1. Необходимость использования в радиотехнике высокочастотных сигналов. Структурная схема канала передачи информации. Назначение основных устройств передающего и приемного трактов.

2. Пояснить необходимость и суть основных преобразований сигналов в устройствах передающего и приемного трактов канала передачи информации.

3. Виды сигналов, их математические модели и характеристики.

4. Спектральное представление сигналов. Необходимость, методы определения спектров периодических сигналов.

5. Спектральное представление сигналов. Необходимость, методы определения спектров непериодических сигналов.

<u>6.</u> Испытательные сигналы (гармонический сигнал, функция Дирака, функция Хевисайда). Спектры испытательных сигналов.

7. Корреляционный анализ детерминированных сигналов. Свойства автокорреляционной и взаимокорреляционной функций. Связь автокорреляционной функции сигнала с его характеристикой в частотной области.

8. Дискретизация непрерывных сигналов. Теорема отсчетов (теорема Котельникова). Использование теоремы Котельникова для реализации временного уплотнения канала связи.

9. Радиосигналы с амплитудной модуляцией, их векторное представление. Спектры радиосигналов с амплитудной модуляцией.

<u>10. Балансная и однополосная амплитудная модуляции. Спектры радиосигналов с балансной и однополосной амплитудной модуляциями.</u>

<u>11. Радиосигналы с угловой модуляцией. Фазовая и пастозная модуляции. Спектр сигнала с угловой модуляцией.</u>

<u>12. Сигналы с импульсной модуляцией Виды импульсной модуляции. Импульсно-кодовая</u> (цифровая) модуляция Спектр сигнала с амплитудно-импульсной модуляцией

13. Классификация радиотехнических цепей. Основные свойства линейных, параметрических и нелинейных цепей. Что значит "обогащает спектр сигнала" и "принцип суперпозиции"?

<u>14. Схема дифференцирующей и интегрирующей цепей. Формулы и графики их амплитудно-</u> частотные (АЧХ) и фазо-частотные (ФЧХ) характеристики.

<u>15. Схемы и принцип работы апериодического и резонансного усилителей. Формулы и графики их АЧХ и ФЧХ.</u>

16. Линейные цепи с обратной связью. Частотный коэффициент передачи цепи с обратной связью и виды обратной связи. Применение отрицательной обратной связи для улучшения характеристик радиотехнических устройств.

17. Формулировка и суть основных критериев устойчивости цепей с обратной связью (критерии Гурвица. Найквиста. Михайлова).

<u>18. Постановка задачи и методы анализа линейных цепей. Спектральный и временной методы анализа линейных цепей.</u>

<u>19. Нелинейные цепи, их характеристики и параметры. Методы аппроксимации нелинейных характеристик.</u>

20. Анализ нелинейной цепи при кусочно-линейной аппроксимации характеристик (метод Берга).

21. Схема и принцип работы амплитудного модулятора. Характеристики амплитудного модулятора

22. Схема и принцип работы диодного амплитудного детектора. Линейный и квадратичный амплитудный детектор.

23. Схемы и принцип работы фазового и частотного модуляторов.

24. Схемы и принцип работы фазового и частотного детекторов.

25. Необходимость и методы преобразования частоты. Балансный преобразователь частоты.

26. Общие характеристики цепей с переменными параметрами. Энергетические соотношения в цепях с переменной емкостью.

27. Основные свойства параметрической цепи. Схема одноконтурного параметрического усилителя. Пояснить принцип работы, достоинства и недостатки.

28. Структурная схема автогенератора гармонических колебаний. Баланс амплитуд и баланс фаз, условия самовозбуждения и работы автогенератора.

29. Принцип работы LC-автогенератора с трансформаторной обратной связью. Возникновение колебаний н стационарный режим работы. "Мягкий" и "жесткий" режимы самовозбуждения. Анализ установившегося режима автогенератора.

<u>30. RC-автогенераторы. Виды цепей обратной связи. Проблема получения гармонических колебании с малыми искажениями.</u>

31. Автогенераторы на приборах с отрицательным дифференциальным сопротивлением (с внутренней обратной связью).

32. Трехточечные схемы LC-автогенераторов с емкостной и индуктивной обратной связью.

33. Случайные величины и случайные процессы в радиотехнике, основные определения. Статистический подход к описанию случайных сигналов.

34. Статистические характеристики случайных сигналов (законы распределения и числовые характеристики), их физический смысл.

<u>35. Модели случайных сигналов ("нормальный" случайный процесс, "белый" шум.</u> узкополосный случайный сигнал).

36. Стационарные и нестационарные случайные процессы. Их статистические характеристики. Эргодические случайные процессы. Особенности определения их статистических характеристик.

<u>37. Нормальный (гауссовский) закон распределения случайных сигналов. Эффект</u> нормализации случайных процессов в узкополосных цепях.

38. Спектральные характеристики случайных сигналов и их отличие от спектральных характеристик детерминированных сигналов. Теорема Винера-Хинчина.

39. Соотношение между шириной спектра и интервалом корреляции случайного сигнала.

40. Узкополосные случайные сигналы. Необходимость определения статистических характеристик огибающей и фазы этих сигналов. Законы распределения узкополосного случайного сигнала, его огибающей и фазы.

41. Линейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения спектральной плотности мощности и корреляционной функции случайного сигнала на выходе линейного устройства.

42. Линейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения закона распределения случайного сигнала на выходе линейного устройства.

43. Нелинейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения спектральной плотности мощности и корреляционной функции случайного сигнала на выходе нелинейного устройства.

44. Нелинейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения закона распределения случайного сигнала на выходе нелинейного устройства.

45. Воздействие узкополосного шума на амплитудный детектор. Статистические характеристики выходного сигнала.

46. Воздействие суммы гармонического сигнала и нормального шума на линейный амплитудный детектор. Статистические характеристики выходного сигнала.

47. Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики оптимального фильтра. Физические процессы в фильтре, согласованном с сигналом.

48. Импульсная характеристика согласованного фильтра, сигнал и помеха на его выходе.

49. Синтез согласованного фильтра для прямоугольного видеоимпульса.

50. Частотный коэффициент передачи фильтра, согласованного с сигналом при "небелом" шуме.

<u>ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ</u>

1. Необходимость использования в радиотехнике высокочастотных сигналов. Структурная схема канала передачи информации. Назначение основных устройств передающего и приемного трактов.

НЧ колебания требуют больших антенн и имеют малый коэффициент излучения в антенном фидере. От этого требуются значительно большие мощности для излучения сигнала по сравнению с короткими волнами.



#### Передающее устройство:

Передающее устройство осуществляет преобразование передаваемого сообщения и приведение его к виду, пригодному для передачи в свободное пространство с помощью антенн. С этой целью в состав устройства входят:

1. Преобразователь информации в электрический сигнал. При передаче речи – это микрофон, при передаче изображения – передающая трубка, при передаче текста – телеграфный аппарат и др. На выходе преобразователя формируется сигнал, спектр которого сосредоточен в области низких частот (относительно частоты несущего колебания).

2. Усилитель низкой частоты (УНЧ) обеспечивает усиление по мощностинизкочастотного информационного сигнала, что требуется для его дальнейшего преобразования.

3. Кодирующее устройство осуществляет при необходимости кодирование передаваемого сигнала. В цифровой системе связи такую операцию выполняет микросхема, называемая кодером. Это устройство преобразует аналоговый сигнал в цифровую форму (дискретизирует по времени, квантует по уровню и кодирует цифровым кодом). На выходе кодера передаваемый сигнал имеет вид последовательности импульсов.

4. Модулятор и генератор высокой (несущей) частоты, реализующие процесс модуляции. Сущность модуляции заключается в следующем. Генератор высокой частоты формирует гармоническое высокочастотное колебание, которое подается на модулятор. На вход модулятора поступает передаваемый сигнал. Модулятор изменяет второй соответствующий параметр высокочастотного колебания (амплитуду, частоту или фазу) по закону изменения передаваемого сигнала, т.е. сообщения. В результате формируется модулированное колебание, представляющее собой высокочастотное гармоническое колебание, амплитуда или фаза (а значит, и частота) которого является функцией времени. Иногда функции модулятора и кодирующего устройства объединяют в одном устройстве.

5. Усилитель высокой частоты (УВЧ) усиливает модулированный высокочастотный сигнал для последующей передачи его с помощью антенны в свободное пространство.

Таким образом, в передающем устройстве сигналы подвергаются различным преобразованиям. Основные из них: усиление на низкой и высокой частотах, кодирование, модуляция (амплитудная, частотная, фазовая и др.), генерирование, умножение частоты.

#### Приемное устройство:

Высокочастотные радиосигналы, улавливаемые приемной антенной, поступают в приемное устройство. Приемное устройство осуществляет соответствующие преобразования принятого высокочастотного сигнала с тем, чтобы выделить передаваемую информацию без искажения. С этой целью в состав устройства входят:

1. Фильтр и усилитель высокой частоты (УВЧ). В зависимости от расстояния между передающим и приемным устройствами, от ширины и направленности передающей и приемной антенн, а также от условий распространения радиоволн мощность сигнала на входе приемника достигает значений  $10^{-10} - 10^{-14}$  Вт. Такой сигнал требует усиления. Кроме того, для подключения к приемнику нужного источника (например, определенного канала из многих при их частотном разделении) необходим селектор, в качестве которого может служить полосовой фильтр с перестраиваемой резонансной частотой. Полоса пропускания фильтра должна быть не меньше полосы частот, занимаемой принятым высокочастотным сигналом.

Предварительное усиление принятого сигнала осуществляется усилителем высокой частоты. Этот усилитель должен быть с перестройкой частоты и иметь большой коэффициент усиления в силу незначительной мощности принятого сигнала. Реализовать это затруднительно. Дело в том, что усилитель с большим коэффициентом усиления содержит несколько каскадов усиления, что затрудняет перестройку частоты. Кроме того, в таких усилителях существует опасность самовозбуждения на высоких частотах из-за возникновения паразитных связей между входом усилителя и выходом. Поэтому основное усиление сигнала обеспечивают на более низкой частоте.

2. Смеситель и гетеродин. Эти устройства решают задачу преобразования частоты сигнала, поэтому их называют преобразователем частоты. Они осуществляют перенос спектра принятого сигнала в область более низких частот, в частности в область промежуточной частоты. В большинстве радиовещательных приемников эта частота выбирается равной 465 кГц (между диапазонами длинных и средних волн).

Гетеродин – это генератор гармонического колебания с перестраиваемой частотой. Смеситель умножает колебание с выхода генератора на принятый высокочастотный сигнал и формирует сигнал, имеющий разностную (промежуточную) частоту.

3. Усилитель промежуточной частоты (УПЧ) — это усилитель мощности, обеспечивающий значительное усиление сигнала без перестройки его частоты.

4. Детектор. Реализует операцию, обратную по отношению к модуляции, т.е. извлекает сигнал, который изменяется по закону передаваемого сообщения (возможно, закодированный). Поэтому это устройство часто называют демодулятором. В зависимости от того, какая модуляция использована для передачи информации в передающем тракте, применяют амплитудный, частотный или фазовый детекторы. Основное требование к детектору – это по возможности точное воспроизведение формы передаваемого сигнала. В цифровых системах связи пару модулятор-демодулятор называют модемом.

5. Декодер. Восстанавливает сообщение по принятым кодовым символам. С выхода декодера аналоговый сигнал поступает на усилитель низкой частоты. В цифровых системах связи пару кодер-декодер называют кодеком. В аналоговых системах связи кодека может и не быть. Иногда функции детектора и декодера объединяют в одном устройстве.

6. Усилитель низкой частоты (УНЧ). Усиливает сигнал до уровня, обеспечивающего работу оконечного устройства. Оконечным устройством может быть динамик приемника, телеграфный автомат, телевизионная трубка и др.

2. Пояснить необходимость и суть основных преобразований сигналов в устройствах передающего и приемного трактов канала передачи информации.



Передача сообщений по радиоканалу сопровождается разнообразными преобразованиями сигналов. Эти преобразования реализуются с помощью радиотехнических устройств (цепей), каждое из которых в зависимости от его структурной организации выполняет определенную операцию над сигналами (фильтрацию, усиление, генерирование, модуляцию, детектирование и др.).

#### Передающее устройство:

Передающее устройство осуществляет преобразование передаваемого сообщения и приведение его к виду, пригодному для передачи в свободное пространство с помощью антенн. С этой целью в состав устройства входят:

1. Преобразователь информации в электрический сигнал. При передаче речи – это микрофон, при передаче изображения – передающая трубка, при передаче текста – телеграфный аппарат и др. На выходе преобразователя формируется сигнал, спектр которого сосредоточен в области низких частот (относительно частоты несущего колебания).

2. Усилитель низкой частоты (УНЧ) обеспечивает усиление по мощностинизкочастотного информационного сигнала, что требуется для его дальнейшего преобразования.

3. Кодирующее устройство осуществляет при необходимости кодирование передаваемого сигнала. В цифровой системе связи такую операцию выполняет микросхема, называемая кодером. Это устройство преобразует аналоговый сигнал в цифровую форму (дискретизирует по времени, квантует по уровню и кодирует цифровым кодом). На выходе кодера передаваемый сигнал имеет вид последовательности импульсов.

4. Модулятор и генератор высокой (несущей) частоты, реализующие процесс модуляции. Сущность модуляции заключается в следующем. Генератор высокой частоты формирует гармоническое высокочастотное колебание, которое подается на модулятор. На передаваемый второй модулятора поступает сигнал. Модулятор изменяет вход соответствующий параметр высокочастотного колебания (амплитуду, частоту или фазу) по закону изменения передаваемого сигнала, т.е. сообщения. В результате формируется колебание, представляющее собой высокочастотное гармоническое модулированное колебание, амплитуда или фаза (а значит, и частота) которого является функцией времени. Иногда функции модулятора и кодирующего устройства объединяют в одном устройстве.

5. Усилитель высокой частоты (УВЧ) усиливает модулированный высокочастотный сигнал для последующей передачи его с помощью антенны в свободное пространство.

Таким образом, в передающем устройстве сигналы подвергаются различным преобразованиям. Основные из них: усиление на низкой и высокой частотах, кодирование, модуляция (амплитудная, частотная, фазовая и др.), генерирование, умножение частоты.

#### Приемное устройство:

Высокочастотные радиосигналы, улавливаемые приемной антенной, поступают в приемное устройство. Приемное устройство осуществляет соответствующие преобразования принятого высокочастотного сигнала с тем, чтобы выделить передаваемую информацию без искажения. С этой целью в состав устройства входят:

1. Фильтр и усилитель высокой частоты (УВЧ). В зависимости от расстояния между передающим и приемным устройствами, от ширины и направленности передающей и приемной антенн, а также от условий распространения радиоволн мощность сигнала на входе приемника достигает значений  $10^{-10} - 10^{-14}$  Вт. Такой сигнал требует усиления. Кроме того, для подключения к приемнику нужного источника (например, определенного канала из многих при их частотном разделении) необходим селектор, в качестве которого может служить полосовой фильтр с перестраиваемой резонансной частотой. Полоса пропускания фильтра должна быть не меньше полосы частот, занимаемой принятым высокочастотным сигналом.

Предварительное усиление принятого сигнала осуществляется усилителем высокой частоты. Этот усилитель должен быть с перестройкой частоты и иметь большой коэффициент усиления в силу незначительной мощности принятого сигнала. Реализовать это затруднительно. Дело в том, что усилитель с большим коэффициентом усиления содержит несколько каскадов усиления, что затрудняет перестройку частоты. Кроме того, в таких усилителях существует опасность самовозбуждения на высоких частотах из-за возникновения паразитных связей между входом усилителя и выходом. Поэтому основное усиление сигнала обеспечивают на более низкой частоте.

2. Смеситель и гетеродин. Эти устройства решают задачу преобразования частоты сигнала, поэтому их называют преобразователем частоты. Они осуществляют перенос спектра принятого сигнала в область более низких частот, в частности в область промежуточной частоты. В большинстве радиовещательных приемников эта частота выбирается равной 465 кГц (между диапазонами длинных и средних волн).

Гетеродин – это генератор гармонического колебания с перестраиваемой частотой. Смеситель умножает колебание с выхода генератора на принятый высокочастотный сигнал и формирует сигнал, имеющий разностную (промежуточную) частоту.

3. Усилитель промежуточной частоты (УПЧ) — это усилитель мощности, обеспечивающий значительное усиление сигнала без перестройки его частоты.

4. Детектор. Реализует операцию, обратную по отношению к модуляции, т.е. извлекает сигнал, который изменяется по закону передаваемого сообщения (возможно, закодированный). Поэтому это устройство часто называют демодулятором. В зависимости от того, какая модуляция использована для передачи информации в передающем тракте, применяют амплитудный, частотный или фазовый детекторы. Основное требование к детектору – это по возможности точное воспроизведение формы передаваемого сигнала. В цифровых системах связи пару модулятор-демодулятор называют модемом.

5. Декодер. Восстанавливает сообщение по принятым кодовым символам. С выхода декодера аналоговый сигнал поступает на усилитель низкой частоты. В цифровых системах связи пару кодер-декодер называют кодеком. В аналоговых системах связи кодека может и не быть. Иногда функции детектора и декодера объединяют в одном устройстве.

6. Усилитель низкой частоты (УНЧ). Усиливает сигнал до уровня, обеспечивающего работу оконечного устройства. Оконечным устройством может быть динамик приемника, телеграфный автомат, телевизионная трубка и др.

#### 3. Виды сигналов, их математические модели и характеристики.

Множество радиотехнических сигналов с вероятностной точки зрения делится на два больших и относительно самостоятельных класса:

1) **Детерминированные сигналы** – это сигналы, мгновенные значения которых в любой момент времени известны, т.е. предсказуемы с вероятностью, равной единице.

2) Случайные сигналы – это сигналы, мгновенные значения которых в любой момент времени не известны, но могут быть предсказаны с вероятностью, меньшей единицы.

В канале связи различают следующие сигналы:

-/ управляющие (модулирующие) сигналы - это информационные сигналы, подлежащие передаче:

а) непрерывные и дискретные сигналы:

<u>-- Непрерывные сигналы</u> – это сигналы, имеющие определенное значение в любой момент времени их существования. Такие сигналы называют еще аналоговыми сигналами.

<u>-- Дискретные сигналы</u>: 1) дискретные по времени; 2) квантованные по уровню; 3) цифровые (дискретные по времени и квантованные по уровню).



б) импульсные сигналы – это сигналы, существующие в пределах конечного отрезка времени (прямоугольный, треугольный, колоколообразный). Импульсными сигналами можно считать также сигналы с областью определения ( $-\infty,\infty$ ) или ( $0,\infty$ ), если существует конечный интервал времени, в пределах которого сосредоточена основная часть их энергии (гауссов, экспоненциальный).



в) периодические и непериодические. Периодические сигналы – это сигналы, которые можно представить функцией времени, удовлетворяющей условию s(t) = s(t + nT), где T – период сигнала; n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...



← Для видео- и радиоимпульса:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_o(t+nT),$$

где *s<sub>o</sub>* – функция, описывающая одиночный импульс.

Основными параметрами последовательности импульсов являются амплитуда E, длительность  $\tau_u$ , период T, частота следования f = 1/T.

Непериодические сигналы не удовлетворяют вышеприведенному условию.



Четные сигналы описываются четной функцией времени, т.е. функцией, удовлетворяющей условию  $s_{4}(t)=s_{4}(-t)$ . Четный сигнал является симметричным относительно оси ординат.

Нечетные сигналы описываются нечетной функцией времени, т.е. функцией, удовлетворяющей условию  $s_{H'}(t) = -s_{H'}(-t)$ . Нечетный сигнал является симметричным относительно начала координат.

Сигнал, описываемый функцией, не удовлетворяющей условиям четности и нечетности, называется произвольным.

<u>-/ высокочастотные (несущие) гармонические колебания</u> - это гармонические колебания, описываемые функцией  $s(t) = Ecos(\omega_0 t + \phi)$ , где E – амплитуда,  $\omega_0$  – угловая частота,  $\phi$  – начальная фаза, ( $\omega_0 t + \phi$ ) – полная фаза колебания.

Причем  $\omega_0 = 2\pi f$ , f = 1/T – циклическая частота, T – период колебания.

Учитывая формулы Эйлера, сигнал  $s(t) = E\cos(\omega_0 t + \varphi)$  можно представить в комплексном виде:

$$s(t) = \frac{E}{2}e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + \frac{E}{2}e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}$$

<u>-/ модулированные колебания (радиосигналы)</u> – это гармонические колебания высокой частоты, один или несколько параметров которых (амплитуда, частота или фаза) изменяются по какому-либо закону. Такие сигналы называют еще радиосигналами. Математические формулы модулированных сигналов:  $s(t)=U(t)cos(\omega_0 t+\phi)$  – амплитудная модуляция;  $s(t)=U_{\mu}cos[\omega_0 t+\phi(t)]$  – угловая (частотная, фазовая) модуляция;  $s(t)=U(t)cos[\omega_0 t+\phi(t)]$  – общий вид модулированных сигналов.

Здесь U(t) – огибающая,  $\omega_0 = 2\pi f_0$  – несущая частота,  $\phi(t)$  – фазовая функция,  $\omega_0 t + \phi(t)$  – полная фаза модулированного колебания. Предполагается, что за время  $T = 2\pi\omega_0$  огибающая U(t) и фазовая функция  $\phi(t)$  изменяются незначительно.

Характеристики сигналов (для сигнала, существующего в интервале  $\Delta t = t_2 - t_1$ ; компл.): 1. Среднее значение сигнала (постоянаня составляющая): Для периодического

$$\overline{s(t)} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} s(t) dt$$

2. Мгновенная мощность сигнала:

s(t)

 $\varphi = \omega_0 \Delta t$ 

$$p(t) = s(t)s^{*}(t) = |s(t)|^{2}.$$

3. Энергия сигнала:

$$\Im = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} s(t) s^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt.$$

4. Средняя мощность сигнала:

$$P_{cp} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt.$$

Для периодического сигнала, энергия которого равна бесконечности, среднее значение и энергетические характеристики определяются в пределах одного периода, т.е. в формулах заменяем  $t_1$  и  $t_2$  на 0 и T соответственно.

# 4. Спектральное представление сигналов. Необходимость, методы определения спектров периодических сигналов.

Для определения частотных характеристик периодических сигналов, т. е. для их спектрального анализа, сигналы представляются в виде суммы гармонических колебаний путем разложения в ряд Фурье. Такое разложение существует, так как большинство применяемых на практике сигналов описывается функциями времени, удовлетворяющими условиям Дирихле: наличие конечного числа разрывов первого рода (скачков) и отсутствие разрывов второго рода (ветвей, уходящих в бесконечность), а также наличие конечного числа экстремумов.

