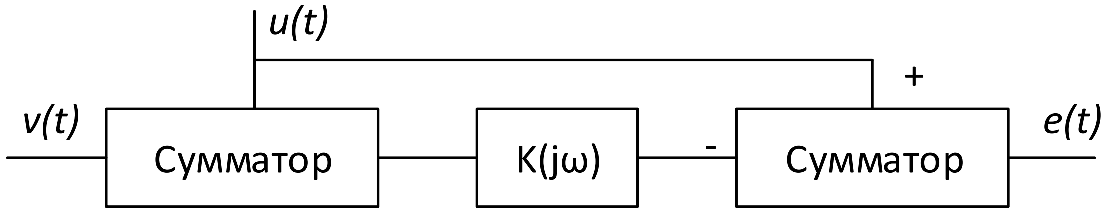


Рис. 6.20

Рассмотрим алгоритм получения сигнала ошибки при условии некоррелированности сигналов.

$$W_e(\omega) = \left|K(j\omega)\right|^2 W_v(\omega) + \left|1 - K(j\omega)\right|^2 W_u(\omega).$$

Представим $K(j\omega) = H_k(\omega) e^{j\varphi_k(\omega)}$. Очевидно, что

$$\left|1 - K(j\omega)\right|^2 = H_k^2 - 2H_k \cos\varphi_k + 1.$$

Причем, эта величина минимальна, если $\varphi_k = 0$. Т.о. ОФ должен вносить нулевой фазовый сдвиг на всех частотах. Приняв это во внимание, получим

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} \left[\left(H_k - 1\right)^2 W_u + H_k^2 W_v \right] d\omega .$$

Выполнив преобразования, последнюю формулу можно представить в виде:

$$\sigma_e^2 = \int_{\infty}^{-\infty} \left[\left(\sqrt{W_u + W_v H_k} - \frac{W_u}{W_u + W_v} \right)^2 + \frac{W_u W_v}{W_u + W_v} \right] d\omega .$$

Минимум дисперсии ошибки будет в том случае, когда

$$\sqrt{W_u + W_v H_k} - \frac{W_u}{W_u + W_v} = 0,$$

откуда

$$H_{k\,opt}(\omega)=\frac{W_u(\omega)}{W_u(\omega)+W_v(\omega)}.$$

Минимизация дисперсии ошибки. Представим формулу в виде:

$$\sigma_e^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W_u(\omega)}{W_u(\omega)+W_v(\omega)}d\omega.$$

Модуль частотного коэффициента передачи ОФ должен быть велик в той части спектра, где сосредоточена основная доля полезного сигнала и уменьшается там, где велика спектральная плотность мощности помехи.

НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Общие соотношения

Задача нелинейной фильтрации параметров (сообщения) возникает, если уравнение, описывающее сообшение, нелинейно или уравнение наблюдения содержит нелинейные функции. На практике радиосигналы являются нелинейными функциями сообщений $\lambda(t)$, содержащихся, например, в фазе, задержке или частоте.

Рассмотрим наблюдение, заданное соотношением

$$r(t)=s(t,\lambda(t))+n(t),$$

где сообщение $\lambda(t)$ считается случайным процессом, определяемым уравнением

$$\frac{d\lambda(t)}{dt}=K_1(t,\lambda)+n_\lambda(t), \qquad \lambda(0)=\lambda_0,$$

где $K_1(t,\lambda)-$известная функция.

Уравнения нелинейной фильтрации Р.Л. Стратоновича, характеризующие эфолюцию апостериорной плотности вероятности $w_{ps}(t,\lambda)$, при ее аппроксимации гауссовским приближением, определяются соотношениями

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt}=-a\lambda^*(t)+\sigma_\lambda^2(t)\frac{dF(t,\lambda^*)}{d\lambda^*}, \tag{1}$$

$$\frac{d\sigma_\lambda^2(t)}{dt}=\frac{N_2}{2}-a\sigma_\lambda^2(t)+\sigma_\lambda^4(t)\frac{d^2F(t,\lambda^*)}{d\lambda^{*2}}, \tag{2}$$

где

$$F(t,\lambda)=\left(-\frac{1}{N_0}\right)\left(r(t)-s(t,\lambda)\right). \tag{3}$$

Для упрощения нелинейного фильтра прибегают к усреднению зависящих от времени членов в уравнении, в частности к замене

$$\frac{d^2F(t,\lambda^*)}{d\lambda^{*2}} \cong -\frac{2}{N_0}\left(ds(t,\lambda^*)/d\lambda^*\right)^2. \tag{4}$$

После усреднения можно определить стационарное значение дисперсии, полагая

$$\frac{d\sigma_\lambda^2(t)}{dt}=0.$$

При этом с учетом соотношения (4) дифференциальное уравнение (2) переходит в алгебраическое

$$0=\frac{N_\lambda}{2}-2a\sigma_\lambda^2(t)+\sigma_\lambda^4(t)\frac{d^2F(t,\lambda^*)}{d\lambda^{*2}}. \tag{5}$$

Считая справедливым принятые приближения, уравнение (1) для оценки фильтруемого параметра можно записать в виде:

$$\frac{d\lambda^*(t)}{dt}=-a\lambda^*(t)+\sigma_\lambda^2(t)\frac{dF(t,\lambda^*)}{d\lambda^*}. \tag{6}$$

$$\frac{dF(t,\lambda^*)}{d\lambda^*}=\frac{2}{N_0}\left(r(t)-s(t,\lambda^*)\right)\frac{ds(t,\lambda^*)}{d\lambda^*}. \tag{7}$$

Для неэнергетического параметра выражение (7) можно записать в упрощенном виде:

$$\frac{dF(t,\lambda^*)}{d\lambda^*}=\frac{2}{N_0}r(t)\frac{ds(t,\lambda^*)}{d\lambda^*}. \tag{8}$$

Приведенные выражения позволяют осуществить структурный синтез квазиоптимальных устройств нелинейной фильтрации.