Представление периодических сигналов в виде суммы гармонических колебаний с различными параметрами (прежде всего различными частотами) называют спектральным разложением или гармоническим спектральным анализом сигналов. Математически спектральный анализ предполагает разложение сигналов в ряд по тригонометрическим функциям - синусам и косинусам. Эти функции описывают гармонические колебания, которые сохраняют свою форму в процессе преобразований линейными устройствами (изменяются только амплитуда и фаза), что позволяет использовать теорию колебательных систем для анализа свойств радиотехнических цепей. Совокупность гармонических компонент образует спектр сигнала.

Спектр необходимо знать, чтобы определить область частот, занимаемую сигналом.

Тригонометрическая форма ряда Фурье.

<u> </u>	рисопометрических форми р	mou <u>v ypoe.</u>
Тригонометрическая форма Фурье имеет вид:	а ряда $s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)$	$a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t$ ). (1)
Коэффициенты $a_k$ и $b_k$ этого ряда определяются <i>а</i> выражениями:	$s_{k} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k\omega_{1} t dt;$	$b_{k} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k\omega_{1} t dt . $ (2)
Частота $\omega_1 = 2\pi/T$ , где $T$ -	период сигнала.	
Если сигнал <i>s</i> ( <i>t</i> ) четный, то р только косинусы и постоянну	ряд Фурье будет содержать ю составляющую, т. е.	$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t$ .
Если сигнал <i>s</i> ( <i>t</i> ) нечетный, то только синусы, т. е.	ряд Фурье будет содержать	$s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \omega_1 t.$
Практическое применение им записи тригонометрического	еет другая форма $s(t) = -$	$\frac{S_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} S_k \cos(k\omega_1 t + Q_k) . $ (3)
Получение такого ряда Фурь на известном преобразовании	e основано $a_k \cos k\omega_1 t + b$	$b_k \sin k\omega_1 t = S_k \cos(k_1 t + Q_k),$
где Sj	$_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ и $Q_k = -$	$-\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}$ . (4)

Совокупность составляющей  $S_0/2$  и амплитуд  $S_k$  называют амплитудным спектром, а совокупность фаз  $Q_k$  - фазовым спектром сигнала. Таким образом, периодический сигнал представляется постоянной составляющей и бесконечной совокупностью гармонических составляющих с амплитудами и начальными фазами  $Q_k$ .

Анализ выражений (1) и (3) позволяет сделать следующие выводы.

1. Периодический сигнал можно представить в виде суммы бесконечного числа гармонических составляющих (синусоидальных и косинусоидальных), каждая из которых характеризуется своей амплитудой и частотой. Совокупность этих составляющих называется спектром сигнала, а совокупность их амплитуд - амплитудным спектром сигнала.

2. Составляющая *a*<sub>0</sub>/2 или *S*<sub>0</sub>/2 - это «нулевая» (постоянная) составляющая с нулевой частотой.

3. Амплитуды гармонических составляющих (гармоник) определяются по формулам (2) и (4).

**4**. Частоты составляющих дискретны, т. е. имеют значения, кратные основной частоте - частоте сигнала: 0, ω<sub>1</sub>, 2ω<sub>1</sub>, 3ω<sub>1</sub>, ..., т.е. спектр периодического сигнала является дискретным.

Определение спектров периодических сигналов сводится к нахождению коэффициентов ряда Фурье. Решение этой задачи упрощается, если учитываются особенности сигналов.

Комплексная форма ряда Фурье.

Комплексная форма ряда Фурье имеет вид:  

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t} . \quad (5)$$

Получение такого ряда Фурье основано на преобразовании тригонометрической формы ряда с использованием формул Эйлера:

$$\frac{\cos k\omega_{l}t = \frac{e^{jk\omega_{l}t} + e^{-jk\omega_{l}t}}{2}, \quad \sin k\omega_{l}t = \frac{e^{jk\omega_{l}t} - e^{-jk\omega_{l}t}}{2j}.$$

$$\frac{\dot{C}_{k}}{\sum_{k} \text{ являются комплексными составия они составия составия составия они составия составия$$

Коэффициенты  $C_k$  являются комплексными амплитудами *k*-х гармонических составляющих. Они определяются выражением

причем 
$$\dot{C}_k = |\dot{C}_k| e^{jQ_k}$$
, где  $|\dot{C}_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$  и  $Q_k = -\arctan\frac{b_k}{a_k}$ . (7)

Как видно из формулы (5), спектр сигнала в данном случае содержит компоненты в области положительных и отрицательных частот. При этом необходимо иметь в виду, что понятие «отрицательная частота» - это математическое понятие, обусловленное представлением тригонометрической функции в виде суммы показательных функций с мнимым аргументом. Физического смысла это понятие не имеет.

Наиболее наглядно о спектре периодического сигнала можно судить по его графическому изображению, которое называют спектральной диаграммой. Различают амплитудные и фазовые спектральные диаграммы. Строятся они в системе координат «частота - амплитуда» и «частота - фаза» (рис. 2).



### Рис. 2. Спектральные диаграммы, соответствующие тригонометрическим (*a*) и комплексной (б) формам ряда Фурье

При построении диаграмм на оси абсцисс откладывают значения  $k\omega_1$ , а по оси ординат отрезки прямых, длины которых соответствуют значениям амплитуд  $a_k$  и  $b_k$  или амплитуд  $S_k$  и фаз  $Q_k$  (см. рис. 2, а) для тригонометрических форм ряда Фурье, или амплитуд  $|\dot{C}_k|$  и фаз  $Q_k$ (см. рис. 2, 6) для комплексной формы ряда Фурье.

#### 5. Спектральное представление сигналов. Необходимость, методы определения спектров непереодических сигналов.

Спектральной характеристикой непериодическо сигнала является спектральная плотност определяемая с помощью прямого преобразовани Фурье:	ГО гь, $S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$ . (13)
В свою очередь, сигнал можно определить по спектральной плотности с помощью обратного преобразования Фурье:	$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega . $ (14)

Это основные соотношения для получения спектральных характеристик непериодических сигналов.

#### Амплитудный и фазовый спектры сигнала.

Для спектральной плотности сигнала справедливы все свойства комплексных чисел. Выполним элементарные преобразования:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos\omega t dt - j\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin\omega t dt,$$
  

$$S(j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = S(\omega)e^{j\phi(\omega)},$$
  
где  $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos\omega t dt$  - действительная часть спектра;  
 $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin\omega t dt$  - мнимая часть спектра  
 $S(\omega) = |S(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$  - амплитудный спектр сигнала  
 $Oчевидно, A(\omega) = A(-\omega)$  и  $S(\omega) = S(-\omega)$ , т. е.  $A(\omega)$  и  $S(\omega)$  -  $amrony = -arctg \left[ \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \right]$  -  $\frac{\phi a30Bbi M}{c mekrp}$   
сигнала  
 $Oчевидно, A(\omega) = A(-\omega)$  и  $S(\omega) = S(-\omega)$ , т. е.  $A(\omega)$  и  $S(\omega)$  -  $bytkuu$  четные;  $B(\omega) = -B(-\omega)$   
и  $\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$ , т. е.  $B(\omega)$  и  $\phi(\omega)$  -  $bytkuu$  нечетные.  
Спектральная плотность сигнала на нулевой частоте  
равна площади под кривой графика сигнала, т. е.  
 $S(0) = \int_{\infty}^{\infty} s(t) dt$ ,  
 $Cnekrpanьная плотность четного сигнала содержит
только действительную часть, т.е.$ 

 $S(j\omega) = 2j S(t) \cos \omega t dt$  $S(j\omega) = -2j \int_{0}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt.$ А спектральная плотность плотность нечетного сигнала содержит только мнимую часть, т. е.

Отличия спектра периодического сигнала от спектра непериодического сигнала:

1. Для определения спектра периодического сигнала используется математический аппарат рядов Фурье, для определения спектра непериодического сигнала - преобразования Фурье (интеграла Фурье).

2. Спектром периодического сигнала является спектр амплитуд и спектр фаз гармонических составляющих. Размерность спектра амплитуд - вольт (В) или ампер (А), спектра фаз - градус или радиан (рад). Спектром непериодического сигнала является спектральная плотность. Модуль спектральной плотности называют амплитудным спектром, размерность - В/Гц (В/рад/с) или А/Гц (А/рад/с). Аргумент спектральной плотности - это фазовый спектр, размерность - градус или радиан.

3. Спектр периодического сигнала дискретный (линейчатый). Это означает, что спектральные составляющие спектра с номерами ..., k-1, k, k + 1,... отлиаются по частоте друг от друга на величину, равную частоте сигнала, т. е. частоты составляющих равны ..., (k-1)ω<sub>1</sub>,  $k\omega_1, (k+1)\omega_1, \dots$ . Спектр непериодического сигнала - сплошной, т. е. амплитудный и фазовый спектры имеют определенные значения на всех частотах (в пределах эффективной полосы частот сигнала).

Поясним физический смысл понятия «спектральная плотность». Для этого рассмотрим два импульсных сигнала: одиночный сигнал длительностью  $\tau_{\mu}$  и периодический, полученный путем повторения с периодом *T* такого же сигнала.

Сравним выражение для прямого преобразования Фурье, с помощью которого определяется спектр одиночного сигнала, т. е.

и выражение для коэффициентов  $\dot{C}_k$  ряда Фурье, с помощью которого определяется спектр периодического сигнала, т. е.

или

В результате сравнения можно записать такие соотношения:

$$S(jk\omega_1) = T \cdot \dot{C}_k = \frac{1}{f_1} \dot{C}_k \quad \text{и} \quad \dot{C}_k = f_1 \cdot S(jk\omega_1) = \frac{1}{T} S(jk\omega_1),$$
$$S(k\omega_1) = T \cdot \left| \dot{C}_k \right| = \frac{1}{f_1} \cdot \left| \dot{C}_k \right| \quad \text{и} \quad \left| \dot{C}_k \right| = f_1 \cdot S(k\omega_1) = \frac{1}{T} S(k\omega_1).$$

 $S(j\omega) = \int_{0}^{\pi} s(t)e^{-j\omega t}dt,$  $\dot{C}_{k} = \frac{1}{T}\int_{0}^{\tau_{\text{H}}} s(t)e^{-jk\omega_{1}t}dt.$ 

Данные соотношения позволяют сделать следующие выводы:

1. Значения амплитудного спектра одиночного сигнала на частоте  $k\omega_1$ , получаются путем деления амплитуды k-й гармонической составляющей спектра на полосу частот между соседними гармоническими составляющими (отсюда понятие «плотность», а также размерность амплитудного спектра - В/Гц или А/Гц).

2. Амплитудный спектр одиночного импульса и огибающая дискретного спектра периодической последовательности таких импульсов совпадают по форме, различаясь только масштабом.



Рис. 3. Прямоугольный импульс и его производная (*a*), амплитудный и фазовый спектры прямоугольного импульса (б)

#### 6. Испытательные сигналы (гармонический сигнал, функция Дирака, функция Хевисайда). Спектры испытательных сигналов.

Гармонический сигнал. Гармонический сигнал  $s(t) = Ecos(\omega_0 t + \phi)$  является испытательным сигналом, так как с его помощью определяются частотные характеристики устройств. Спектральная плотность гармонического сигнала:  $S(j\omega) = A\pi e^{j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi} \delta(\omega - \omega_0).$ Спектральная плотность гармонического сигнала представляет собой пару взвешенных бфункций, расположенных на частотах  $\pm \omega_0$ . Веса  $\delta$ -функций отражают комплексную амплитуду гармонического сигнала.

*Дельта-функция*. Дельта-функция (*б*-функция, функция Дирака) – это математическая модель реально не существующего сигнала, который имеет бесконечную по величине амплитуду и нулевую длительность. Сигнал, описываемый дельта-функцией, обозначают  $\delta(t)$ и называют просто *б*-функция.

Сигнал называется испытательным, так как он применяется для получения импульсной характеристики радиотехнического устройства. Реакция устройства на дельта-функцию – это и есть его импульсная характеристика.

Спектральная плотность  $\delta$ -функции:  $S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega 0} = 1.$ Обратное преобразование Фурье от спектра б-функции даст следующие формулы для ее представления:  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$ ;  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega$ . Учитывая взаимозаменяемость

частоты и времени в преобразовании Фурье, можно записать:  $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt$ ;  $\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$ . Сдвиг  $\delta$ -функции вдоль временной оси на интервал  $t_0$  приведет к

изменению спектра. Он будет равен  $S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$ .

S(w)  $\mathbf{\Phi}(\mathbf{\omega})$ ÷00

При сдвиге б-функции амплитудный спектр не изменяется. Появляется фазовый спектр в виде линейной зависимости фазы от частоты.

В

Функция единичного скачка. Функция единичного скачка (функция Хевисайда) описывает процесс резкого (мгновенного) перехода физического устройства из одного состояния в другое. Сигнал называется испытательным, так как он применяется для получения переходной характеристики радиотехнического устройства. Реакция устройства на единичную функцию – это и есть его переходная характеристика.



7. Корреляционный анализ детерминированных Свойства сигналов. автокорреляционной и взаимокорреляционной функции. Связь автокорреляционной функции сигнала с его характеристикой в частотной области.

При решении многих задач оптимальной обработки сигналов возникает потребность определять степень подобия различных сигналов или сигнала и его копии, сдвинутой на определенное время. Такая проблема возникает, например, в радиолокации при решении задачи обнаружения полезных сигналов (сигналов, отраженных от цели) на фоне шумов. В результате решения этой задачи в рамках линейных систем синтезирован оптимальный обнаружитель сигналов, структура которого содержит согласованный фильтр или

корреляционный приемник, предусматривающий расчет функции  $R(\tau) = \int s(t)s(t-\tau)dt$ . Эта

функция называется автокорреляционной функцией (АКФ) сигнала s(t). Как видно из формулы, АКФ – это свертка сигнала s(t) и его зеркального отображения s(-t), т.е.  $R(\tau) = s(\tau) \bigotimes s(-\tau)$ .

Если сигнал – напряжение (размерность В), то размерность  $AK\Phi - B^2c$ .

Если в формуле фигурируют различные сигналы  $s_{l}(t)$  и  $s_2(t)$ , то такая функция называется взаимокорреляционной. Она обозначается как  $R_{12}(\tau)$  или  $R_{21}(\tau)$  и имеет вид:  $\rightarrow$ 

 $R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t-\tau) dt;$  $R_{21}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau) s_2(t) dt.$ 

функция

Для фиксированного момента времени  $\tau$  (фиксированного сдвига копии относительно оригинала) АКФ равна площади функции, описывающей произведение  $s(t)s(t-\tau)$ , то есть общей (совпадающей по оси t) площади двух сигналов. При этом АКФ характеризует степень подобия сигнала s(t) и его смещенной во времени копии  $s(t-\tau)$ , а также положение сигналов на оси времени.

Свойства АКФ:

1) При  $\tau=0$  автокорреляционная функция равна энергии сигнала, т.е.  $R(0) = \int_{0}^{\infty} s^{2}(t) dt = \Im$ .

2) Осуществив замену переменной  $x=t-\tau$  в выражении для  $R(\tau)$ , можно легко убедиться,

 $R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt = -R(\tau), \quad \text{т.o.} \quad \text{автокорреляционная}$ 

что

относится к классу четных функций.

3) При любом значении  $\tau$  модуль АКФ не превосходит энергии сигнала, т.е.  $|R(\tau)| \le R(0) = 3$ , непосредственно следует из известного неравенства Коши-Буняковского: что  $\|s(t)s(t-\tau)\| \le \|s(t)\| \cdot \|s(t-\tau)\|$ , где  $\|s(t)\|$  - норма вектора, соответствующего сигналу s(t).

4) С ростом абсолютного значения τ АКФ сигнала с конечной энергией затухает, т.е.  $\lim R(\tau) = 0.$ 

В результате можно сделать вывод, что график АКФ – это симметричная относительно оси ординат кривая в верхней полуплоскости с центральным максимумом при  $\tau = 0$ . Это также следует из физической интерпретации корреляционной функции – сигнал и его копия при отсутствии временного сдвига, то есть при  $\tau = 0$ , имеют наибольшую степень подобия.

Для количественной оценки степени подобия двух различных сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  служит взаимокорреляционная функция (ВКФ), которая определяется выражениями: (1)

1) Значения  $R_{12}(\tau)$  и  $R_{21}(\tau)$  не изменятся, если вместо задержки сигнала  $s_2(t)$  или  $s_1(t)$  рассматривать опережение  $s_1(t)$  или  $s_2(t)$ , т.е. можно записать: (2)

В этом можно убедиться, осуществив замену переменной  $x=t-\tau$ .

2) Сравнивая (1) и (2), можно отметить следующее свойство взаимокорреляционной функции:  $R_{12}(\tau) = R_{21}(-\tau); R_{21}(\tau) = R_{12}(-\tau).$ 

3) Взаимокорреляционная функция в общем случае не является четной функцией и необязательно достигает максимума при *т*=0.

4) При 
$$\tau = 0$$
:  $R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \Im_{12}$ , где  $\Im_{12}$  – взаимная энергия сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .

5) С ростом абсолютного значения т ВКФ сигналов с конечной энергией затухает, т.е.

Корреляционная функция – это характеристика сигнала во временной области, спектр – в частотной области. Обе характеристики являются интегральными преобразованиями анализируемых сигналов, поэтому логично предположить существование связи между АКФ сигнала и его спектральным представлением, в частности энергетическим спектром.

Автокорреляционная функция сигнала s(t) и его энергетический спектр  $|S(j\omega)|^2$  связаны между собой преобразованиями Фурье.

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S(j\omega)^2 \right| e^{j\omega\tau} d\omega; \qquad \left| S(j\omega)^2 \right| = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$
  
Для ВКФ: 
$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{12}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} s_2(x) e^{-j\omega x} dx \right] dt = S_1(j\omega) S_2^*(j\omega) = S_{12}(j\omega).$$

Таким образом, взаимокорреляционная функция связана преобразованием Фурье с так называемым взаимным спектром сигналов. Взаимный спектр  $S_{12}(j\omega)$  для сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  представляет собой произведение их спектров, один из которых является комплексносопряженным.

Таким образом, если спектры сигналов не перекрываются, то их взаимный спектр равен нулю на всех частотах. Поэтому и их взаимокорреляционная функция равна нулю при любых временных сдвигах.

Полученные результаты имеют важное значение.

1. Корреляционная функция  $R(\tau)$  зависит от модуля спектральной плотности и не зависит от фазовой характеристики сигнала. Это значит, что различным по форме сигналам, имеющим одинаковые амплитудные спектры, соответствуют одинаковые корреляционные функции.

2. Оценка взаимной связи между корреляционными свойствами сигнала и его энергетическим спектром: чем больше эффективная ширина энергетического спектра, тем меньше интервал корреляции. И наоборот, чем больше интервал корреляции, тем меньше эффективная ширина энергетического спектра.

3. Определение энергетического спектра и корреляционной функции. С помощью коррелометра или ЭВМ можно определить АКФ сигнала, а затем, вычислив прямое преобразование Фурье, найти энергетический спектр. И наоборот, с помощью спектрометра или ЭВМ можно определить энергетический спектр сигнала и, вычислив обратное преобразование Фурье, найти его АКФ.

# 8. Дискретизация непрерывных сигналов. Теорема отсчетов (теорема Котельникова). Использование теоремы Котельникова для реализации временного уплотнения канала связи.

В настоящее время широко применяются цифровые методы обработки радиотехнических сигналов. При этом аналоговые сигналы преобразуются в цифровые путем дискретизации их по времени с последующим квантованием по уровню. В свою очередь использование дискретизации при передаче непрерывных сообщений позволяет сократить время, в течение которого канал связи занят передачей одного сообщения, что позволяет осуществить временное уплотнение канала связи с целью передачи по нему нескольких сообщений в течение определенного промежутка времени.

Дискретизация \_ ЭТО процесс, при котором сигнал s(t)представляется последовательностью коротких импульсов (отсчетов). Амплитуды этих импульсов равны значениям дискретизируемого сигнала в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину  $\Delta t$ . Другими словами, величина k-го отсчета равна  $s(k\Delta t)$ . Очевидно, что точность представления аналогового сигнала последовательностью отсчетов зависит от величины  $\Delta t$ , причем чем она меньше, тем более точно можно восстановить исходный сигнал. Однако в этом случае количество отсчетов в единицу времени будет больше, что вызывает усложнение процесса обработки сигнала и большую занятость канала связи.

Возможность определения оптимальной величины интервала дискретизации с целью точного восстановления непрерывного сигнала с ограниченным спектром предоставляет метод дискретизации, который был предложен советским ученым в области радиотехники В.А.Котельниковым. Этот метод основан на известной в математике теореме отсчетов, получившей название теоремы Котельникова:

Произвольный сигнал, спектр которого не содержит частот выше  $f_m$ , полностью определяется последовательностью своих значений, взятых через равные промежутки времени  $\Delta t \leq 1/2 f_m$ .

Справедливость теоремы подтверждается тем, что сигнал s(t), спектр которого ограничен частотой  $\omega_m = 2\pi f_m$ , представляется рядом

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \omega_m (t - k\Delta t)}{\omega_m (t - k\Delta t)},$$

где  $\Delta t = 1/2 f_m$  - нтервал между двумя отсчетными точками (узлами) на оси времени,  $s(k\Delta t)$  – выборки функции s(t) в моменты времени  $t=k\Delta t$ .

Функции 
$$G_k(t) = \frac{\sin \omega_m (t - k\Delta t)}{\omega_m (t - k\Delta t)}$$
  
являются базисными функциями  
ряда Котельникова. Представление  
сигнала рядом Котельникова  
показано на рисунке  $\rightarrow$   $G_2(t)$   $G_1(t)$   $G_2(t)$   $G_3(t)$   $G_3(t)$   $G_3(t)$   $G_3(t)$   $G_3(t)$   $G_3(t)$   $G_3(t)$   $G_4(t)$   $G_5(t)$   $G_5$ 

9. Радиосигналы с амплитудной модуляцией, их векторное представление. Спектры радиосигналов с амплитудной модуляцией.

При АМ происходит изменение амплитуды несущего колебания по закону модулирующего сигнала при неизменных остальных его параметрах



Огибающая U(t) сигнала с амплитудной модуляцией (АМ-сигнала) совпадает по форме с модулирующим сигналом  $s_M(t)$ , поэтому такой сигнал можно представить следующим выражением:

$$s(t) = U(t)\cos(\omega_0 t + \varphi) = [U_i + k_a s_i(t)]\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где  $U_{\mu}$  — амплитуда несущего колебания (в отсутствие модуляции);

 $k_a$  — коэффициент пропорциональности, обеспечивающий соотношение  $\Delta U_{mn} < U_{H}$ , при котором отсутствует так называемая перемодуляция;

 $\Delta U_{mh}$  — максимальное приращение амплитуды АМ-сигнала "вниз".

При получении AM-сигнала двухполярный (знакопеременный) модулирующий сигнал нельзя непосредственно умножать на несущее высокочастотное колебание, так как огибающая, формируемая при демодуляции, будет искажена (при демодуляции форма огибающей определяется модулем модулирующего сигнала). Чтобы искажения не было, к модулирующему сигналу добавляют постоянную составляющую, превращающую его в однополярный сигнал. Величина постоянной составляющей обычно равна амплитуде несущего колебания.

Простейшей моделью амплитудной модуляции является тональная модуляция, при которой несущее колебание модулируется гармоническим сигналом  $s_{M}(t) = U_{M}cos(\Omega t + \gamma)$  (одним тоном). При этом АМ-сигнал описывается выражением  $s(t) = [U_{i} + k_{a}U_{i}\cos(\Omega t + \gamma)]\cos[\omega_{0} + \phi]$  или  $s(t) = U_{\mu}[1 + m\cos(\Omega t + \gamma)]\cos[\omega_{0} + \phi]$ , где  $m = k_{a}U_{M}/U_{\mu} = \Delta U/U_{\mu}$  - коэффициент или глубина амплитудной модуляции, причем  $0 \le m \le 1$ ;  $\Omega = 2\pi T_{M}, T_{M}, \gamma$  – частота, период и начальная фаза модулирующего сигнала.

Коэффициент *m* должен иметь значение в диапазоне 0...1. При m > 1имеет место перемодуляция, появляются так называемые биения, что приводит к искажению огибающей сигнала.  $m = \frac{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} + U_{\text{min}}} = \frac{\Delta U}{U_{\mu}}.$ 



Спектр АМ-сигнала содержит три составляющие. гармонические Первая гармоническая составляющая исходное немодулированное колебание несущей частотой  $\omega_0$  и начальной фазой Амплитуда этой Ø. составляющей не зависит OT уровня модулирующего сигнала. Вторая и третья гармонические составляющие (боковые составляющие) появились В результате модуляции. Их частоты  $\omega_0 + \Omega$  $\omega_0 - \Omega$ И называют соответственно нижней и верхней

боковыми частотами. Амплитуды этих составляющих одинаковы и равны  $U_{\mu m}/2$ , т.е. пропорциональны коэффициенту модуляции, фазы  $\phi + \gamma$  и  $\phi - \gamma$  симметричны относительно фазы несущего колебания.

$$s(t) = U_{\mu}\cos(\omega_{0}t + \varphi) + \frac{U_{\mu}m}{2}\cos\left[(\omega_{0} + \Omega)t + \varphi + \gamma\right] + \frac{U_{\mu}m}{2}\cos\left[(\omega_{0} - \Omega)t + \varphi - \gamma\right]$$
(1)

Сигнал с амплитудной модуляцией можно представить в виде векторной диаграммы, которая наглядно отображает структуру сигнала и процесс изменения амплитуды несущего колебания. Наиболее просто векторная диаграмма получается для сигнала с однотональной амплитудной модуляцией.



Первое слагаемое спектра изображается вектором OC длины  $U_{\mu}$ , составляющей угол  $\phi$  с горизонтальной осью OB при t=0. Вектор вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega_0$ .

Второе и третье слагаемые представляются векторами длины  $U_{\mu}m/2$ , составляющими с линией *OB* углы соответственно  $\phi + \gamma u \phi - \gamma$ . Они вращаются против часовой стрелки со скоростями  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ . Сумма проекций этих трёх векторов на горизонтальную ось *OB* и есть амплитудно-модулированное колебание.

Для получения большей наглядности воспользуемся вращающейся системой координат. Для этого полагаем, что горизонтальная ось ОВ вращается по часовой стрелке с угловой скоростью  $\omega_0$ . Тогда вектор *OC* будет неподвижен, а векторы, изображающие верхнюю и нижнюю боковые составляющие, будут вращаться со скоростью  $\Omega$  относительно вектора OC соответственно против и по часовой стрелке. Перенесём эти векторы параллельно самим себе в точку *C* и обозначим *CE* и *CF*. Сумма векторов *CE* и *CF* есть вектор *CD*, называемый вектором модуляции. Характерно, что вектор CD лежит на одной прямой с вектором OC, так как величины векторов *CE* и *CF*, а также их углы относительно вектора *OC* одинаковы. Вращаются эти векторы с одинаковой скоростью Ω (в разных направлениях). Вектор CD, величина которого изменяется по мере вращения векторов CE и CF, прибавляется к вектору OC, образуя результирующий вектор OD с изменяемой длиной и направлением, совпадающим с направлением вектора OC. Длина вектора OD изменяется периодически по мере вращения векторов боковых составляющих. Изменение длины этого вектора происходит от минимального значения  $U_{\mu} - U_{\mu}m$  (при совпадении векторов боковых составляющих и их направлении, противоположном направлению вектора  $U_{\mu}$ ) до максимального значения  $U_{\mu}+U_{\mu}m$ (при совпадении векторов боковых составляющих и их направлении, совпадающем с направлением вектора OC).

Проекция вектора OD на ось OB вращающейся системы координат соответствует сигналу s(t).

Средняя мощность сигнала:  $P_{cp} = (1+0,5m^2)P_{\mu}$ , где  $P_{\mu}$  - мощность несущего колебания в отсутствие модуляции (в режиме молчания).

Коэффициент полезного действия амплитудной модуляции -	$0.5m^2P_{\mu}$ $m^2$
отношение мощности составляющих боковых частот к общей	$\eta = \frac{1}{P} = \frac{1}{m^2 + 2}.$
средней мощности сигнала ->	

Общий вывод – амплитудная модуляция не является эффективной с энергетической точки зрения.

10. Балансная и однополосная амплитудная модуляции. Спектры радиосигналов с балансной и однополосной амплитудной модуляциями.

Для эффективного использования мощности передатчика при амплитудной модуляции используют так называемую *балансную амплитудную модуляцию*. При такой модуляции формируется амплитудно-модулированный сигнал, спектр которого не содержит составляющей на несущей частоте. Поэтому такой АМ-сигнал называют сигналом с подавлением несущей.

Радиосигнал с балансной модуляцией при тональном модулирующем сигнале имеет вид:

$$s(t) = \frac{U_{\mu}m}{2}\cos\left[\left(\omega_{0}+\Omega\right)t+\varphi+\gamma\right]+\frac{U_{\mu}m}{2}\cos\left[\left(\omega_{0}-\Omega\right)t+\varphi-\gamma\right].$$

Для получения такого сигнала достаточно перемножить несущее и модулирующее колебания. По существу в результате будут получены биения двух гармонических сигналов с одинаковыми амплитудами и частотами  $\omega_0 - \Omega$  и  $\Omega + \omega_0$ .



При переходе огибающей сигнала через *0* фаза несущего колебания скачком изменяется на 180<sup>0</sup>, т.к. огибающая изменяет свой знак.

Поэтому в высокодобротном колебательном контуре, на который подается сигнал с балансной модуляцией и несущей частотой  $\omega_0$ , равной резонансной частоте контура, колебания частотой  $\omega_0$  будут компенсировать друг друга в каждом периоде модулирующего колебания. Этим и объясняется отсутствие в спектре сигнала с балансной модуляцией составляющей с несущей частотой.

Несмотря на то что КПД сигнала с балансной амплитудной модуляцией равен 1, этот вид модуляции не нашел применения в технике связи из-за сложности детектирования сигнала.

Для лучшего использования диапазона частот желательно уменьшить ширину спектра модулированного сигнала, которая при AM составляет  $2\Omega_{max}$ . Спектральный состав как нижней, так и верхней боковых полос определяется одной и той же информацией о модулирующем сигнале. Если передавать одну боковую полосу, то можно примерно в 2 раза сузить спектр радиосигнала. Получающаяся модуляция называется *однополосной амплитудной модуляцией*. Передача информации в каналах связи с таким видом амплитудной модуляции осуществляется только одной боковой полосой спектра модулированного сигнала.

Однополосный сигнал может быть получен подавлением с помощью фильтра одной боковой полосы спектра или путем одновременного подавления боковой полосы и составляющей на несущей частоте.

Спектр сигнала с однополосной модуляцией тональным сигналом с подавлением нижней боковой полосы и без подавления несущей имеет вид:

$$s(t) = U_{\mu} \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{U_{\mu} m}{2} \cos\left[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi + \gamma\right].$$

Закон изменения огибающей этого сигнала:

$$U(t) = U_{H} \sqrt{1 + m \cos(\Omega t + \gamma) + \frac{m^2}{4}}$$



← При однополосной модуляции происходит искажение огибающей модулированного сигнала. На графике представлены огибающая АМ-сигнала при обычной модуляции тональной частотой и огибающая при однополосной модуляции. Графики рассчитаны при *m*=1.

Разновидностью однополосной модуляции является однополосная амплитудная модуляция с подавлением несущей. В данном случае не удается простыми средствами получить связь между модулированным и модулирующим сигналами. Для того чтобы это сделать, необходимо использовать понятие аналитического сигнала. При ЭТОМ модулированный сигнал будет представлен следующим выражением:

$$s(t) = \operatorname{Re}\left\{\left[U(t) + jU_1(t)\right]e^{\pm j\omega_0 t}\right\} = U(t)\cos\omega_0 t \mp U_1(t)\sin\omega_0 t,$$

где  $U_I(t)$  - преобразование Гильберта от U(t).

Знак плюс соответствует использованию нижней боковой полосы, знак минус – верхней. Таким образом, сигнал с однополосной модуляцией представляется в виде суммы двух AM-сигналов, сдвинутых по фазе на  $\pi/2$ . В зависимости от того, какой знак имеет сдвиг по фазе, формируется однополосный сигнал с верхней или нижней боковой полосой.

В общем случае амплитудная огибающая однополосного сигнала сильно отличается от модулирующего низкочастотного сигнала. Только при тональной модуляции огибающая однополосного сигнала (без несущей) по форме совпадает с модулирующим сигналом, так как при этом виде модуляции модулирующий сигнал с частотой  $\Omega$  превращается в гармоническое колебание с частотой  $\omega_0 \pm \Omega$ . Другими словами, при таком виде модуляции несущее колебание преобразовывается таким образом, что спектр радиосигнала полностью совпадает со спектром передаваемого сообщения, сдвинутым по оси частот на величину  $\omega_0$ .

Однополосную модуляцию с различным уровнем несущего колебания (от полного сохранения до полного подавления) применяют в радиотехнических системах передачи информации, работающих в диапазонах волн, где общая ширина полосы частот сравнительно небольшая. Следует отметить, что применение однополосной модуляции приводит к значительному усложнению аппаратуры. Возрастают также требования к стабильности ее параметров и характеристик. В целом передающие и приемные устройства систем с однополосной модуляцией по числу элементов оказываются в 3 – 5 раз более сложными, чем при обычной амплитудной модуляции.

## 11. Радиосигналы с угловой модуляцией. Фазовая и частотная модуляции. Спектр сигнала с угловой модуляцией.

При угловой модуляции происходит изменение фазового сдвига высокочастотного колебания под действием модулирующего сигнала. Амплитуда сигнала при этом виде модуляции остается постоянной. Формула, описывающая модулированное колебание, имеет вид  $s(t) = U_{\mu}cos[\omega_0 t + \phi(t)] = U_{\mu}cos\psi(t)$ , где  $\omega_0 t$  – линейный набег фазы за время t;  $\phi(t)$  – фазовая функция, обусловленная модуляцией.

Изменение фазового сдвига  $\phi(t)$  может происходить как путем модуляции непосредственно фазового сдвига, так и путем модуляции частоты несущего колебания. Объясняется это известной зависимостью, существующей между угловой частотой и полной фазой гармонического колебания:

Объясняется это известной зависимостью, существующей между угловой частотой и полной фазой гармонического колебания  $\rightarrow$   $\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$ 

Поэтому различают фазовую модуляцию (ФМ) и частотную модуляцию (ЧМ).

При <u>фазовой модуляции</u> гармоническим сигналом полная фаза модулированного сигнала равна  $\psi(t) = \omega_0 t + k_{\phi} U_{M} \cos(\Omega t + \gamma) + \varphi_0$ .

 $\psi(t) = \int_{0}^{t} \omega(t) dt = \omega_0 t + \varphi(t).$ 

Тогда выражение для модулированного сигнала принимает вид  $s(t) = U_{\mu} \cos \left[ \omega_0 t + k_{\phi} U_{\mu} \cos (\Omega t + \gamma) + \varphi_0 \right].$ 

Угловая частота этого колебания будет равна  $\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 - k_{\phi} U_{M} \Omega \sin(\Omega t + \gamma).$ 

Таким образом, изменение фазового сдвига по закону косинуса приводит к изменению частоты по закону синуса, т.е. при фазовой модуляции изменение частоты (по существу тоже модуляция) происходит по закону, отличному от закона изменения модулирующего сигнала.

Величина  $\beta = k_{\phi}U_{M}$  является максимальным отклонением фазы несущего колебания от начальной фазы  $\phi_0$ , т.е. по существу это амплитуда изменения фазы. Эту величину называют индексом угловой модуляции. При ФМ она зависит только от амплитуды модулирующего сигнала.

В свою очередь величина  $\omega_{\partial} = k_{\phi} U_{M} \Omega$  является максимальным отклонением частоты несущего колебания от значения  $\omega_{0}$ , т.е. это амплитуда изменения частоты. Эту величину называют *девиацией частоты*. При ФМ она зависит не только от амплитуды модулирующего сигнала, но и от его частоты.

Таким образом, общее выражение для фазомодулированного сигнала при тональной модуляции сигналом  $s_{M}(t) = U_{M} cos(\Omega t + \gamma)$  имеет вид:  $s(t) = U_{H} cos \left[\omega_{0}t + \beta cos(\Omega t + \gamma) + \varphi_{0}\right]$ .

При <u>частотной модуляции</u> гармоническим сигналом частота модулированного колебания равна  $\omega(t) = \omega_0 + k_y U_{M} \cos(\Omega t + \gamma)$ .

Полная фаза такого колебания определяется как интеграл от частоты (с учетом начальной

фазы) 
$$\psi(t) = \int_{0}^{t} \omega(t) dt = \omega_0 t + \frac{k_{_{q}}U_{_{\mathcal{M}}}}{\Omega} \sin(\Omega t + \gamma) + \varphi_0.$$

Тогда выражение для модулированного сигнала принимает вид:  $s(t) = U_{\mu} \cos \left[ \omega_0 t + \frac{k_{\mu} U_{\mu}}{\Omega} \sin (\Omega t + \gamma) + \varphi_0 \right].$ 

Т.о., изменение частоты по закону косинуса приводит к изменению фазового сдвига по закону синуса, т.е. при частотной модуляции изменение фазового сдвига происходит по закону, отличному от закона изменения модулирующего сигнала.



Как следует из приведенных формул для полной фазы и частоты, частотномодулированное колебание имеет девиацию частоты  $\omega_{\partial} = k_{u}U_{M}$  и индекс угловой модуляции  $\beta = k_{u}U_{M}\Omega$ . В данном случае девиация частоты не зависит от частоты модулирующего сигнала, а индекс угловой модуляции зависит.

T.o., общее выражение для частотномодулированного сигнала при тональной модуляции можно записать так:

$$s(t) = U_{H} \cos \left[ \omega_{0} t + \beta \sin \left( \Omega t + \gamma \right) + \varphi_{0} \right].$$

Определим <u>спектр</u> колебания с угловой модуляцией, представленного в виде  $s(t)=U_{\mu}cos(\omega_0 t+\beta sin\Omega t)$ . Выражение, которое определяет спектр сигнала с угловой модуляцией:

$$s(t) = U_{\mu}J_{0}(\beta)\cos\omega_{0}t + U_{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}J_{k}(\beta)\cos(\omega_{0}+k\Omega)t + U_{\mu}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}J_{k}(\beta)\cos(\omega_{0}-k\Omega)t.$$



1) Спектр сигнала с угловой модуляцией состоит составляющей на несущей частоте ИЗ И бесконечного числа боковых составляющих с частотами  $\omega_0 \pm k\Omega$ , расположенных симметрично относительно несущей частоты. Составляющие с номерами частотами нечетными И  $\omega_0 - k\Omega$ находятся в противофазе с составляющими, имеющими такие же номера и частоты  $\omega_0 + k\Omega$ .

2) Амплитуды составляющих спектра зависят не только от амплитуды  $U_{\mu}$  несущего колебания, но и от значений бесселевых функций при индексе угловой модуляции  $\beta$  данного сигнала. Характер изменения бесселевых функций таков, что при определенных значениях  $\beta$  возможно отсутствие в спектре сигнала составляющей на несущей

частоте ( $\beta \approx 2,4$ ,  $\beta \approx 5,5$ ), составляющих на частотах  $\omega_0 \pm \Omega$  ( $\beta \approx 3,9$ ,  $\beta \approx 7,1$ ), составляющих на частотах  $\omega_0 \pm 2\Omega$  ( $\beta \approx 5,2$ ,  $\beta \approx 8,4$ ) и т.д.

3) В общем случае сигнал с угловой модуляцией занимает бесконечную полосу частот (теоретически). Однако бесселевы функции характеризуются тем, что с ростом индекса модуляции  $\beta$  абсолютное значение функции  $J_k(\beta)$  быстро уменьшается с увеличением k. Наибольший номер составляющей, которую еще необходимо учитывать в составе спектра, равен приблизительно индексу модуляции, т.е.  $k \approx \beta$ . Поэтому считается, что при  $\beta >> 1$  (это справедливо для так называемой медленной угловой модуляции, при которой  $\omega_{\partial} >> \Omega$ ) ширина

спектра сигнала равна  $\Delta \omega_{_{3\phi}} \approx 2\beta\Omega$  или  $\Delta \omega_{_{3\phi}} \approx 2\frac{\omega_{_{\partial}}}{\Omega}\Omega = 2\omega_{_{\partial}}$ . Т.о. эффективная полоса частот сигнала с угловой тональной модуляцией равна удвоенной величине девиации частоты и зависит от частоты модулирующего сигнала при ФМ и не зависит – при ЧМ.

Амплитудный спектр сигнала с УМ при  $\beta << 1$  такой же, как у сигнала с амплитудной модуляцией (при тональной модуляции). Причем индекс угловой модуляции  $\beta$  в данном случае играет такую же роль, как и коэффициент амплитудной модуляции *m*. Отличие имеет фазовый спектр. Нижняя боковая составляющая спектра, т.е. составляющая разностной частоты, сдвинута по фазе на 180<sup>°</sup> относительно ее фазы при амплитудной модуляции.

12. Сигналы с импульсной модуляцией. Виды импульсной модуляции. Импульсно-кодовая (цифровая) модуляция. Спектр сигнала с амплитудно-импульсной модуляцией.

В цифровых системах связи в качестве носителя информации используется периодическая последовательность импульсов с такими параметрами, как амплитуда, частота и длительность. Изменением одного из этих параметров по закону передаваемого сообщения реализуется импульсная модуляция. Полученной в результате такой модуляции последовательностью импульсов модулируют высокочастотное колебание с целью получения радиоимпульсов, которые можно излучать антенной в свободное пространство. Т.о., в таких системах связи двойная модуляция: первичная модуляция передаваемым сообщением реализуется вспомогательной последовательности видеоимпульсов (которую иногда называют поднесущим колебанием) и вторичная модуляция высокочастотного гармонического колебания видеоимпульсами, полученными в результате первичной модуляции.

В зависимости от выбора изменяемого параметра модулируемой последовательности видеоимпульсов можно реализовать различные виды импульсной модуляции.

1. *Амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)* – по закону передаваемого сообщения изменяется амплитуда импульсов. Различают:

АИМ первого рода (АИМ-I), когда мгновенные значения амплитуды импульса изменяются в течение его длительности и зависят от мгновенных значений модулирующего сигнала;

АИМ второго рода (АИМ-II), когда амплитуда импульсов в течение длительности постоянна и равна значению модулирующего сигнала в тактовой точке, которая может совпадать с любой временной точкой импульса.

2. Широтно-импульсная (ШИМ) – по закону передаваемого сообщения изменяется длительность импульсов. Различают одностороннюю ШИМ, когда изменение длительности импульсов происходит только за счет перемещения по оси времени его заднего фронта, и двухстороннюю ШИМ, когда длительности импульсов изменяются за счет перемещения его переднего и заднего фронтов.



3. Временная импульсная (ВИМ) – по передаваемого сообщения закону изменяется смещение импульсов по оси времени. Различают фазо-(ФИМ) импульсную модуляцию изменяется величина временного сдвига импульсов относительно точек, тактовых И частотно-(ЧИМ) импульсную модуляцию изменяется частота следования импульсов.

4. *Импульсно-кодовая (ИКМ)* – вид дискретной модуляции передаваемого сообщения, аналоговые значения которого преобразуются в цифровой (в частности, двоичный) код.

Рассмотрим случай тональной модуляции сигналом  $s_{M}(t) = U_{M} cos \Omega t$  четной импульсной последовательности прямоугольных видеоимпульсов с реализацией АИМ-І. При отсутствии модуляции спектр такой импульсной последовательности равен

 $s(t) = \frac{E\tau_u}{T} \left[ 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_1\tau_u/2)}{k\omega_1\tau_u/2} \cos k\omega_1 t \right],$ где *E*, *T*,  $\omega_1 = 2\pi/T$ ,  $\tau_u$  – амплитуда, период, частота и

длительность импульсов соответственно.

Амплитуда импульсов п	при	() $\tau_{\mu} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k\omega_{1}\tau_{\mu}/2) \right] = \tau_{\mu}$
модуляции изменяется	по	$s(t) = E \frac{u}{T} \left[ 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - u^{i}}{k\omega \tau} \cos k\omega_{1} t \right] + mE \frac{u}{T} \cos \Omega t +$
следующему закону:		$\mathbf{I} \begin{bmatrix} k = 1 & k \otimes_1 \mathbf{U}_u / \mathbf{Z} \end{bmatrix} \mathbf{I}$
$U(t)=E(1+mcos\Omega t), m=kU_{M}/E.$		$= \frac{\tau_u}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k\omega_1 \tau_u/2) \left[ \cos(k\omega_1 + \Omega) t + \cos(k\omega_1 + \Omega) t \right]$
Тогда →		+ <i>mE</i> $\frac{\pi}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\omega_{1}\tau_{u}/2}{k\omega_{1}\tau_{u}/2}\left[\cos(k\omega_{1}+\Omega)t+\cos(k\omega_{1}-\Omega)t\right].$
S(m)		P annual Manual Annual



В случае модуляции одним тоном спектр амплитуд модулированной последовательности импульсов спектра отличается ОТ немодулированной последовательности наличием составляющей с частотой  $\Omega$  и боковых составляющих c частотами  $k\omega_1 \pm \Omega$  возле каждой

гармоники спектра немодулированной последовательности.

В цифровых линиях связи передается дискретизированное сообщение, представленное в виде последовательности символов. Наиболее часто используется двоичная последовательность символов. В этом случае дискретные значения передаваемого сообщения представляются двоичными кодами.

При последовательной передаче кодовые символы в цифровых линиях связи появляются с равным тактовым интервалом. Поэтому цифровой сигнал в общем виде можно представить:

$$s_u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_c(t - n\tau_u),$$
 Где  $a_n$  – значение символа (1 или 0);  
 $s_c(t - n\tau_u)$  – импульсные сигналы в тактовые моменты времени.