Фильтрация фазы узкополосного сигнала

Пусть $s(t,\varphi)=a_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$, где фаза представляет процесс, заданный уравнением:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=n_\varphi(t). \tag{9}$$

Гауссовский шум, из которого формируется процесс $\varphi(t)$, имеет характеристики:

$$\langle n_\varphi(t)\rangle=0, \qquad \langle n_\varphi(t_1)n_\varphi(t_2)\rangle=\frac{N_\varphi}{2}\delta(t_1-t_2).$$

На приемной стороне колебание имеет вид:

$$r(t)=a_0\cos(\omega_0 t+\varphi)+n(t).$$

где *n(t)* – аддитивная помеха, белый шум. В соответствии с (6) при *a=0* и сообщениям (8) и (9) запишем уравнение для оценки фазы:

$$\frac{d\varphi^*(t)}{dt}=-\left(\frac{2}{N_0}\right)\sigma_\varphi^2 r(t)a_0\sin(\omega_0 t+\varphi^*). \tag{10}$$

Согласно (10), принимая $K=-\left(\frac{2}{N_0}\right)\sigma_\varphi^2 a_0$, где σ_φ^2 –стационарное значение дисперсии ошибки оценивания фазы, строим структурную схему фильтрации (рис. 6.22).

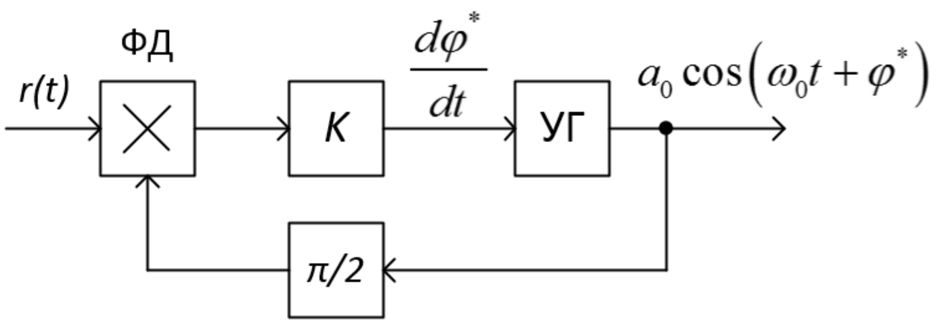


Рис. 6.22

Определим дисперсию. Полагая в (5) *a=0* и имея ввиду равенство

$$\overline{\left(ds(t,\varphi^*)/d\varphi^*\right)^2}=\overline{a_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi^*)}\cong a_0^2/2,$$

где черта сверху означает операцию временного усреднения и учтено, что осциллирующий член $\cos 2\omega_0 t$ при интегрировании дает нуль, получим:

$$\sigma_\varphi^2=\left(N_\varphi N_0/(2a_0^2)\right)^{1/2}. \tag{11}$$

Соотношение (11) для стационарной дисперсии можно преобразовать. Для этого введем дисперсию набега фазы сигнала за время T, т.е. определим априорную дисперсию фазы:

$$D_\varphi = N_\varphi T / 2 .$$

Тогда, обозначив отношение сигнал/шум $q = \dfrac{2a_0^2 T}{N_0}$, получим:

$$\sigma_\varphi^2 = \left(2D_\varphi / q\right)^{1/2} .$$

По уравнению (11) возможно другое построение схемы ФАПЧ (рис. 6.23).

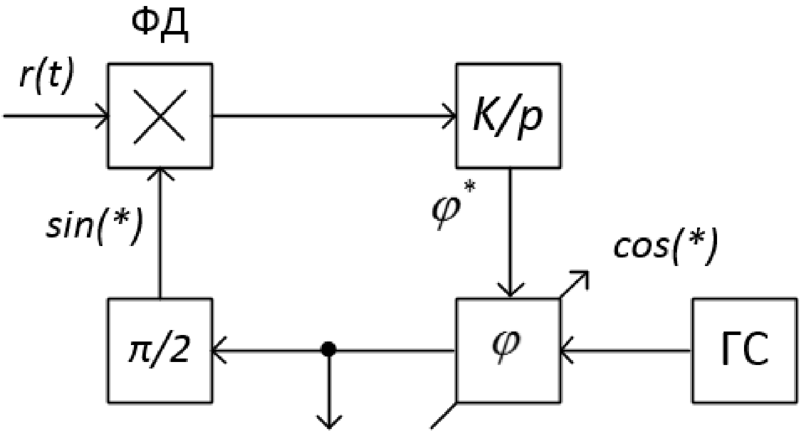


Рис. 6.23