Для последующей передачи кодовые символы преобразуются в импульсы (фрагменты) ВЧ гармонического колебания с соответствующим видом модуляции.



1) Цифровая амплитудная модуляция (ЦАМ) – символу 1 соответствует наличие импульса несущего колебания длительностью  $\tau_u$ , символу 0 – отсутствие импульса.

2) Цифровая частотная модуляция (ЦЧМ) – символу 1 соответствует импульс несущего колебания с частотой  $f_{01}$ , символу 0 – импульс несущего колебания с частотой  $f_{02}$ . Для того чтобы спектры сигналов не перекрывались, частоты  $f_{01}$  и  $f_{02}$  следует разнести на интервал  $\Delta f \approx (1...2) / \tau$  и, где  $\tau_u$  – длительность импульсов, соответствующих символам 1 и 0.

Цифровая фазовая модуляция (ЦФМ) – при каждом переходе от 1 к 0 и от 0 к 1 изменяется на  $\pi$  фаза несущего колебания. Применяется также относительная цифровая фазовая модуляция, при которой изменение фазы несущего колебания для данного символа происходит относительно фазы, соответствующей предыдущему символу.

Применение импульсной модуляции позволяет также значительно увеличить мощность в импульсе  $P_u$  при сравнительно небольшой средней мощности  $P_{cp}$ , что обусловлено следующей

зависимостью между ними:  $P_u = P_{cp} \frac{T}{\tau_u}$ . Отношение  $T/\tau_u$  называется скважностью.

13. Классификация радиотехнических цепей. Основные свойства линейных, параметрических и нелинейных цепей. Что значит «обогащает спектр сигнала» и «принцип суперпозиции»?

В общем случае любую радиотехническую цепь можно описать формализованным соотношением, определяющим преобразование входного сигнала x(t) в выходной y(t), которое символически можно представить в виде

$$y(t) = T[x(t)],$$

где *T* – оператор, указывающий правило, по которому осуществляется преобразование входного сигнала.

Таким образом, в качестве математической модели радиотехнической цепи может служить совокупность оператора T и двух множеств  $X = \{x_i(t)\}, Y = \{y_i(t)\}$  сигналов на входе и выходе цепи так, что

$$\left\{ y_i(t) \right\} = T\left\{ x_i(t) \right\}.$$

По виду преобразования входных сигналов в выходные, т.е. по виду оператора *T*, производят классификацию радиотехнических цепей.

1. Радиотехническая цепь является *линейной*, если оператор *T* таков, что цепь удовлетворяет условиям аддитивности и однородности, т.е. справедливы равенства

$$T\left[\sum_{i} x_{i}(t)\right] = \sum_{i} T\left[x_{i}(t)\right];$$
  $T\left[cx_{i}(t)\right] = cT\left[x_{i}(t)\right],$  где  $c$  – константа.

Эти условия выражают суть <u>принципа суперпозиции</u>, свойственного линейным цепям.

Функционирование таких цепей описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{m} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k},$$

где  $a_k$  и  $b_k$  – постоянные коэффициенты, зависящие от схемы и ее параметров.

Характерно, что линейное преобразование сигнала любой формы не сопровождается появлением в спектре выходного сигнала гармонических составляющих с новыми частотами, т.е. линейное преобразование не приводит к обогащению спектра сигнала.

2. Радиотехническая цепь является *нелинейной*, если оператор T не обеспечивает выполнения условий аддитивности и однородности. Функционирование таких цепей описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, т.е. уравнениями, хотя бы один коэффициент которых является функцией входного сигнала или его производных. Нелинейные цепи не удовлетворяют принципу суперпозиции. При анализе прохождения сигналов через нелинейную цепь результат определяется как отклик на сигнал как таковой. Его нельзя разлагать на более простые сигналы. В то же время нелинейные цепи обладают очень важным свойством – <u>обогащать спектрр сигнала</u>. Это значит, что при нелинейных преобразованиях в спектре выходного сигнала появляются гармонические составляющие с частотами, которых не было в спектре входного сигнала. Возможно появление также составляющих с частотами, равными комбинации частот гармонических составляющих спектра входного сигнала. Это свойство нелинейных цепей обусловило их применение для решения широкого класса задач, связанных с генерацией и преобразованием сигналов.

Структурно линейные цепи содержат только линейные элементы, к числу которых относятся и нелинейные элементы, работающие в линейном режиме (на линейных участках своих характеристик). Линейные цепи – это усилители, работающие в линейном режиме, фильтры, длинные линии, линии задержки и др. Нелинейные цепи содержат один или несколько нелинейных элементов. К числу нелинейных цепей относятся генераторы, детекторы, модуляторы, умножители и преобразователи частоты, ограничители и др.

3. Радиотехническая цепь является *параметрической*, если оператор *T* зависит от параметров цепи, которые изменяются со временем. Функционирование таких цепей описывается дифференциальными уравнениями, хотя бы один коэффициент которых является функцией времени. Параметрические цепи могут быть линейными и нелинейными.

Линейные параметрические цепи удовлетворяют условиям суперпозиции (аддитивности и однородности). Кроме того, эти цепи способны обогащать спектр сигнала. Структурно они содержат элементы, параметры которых (сопротивление, емкость, индуктивность) изменяются со временем.

По характеру временной зависимости выходного сигнала от входного различают инерционные и безынерционные радиотехнические цепи.

Радиотехническая цепь, значение выходного сигнала y(t) которой в момент  $t=t_0$  зависит не только от значения входного сигнала x(t) в этот момент времени, но и от значений x(t) в моменты времени, предшествовавшие моменту  $t_0$ , называется *инерционной* цепью. Если значение выходного сигнала y(t) в момент  $t=t_0$  полностью определяется значением x(t) в тот же момент времени  $t_0$ , то такая цепь называется *безынерционной*.

14. Схема дифференцирующей и интегрирующей цепей. Формулы и графики их амплитудно-частотных (АЧХ) и фазо-частотных (ФЧХ) характеристик.



На рис. (a) - схема линейного четырехполюсника в виде последовательной RC-цепи с постоянной времени  $\tau = RC$ .

На входе цепи действует напряжение  $u_{ex}(t)$ , а выходное напряжение  $u_{eblx}(t)$  может сниматься либо с сопротивления R, либо с конденсатора C. Определим зависимость выходного напряжения от входного для каждого из этих случаев.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа  $u_{ex}(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$ , или  $Cu_{ex}(t) = \tau i(t) + \int i(t)dt$ . Выполним анализ данного уравнения при большом и малом значениях  $\tau$ .

1) Постоянная времени  $\tau$  – малая величина. Тогда  $Cu_{ex}(t) \approx \int i(t) dt$  или  $i(t) \approx C \frac{du_{ex}(t)}{dt}$ . В этом случае выходное напряжение, снимаемое с сопротивления R, равно  $u_R(t) \approx \tau \frac{du_{ex}(t)}{dt}$ .

Следовательно, если выходное напряжение снимать с сопротивления, то при малых значениях постоянной времени *т* последовательная *RC*-цепь может дифференцировать входной сигнал.

2) Постоянная времени  $\tau$  – большая величина. Тогда  $Cu_{ex}(t) \approx \tau i(t)$  или  $i(t) \approx \frac{Cu_{ex}(t)}{\tau} = \frac{1}{R}u_{ex}(t)$ . В этом случае выходное напряжение, снимаемое с конденсатора C,

будет равно  $u_c(t) \approx \frac{1}{C} \int i(t) dt = \frac{1}{\tau} \int u_{ex}(t) dt$ . Следовательно, если выходное напряжение снимать

с конденсатора, то при больших значениях постоянной времени  $\tau$  последовательная *RC*-цепь может интегрировать входной сигнал.

Дифференцирующая цепь (рис. б).

Комплексная амплитуда тока в цепи определяется законом Ома:	$\dot{I}=rac{\dot{U}_{ex}}{R+1/j\omega C}.$
Комплексная амплитуда выходного напряжения равна:	$\dot{U}_{\rm BMX} = \dot{I}R = \dot{U}_{\rm BX} \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}.$
Частотный коэффициент передачи:	$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\rm GBX}}{\dot{U}_{\rm gax}} = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}.$
Амплитудно-частотная характеристика:	$K(\omega) = \frac{\omega \tau}{\sqrt{1+\omega^2 \tau^2}}.$
Фазочастотная характеристика:	$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega \tau .$

Дифференцирующая цепь является фильтром верхних частот. Определим частоту среза  $\omega_c$  на уровне 0,707:  $K(\omega_c) = \frac{\omega_c \tau}{\sqrt{1 + \omega_c^2 \tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \omega_c^2 \tau^2 = 1; \quad \omega_c = 1/\tau$ . Для приближения к точному

дифференцированию необходимо, чтобы на всех частотах спектра входного сигнала соблюдалось неравенство  $\omega \tau <<1$ . Тогда  $K(j\omega)\approx j\omega \tau$  – частотная характеристика идеальной дифференцирующей цепи.

Комплексная амплитуда т	ока в цепи:				$\dot{I} = \frac{U}{R+1/2}$	$\frac{\delta x}{j\omega C}$ .	
Комплексная амплитуда в	выходного напряжения ра	вна:		$\dot{U}_{_{G b l X}} =$	$\dot{I}\frac{1}{J\omega c} =$	$\dot{U}_{ex} \frac{1}{1+}$	$\frac{1}{j\omega\tau}$ .
Частотный коэффициент	передачи:			K(j	$\omega) = \frac{\dot{U}_{BLX}}{\dot{U}_{BX}}$	$=\frac{1}{1+1}$	i <u>ωτ</u> .
Амплитудно-частотная ха	рактеристика:			K	$(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1}}$	$\frac{1}{+\omega^2\tau^2}$	= . !
Фазочастотная характери	стика:			arphi	$(\omega) = -at$	rctgwi	•.
Κ(ω)	Κ(ω)	$\leftarrow$	Граф	оики	АЧХ	И	ФЧХ



← Графики АЧХ и ФЧХ дифференцирующей (а) и интегрирующей (б) цепей.

Интегрирующая цепь является фильтром нижних частот. Частота среза также равна  $l/\tau$ .

Для приближения к точному интегрированию необходимо, чтобы на всех частотах спектра входного сигнала соблюдалось неравенство  $\omega \tau << 1$ . Тогда  $K(j\omega) \approx 1/\omega \tau$  – частотная характеристика идеальной интегрирующей цепи.

Комплексное входное сопротивление:

$$Z(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\scriptscriptstyle obx}}{\dot{I}} = \frac{R(1/j\omega C)}{R+1/j\omega C} = \frac{R}{1+j\omega RC} = \frac{R}{1+j\omega \tau}$$
, где  $\tau = RC$ 

 постоянная времени фильтра. АЧХ:

ФЧХ:

$$Z(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}.$$

$$\varphi(\omega) = - \operatorname{arctg} \omega \tau$$
.

Рассматриваемый фильтр является фильтром нижних частот. Частота среза равна  $1/\tau$ .



1

0

φ(ω)

<u>π</u>2

<u>π</u> 4

0

ФНЧ.

0,707

### 15. Схемы и принцип работы апериодического и резонансного усилителей. Формулы и графики АЧХ и ФЧХ.

Схема усилителя на МДП транзисторе с общим истоком и его эквивалентная схема.



Усилитель нагружен на параллельно соединенные *R*<sub>*cн*</sub> и *C*<sub>*n*</sub>. Такую нагрузку называют апериодической. Поэтому такие усилители часто называют <u>апериодическими</u>.



При отсутствии входного напряжения (в режиме покоя) напряжение на затворе равно напряжению смещения, в цепи стока проходит ток покоя  $i_{co}$ . Напряжение на стоке постоянно и равно  $u_{co}=E_c-i_{co}R_c$ . Выходное напряжение равно нулю.

При поступлении на вход усилителя входного сигнала  $u_{ex}(t) = Esin\omega t$  на затворе транзистора будет действовать напряжение  $u_{3u}(t) = U_{3o} + Esin\omega t$ .

Ток стока начинает изменяться по синусоидальному закону  $i_c(t)=i_{co}+I_0sin\omega t$ , при этом напряжение на стоке равно  $u_c(t)=E_c-i_c(t)R_c=E_c-i_{co}R_c-I_0R_c\sin\omega t$ . Постоянная составляющая не проходит через разделительный конденсатор  $C_{p2}$ , и на выходе усилительного каскада будет напряжение  $u_{solx}(t)=-I_0R_c\sin\omega t$ .

При определенном значении сопротивления  $R_c$  и соответствующей крутизне стокзатворной характеристики транзистора амплитуда выходного напряжения  $I_0R_c$  может превышать амплитуду входного сигнала E.

Частотный коэффициент передачи усилителя:

$K(i\omega) = -$	SR <sub>CH</sub>	$-K_0$ .	$K_0 = SR_{CH}; \  au_1 = R_o C_{p1}; \  au_2 = R_{CH} (C_{cu} + C_n);$
K(Jw) = -	$\frac{1}{1+1+\frac{\tau_2}{2}+i\omega\tau}$	$-\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}+i\omega\tau},$	$ au_1$ , $ au_2$ – постоянные времени входной и
	$j\omega\tau_1$ $\tau_1$ $\tau_2$	$j\omega\tau_1$	выходной цепей.

Анализ этого выражения целесообразно производить отдельно для нижних, средних и верхних частот.

05	<b>OTILI</b>	OCII	ODU
Ооласть частот	UHY	UCY	OBA
Частотный коэффициент передачи	$K(j\omega) = -K_0 \frac{j\omega\tau_1}{1+j\omega\tau_1}$	$K(j\omega) = -K_0$	$K(j\omega) = -K_0 \frac{1}{1 + j\omega\tau_2}$
АЧХ	$K(\omega) = K_0 \frac{\omega \tau_1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2}}$	$K(\omega) = K_0$	$K(\omega) = K_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2}}$
ФЧХ	$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega \tau_1$	$\varphi(\omega) = -\pi$	$\varphi(\omega) = -\pi - \operatorname{arctg} \omega \tau_2$

В ОНЧ сопротивление емкости  $x_c = 1/\omega C$  имеет большое значение по сравнению со значениями в областях средних и верхних частот. Поэтому шунтирующим действием емкостей  $C_{cu}$  и  $C_n$  можно пренебречь и считать, что  $\omega \tau_2 << 1$ .



В ОСЧ можно не учитывать влияние входной и выходной цепей.

В ОВЧ опротивления емкостей уменьшаются по сравнению с их значениями в ОНЧ и ОСЧ, поэтому шунтирующим действием емкостей C<sub>cu</sub> и C<sub>n</sub> пренебречь нельзя. В то же время влияние входной цепи ничтожно, как и на средних частотах. Таким образом, можно считать, что  $l/\omega \tau_1 << 1$ .

На рис. приведены АЧХ и ФЧХ апериодического усилителя. Граничные частоты  $\omega_{\mu}$  и  $\omega_{e}$  полосы пропускания определены на уровне 0,707 и равны  $\omega_{\mu} = 2\pi/\tau_1$  и  $\omega_{\theta} = 2\pi/\tau_2$ .

Резонансный усилитель используется для усиления узкополосных высокочастотных сигналов. Спектр усиливаемого сигнала сосредоточен вокруг его центральной частоты  $\omega 0$ , должен лежать в пределах полосы пропускания усилителя, причем эффективная ширина спектра  $\Delta \omega_{ab}$  удовлетворяет условию  $\Delta \omega_{ab} << \omega_0$ . Амплитудно-частотная характеристика таких подобна усилителей обладает определенной избирательностью характеристике И колебательного контура. Поэтому в отличие от апериодического усилителя нагрузкой резонансного усилителя является колебательный контур. Именно эта резонансная система обеспечивает необходимую избирательность резонансного усилителя.



Частотный коэффициент передачи:  $K(j\omega) = -\frac{SR_0}{1+jQ\xi} = -\frac{K_0}{\sqrt{1+O^2\xi}}e^{-jarctgQ\xi} = K(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$ 

где 
$$R_0 = \frac{L_{\kappa}}{R_{_{3\kappa}}C_{_{\kappa}}}; R_{_{3\kappa}} = \frac{R_iR_{_{H}}}{R_i + R_{_{H}}}; Q = \frac{R_{_{3\kappa}}}{\rho}; Q\xi = Q\left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega}\right) \approx Q\frac{2\Delta\omega}{\omega_p}; K_0 = SR_0.$$

 $\varphi(\omega) = -\pi - \operatorname{arctg} Q\xi$ ФЧХ усилителя:

Иногда используют выражение для *K*(*j*ω):

$$K(j\omega) = -\frac{K_0}{1 + j\Delta\omega\tau_{_{3\kappa}}}$$

где  $\tau_{_{\mathscr{H}}} = 2R_{_{\mathscr{H}}}C$  - постоянная времени контура с учетом влияния нагрузки.

Определим полосу пропускания усилителя на уровне 0,707:

$$\frac{K_0}{\sqrt{1+Q^2\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}K_0; \qquad Q^2\xi^2 = 1;$$
$$\Delta \omega_{np} = \frac{\omega_p}{Q} = \frac{1}{\tau_{_{\mathcal{H}}}}.$$



16. Линейные цепи с обратной связью. Частотный коэффициент передачи цепи с обратной связью и виды обратной связи. Применение отрицательной обратной связи для улучшения характеристик радиотехнических устройств.



Радиотехническая цепь, у которой выходной сигнал или часть его поступает на вход, является цепью с обратной связью (ОС). В схему цепи с обратной связью входит основной элемент с частотным коэффициентом передачи  $K(j\omega)$  и элемент обратной связи, в качестве которого обычно используют четырехполюсник с коэффициентом передачи  $\beta(j\omega)$ .

Классическими видами обратной связи являются обратная связь по напряжению или(и) току, параллельная или(и) последовательная обратная связь.

току, параллельная или(и) последовательная обратная связь. Частотный коэффициент передачи цепи с обратной связью, не конкретизируя при этом, какая обратная связь реализована:  $\rightarrow K_{oc}(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{1 - K(j\omega)\beta(j\omega)}$ 

Произведение  $K(j\omega)\beta(j\omega)$  является коэффициентом передачи разомкнутой цепи ОС, а величина  $1-K(j\omega)\beta(j\omega)$  определяет глубину ОС. Выражение для  $K_{oc}(j\omega)$  можно записать так:

$K(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$	В завис	симости от ха	арактера сумм	иарного фазового
$K_{oc}(j\omega) = \frac{1}{1 - K(z)} \frac{\rho(z)}{\rho(z)} \frac{\rho(\omega) + \rho_{\beta}(\omega)}{\rho(\omega) + \rho_{\beta}(\omega)}.$	сдвига	$\phi(\omega) + \phi_{\beta}(\omega)$	различают	положительную,
$1 - K(\omega)p(\omega)e^{-\omega}$	отрицато	ельную и комп	лексную обра	тную связь.

<u>Положительная обратная связь.</u> Обеспечивается при условии  $\phi(\omega) + \phi_{\beta}(\omega) = 2k\pi$ , где k – целое число, т.е. при поступлении на вход основной цепи сигнала обратной связи в фазе с входным сигналом. В этом случае  $e^{j[\varphi(\omega)+\varphi_{\beta}(\omega)]} = 1$  и модуль коэффициента передачи равен:

 $K_{oc}(\omega) = \frac{K(\omega)}{1 - K(\omega)\beta(\omega)}$  Как видно из полученного выражения, при  $0 < K(\omega)\beta(\omega) < 1$  модуль коэффициента передачи цепи с ПОС больше, чем у цепи без ОС. Это очевидно из физических соображений: ПОС при данном

значении  $K(\omega)\beta(\omega)$  способствует увеличению энергии входного воздействия основной цепи. При  $K(\omega)\beta(\omega) \rightarrow 1$  значение  $K_{oc}(\omega)$  увеличивается, и цепь с обратной связью приближается к границе устойчивости. При  $K(\omega)\beta(\omega)>1$  цепь с положительной ОС работает в неустойчивом режиме (в режиме самовозбуждения), что используется при построении автогенераторов.

<u>Отрицательная обратная связь</u>. Обеспечивается при условии  $\phi(\omega) + \phi_{\beta}(\omega) = (2k + 1)\pi$ , т.е. при поступлении на вход основной цепи сигнала обратной связи в противофазе с входным сигналом. В этом случае  $e^{i[\phi(\omega)+\phi_{\beta}(\omega)]} = -1$  и модуль коэффициента передачи равен

при поступлении на влюд сепестен чи сигналом. В этом случае  $e^{i[\varphi(\omega)+\varphi_{\beta}(\omega)]} = -1$  и модуль коэффициента передачи равен  $\begin{bmatrix} K_{oc}(\omega) = \frac{K(\omega)}{1+K(\omega)\beta(\omega)} & \text{ООС уменьшает энергию входного воздействия основной цепи, и модуль коэффициента передачи цепи с ОС в <math>1+K(\omega)\beta(\omega)$  раз меньше, чем у цепи без ОС. Если  $K(\omega)\beta(\omega) >>1$ , то  $K_{oc}(\omega) \approx 1/\beta(\omega)$ ,

что соответствует глубокой ООС. При этом коэффициент передачи цепи с ОС определяется только величиной  $\beta(\omega)$  и не зависит от коэффициента передачи  $K(\omega)$  основной цепи. Данный факт широко используется для стабилизации коэффициентов усиления различных устройств.

<u>Реактивная и комплексная обратная связь.</u> Реактивная ОС устанавливается при условии  $\phi(\omega) + \phi_{\beta}(\omega) = 2k\pi + \pi/2$ , т.е. при поступлении на вход основной цепи сигнала ОС с фазовым сдвигом относительно входного сигнала, равным  $\pi/2$ . В этом случае  $e^{i[\varphi(\omega)+\varphi_{\beta}(\omega)]} = j$  и модуль коэффициента передачи равен:

$$K_{oc}(\omega) = \frac{K(\omega)}{\sqrt{1 + K^2(\omega)\beta^2(\omega)}} \qquad B данном случае ООС также может уменьшать энергию входного воздействия основной цепи, что приводит к уменьшению модуля коэффициента передачи цепи с ОС.$$

При остальных значениях суммарного фазового сдвига  $\phi(\omega) + \phi_{\beta}(\omega)$  ОС будет комплексной. <u>Рассмотрим целесообразность использования обратной связи.</u>

#### Стабилизация коэффициента усиления.

$dK_{oc}$	1	dK	Т.о.,	относительное	изменение	коэффициента	усиления	усилителя,
$\overline{K}$	$=\frac{1}{1+K/2}$	3 <u>K</u>	охвач	енного ОС, мож	ет сильно от	личаться от отно	осительного	о изменения
<sub>0C</sub>			коэфа	bициента усилен	ия при отсут	ствии ОС. При з	том, если (	C

отрицательная, то относительная нестабильность коэффициента усиления уменьшается. Например, при  $K\beta >> 1$  относительная нестабильность падает в  $K\beta$  раз. В данном случае коэффициент усиления цепи с обратной связью определяется только значением  $\beta$ , т.е. не зависит от нестабильности коэффициента усиления усилителя без ОС.

### Коррекция АЧХ.

Рассмотрим резонансный усилитель с частотным коэффициентом	$K(i_{\alpha}) - K_0$
передачи ->	$\mathbf{K}(j\omega) = -\frac{1}{1 + j\Delta\omega\tau_{\rm ext}}$

Охватив этот усилитель цепью частотно-независимой отрицательной обратной связи, получим **Э** 

							01	U	ЭК
Таким	образом,	, АЧХ	усилителя,	охваченного	$K(\omega)$ –		$K_0$		
отрицат	ельной	обратной	связью,	определяется	$\Lambda_{oc}(\omega)$ –	$\sqrt{1+K}$	$(3)^{2} \pm$	(Δωτ	$(-)^2$
выражен	нием→					$\sqrt{(1+\Lambda_0)}$	) T		эк )



Из рисунка видно, что график АЧХ цепи с обратной связью значительно ровнее, чем график АЧХ цепи без обратной связи. Выравнивание АЧХ цепи с обратной связью сопровождается снижением графика  $K_{oc}(\omega)$ , т.е. уменьшением коэффициента усиления, что является результатом действия отрицательной обратной связи.

 $K_{oc}(j\omega) = \frac{K_0}{1 + K_0\beta + j\Delta\omega\tau_{oc}}$ 

**Подавление нелинейных искажений**. Нелинейность характеристик элементов цепи приводит к возникновению высших (паразитных) гармоник в спектре преобразуемого сигнала, что является причиной нелинейных искажений. Оценим влияние ОС их величину.



Предположим, что паразитный сигнал, соответствующий нежелательным высшим гармоникам, появляется внутри активного элемента. Место его появления делит активный элемент на лве каскадно коэффициентами включенные части С передачи  $K_1(j\omega)$  и  $K_2(j\omega)$ .

Введем	OOC.	Тогда	для	паразитного	сигнала	$K_2(j\omega)$
частотнь	ій коэфф	оициент	переда	ачи будет иметн	ь вид→	$K_n(j\omega) = \frac{1}{1 + K_1(j\omega)K_2(j\omega)\beta(j\omega)}$

Следовательно, паразитный сигнал (нежелательные гармонические составляющие или шумы) на выходе цепи с отрицательной обратной связью будет в  $[1 + K_1(j\omega)K_2(j\omega)\beta(j\omega)]$  раз меньше, чем в случае отсутствия обратной связи. Ослабление паразитного сигнала особенно существенно, если наблюдается в пределах эффективной полосы пропускания  $K_2(\omega) >> K_1(\omega)$ . Заметим, что введение отрицательной обратной связи приводит к ослаблению и полезного сигнала. Однако его ослабление можно компенсировать предварительным или последующим усилением.

### 17. Формулировка и суть основных критериев устойчивости цепей с обратной связью (критерии Гурвица, Найквиста, Михайлова).

Система устойчива, если, выведенная из состояния равновесия, она в него возвращается.

В настоящее время известно несколько критериев устойчивости, различающихся в основном по форме, а не по содержанию. В основе их лежит идея устойчивости решений однородного дифференциального уравнения, описывающего свободные (собственные) колебания цепи после исчезновения возмущающих сил, т.е.

	$a_n \frac{d^n u_{\scriptscriptstyle Gblx}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d}{dt^n}$	$\frac{du_{bbx}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du_{bbx}(t)}{dt} + a_0 u_{bbx}(t) = 0.$
Решение уравнения имеет вид →	$u_{\scriptscriptstyle Gbix}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$	где $A_i$ – постоянные числа, определяемые из <i>n</i> начальных условий; $p_i$ – корни характеристического уравнения
	$\overline{Q(p)} = \overline{a_n p^n + a_{n-1}}$	$p^{-1} + + a_1 p + a_0,  a_n > 0, a_0 \neq 0, n \ge 1.$

Корни характеристического уравнения являются в общем случае комплексными числами, т.е.  $p_i = \alpha_i + j\omega_i$ .

Для устойчивой цепи входящие в решение дифференциального уравнения экспоненты должны быть затухающими. Это значит, что корни характеристического уравнения должны быть либо отрицательными вещественными числами, либо комплексными числами с отрицательными действительными частями.

Таким образом, можно сформулировать следующий основной критерий устойчивости линейных цепей: линейная цепь устойчива, если действительные части всех корней характеристического уравнения отрицательны.

Пользоваться этим критерием для систем, описываемых дифференциальными уравнениями выше второго порядка, затруднительно. Поэтому были разработаны специальные критерии устойчивости, позволяющие судить об устойчивости любой цепи без решения характеристического уравнения.

<u>Критерий устойчивости Гурвица</u>. Критерий относится к алгебраическим критериям устойчивости. Он позволяет судить об устойчивости системы по результатам анализа соотношений между коэффициентами характеристического уравнения без определения его корней:

Для того чтобы корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ , ...,  $\Delta_n > 0$ . Здесь  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ ,... – последовательные определители, равные

	$\Delta_1 = a$	$a_{n-1};$	$\Delta_2$ =	$=\begin{vmatrix}a_{n-1}\\a_n\end{vmatrix}$	$a_{n-}$ $a_{n-}$	-3 -2	$\Delta_{3} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_{n} & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix};$
Последовательные определители равны главным диагональным минорам матрицы Гурвица →	<i>H</i> =	$\begin{vmatrix} a_{n-1} \\ a_n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}$	$a_{n-3}$ $a_{n-2}$ $a_{n-1}$  0	$a_{n-5}$ $a_{n-4}$ $a_{n-3}$ 	···· ···· ···	0 0 0  a <sub>0</sub>	где $a_i = 0$ при $i < 0$ и $i > n$ . Последний столбец матрицы $H$ содержит лишь один отличный от нуля элемент $a_0$ , расположенный на главной диагонали. Поэтому $\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$ .

Следовательно, условия устойчивости запишутся в виде  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0, a_0 > 0$ .

Данный критерий позволяет проверить устойчивость системы при заданных параметрах (коэффициентах дифференциального уравнения). В то же время им невозможно пользоваться при экспериментальных исследованиях, когда известны только частотные характеристики прямой и обратной цепей. Трудно также определить параметры, изменение которых приводит к устойчивости цепи.

Критерий устойчивости Найквиста.

Критерий относится к частотным критериям. Для анализа	$K(j\omega)$
устойчивости используется частотный коэффициент передачи	$K_{oc}(j\omega) = \frac{1-K(j\omega)\beta(j\omega)}{1-K(j\omega)\beta(j\omega)}$
цепи с обратной связью $\rightarrow$	$I  II (J \omega) p (J \omega)$

Глубина и характер ОС определяется величиной  $1-K(j\omega)\beta(j\omega)$ . При  $K(j\omega)\beta(j\omega) \rightarrow 1$  цепь с ОС приближается к границе устойчивости. При  $K(j\omega)\beta(j\omega) > 1$  цепь с положительной ОС работает в неустойчивом режиме (в режиме самовозбуждения). Поэтому в основу рассматриваемого критерия положен геометрический метод определения следующих условий:  $K(\omega)\beta(\omega) < 1$  и  $\phi(\omega) + \phi_{\beta}(\omega) = 2k\pi$ .

Для этого рассматривается коэффициент передачи цепи с разомкнутой обратной связью  $K_p(j\omega) = K(j\omega)\beta(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$  и строится годограф  $K_p(j\omega)$  как функция частоты  $\omega$  на плоскости  $[A(\omega), B(\omega)]$ .

<u>Формулировка критерия Найквиста</u>: система с обратной связью будет устойчивой, если годограф коэффициента передачи разомкнутой системы не охватывает точку (1, 0) на комплексной плоскости  $[A(\omega), B(\omega)]$ .



На рис. (*a*) приведен годограф устойчивой системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка, а

на рис. (б) – годограф неустойчивой системы.

<u>Критерий устойчивости Михайлова</u>. Критерий относится к аналитическим критериям. Для анализа устойчивости используется характеристическое уравнение цепи с обратной связью, т.е. уравнение вида:

$$Q(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Подставив в данное уравнение  $p=j\omega$ , где  $\omega$  – действительная переменная, получим:

$$Q(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 = A(\omega) + jB(\omega)$$

Годограф функции  $Q(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ , получающийся на комплексной плоскости  $[A(\omega), B(\omega)]$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , называется кривой (годографом) Михайлова.

<u>Формулировка критерия Михайлова</u>: для того чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы годограф функции  $Q(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ последовательно прошел против часовой стрелки п квадрантов комплексной плоскости, начинаясь на действительной оси (при  $\omega = 0 \ Q(j\omega) = a_0$ ).



На рис. (*a*) приведены годографы устойчивых систем, описываемых дифференциальными уравнениями различного порядка, а на рис. (б) – годографы неустойчивых систем.

Критерий Михайлова применяется в тех случаях, когда возникает необходимость оценить влияние изменений структуры и параметров системы на ее устойчивость.
## 18. Постановка задачи и методы анализа линейных цепей. Спектральный и временной методы анализа линейных цепей.



Анализ любой радиотехнической цепи сводится к установлению зависимости между входным сигналом и сигналом, формируемым на выходе.

<u>Постановка задачи анализа линейной цепи</u>: имеется линейная радиотехническая цепь, для которой известно дифференциальное уравнение или одна из характеристик: частотная  $K(j\omega)$ , импульсная h(t) или переходная g(t). На вход цепи поступает сигнал  $s_{ex}(t)$ . Необходимо определить выходной сигнал  $s_{eux}(t)$ .

Существует несколько методов анализа линейных цепей. Выбор наиболее удобного из них зависит от сигнала, поступающего на вход, функциональной и структурной организации цепи и некоторых других факторов. Наиболее часто используются точные и приближенные методы. Последние учитывают особенности сигналов и цепей.

Точные методы анализа цепей:

1. Классический метод, или метод дифференциальных уравнений.

2. Спектральный метод и его разновидность – операторный метод.

3. Временной метод, называемый методом интеграла наложения или интеграла Дюамеля. Приближенные методы анализа цепей:

1. Приближенные спектральные методы.

2. Метод комплексной огибающей.

3. Метод мгновенной частоты.

<u>Спектральный метод</u> основан на частотных свойствах сигнала и цепи с использованием принципа суперпозиции. Частотные свойства сигнала характеризуются его спектром, а частотные свойства цепи – частотной характеристикой. Так как спектр сигнала – это совокупность гармонических составляющих, то задача анализа цепи сводится по сути дела к анализу установившихся режимов в цепи при синусоидальных воздействиях.

<u>Прохождение периодического сигнала через линейную цепь.</u> Спектр периодического сигнала определяется путем разложения сигнала в ряд Фурье, комплексная форма которого имеет вид

$$s_{ex}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{ex,k} e^{jk\omega_{l}t}$$
, где  $\dot{C}_{ex,k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{ex}(t) e^{-jk\omega_{l}t} dt$  - комплексная амплитуда k-й гармоники входного сигнала.

Комплексная амплитуда *k*-й гармоники выходного сигнала определяется как произведение комплексной амплитуды соответствующей гармоники входного сигнала на значение частотной характеристики, которое она имеет на частоте данной гармоники. Таким образом,

$$\dot{C}_{\scriptscriptstyle 6blx,k} = \dot{C}_{\scriptscriptstyle 6x,k} K(jk\omega_1) = C_{\scriptscriptstyle 6x,k} e^{j\varphi_{\scriptscriptstyle 6x,k}} K(k\omega_1) e^{j\varphi(k\omega_1)} = C_{\scriptscriptstyle 6blx,k} e^{j\varphi_{\scriptscriptstyle 6blx,k}},$$

где  $C_{_{ebsx,k}} = C_{_{ex,k}}K(k\omega_1)$  и  $\varphi_{_{ebsx,k}} = \varphi_{_{ex,k}} + \varphi(k\omega_1)$  - амплитуда и фаза *k*-й гармонической составляющей выходного сигнала.

Отсюда на основании принципа суперпозиции находим выходной сигнал:

$$s_{\rm source}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{\rm source} K(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{\rm source} e^{jk\omega_1 t}.$$

Таким образом, спектр периодического сигнала на выходе линейной цепи может быть получен перемножением спектра входного сигнала на значения частотной характеристики цепи на соответствующих частотах.

Прохождение непериодического сигнала через линейную цепь.

Спектр	непериодического	сигнала	(спектральная	плотность)	$\alpha(\cdot)$	( ) -iat <b>1</b>	(1)
определя	нется путем вычислен	ния прямо	го преобразован	ия Фурье 🗲	$S(j\omega) = \int$	$s(t)e^{-j\omega t}dt$	(1)

В свою очередь обратное преобразование Фурье позволяет определить сигнал по его спектру  $\rightarrow$   $s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$  (2)

Как видно из данного выражения, сигнал s(t) представляется в виде суммы бесконечно большого числа незатухающих и бесконечно близких по частоте гармонических колебаний с бесконечно малыми комплексными амплитудами, равными  $\frac{1}{2\pi}S(j\omega)d\omega$ . Это дает возможность использовать обычные методы расчета установившихся режимов.

Применительно к решаемой задаче каждая из таких гармонических составляющих входного сигнала обусловит соответствующую гармоническую составляющую выходного сигнала с комплексной амплитудой, равной

$$\frac{1}{2\pi}S_{\rm GeV}(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}S_{\rm ex}(j\omega)K(j\omega)d\omega.$$

На основании этого запишем выражение для спектральной плотности выходного сигнала, которое является фундаментальным для рассматриваемого метода анализа линейных цепей:

$$S_{eblx}(j\omega) = S_{ex}(j\omega)K(j\omega)$$
(3)

Таким образом, спектральная плотность выходного сигнала равна произведению спектральной плотности входного сигнала на частотную характеристику цепи.

Выходной сигнал находится с помощью обратного преобразования Фурье, реализующего суммирование бесконечно большого числа его гармонических составляющих:

$$S_{\scriptscriptstyle GbLX}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\scriptscriptstyle GbLX}(j\omega) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\scriptscriptstyle GX}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} dt .$$
(4)

Можно предложить следующую последовательность анализа линейных цепей спектральным методом.

1. Определение спектральной плотности  $S_{ex}(j\omega)$  входного сигнала по формуле (1).

2. Определение частотной характеристики цепи одним из известных методов (уравнений Кирхгофа, контурных токов, узловых потенциалов, наложения, из дифференциального уравнения цепи и др.).

3. Расчет спектральной плотности S<sub>вых</sub>(jω) выходного сигнала по формуле (3).

4. Определение выходного сигнала по формуле (4).

В некоторых случаях целесообразно использовать операторный метод анализа цепей, основанный на преобразованиях Лапласа. При этом функции действительной переменной t преобразуются в функции комплексной частоты, т.е. переменной  $p=\sigma+j\omega$ . Для этого используются преобразования Лапласа:

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} s(t)e^{-pt}dt$$
 и  $s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(p)e^{pt}dp$ . Функцию  $s(t)$  называют оригиналом, а функцию  $F(p)$  – изображением оригинала по Лапласу или просто изображением

Как видно из данных выражений, преобразования Фурье могут быть получены из преобразований Лапласа простой заменой *p* на *j*ω с соответствующим изменением пределов интегрирования. Преобразования Лапласа являются обобщениями преобразований Фурье, поэтому они обладают всеми свойствами, которые характерны для преобразований Фурье.

Частотная характеристика цепи в операторной форме получается простой заменой переменной ј $\omega$  на комплексную переменную  $p = \sigma + j\omega$ , т.е.  $K(p) = [K(j\omega)]_{j\omega = \sigma + j\omega}$ . Выражение

(3) для спектра выходного сигнала цепи будет иметь вид  $F_{ebix}(p) = F_{ex}(p)K(p)$ .

Операторный метод позволяет анализировать более широкий класс сигналов. В частности, этому методу доступны сигналы, описываемые функциями, которые не удовлетворяют условию абсолютной интегрируемости.

<u>Временной метод (метод интеграла наложения, метод интеграла Дюамеля)</u> основан на использовании импульсной h(t) характеристики цепи, т.е. характеристики цепи во временной области. Импульсная характеристика – это реакция цепи на  $\delta$ -функцию.



Представим входной сигнал  $s_{ex}(t)$  сложной формы в виде совокупности прямоугольных импульсов одинаковой и достаточно малой длительности  $\Delta \tau$  (рис.).

Реакция цепи в моменты времени  $k\Delta \tau$ , *k*=0, 1, 2, ..., *n* на каждый из этих импульсов (если бы площади их были равны единице) есть импульсная характеристика  $h(t-k\Delta \tau)$ . Но так как площади импульсов равны  $S_{ex}(k\Delta\tau)\Delta\tau$ равна то реакция цепи  $s_{ex}(k\Delta\tau)\Delta\tau \cdot h(t-k\Delta t)$ . В свою очередь выходной сигнал в некоторый момент времени  $t = k\Delta \tau$  будет равен сумме реакций цепи на импульсы в интервале 0...t, т.е.

$$S_{\rm BLX}(t) \approx \sum_{k=0}^{n} S_{\rm ex}(k\Delta\tau) \Delta\tau \cdot h(t-k\Delta\tau)$$

При	$\Delta \tau \rightarrow 0$	суммирование	сводится	к	операции	$f = (f) \int_{t}^{t} f = (f) h(f = f) df$
интегј	рирования	н по переменной $ au$	$=k\Delta \tau: \rightarrow$			$S_{_{GbIX}}(t) = \int S_{_{GX}}(\tau) h(t-\tau) d\tau$
						0

Т.о., значения выходного сигнала линейной цепи в любой момент времени являются результатом взвешенного суммирования мгновенных значений входного сигнала. Весовая функция – это импульсная характеристика цепи.

Учитывая, что для реальных цепей h(t)=0 при t<0, можно записать  $\rightarrow$ 

$$S_{\rm GLAX}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\rm ex}(\tau) h(t-\tau) d\tau = S_{\rm ex}(t) \otimes h(t)$$

Полученное выражение для *s*<sub>вых</sub>(*t*) представляет собой интеграл наложения, или интеграл Дюамеля. В математике полученное выражение называют сверткой двух функций. Таким образом, выходной сигнал линейной цепи равен свертке входного сигнала и импульсной характеристики цепи.

Иногда используют другую форму записи интеграла Дюамеля,	$() \int_{-\infty}^{\infty} () \mathbf{r} () \mathbf{r}$
которую можно получить путем замены переменной $\tau$ на $t-\tau$ : $\rightarrow$	$s_{\rm GBLX}(t) = \int s_{\rm ex}(t-\tau)h(\tau)d\tau$

Иинтеграл Дюамеля можно получить из формулы  $S_{6blx}(j\omega)=S_{6x}(j\omega)K(j\omega)$ , на которой основан спектральный метод анализа цепей. Для этого воспользуемся свойствами преобразования Фурье и связью между частотной и импульсной характеристиками цепи, имея в виду, что частотная характеристика  $K(j\omega)$  цепи является по существу спектральной плотностью ее импульсной характеристики h(t).

Из свойств преобразования Фурье известно, что	$s_{ax}(t) \leftrightarrow S_{ax}(j\omega);$
произведению двух спектров соответствует свертка	$h(t) \leftrightarrow K(i\omega)$ :
сигналов, соответствующих данным спектрам. Таким	
образом, можно записать ->	
	$s_{_{\mathrm{ex}}}(t) \otimes h(t) \leftrightarrow S_{_{\mathrm{ex}}}(j\omega) K(j\omega).$
Следовательно, спектру $S_{GBLX}(j\omega) = S_{GX}(j\omega)K(j\omega)$ соответст	TBYET $(\cdot) \int_{0}^{\infty} (\cdot \cdot \cdot) I(\cdot) I$
сигнал →	$S_{Gbix}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ex}(t-\tau) h(t) d\tau$

# 19. Нелинейные цепи, их характеристика и параметры. Методы аппроксимации нелинейных характеристик.

При проектировании большинства радиотехнических устройств возникает необходимость преобразования спектра полезного сигнала. Изменение спектрального состава сигнала осуществляется с помощью нелинейных цепей, основным свойством которых является способность обогащать спектр сигнала. При этом под обогащением понимается не увеличение количества спектральных составляющих, а появление составляющих с новыми частотами.

Процессы в таких цепях описываются нелинейными ДУ. Принцип суперпозиции для нелинейных цепей не применим, так как значения ее параметров при поступлении сигнала  $s(t) = \sum_{i} s_i(t)$  отличаются от значений параметров при воздействии каждой составляющей  $s_i(t)$ 

в отдельности. В силу этого анализ нелинейных цепей в общем случае является достаточно сложной задачей.

Существуют резистивные и реактивные нелинейные элементы, параметры которых (крутизна, сопротивление, емкость, индуктивность) зависят от напряжения и тока. Основной характеристикой резистивного элемента (диод, транзистор) является вольт-амперная характеристика i(u)=S(u)u; нелинейной емкости (варикап, конденсатор с сегнетодиэлектриком) – вольт-кулонная характеристика q(u)=C(u)u; нелинейной индуктивности (катушка с ферромагнитным сердечником) – ампер-веберная характеристика  $\Phi(i)=L(i)i$ . Нелинейность вольт-кулонной и ампер-веберной характеристик приводит в конечном счете к нелинейности вольт-амперных характеристик реактивных нелинейных элементов, имеющих вид:

$$i_{c}(u) = \left[u_{c}(t)\frac{dC(u)}{du} + C(u)\right]\frac{du_{c}(t)}{dt}; \qquad \qquad i_{L}(u) = \frac{1}{L(i)}\int u_{L}(t)dt.$$

В радиотехнических цепях наиболее часто встречаются резистивные нелинейные элементы. Для них наибольший интерес имеют такие параметры вольтамперной характеристики (BAX), как дифференциальная и средняя крутизна.

<i>Дифференциальная крутизна</i> – это крутизна ВАХ в рабочей точке U <sub>0</sub> , определяемая выражением →	$S(U_0) = \left  \frac{di(u)}{du} \right _{u=U_0}.$
o, onpedensemes bipasterness v	$du = U_0$

Характеризует линейный режим работы нелинейного устройства (в режиме слабых сигналов). При работе на нелинейном участке зависит от рассматриваемого момента времени. Физический смысл – тангенс угла наклона касательной к ВАХ в данной точке. Иногда пользуются понятием дифференциального сопротивления, равного обратной величине дифференциальной крутизны, т.е.  $R_{\partial u \phi}(U_0) = 1/S(U_0)$ .

Средняя крутизна – это крутизна ВАХ при сильном гармоническом	$I_1$
сигнале. Определяется выражением ->	$S_{cp} = \frac{1}{E},$

где *I*<sub>1</sub> – амплитуда первой гармонической составляющей тока в резистивном элементе; *E* – амплитуда гармонического колебания на входе резистивного элемента.

Характеризует нелинейный режим работы устройства в режиме сильных сигналов и учитывает форму ВАХ в широких пределах.

Для анализа и расчета цепей необходимо аналитическое представление характеристик, т.е. представление в виде достаточно простых функций. Процесс составления аналитического выражения для характеристик, представленных графически или таблично, называется аппроксимацией.

При аппроксимации решаются следующие проблемы:

1. Определение области аппроксимации, которая зависит от диапазона изменения входных сигналов.

2. Определение точности аппроксимации. Понятно, что аппроксимация дает приблизительное представление характеристики в виде какого-либо аналитического

выражения. Поэтому необходимо количественно оценить степень приближения аппроксимирующей функции к экспериментально определенной характеристике. Чаще всего используются:

- показатель равномерного приближения – аппроксимирующая функция  $\tilde{f}(t)$  не должна отличаться от заданной функции f(t) более чем на некоторое число  $\varepsilon$ , т.е.  $|\tilde{f}(t) - f(t)| \le \varepsilon$ ;

-показатель среднего квадратического приближения – аппроксимирующая функция  $\tilde{f}(t)$  не должна отличаться от заданной функции f(t) в среднем квадратическом приближении более чем на некоторое число  $\varepsilon$ , т.е.  $\rightarrow$ 

$$\sqrt{\frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\Delta t} \left[\tilde{f}(t) - f(t)\right]^{2} dt} \leq \varepsilon$$

- узловое приближение (интерполяционное) – аппроксимирующая функция  $\tilde{f}(t)$  должна совпадать с заданной функцией f(t) в некоторых выбранных точках.

Существуют различные **способы аппроксимации**. Наиболее часто для аппроксимации ВАХ применяют аппроксимацию степенным полиномом и кусочно-линейную аппроксимацию, реже – аппроксимацию с использованием показательных, тригонометрических или специальных функций (Бесселя, Эрмита и др.).

<u>Аппроксимация степенным полиномом</u>. Нелинейную вольт-амперную характеристику в окрестности рабочей точки U<sub>0</sub> представляют конечным числом слагаемых ряда Тейлора:

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + ... + a_n(u - U_0)^n.$$

Количество членов ряда определяется требуемой точностью аппроксимации. Чем больше членов ряда, тем точнее аппроксимация. На практике необхо- димой точности добиваются, используя аппроксимацию полиномами второй и третьей степени. Коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$  – это числа, которые достаточно просто определяются из графика ВАХ (рис. *a*).



Заметим, аппроксимация что степенным полиномом используется в основном описания отдельных ДЛЯ фрагментов характеристик. При значительных отклонениях входного сигнала от рабочей точки точность аппроксимации значительно может ухудшиться.

Если ВАХ задана не графически, а какой-либо аналитической функцией и необходимо представить ее степенным полиномом, то коэффициенты *a<sub>n</sub>* вычисляются по формуле:

$1 \left[ d^n i(u) \right]$	Нетрудно заметить,	что <i>а</i> 1	представляет	собой	$\left[ di(u) \right]$
$a_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{1}{du^n} \right]$	крутизну ВАХ в рабо	очей точк	е. Значение кру	утизны	$a_1 = \left  \frac{du}{du} \right $
$n : \_ uu \{u=U_o}$	существенно зависит о	т положен	ния рабочей точ	КИ.	
P	-				

В некоторых случаях удобнее характеристику представлять рядом Маклорена:

$$i(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_nu^n$$
.

<u>Кусочно-линейная аппроксимация</u>. Если входной сигнал изменяется по величине в больших пределах, то ВАХ можно аппроксимировать ломаной линией, состоящей из нескольких отрезков прямых. На рис.(б) показана ВАХ транзистора, аппроксимированная тремя отрезками прямых.

Математическая формула аппроксимированной ВАХ <b>&gt;</b>	$\begin{bmatrix} 0 & npu & u < u_1, \end{bmatrix}$
Данный вид аппроксимации связан с двумя важными	$i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} $
параметрами нелинейного элемента: напряжением начала	$1 = 35(u - u_1) npu u_1 \le u \le u_2,$
характеристики $u_I$ и ее крутизной $S$ .	$(i_1 npu u > u_2.$

Для увеличения точности аппроксимации увеличивают количество отрезков линий. Однако это усложняет математическую формулу ВАХ.

<u>Методы анализа нелинейных цепей</u>. Используются следующие методы анализа нелинейных цепей:

1. <u>Аналитические</u>. Позволяют в каждом конкретном случае получить частные решения. К числу аналитических методов относятся:

*а) спектральный*. Используется для анализа нелинейных цепей при гармонических или полигармонических воздействиях;

б) линеаризации. Применяется в режиме малых сигналов;

в) квазилинейный. Определяется соотношение между входным сигналом и первой гармоникой тока. Основной характеристикой при этом является  $S_{cp}$  – средняя крутизна. Анализ цепи осуществляется линейными методами, нелинейность учитывается зависимостью  $S_{cp}$  от амплитуды входного сигнала;

*с) медленно-меняющихся амплитуд*. Предполагается, что амплитуда высокочастотного модулированного колебания изменяется в течение его периода медленно.

2. <u>Графический</u>. По имеющимся графикам  $s_{ex}(t)$  и вольт-амперной характеристике определяется график  $s_{eblx}(t)$ . Метод обладает определенной наглядностью, но низкой точностью.

3. <u>Численные методы</u>, предполагающие применение цифровых ЭВМ.

Наиболее часто используется спектральный метод.

Общее решение задачи анализа нелинейной цепи. Рассмотрим процессы, происходящие в безынерционном нелинейном устройстве, характеристика которого представлена на рис. На вход устройства поступает гармонический сигнал  $u(t)=Ecos\omega_0 t$ .

Вследствие нелинейности характеристики i=f(u) форма тока в цепи отличается от формы входного сигнала. В то же время функция, описывающая ток, является периодической и четной. Это значит, что спектр тока можно определить с помощью ряда Фурье вида:



Получено общее решение задачи о спектре тока в безынерционной нелинейной цепи при гармоническом входном воздействии. Спектр тока содержит кроме постоянной составляющей бесконечное число гармоник с амплитудами  $I_k$  и частотами  $k\omega_0$ . Амплитуды гармоник зависят от параметров сигнала и вида характеристики i=f(u).

# 20. Анализ нелинейной цепи при кусочно-линейной аппроксимации характеристик (метод Берга).

При воздействии на нелинейный элемент сигнала с большой амплитудой и выборе рабочей точки на нижнем изгибе вольт-амперной характеристики целесообразно применить метод кусочно-линейной аппроксимации данной характеристики (рис).



Аналитическое выражение ВАХ при этом имеет вид:

$$i = \begin{cases} 0 & npu \quad u < U_1, \\ S(u - U_1) & npu \quad u \ge U_1. \end{cases}$$

Напряжение  $U_0$  – это напряжение рабочей точки,  $U_1$  – напряжение отсечки.

Пусть на вход рассматриваемого элемента поступает гармонический сигнал

$$s(t) = E \cos \omega_0 t$$
.

Тогда с учетом напряжения рабочей точки входное воздействие на элемент равно  $u(t) = U_0 + E \cos \omega_0 t$ .

Как видно из рис., ток i(t) нелинейного элемента имеет вид периодической последовательности импульсов, описываемых четной функцией. Определим амплитуды гармонических составляющих спектра этого тока. Для этого необходимо определить математическое выражение для импульсов тока i(t) и воспользоваться разложением тока в ряд Фурье.

1. Угол  $\theta$ , соответствующий изменению тока от максимального значения до нуля, называется углом отсечки. Из рис. видно, что максимальное значение тока i(t) равно  $I_m$ , а длительность импульсов тока –  $2\theta$ . Очевидно, что при фазовом угле  $\theta$  входное воздействие равно  $U_1 = U_0 + Ecos\theta$ . Тогда  $\cos \theta = \frac{U_1 - U_0}{E}$ .

2. Пользуясь аналитическим выражением для ВАХ, можно записать  $i(t)=S(U_0+Ecos\omega_0t-U_1)$  при  $-\theta \le \omega t \le \theta$ . Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$i(t) = SE\left(\cos\omega_0 t - \frac{U_1 - U_0}{E}\right) = SE\left(\cos\omega_0 t - \cos\theta\right) \quad \text{при} \quad -\theta \le \omega t \le \theta.$$
(1)

3. Определим значение амплитуды тока $i(t)$ , т.е. значение $I_m$ . (рис.) $\rightarrow$	$I_m = S$	$S\left[E - \left(U_1 - U_0\right)\right]SE\left[1 - \frac{U_1 - U_0}{E}\right] =$	$= SE(1-\cos\theta).$
4. Подставив в (1) значение SE, п матем. выражение для импульсов ток	юлучим :a: →	$i(t) = \frac{I_m}{1 - \cos\theta} (\cos\omega_0 t - \cos\theta) \Pi_2$	ри $-\theta \leq \omega t \leq \theta$ .
5. Ряд Фурье для тока $i(t)$ имеет вид: ·	→	$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \cos \theta$	$\operatorname{os}(k\omega_0 t)$
Коэффициенты ряда, т.е. амплитуды гармонических составляющих, равны	: →	$I_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) dt; \qquad I_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) dt;$	$(t)\cos(k\omega_0 t)dt$
Перепишем данные выражения, выполнив замену переменной $I_0$ $t=\omega_0 t: \rightarrow$	$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}i$	$(\omega_0 t) d(\omega_0 t);  I_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\omega_0 t) \cos \theta$	$S(k\omega_0 t)d(\omega_0 t)$

Определим амплитуды нулевой и первой	
гармонических составляющих спектра тока -	)

$$I_0 = I_m \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\pi (1 - \cos \theta)}; \quad I_1 = I_m \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\pi (1 - \cos \theta)}$$

Аналогично можно получить амплитуды остальных гармонических составляющих спектра тока нелинейного элемента.  $I_{k} = I_{m} \frac{2\overline{(\sin k\theta \cos \theta - k\cos k\theta \sin \theta)}}{k\pi (k^{2} - 1)(1 - \cos \theta)}.$ 

Характерно, что при k > 1 можно записать общее выражение для амплитуды k-й гармоники  $\rightarrow$ 

Как видно из полученных выражений, амплитуды гармоник спектра тока зависят от угла отсечки  $\theta$  и максимальной величины импульсов тока  $I_m$ .

Величины

$$\alpha_0(\theta) = \frac{I_0}{I_m} = \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1 - \cos\theta)}; \qquad \alpha_1(\theta) = \frac{I_1}{I_m} = \frac{\theta - \sin\theta\cos\theta}{\pi(1 - \cos\theta)};$$
$$\alpha_k(\theta) = \frac{I_k}{I_m} = \frac{2(\sin k\theta\cos\theta - k\cos k\theta\sin\theta)}{k\pi(k^2 - 1)(1 - \cos\theta)}$$

называют коэффициентами Берга.

Коэффициенты Берга  $\alpha_k(\theta)$  определяют зависимость амплитуды *k*-й гармоники тока от угла отсечки при Im=const, причем угол отсечки изменяется за счет изменения амплитуды входного сигнала E и смещения  $U_0$ .

Пользуются также функциями Берга, которые определяют	
зависимость амплитуды <i>k</i> -й гармоники тока от угла отсечки при	$\gamma_k(\theta) = \frac{\gamma_k}{SE} = \frac{\gamma_k}{L} (1 - \cos\theta).$
<i>E</i> = <i>const</i> , причем $\theta$ изменяется за счет изменения $U_0 \rightarrow$	$SL I_m$
Коэффициенты и функции Берга связаны между собой	$\gamma(\theta) = \alpha(\theta)(1 - \cos\theta)$
следующим образом: ->	$\gamma_{k}(0) = \alpha_{k}(0)(1 - \cos 0)$ .



Ha рис. приведены графики  $\alpha_k(\theta)$  для k=0, 1, 2, 3, 4 и *у<sub>k</sub>(θ)* для k = 0, 1, 2, 3. Вид графиков показывает, что для каждой гармоники тока существует  $\theta$ при котором амплитуда ее имеет максимальное значение.

Этот угол для коэффициентов Берга  $\alpha_k(\theta)$  определяется выражением  $\theta_{o\alpha} = \frac{120^0}{\iota}$ , а для

функций  $\gamma_k(\theta)$  – выражением  $\theta_{\alpha\gamma} = \frac{180^0}{k}$ . Выбор одного из этих углов определяется начальными условиями. Если задано максимальное значение импульсов тока І<sub>m</sub>, а изменение угла отсечки осуществляется напряжением смещения и амплитудой входного сигнала, то следует использовать  $\theta_{0a}$ . Если задана амплитуда входного сигнала *E*, а изменение угла отсечки осуществляется напряжением смещения, то следует использовать  $\theta_{0\gamma}$ .

Полученные результаты применяются при выборе режима работы нелинейного элемента в процессе построения усилителей мощности, умножителей частоты и некоторых других устройств.

21. Схема и принцип работы амплитудного модулятора. Характеристики амплитудного модулятора.



← Схема амплитудного модулятора на основе резонансного усилителя.

На вход резонансного усилителя, работающего в нелинейном режиме, подаются:

- несущее колебание *s<sub>н</sub>(t)* от автогенератора с помощью высокочастотной трансформаторной связи контура входной цепи с базой транзистора;

- модулирующий сигнал *s<sub>м</sub>(t)* с помощью низкочастотного трансформатора.

Конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  – блокировочные, обеспечивают развязку входных цепей по частотам несущего колебания и модулирующего сигнала, т.е. развязку по высокой и низкой частотам. Колебательный контур в цепи коллектора настроен на частоту несущего колебания, добротность контура обеспечивает полосу пропускания  $\Delta \omega = 2\Omega_m$ , где  $\Omega_m$  – наивысшая частота в спектре модулирующего сигнала.

Выбором рабочей точки определяется режим работы модулятора. Возможны два режима: режим малых и режим больших сигналов.



Режим малых входных сигналов. Этот режим устанавливается выбором рабочей точки в середине квадратичного участка ВАХ транзистора. Выбором амплитуды несущего колебания обеспечивается работа модулятора в пределах этого участка (рис.).

Амплитуда напряжения на колебательном контуре, резонансная частота которого равна несущей частоте, определяется амплитудой первой гармоники тока, т.е.  $U_k = I_l R_0$ , где  $R_0$  – резонансное сопротивление контура.

Учитывая, что средняя крутизна ВАХ в пределах рабочего участка равна отношению амплитуды первой гармоники к амплитуде несущего колебания, т.е.  $S_{cp}=I_l/U_h$ , можно записать  $U_k=U_hR_0S_{cp}$ .

Под воздействием модулирующего напряжения, подаваемого на базу транзистора, будет изменяться положение рабочей точки, а значит, будет изменяться и средняя крутизна ВАХ. Так как амплитуда напряжения на колебательном контуре пропорциональна средней крутизне, то для обеспечения амплитудной модуляции несущего колебания необходимо обеспечить линейную зависимость крутизны от модулирующего сигнала. Это возможно при использовании рабочего участка ВАХ, аппроксимируемого полиномом второй степени.

Итак, в пределах квадратичного участка ВАХ, описываемого полиномом  $i=a_0+a_1u+a_2u^2$ , существует входное напряжение, равное сумме двух колебаний: несущего и модулирующего, т.е.  $u(t)=U_{\mu}cos(\omega 0t+\phi)+U_{\mu}cos(\Omega t+\gamma)$ .

Начальные фазы колебаний будем считать в дальнейшем равными 0, т.к. их величины не имеют принципиального значения для понимания процесса амплитудной модуляции.

Веделяем первую гармонику тока коллектора:

 $i_1(t) = a_1 U_{\mu} \cos \omega_0 t + 2a_2 U_{\mu} U_{\mu} \cos \Omega t \cos \omega_0 t = U_{\mu} (a_1 + 2a_2 U_{\mu} \cos \Omega t) \cos \omega_0 t.$ 

Таким образом, амплитуда первой гармоники равна:  $I_1(t) = U_{\mu}(a_1 + 2a_2U_{\mu}\cos\Omega t)$ .

Как видно из полученного выражения, амплитуда первой гармоники тока линейно зависит от модулирующего напряжения. Следовательно, средняя крутизна также будет линейно зависеть от модулирующего напряжения.  $S_{cp}(t) = I_1(t)/U_{_H} = a_1 + 2a_2U_{_M}\cos\Omega t$ . Тогда напряжение на колебательном контуре будет равно

$$U_k(t) = U_{\mu}R_0S_{cp}(t)\cos\omega_0t = U_{\mu}R_0(a_1 + 2a_2U_{\mu}\cos\Omega t)\cos\omega_0t$$

Следовательно, на выходе рассматриваемого модулятора формируется амплитудномодулированный сигнал вида:

$$s_{\scriptscriptstyle GbLX}(t) = a_1 U_{\scriptscriptstyle H} R_0 \left( 1 + 2U_{\scriptscriptstyle M} \frac{a_2}{a_1} \cos \Omega t \right) \cos \omega_0 t = U_{\scriptscriptstyle HB} \left( 1 + m \cos \Omega t \right) \cos \omega_0 t \,.$$

Здесь  $m = 2U_{M} \frac{a_{2}}{a_{1}}$  - коэффициент глубины модуляции;  $U_{HG} = a_{1}U_{HR}R_{0}$  – амплитуда

высокочастотного колебания на выходе модулятора в отсутствие модуляции, т.е. при m = 0.

При проектировании передающих систем важным требованием является формирование амплитудно-модулированных колебаний большой мощности при достаточном КПД. Очевидно, что рассмотренный режим работы модулятора не может обеспечить эти требования, особенно первое из них. Поэтому наиболее часто используют так называемый режим больших сигналов.



Режим больших входных сигналов. Этот режим устанавливается выбором рабочей точки на ВАХ транзистора, при котором усилитель работает с отсечкой тока. В свою очередь выбором амплитуды несущего колебания обеспечивается изменение амплитуды импульсов тока коллектора  $I_m(t)$ по закону модулирующего сигнала (рис.). Это приводит к аналогичному изменению амплитуды первой гармоники коллекторного следовательно, изменению тока И, амплитуды напряжения на колебательном контуре модулятора, так как:

Изменение амплитуды входного высокочастотного напряжения во времени сопровождается изменением угла отсечки, а значит, и коэффициента  $\alpha_I(\theta)$ . Следовательно, форма огибающей напряжения на контуре может отличаться от формы модулирующего сигнала, что является недостатком рассмотренного метода модуляции. Для обеспечения минимальных искажений необходимо устанавливать определенные пределы изменения угла отсечки и работать при не слишком большом коэффициенте модуляции *m*.

<u>Характеристики амплитудного модулятора</u>. Для выбора режима работы модулятора и оценки качества его работы используют различные характеристики, основными из которых являются: статическая модуляционная, динамическая модуляционная и частотная характеристики.

Статическая модуляционная характеристика (СМХ) – это зависимость амплитуды выходного напряжения модулятора от напряжения смещения при постоянной амплитуде напряжения несущей частоты на входе, т.е.  $U_{_{Bblx}} = f(U_{_{CM}})$ .

При экспериментальном определении статической модуляционной характеристики на вход модулятора подается только напряжение несущей частоты (модулирующий сигнал не подается), изменяется величина  $U_{cM}$  (как бы имитируется изменение модулирующего сигнала в статике) и фиксируется изменение амплитуды несущего колебания на выходе. Вид характеристики (рис.*a*) определяется динамикой изменения средней крутизны ВАХ при изменении напряжения смещения. Линейный возрастающий участок СМХ соответствует квадратичному участку ВАХ, так как на этом участке с ростом напряжения смещения средняя крутизна растет. Горизонтальный участок СМХ соответствует линейному участку ВАХ, т.е. участку с постоянной средней крутизной. При переходе транзистора в режим насыщения появляется горизонтальный участок ВАХ с нулевой крутизной, что и отражается спадом СМХ.

Статическая модуляционная характеристика позволяет определить величину напряжения смещения  $U_{cm0}$  и приемлемый диапазон изменения модулирующего сигнала  $\Delta U_m$  с целью обеспечения его линейной зависимости от выходного напряжения. Работа модулятора должна происходить в пределах линейного участка СМХ. Величина напряжения смещения должна соответствовать середине линейного участка, а максимальное значение модулирующего сигнала не должно выходить за пределы линейного участка. Можно также определить максимальный коэффициент модуляции mmax, при котором еще нет искажений. Его величина равна  $m_{max} = \Delta U/U_{H}$ .

Динамическая модуляционная характеристика (ДМХ) – это зависимость коэффициента модуляции от амплитуды модулирующего сигнала, т.е.  $m=f(U_{M})$ . Получить эту характеристику можно экспериментальным путем, либо по статической модуляционной характеристике. Вид ДМХ представлен на рис.б. Линейный участок характеристики соответствует работе модулятора в пределах линейного участка СМХ.

Частотная характеристика – это зависимость коэффициента модуляции от частоты модулирующего сигнала, т.е.  $m=f(\Omega)$ . Влияние входного трансформатора приводит к завалу характеристики на низких частотах (рис.*в*). С ростом частоты модулирующего сигнала боковые составляющие амплитудномодулированного колебания удаляются от несущей частоты. Это приводит к их меньшему усилению в силу избирательных свойств колебательного контура, что обусловливает завал характеристики на более высоких частотах  $\Omega$ . Если полоса частот, занимаемая модулирующим сигналом, находится в пределах горизонтального участка  $\Omega_2 - \Omega_1$  частотной характеристики, то искажения при модуляции будут минимальны.



22. Схема и принцип работы диодного амплитудного детектора. Линейный и квадратичный амплитудный детектор.

Амплитудный детектор формирует сигнал, совпадающий по форме с огибающей входного амплитудно-модулированного колебания. Процесс детектирования будем рассматривать для АМ-сигнала c тональной модуляцией, для входного сигнала т.е. вида  $u_{ax}(t) = U_{\mu}(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t$ . Выходной детектора быть сигнал должен равен  $u_{\rm gas}(t) = k_{\rm am} U_{\rm H} (1 + m \cos \Omega t).$ 



В качестве нелинейного элемента используется диод, характеристика которого (рис.б) имеет нелинейный (ОА) и линейный (АВ) участки. Фильтром низкой частоты являются параллельно включенные емкость и сопротивление нагрузки детектора.

Входное напряжение  $u_{ex}(t)$  приложено к аноду диода. Напряжение на конденсаторе, которое по существу является выходным напряжением, приложено к катоду диода. Через диод протекает ток в том случае, если напряжение на аноде больше, чем напряжение на катоде.

В интервале времени, когда текущее значение напряжения на входе больше, чем напряжение на конденсаторе (от точки A1 до точки B1, см. рис.*a*), диод открыт, через него протекает ток  $i_{\partial}$  и конденсатор заряжается этим током (с небольшим отставанием от роста входного напряжения).



 $\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{u}_{\text{BbIX}}(t) \ \mathbf{u}_{\text{BX}}(t) \\ \mathbf{u}_{\text{BI}}(t) \qquad \mathbf{u}_{\text{BX}}(t) \\ \mathbf{u}_{\text{BI}}(t) \quad \mathbf{u}_{\text{BX}}(t) \quad \mathbf{u}_{\text{BX}}(t) \\ \mathbf{u}_{\text{BI}}(t) \quad \mathbf{u}_{\text{BX}}(t) \quad \mathbf{u}_{\text{BX}}(t) \\ \mathbf{u}_{\text{BI}}(t) \quad \mathbf{u}_{\text{BX}}(t) \quad \mathbf{u}_{\text{BX}}(t)$ 

В интервале времени, когда текущее значение  $u_{ex}(t)$  становится меньше напряжения на конденсаторе (точка В1, см. рис.а), потенциал анода диода становится меньше потенциала катода, что приводит к закрытию диода.

Конденсатор начинает медленно разряжаться через большое сопротивление фильтра. Процесс разряда продолжается в течение всего времени закрытия диода (до точки A2), при этом напряжение на конденсаторе, а значит, и на выходе детектора уменьшается. Начиная с точки A2, процесс повторяется.

Внутреннее сопротивление открытого диода значительно меньше сопротивления фильтра. Поэтому заряд конденсатора происходит быстрее, чем разряд, и конденсатор заряжается в каждом полупериоде входного напряжения почти до его амплитудного значения. Следовательно, напряжение на конденсаторе, а значит, и выходное напряжение повторяет по форме огибающую входного сигнала с определенным уровнем пульсаций.

Величина пульсаций определяется качеством фильтрации и зависит от постоянной времени фильтра  $\tau_u = RC$ , т.е. от времени заряда и разряда конденсатора. Для того чтобы детектирование осуществлялось с минимальными искажениями, требуется соблюдение определенного условия, связывающего постоянную времени фильтра с периодом  $T_0$  несущего колебания и периодом  $T_M$  модулирующего сигнала. Это условие имеет вид  $T_0 << \tau_u << T_M$ . При несоблюдении хотя бы одного из этих неравенств напряжение на конденсаторе не совпадает по форме с огибающей входного сигнала (рис.б).

В зависимости от амплитуды входного сигнала и вида характеристики нелинейного элемента различают два режима детектирования: квадратичный (режим слабых сигналов) и линейный (режим больших сигналов). В первом режиме работа детектора происходит в пределах нелинейного участка его характеристики, аппроксимируемой полиномом второй степени. Во втором режиме работа детектора происходит на линейном участке характеристики, что позволяет применить кусочно-линейную аппроксимацию.



<u>Квадратичное</u> детектирование.

При малом входном сигнале (десятки милливольт) работа детектора происходит в пределах нижнего сгиба вольт-амперной характеристики нелинейного элемента (рис.*a*),

которая с достаточной для практики точностью аппроксимируется полиномом второй степени  $i=a_0+a_1u+a_2u^2$ .

Если на вход детектора в этом режиме поступает амплитудномодулированный сигнал вида  $u(t) = U(t) cos \omega_0 t$ , то ток нелинейного элемента равен

$$i(t) = a_0 + a_1 U(t) \cos \omega_0 t + a_2 U^2(t) \cos \omega_0 t = a_0 + a_1 U(t) \cos \omega_0 t + \frac{a_2 U^2(t)}{2} + \frac{a_2 U^2(t)}{2} \cos 2\omega_0 t.$$

Высокочастотные составляющие с частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$  не проходят через низкочастотный фильтр на выходе детектора. Полезная информация содержится в низкочастотной составляющей, равной  $i_{\mu_4}(t) = a_0 + \frac{a_2 U^2(t)}{2}$ . Пропорциональность данной составляющей квадрату огибающей амплитудномодулированного сигнала определила название детектора в этом режиме – *квадратичный детектор*.

Для АМ-сигнала с тональной модуляцией  $u(t) = U_{H}(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_{0}t$  низкочастотная составляющая спектра тока будет равна

$$i_{_{H_{4}}}(t) = a_{0} + \frac{a_{2}U_{_{H}}^{2}}{2} \left[1 + \frac{m^{2}}{2}\right] + a_{2}U_{_{H}}^{2}\cos\Omega t + \frac{a_{2}U_{_{H}}^{2}m^{2}}{2}\cos2\Omega t .$$

В полученном выражении спектральные составляющие расположены в порядке возрастания их частот. Среди них имеется составляющая  $i_{\partial} = a_2 U_{\mu}^2 m \cos \Omega t$  с частотой  $\Omega$ , которая должна быть выделена низкочастотным фильтром.

Для выделения этой составляющей низкочастотный фильтр должен быть узкополосным. Если же модуляция не тональная и частота модулирующего сигнала изменяется в пределах от  $\Omega_{min}$  до  $\Omega_{max}$ , то фильтр должен иметь полосу пропускания  $\Delta\Omega = \Omega_{max} - \Omega_{min}$ , т.е. быть полосовым низкочастотным фильтром.

Постоянная составляющая тока отфильтровывается с помощью разделительного конденсатора, включаемого последовательно в цепь после детектора.

Составляющая с частотой 2Ω обусловливает НИ полезного сигнала, которые тем больше, чем больше коэффициент модуляции и меньше постоянная времени фильтра.

$I  a I I^2 m^2  m$	Следовательно,	коэффициен	іт нелинейных	искажений
КНИ: $\xi = \frac{I_2}{I} = \frac{a_2 O_{\mu} m}{A_{\mu} I I^2 m} = \frac{m}{A}$ .	квадратичного	детектора при	детектировании	АМ-сигнала с
$I_1  4a_2 U_{\mu} m  4$	тональной моду	ляцией зависит	от коэффициента	модуляции т.

Для малых *т* коэффициент нелинейных искажений невелик, для m=1 он может достичь величины 0,25, что представляет собой значительную величину. Уменьшение глубины модуляции с целью снижения искажений не выгодно с энергетической точки зрения.

Таким образом, выходной сигнал детектора при работе в режиме слабых сигналов пропорционален квадрату амплитуды АМ-сигнала. Именно поэтому, а также из-за значительных нелинейных искажений избегают такого режима детектирования в приемных трактах, применяя усиление до детектора.

<u>Линейное детектирование</u>. Нелинейные искажения, свойственные квадратичному детектору, могут быть уменьшены, если детектор будет работать с использованием линейной части характеристики диода. Амплитуда входного напряжения должна быть такой (порядка 1...1,5 В), чтобы рабочий участок располагался на линейном участке характеристики нелинейного элемента (см. рис.б). При этом можно воспользоваться кусочно-линейной аппроксимацией характеристики диода.

диода представляет собой периодическую последовательность Ток импульсов, модулированных по амплитуде. Напряжение на выходе детектора создается только постоянной составляющей тока, которая в данном случае не будет постоянной в полном смысле этого слова. Она будет изменяться по закону модуляции входного сигнала. Таким образом, выходной  $u_{\scriptscriptstyle Gbix}(t) = I_0(t)R = \alpha_0(\theta)I_m(t)R.$ детектора будет равен сигнала  $I_{m}(t) = S \left[ U(t) - u_{\text{\tiny Bbix}}(t) \right] = SU(t) \left[ 1 - u_{\text{\tiny Bbix}}(t) / U(t) \right].$ 

Учитывая, что входной АМ-сигнал равен  $u_{ex}(t) = U(t) cos \omega_0 t$  и  $u_{eblx}(t) = U(t) cos \theta$  при условии, что угол отсечки  $\theta$  является постоянной величиной, получаем

$$I_{m}(t) = S[U(t) - u_{gbix}(t)] = SU(t)(1 - \cos\theta)$$
(1)  
или  $u_{gbix}(t) = \alpha_{0}(\theta) RSU(t)(1 - \cos\theta).$ 

Таким образом, выходное напряжение детектора в этом режиме линейно зависит от амплитуды входного сигнала, если угол отсечки  $\theta$  – постоянная величина. Отсюда и его название – линейный детектор. Величина угла отсечки определяется только параметрами детектора и не зависит от амплитуды входного сигнала. Так как:

$$\alpha_{0}(\theta) = \frac{I_{0}}{I_{m}} = \frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1 - \cos\theta)}; I_{0}(t) = I_{m}(t)\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\pi(1 - \cos\theta)};$$

$$I_{0}(t) = \frac{1}{S}U(t)(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$
(2)

Учитывая (1), получим: →

В свою очередь:

$$\frac{U(t)}{u_{\text{вых}}(t) = I_0(t)R = U(t)\cos\theta.}$$
 Отсюда  $I_0(t) = \frac{U(t)}{R}\cos\theta.$  (3)

Приравняв (2) и (3) и разделив правую и левую часть на  $cos\theta$ ,  $tg\theta - \theta = \frac{\pi}{RS} =$ получаем: →



Крутизна ВАХ диода – это по существу величина, обратная внутреннему сопротивлению R<sub>i</sub> открытого диода. Таким образом, данное уравнение позволяет определить графическую зависимость отношения R<sub>i</sub>/R от угла отсечки θ (рис.).

(2)

Из графиков и полученного выражения следует, что угол отсечки  $\theta$  не зависит от амплитуды входного сигнала. Его величина определяется только величиной произведения RS. Чем меньше угол отсечки, тем больше отношение  $R/R_i$ .

#### 23. Схемы и принцип работы фазового и частотного модуляторов.

Фазовый модулятор (ФМ) – это устройство, формирующее высокочастотное колебание, фаза которого изменяется по закону модулирующего сигнала (рис.*a*).

*Частотный модулятор (ЧМ)* – это устройство, формирующее высокочастотное колебание, частота которого изменяется по закону модулирующего сигнала (рис.б).



модулирующий сигнал подается на модулятор через интегрирующую цепь (инт. цепь, рис.б).

Фазовые модуляторы. Изменение фазы несущего колебания по закону модулирующего сигнала наиболее просто осуществляется с помощью колебательного контура с перестраиваемой фазочастотной характеристикой. Управляя этой характеристикой с помощью модулирующего сигнала, можно изменять в определенных пределах фазу высокочастотного колебания, поступающего на контур. ФЧХ контура зависит от его параметров (индуктивности, емкости, сопротивления). Поэтому управление этой характеристикой можно осуществить, изменяя, например, величину емкости контура с помощью варикапа – параметрического плоскостного диода, барьерная емкость p-n-перехода которого зависит от обратного напряжения, приложенного к нему. Для осуществления процедуры модуляции на варикап необходимо подать модулирующий сигнал.



Схема такого фазового модулятора.

Для устранения паразитной амплитудной модуляции, вызванной неизбежной расстройкой контура относительно частоты несущего колебания, к выходу модулятора подключается усилитель-ограничитель.

Фаза выходного сигнала  $\phi_{Bblx}$  модулятора будет определяться изменением фазового сдвига контура  $\phi_{\kappa}$  по закону модулирующего сигнала  $u_{M}(t)$ , т.е.  $\varphi_{Bblx} \left[ u_{M}(t) \right] = \varphi_{\kappa} \left[ u_{M}(t) \right] + \varphi_{0}$ .

Индекс угловой модуляции определяется произведением амплитуды модулирующего сигнала  $U_{M}$  на крутизну модуляционной характеристики, равную  $S_{\phi} = d\varphi_{\kappa}(u)/du$ . Крутизна модуляционной характеристики зависит от добротности контура, порядка включения варикапа в контур (последовательно или параллельно емкости контура) и крутизны вольт-кулонной характеристики варикапа. При необходимости получить значительный индекс угловой модуляции  $\beta$  применяется умножитель частоты выходного сигнала.

Частотные модуляторы. Эффект частотной модуляции можно получить за счет электронного управления резонансной частотой контура в составе LC-генератора гармонических колебаний (рис.). Генератор собран по схеме резонансного усилителя с положительной обратной связью через высокочастотный трансформатор. Частота колебаний определяется резонансной частотой колебательного контура. Динамическое управление этой частотой осуществляется путем изменения емкости контура с помощью варикапа. Варикап подключен параллельно емкости контура, барьерная емкость его p-n-перехода изменяется под воздействием модулирующего сигнала.



Частота колебаний на выходе автогенератора определяется в основном резонансной частотой контура. Поэтому можно считать, что отклонение емкости на величину  $\Delta C$  приводит к изменению частоты на величину  $\Delta \omega$ .

 $C_0$  - емкость варикапа в рабочей точке (при отсутствии модулирующего напряжения);

$$Cko=Ck+C_0; \quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_kC_{ko}}};$$

$$\begin{split} \omega_{0} + \Delta \omega &= \frac{1}{\sqrt{L(C_{ko} + \Delta C)}} = \frac{1}{\sqrt{LC_{ko}}\sqrt{1 + \Delta C/C_{ko}}} \,. \end{split} \begin{array}{l} \mbox{Разделим левую и правую часть равенства на  $\omega_{0}$  и продолжим преобразования: \\ 1 + \frac{\Delta \omega}{\omega_{0}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta C/C_{ko}}}; \end{split} \qquad \Delta C \middle/ C_{ko} &= -\frac{2\Delta \omega/\omega_{0} + \Delta \omega^{2}/\omega_{0}^{2}}{\left(1 + \Delta \omega/\omega_{0}\right)^{2}} \,. \end{split}$$

Практика применения частотной модуляции при передаче сообщений показывает, что относительное изменение частоты, как правило, незначительно.

Так, например, в УКВ диапазоне величина  $\Delta \omega / \omega_0$  не превышает нескольких долей процента. В этом случае полученное выражение можно упростить:  $\Delta C / C_{ko} \approx -2\Delta \omega / \omega_0$ .

Таким образом, положительному приращению емкости соответствует отрицательное приращение частоты. Причем при малых относительных изменениях частоты имеется линейная зависимость между  $\Delta \omega$  и  $\Delta C$ . Следовательно, для получения частотной модуляции достаточно изменять емкость варикапа по закону модулирующего сигнала.

От величины напряжения, прикладываемого к варикапу, зависит также сопротивление его p-n-перехода. Это приводит к изменению добротности колебательного контура автогенератора, следствием чего является паразитная амплитудная модуляция формируемого ЧМ-колебания. Данный недостаток рассмотренного метода модуляции проявляется при значительных амплитудах модулирующего сигнала.

#### 24. Схемы и принцип работы фазового и частотного детекторов.

<u>Фазовые детекторы</u>. В основу построения фазовых детекторов положено определение разности фаз опорного напряжения  $u_{on}(t)=U_{on}cos\omega_0 t$  и фазомодулированного колебания  $u_{ex}(t)=U_{\mu}cos[\omega_0 t+\phi(t)]$ .



← Схема *фазового детектора на диоде* и векторная диаграмма, поясняющая принцип формирования выходного напряжения.

Диод VD и низкочастотный фильтр RC образуют по существу схему, подобную схеме амплитудного детектора.

Схема фазового детектора характеризуется тем, что на диод воздействует сумма двух напряжений одинаковой частоты: опорного и фазомодулированного, т.е.  $u_{\partial}(t) = U_{on} cos\omega_0 t + U_{\mu} cos[\omega_0 t + \phi(t)]$ . Выходное напряжение ФД будет равно  $U_{\phi\partial}(\phi) = KU_{\partial}(\phi)$ , где K – коэффициент передачи низкочастотного фильтра,  $U_{\partial}(\phi)$  – амплитуда суммарного сигнала, воздействующего на диод. Величину  $U_{\partial}(\phi)$  легко определить по векторной диаграмме:



 $U_{\partial}(\varphi) = \sqrt{U_{on}^{2} + U_{H}^{2} + 2U_{on}U_{H}\cos\varphi} . \quad \text{ Тогда} : U_{\phi\partial}(\varphi) = K\sqrt{U_{on}^{2} + U_{H}^{2} + 2U_{on}U_{H}\cos\varphi} .$ 

Зависимость выходного напряжения детектора от разности фаз входных колебаний называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ). Вид характеристики представлен на рис.

Недостатком данной схемы фазового детектора является нелинейность АФХ, наличие большого количества спектральных составляющих тока нелинейного элемента, которые необходимо отфильтровывать.

← Балансный фазовый детектор.

Схема состоит по существу из двух детекторов на диодах. Опорное напряжение на диоды поступает в фазе, сигнальное – в противофазе а выходное напряжение формируется как результат встречного включения выходных напряжений.

Для данной схемы на диоды подаются следующие напряжения:  $u_{\partial I}(t) = U_{on} cos \omega_0 t + U_{\mu} cos [\omega_0 t + \phi(t)];$   $u_{\partial 2}(t) = U_{on} cos \omega_0 t - U_{\mu} cos [\omega_0 t + \phi(t)].$  Амплитуды этих напряжений определяются выражениями:

$$U_{\partial 1}(\varphi) = \sqrt{U_{on}^{2} + U_{\mu}^{2} + 2U_{on}U_{\mu}\cos\varphi}; \quad U_{\partial 2}(\varphi) = \sqrt{U_{on}^{2} + U_{\mu}^{2} - 2U_{on}U_{\mu}\cos\varphi}.$$

Тогда напряжение на выходе ФД равно:

$$U_{\phi \partial}(\varphi) = K U_{on} \left( \sqrt{1 + n^2 + 2n \cos \varphi} - \sqrt{1 + n^2 - 2n \cos \varphi} \right), n = U_{H} / U_{on}.$$

Таким образом, выходное напряжение детектора зависит не только от разности фаз, но и от амплитуд опорного и сигнального напряжений. На практике ФД работают обычно при соотношениях n=1 и n<<1.

При $n=1$ выражение для выходного на преобразуется к виду: $\rightarrow$	апряжения ФД	$U_{\phi\partial}(\varphi) = 2KU_{on}\left(\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right).$
В то же время при $n << 1 \rightarrow$	$U_{\phi\partial}(\varphi) \approx K$	$U_{on}\left(\sqrt{1+2n\cos\varphi}-\sqrt{1-2n\cos\varphi}\right).$

Графики  $U_{\phi \partial}(\phi)$  при n=1 и n << 1 приведены на рис. При n=1 АФХ фазового детектора отличается повышенной линейностью.



С позиции спектрального анализа данный факт объясняется тем, что основная часть паразитных составляющих спектра тока нелинейного элемента компенсируют друг друга (в силу противофазности сигнального напряжения на нелинейных элементах и принципа формирования выходного

напряжения в виде разности напряжений низкочастотных фильтров на выходе ФД), что повышает результативность фильтрации.

<u>Частотные детекторы</u>. Непосредственное преобразование частотно-модулированного сигнала с помощью нелинейных элементов не приводит к формированию тока, в спектре которого содержатся составляющие с частотой модулирующего сигнала. Требуются дополнительные преобразования ЧМ-сигнала, чтобы в заключение сформировать сигнал, отражающий характер изменения его частоты. Наиболее часто процесс частотного детектирования реализуют в два этапа: преобразование ЧМ-сигнала в сигнал с амплитудной модуляцией и последующее его детектирование с помощью амплитудного детектора.



← Схема частотного детектора с расстроенным Усилитель-ограничитель контуром. ЭТО резонансный усилитель, транзистор которого работает пониженным напряжением с коллекторного Ограничение питания. происходит за счет нижней и верхней отсечек коллекторного тока. В качестве преобразователя ЧМ-сигнала в колебания с изменяющейся по закону модулирующего сигнала амплитудой

служит колебательный контур. Диодный амплитудный детектор на выходе выделяет огибающую этого колебания.



Колебательный контур расстроен относительно несущей частоты входного сигнала на величину Δω, благодаря чему является чувствительным элементом к изменению частоты входного сигнала.

Ha рис. изображена резонансная характеристика контура ПО напряжению  $U_{\kappa}(\omega),$ изменяющаяся частота входного сигнала  $\omega(t)$ И напряжение  $U_{\kappa}(t),$ характеризующее изменение ампл. колебаний в контуре.

Колебательный контур обеспечивает формирование колебаний с изменяющейся амплитудой. Закон изменения амплитуды тем точнее повторяет закон изменения частоты входного сигнала (с учетом фазового сдвига на  $\pi$ ), чем прямолинейнее боковая ветвь резонансной характеристики контура. Амплитудный детектор выделяет огибающую  $U_{\kappa}(t)$ , формируя выходной сигнал с законом изменения, соответствующим закону частотной модуляции, т.е. сигнал  $U_{uo}(\omega)$ .

Недостатком такой схемы частотного детектора является малый линейный участок резонансной характеристики колебательного контура, что ограничивает возможность

детектирования сигналов с большой девиаций частоты. Этот недостаток устраняется в балансных частотных детекторах.



← Схема балансного ЧД с двумя параллельными расстроенными контурами и его характеристика

Особенностью данного ЧД является относительная сложность его настройки с целью обеспечения равенства коэффициентов передачи амплитудных детекторов и параметров усилителей.



 $\leftarrow$ Используется также балансный детектор со связанными контурами. Он состоит (рис.) из усилителя, нагрузкой которого является система двух связанных контуров  $L_1C_1$  и  $L_2C_2$ . Они образуют двухконтурный полосовой фильтр, настроенный несущего частоту на колебания, помощью которого с осуществляется преобразование частотной модуляции в амплитудную.

Усилитель работает в режиме амплитудного ограничения. Между контурами установлена индуктивная связь. Кроме того, с помощью сравнительно большой емкости *С*<sub>*p1*</sub> первый контур связан со средней точкой второго контура.

В результате на амплитудные детекторы подаются два напряжения. Напряжение  $U_{m1}$  с контура  $L_1C_1$  через среднюю точку второго контура поступает на амплитудные детекторы в фазе, а напряжение  $U_{m2}$ , передаваемое индуктивной связью, – в противофазе. Таким образом, амплитуды напряжений на диодах VD1 и VD2 будут равны соответственно  $U_{d1}=U_{m1}+U_{m2}/2$  и  $U_{d2}=U_{m1}-U_{m2}/2$ . Напряжение на выходе схемы будет равно  $U_{d0}=K(U_{d1}-U_{d2})$ .

Особенностью связанных контуров является тот факт, что фазовые соотношения между напряжениями на первом и втором контурах зависят от соотношения частоты поступающего сигнала  $\omega_c$  и резонансной частоты двухконтурного полосового фильтра  $\omega_p$ .



Если  $\omega_c = \omega_p$ , то напряжение на втором контуре отстает от напряжения на первом контуре на 90<sup>0</sup>. Если  $\omega_c > \omega_p$ , то сопротивление второго контура носит емкостный характер и сдвиг по фазе между напряжениями на контурах возрастает на величину  $\phi = arctg\alpha$ , где

где  $\alpha = 2(\omega_c - \omega_p)Q/\omega_p$  – обобщенная расстройка контура. Если  $\omega_c < \omega_p$ , то сопротивление второго контура носит индуктивный характер и сдвиг по фазе между напряжениями на контурах уменьшается на величину *arctga*. ВД амплитуд сигналов для этих случаев на рис.

## 25. Необходимость и методы преобразования частоты. Балансный преобразователь частоты.

Преобразование частоты сигнала – это процесс, который обеспечивает линейный перенос спектра сигнала на оси частот без изменения его структуры. Огибающая сигнала и его начальная фаза при этом не изменяются. Преобразование частоты сопровождается появлением новых составляющих спектра, т.е. приводит к обогащению спектра сигнала. Поэтому такой процесс можно реализовать только с использованием нелинейного или параметрического устройств, обеспечивающих умножение преобразуемого сигнала на вспомогательное гармоническое колебание с последующим выделением необходимой области частот.

Действительно, если на вход умножителя подать два сигнала:  $u_{ex}(t) = U(t)cos[\omega_0 t + \phi(t)]$  и  $u_{ex}(t) = U_{ex}cos(\omega_e t + \phi_e)$ , то на выходе получим сигнал суммарной и разностной частот:

$$u_{\scriptscriptstyle GbLX}(t) = \frac{KU(t)U_{\Gamma}}{2} \Big\{ \cos\Big[ \big(\omega_0 + \omega_{\Gamma}\big)t + \varphi(t) + \varphi_{\Gamma} \Big] + \cos\Big[ \big(\omega_0 - \omega_{\Gamma}\big)t + \varphi(t) - \varphi_{\Gamma} \Big] \Big\},$$

где К – коэффициент передачи умножителя.



Выходной фильтр, настроенный, например на разностную частоту, выделит составляющую разностной (промежуточной) частоты. Такое нелинейное устройство называют *смесителем*, а источник гармонического колебания – *гетеродином*.

Преобразование частоты применяется в супергетеродинных приемниках для получения сигнала с промежуточной частотой. Величина промежуточной частоты  $f_{np}$  должна быть таковой, чтобы без особых затруднений достигалось большое усиление при высокой избирательности приемника. Преобразование частоты сигнала используется также в приемниках радиолокационных станций, в измерительной технике (анализаторах спектра, генераторах и др.).

Процесс преобразования частоты реализуется путем умножения преобразуемого сигнала на вспомогательное гармоническое колебание с последующим выделением необходимой области частот. Это можно сделать двумя способами, которые положены в основу построения практических схем преобразователей частоты:

1.Сумма двух напряжений (полезного сигнала и сигнала гетеродина) подается на нелинейный элемент с последующим выделением необходимых составляющих спектра тока. В качестве нелинейных элементов используются диоды, транзисторы и другие элементы с нелинейной характеристикой.

2.Напряжение гетеродина используется для изменения какого-либо параметра смесителя (крутизны ВАХ транзистора, реактивного параметра цепи). Полезный сигнал, подаваемый на вход такого смесителя, преобразуется с соответствующим обогащением спектра.



← *Одноконтурный ПЧ на диоде*. На нелинейный элемент подается напряжение:

$$u(t) = u_{ex}(t) + u_{\Gamma}(t) =$$
$$= U(t) \cos \left[ \omega_0 t + \varphi(t) \right] + U_{\Gamma} \cos \left( \omega_{\Gamma} t + \varphi_{\Gamma} \right)$$

Аппроксимируем ВАХ диода полиномом второй степени:  $i=a_0+a_1u+a_2u^2$ . Ток диода представим:

 $i(t) = a_0 - a_1 u_{ex}(t) + a_1 u_{\Gamma}(t) + a_2 u_{ex}^2(t) + a_2 u_{\Gamma}^2(t) 2a_2 u_{ex}(t) u_{\Gamma}(t)$ . Основное значение имеет последнее слагаемое. Именно оно свидетельствует о наличии в спектре тока составляющих с преобразованными частотами  $\omega_0 + \omega_c$  и  $\omega_0 - \omega_c$ :

$$2a_{2}u_{ex}(t)u_{\Gamma}(t) = 2a_{2}U(t)\cos\left[\omega_{0}t + \varphi(t)\right]U_{\Gamma}\cos\left(\omega_{\Gamma}t + \varphi_{\Gamma}\right) =$$
$$= a_{2}U(t)U_{\Gamma}\cos\left[(\omega_{0} + \omega_{\Gamma})t + \varphi(t) + \varphi_{\Gamma}\right] + a_{2}U(t)U_{\Gamma}\cos\left[(\omega_{0} - \omega_{\Gamma})t + \varphi(t) - \varphi_{\Gamma}\right]$$

Фильтр на выходе ПЧ должен выделить одну составляющую из семи. Полагая, что фильтр настроен на разностную (промежуточную) частоту  $\omega_{np} = \omega_0 - \omega_c$ , получим напряжение на выходе преобразователя, равное  $u_{\text{вых}}(t) = i(t)R_0 = a_2U(t)U_{\Gamma}R_0\cos\left[(\omega_0 - \omega_{\Gamma})t + \varphi(t) - \varphi_{\Gamma}\right].$ 

Таким образом, избирательная система должна иметь такую полосу пропускания, чтобы отфильтровать все ненужные (паразитные) составляющие.



 $u_{BX}(t)$ 

где

 $i_4(t$ 

← Балансные схемы обеспечивают самоликвидацию (компенсацию) ненужных составляющих. Выходное напряжение равно:

$$u_{\rm galax}(t) = u_1(t) - u_2(t) = [i_1(t) - i_2(t)]R \qquad (1)$$

$$i_{1}(t) = a_{0} + a_{1}u_{ex}(t) + a_{1}u_{\Gamma}(t) + a_{2}u_{ex}^{2}(t) + a_{2}u_{\Gamma}^{2}(t) + 2a_{2}u_{ex}(t)u_{\Gamma}(t);$$

 $i_{2}(t) = a_{0} - a_{1}u_{ex}(t) + a_{1}u_{\Gamma}(t) + a_{2}u_{ex}^{2}(t) + a_{2}u_{\Gamma}^{2}(t) - 2a_{2}u_{ex}(t)u_{\Gamma}(t)$ . При получении выражения для  $i_2(t)$  учтено, что напряжение сигнала подается на диоды схем в противофазе, а напряжение гетеродина – в фазе.

Подставляя выражения для  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$  в формулу (1), получаем:

$$u_{\scriptscriptstyle Gbix}(t) = \left\{ 2a_{\scriptscriptstyle I}U(t)\cos\left[\omega_{\scriptscriptstyle 0}t + \varphi(t)\right] + 2a_{\scriptscriptstyle 2}U(t)U_{\scriptscriptstyle \Gamma}\cos\left[(\omega_{\scriptscriptstyle 0} + \omega_{\scriptscriptstyle \Gamma})t + \varphi(t) + \varphi_{\scriptscriptstyle \Gamma}\right] + 2a_{\scriptscriptstyle 2}U(t)U_{\scriptscriptstyle \Gamma}\cos\left[(\omega_{\scriptscriptstyle 0} - \omega_{\scriptscriptstyle \Gamma})t + \varphi(t) - \varphi_{\scriptscriptstyle \Gamma}\right] \right\}R.$$

Видно, что на выходе балансного преобразователя отсутствуют составляющие с частотами, равными 0,  $\omega_{c}$ ,  $2\omega_{0}$ ,  $2\omega_{c}$ , что упрощает решение задачи получения выходного сигнала необходимой частоты. Тем не менее к выходу такого преобразователя также необходимо подключать избирательную систему с целью фильтрации сигнала с требуемой частотой.

u<sub>BMX</sub>(t)

R

VD4

Балансный преобразователь  $\leftarrow$ (рис.) представляет собой схему, совмещающую два балансных преобразователя. На диоды различных ветвей подаются напряжения гетеродина различными сигнала И С фазами. Работа такого преобразователя поясняется следующими формулами:

$$\begin{aligned} & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + u_3(t) - u_4(t) = \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \end{aligned}$$
(2)  

$$& = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_4(t) + i_4(t) + i_4(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_4(t) + i_4(t) + i_4(t) + i_4(t) + i_4(t) \end{bmatrix} R \\ & = \begin{bmatrix} i_1(t) - i_2(t) + i_4(t) + i_4$$

Подставляя выражения для  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  и  $i_4(t)$  в формулу (2), получаем:  $u_{\scriptscriptstyle GbLX}(t) = \left\{ 4a_2 U(t) U_{\Gamma} \cos\left[ (\omega_0 + \omega_{\Gamma}) t + \varphi(t) + \varphi_{\Gamma} \right] + 4a_2 U(t) U_{\Gamma} \cos\left[ (\omega_0 - \omega_{\Gamma}) t + \varphi(t) - \varphi_{\Gamma} \right] \right\} R.$ 

На выходе преобразователя отсутствует составляющая с частотой сигнала  $\omega_0$ (составляющие с частотами 0,  $\omega_{c}$ ,  $2\omega_{0}$ ,  $2\omega_{c}$  также отсутствуют). Фильтр на выходе такого преобразователя должен выделить одну составляющую из двух.

## 26. Общие характеристики цепей с переменными параметрами. Энергетические соотношения в цепях с переменной емкостью.

Параметрическая цепь – это цепь с переменными во времени параметрами. В составе таких цепей имеются параметрические элементы. Параметрический элемент – это элемент цепи, основные параметры которого изменяются во времени по определенному закону.

Существуют резистивные и реактивные параметрические элементы.

Для резистивного параметрического элемента R(t): $U_R(t) = R(t) \cdot I(t)$ ; $i(t) = G(t) \cdot U_R(t)$ .Для реактивного параметрического элемента C(t): $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C(t) \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) \frac{dC(t)}{dt}$  $U_c(t) = \frac{q(t)}{C(t)} = \frac{1}{C(t)} \int i(t) dt$ 

Для реактивного параметрического элемента L(t):

 $\Phi(t) = L(t) \cdot i(t)$  магнитный поток.

$$U_L(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L(t)\frac{di(t)}{dt} + i(t)\frac{dL(t)}{dt}$$
закон электромагнитной индукции Фарадея.

Таким образом ток через параметрические элементы изменяется только за счет изменения напряжения, а также за счет изменения параметра. За счет изменения параметров изменяется также спектр анализируемого сигнала. С помощью параметрических цепей можно организовать операции, которые сопровождаются обогащением спектра.

Параметрическая цепь обладает ещè одним свойством: для изменения параметра элемента используется специальный источник колебаний, т.е. дополнительный источник энергии. Благодаря этому в цепь (при опред. условиях) может вносится дополнительная энергия, т.е. происходит накачка энергии.  $e_n(t) = E_n \cos(\omega_n t + \gamma)$ .

Наиболее часто применяют переменную ѐмкость C(t), реализуемую с помощью параметрического диода – варикапа. У таких диодов барьерная ѐмкость зависит от обратного напряжения.

Соблюдая соответствующие фазовые соотношения (баланс фаз) и изменяя емкость на определенную величину (баланс амплитуд), в параметрической цепи можно реализовать эффект усиления либо генерации.

#### Энергетические соотношения в цепях с переменной емкостью.

*Мощность в контуре с переменной ѐмкостью.* Для изменения емкости наиболее часто используют напряжение в виде гармонического сигнала. Если напряжение накачки  $U_{\mu}(t) = U_{\mu} \cos(\omega t + \varphi)$ , то  $C(t) = \frac{C_0}{1 + m\cos(\omega t + \varphi)}$ ,  $m = \frac{\Delta C}{C_0}$ . Определим мощность:

$$W = \frac{CU^2}{2}$$
  $P = \frac{dW}{dt} = \frac{U^2}{2}\frac{dC}{dt} + CU\frac{dU}{dt} = P_c + P_u$  Вывод: При увеличении  $C$  увеличивается мощность.

Энергия, вносимая в контур при изменении емкости. Пусть  $C(t) = C_0 [1 - m\cos(\omega_{\mu}t + \varphi)]$ ,  $U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Для соблюдения фазовых соотношений необходимо, чтобы частота накачки и собственных колебаний контура удовлетворяла условия  $\omega_{\mu} = 2\omega_0$ . Учтем это и определим энергию, вносимую в контур за счёт изменения ёмкости в течении одного периода собственных колебаний  $T = 2\pi/\omega_0$ :

$$W = \int_{0}^{T} P_{c} dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{T} U^{2} \left( \frac{dC}{dt} \right) dt = \frac{1}{8} U_{0}^{2} \omega_{\mu} \Delta CT \sin \varphi \qquad \begin{array}{c} \text{T.K. } \omega_{\mu} = 2\omega_{0} \, . \\ \text{B итоге получим:} \end{array} \qquad W_{c} = \frac{1}{4} U_{0}^{2} \omega_{0} \Delta CT \sin \varphi \, .$$

Анализ данной формулы позволяет сделать выводы:

1) Энергия, вносимая в контур при изменении емкости может быть как положительной так и отрицательной в зависимости от соотношения фаз.

2) При уменьшении емкости  $\Delta C < 0$  энергия вносимая будет положительна, если  $sin \varphi < 0$ .

3) Максимальная энергия будет вноситься, если  $sin\varphi = -1$ , т.е.  $W_c = \left| -\frac{\pi}{2} U_0^2 \Delta C \right|$ 

4) Энергия, вносимая в контур, имеет постоянное значение, и зависит от амплитуды колебаний контура и девиаций частоты.

Баланс фаз:  $\varphi = \pi/2$ ;  $\omega_{\mu} = 2\omega_0$ .

Определение глубины модуляции. Определим критичное значение глубины модуляции. Известно, что при Wc=const вносимая мощность за период T собственных колебаний контура равна Pc=Wc/T. Следовательно,

$$P_c = \frac{\pi}{2} U_0^2 \Delta C \sin \left/ T = \frac{1}{4} U_0^2 \omega_0 \Delta C \sin \varphi \right.$$

В свою очередь известно, что  $P = UI = U^2 G = U_0^2 G/2$ , где G – проводимость. Сравнивая данное выражение с предыдущей формулой, можно записать%

$$G_c = \frac{1}{2}\omega_0 \Delta C \sin \varphi.$$

При ф=-п/2 получаем:

$$G_c = -\frac{1}{2}\omega_0 \Delta C$$
, или  $G_c = -\frac{1}{2}m\omega_0 C_0$ 

Отрицательная проводимость характеризует приток энергии от источника накачки, при этом в контур вносится дополнительное затухание:

$$d_{\rm GH} = \frac{1}{Q_c} = \frac{1}{R_c/\rho} = \frac{\rho}{R_c} = \rho G_c = \frac{1}{\omega_0 C_0} \cdot \frac{-m\omega_0 C_0}{2} = -\frac{m}{2}$$

Для возбуждения колебаний необходимо, чтобы соблюдалось неравенство  $|d_{en}| \ge d$ , где d – затухание контура. Следовательно, можно определить предельное значение глубины модуляции емкости  $|m_{\kappa p}| = 2d$ .

#### 27. Основные свойства параметрической цепи. Схема одноконтурного параметрического усилителя. Пояснить принцип работы, достоинства и недостатки.

Соблюдая соответствующие фазовые соотношения (даланс фаз) и изменяя емкость на определенную величину (баланс амплитуд), в параметрической цепи можно реализовать эффект усиления либо генерации.

Простейшая схема одноконтурного параметрического усилителя и его эквивалентная схема.



Напряжение смещения  $U_0$  обеспечивает выбор рабочей точки на вольт-фарадной характеристике варикапа, разделительные конденсаторы  $C_{p1}$  и  $C_{p2}$  защищают источник сигнала и генератор накачки от постоянного напряжения смещения, дроссель  $L_{\partial p}$  – преграждает путь поступления токов ВЧ в цепь источника  $U_0$ .

В синхронном режиме, когда  $\omega_{H}=2\omega_{0}$ , а значит, комбинационная частота  $\omega_{\kappa}=\omega_{H}-\omega_{0}=\omega_{0}$ , в контуре существуют колебания только с частотой  $\omega_{0}$ . Для этого случая представлена эквивалентная схема, в которой источник напряжения сигнала, включенный в контур последовательно, заменен генератором тока, подключенным параллельно контуру, с внутренней проводимостью  $G_{i}$ . Проводимость  $G_{H}$  включает проводимость нагрузки и контура. Существенным параметром рассматриваемой эквивалентной схемы является эквивалентная

проводимость  $G_{_{3\kappa}}$ , обеспечиваемая переменной емкостью. Она равна  $G_{_{3\kappa}} = -\frac{1}{2}\omega_0\Delta C\sin\varphi$ . При  $\varphi = -\pi/2$  получаем:

Отрицательная проводимость уменьшает общую проводимость нагрузки, что обуславливает эффект усиления.

Определим коэффициент усиления такого усилителя. При этом считаем, что коэффициент усиления определяется отношением мощности сигнала на выходе усилителя с переменной емкостью к максимальной мощности сигнала на выходе усилителя при отсутствии напряжения накачки.

1. Активная мощность в цепи с гармоническим током и напряжением равна:

$$P_c = UI = U^2 G = \frac{I^2}{G},$$

где *I* и *U* – действующие значения тока и напряжения в цепи; *G* – активная проводимость цепи.

Для рассматриваемой схемы максимальная мощность (при отсутствии модуляции ескости) будет выделяться на нагрузке при  $G_n = G_i$ . Следовательно,

$$P_c = UI_1 = U^2 G_{\mu}$$

Здесь *U* – действующее значение напряжения на зажимах источника сигнала; *I*<sub>1</sub> – действующее значение тока в цепи нагрузки.

Учитывая, что напряжение равно  $U = \frac{I}{G_{_{H}} + G_{_{i}}} = \frac{I}{2G_{_{H}}}$ , где I – ток источника сигнала,

получаем

$$P_{c} = \frac{I^{2}G_{H}}{4G_{H}^{2}} = \frac{I^{2}}{4G_{H}}$$

2. При наличии дополнительной проводимости, обусловленной переменной емкостью, мощность выходного сигнала будет выделятсья на проводимости  $G=2G_{H}+G_{3K}$ . Следовательно, мощность, выделяемая в нагрузке параметрического усилителя, будет равна

Таким образом,

$$K_{p} = \frac{P_{yc}}{P_{c}} = \frac{1}{\left(1 + G_{y\kappa}/2G_{\mu}\right)^{2}}$$

Анализ полученного выражения:

1) Эффект усиления определяется соотношением между  $G_{3\kappa}$  и  $G_{H}$ . Так, например, при  $|G_{3\kappa}|=G_{H}$ , т.е. при изменении емкости, обеспечивающей компенсацию потерь только в нагрузке, усиление по мощности равно только 4.

2) Если эквивалентная проводимость полностью компенсирует сумму проводимостей источника сигнала и нагрузки, т.е.  $|G_c|=2G_{H}$ , то параметрический усилитель становится неустойчивым и самовозбуждается (заметим, что  $G_{3\kappa}<0$ ).

3) Условие устойчивости усилителя  $|G_{_{3\kappa}}| < 2G_{_{H}}$ . Это значит, что  $\frac{1}{2}m\omega_{_{0}}C_{_{0}} < 2G_{_{H}}$ . Тогда

$$m_{\kappa p} = \frac{4G_{\mu}}{\omega_0 C_0} = 2\frac{2G_{\mu}}{\omega_0 C_0} = 2d,$$

где *d* – затухания контура.

Практическая реализация одноконтурного усилителя затруднена в силу того, что реальный сигнал имеет фазу, изменяющуюся по случайному закону, и частоту, изменяющуюся в некоторой полосе. Это затрудняет соблюдение условий синхронного режима между сигналом и напряжением накачки.

Одним из способов, позволяющим избежать этих трудностей, является использование такой схемы параметрического усилителя, в которой вносимая проводимость при изменении емкости не зависит от соотношения фаз сигнала и напряжения накачки. Данному условию удовлетворяет двухконтурный параметрический усилитель.

28. Структурная схема автогенератора гармонических колебаний. Баланс амплитуд и баланс фаз, условия самовозбуждения и работы автогенератора.

Автогенератор гармонических колебаний преобразует энергию питания источника В энергию колебаний. Процесс такого преобразования сопровождается спектральными изменениями, которые возможны только при использовании нелинейных устройств.



В свою очередь автогенератор должен содержать в своей структуре цепи, обеспечивающие возникновение, усиление и поддержание на соответствующем уровне гармонических колебаний определенной частоты. Это возможно реализовать при использовании избирательных цепей и обратных связей, осуществляющих компенсацию потерь энергии в нагрузке автогенератора.

Таким образом, общую структурную схему автогенератора гармонических колебаний можно представить в виде рис. В качестве нелинейного и усиливающего устройства можно применить нелинейный усилитель. Избирательная цепь может быть построена с использованием различных фильтров. Цепь обратной связи пассивная и линейная. Следовательно, автогенератор – это по существу нелинейный усилитель, охваченный положительной обратной связью.

Принцип работы автогенератора рассмотрим от момента возникновения и нарастания колебаний до установления стационарного режима.

При включении источника питания в цепях генератора возникают свободные колебания. Эти колебания усиливаются, причем процесс усиления происходит непрерывно, благодаря наличию положительной обратной связи. Усилитель при этом выступает в роли устройства, регулирующего поступление энергии в нагрузку.

На начальном этапе, когда амплитуда колебаний мала, усиление происходит в линейном режиме. Усилитель передает в нагрузку за один период колебаний энергию, большую, чем энергия потерь. Благодаря этому происходит нарастание амплитуды колебаний на выходе генератора, т. е. генератор работает в так называемом переходном режиме.

По мере нарастания амплитуды колебаний начинает проявляться нелинейность вольтамперной характеристики усилительного элемента и усиление уменьшается. При ЭТОМ замедляется нарастание амплитуды колебаний. Нарастание амплитуды прекращается, когда усиление уменьшится до уровня, при котором усилитель передает в нагрузку энергию, равную энергии потерь. В генераторе устанавливается стационарный при режим, котором формируются колебания с постоянной амплитудой (рис.). Следовательно, для стационарного режима основную роль играет нелинейность системы.



Коэффициент передачи нелинейного усилителя на частоте генерируемого напряжения зависит от амплитуды входного напряжения и определяется выражением

$$\dot{K}_{y}(U_{ex}) = \frac{\dot{U}_{eblx}}{\dot{U}_{ex}},$$

где  $\dot{U}_{_{gx}}$  и  $\dot{U}_{_{gux}}$  – комплексные амплитуды напряжений на входе и выходе усилителя.

В свою очередь коэффициент передачи цепи обратной связи равен

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{U}_{oc}}{\dot{U}_{gbix}} = \frac{\dot{U}_{gx}}{\dot{U}_{gbix}}$$

Очевидно, что в стационарном режиме соблюдается равенство

$$\dot{K}_{y}(U_{gx})\cdot\dot{\beta} = \frac{U_{gblx}}{\dot{U}_{gx}}\cdot\frac{U_{gx}}{\dot{U}_{gblx}} = 1$$

Учитывая, что коэффициенты передачи усилительного звена и цепи обратной связи являются комплексными величинами, последнее равенство можно представить в виде следующих двух равенств:

$$K_{v}(U_{ex}) \cdot \beta = 1; \qquad \varphi_{v} + \varphi_{oc} = 2\pi n,$$

где  $K_y(U_{ex})$ ,  $\beta$  – коэффициенты усиления усилителя и цепи обратной связи на частоте генерируемых колебаний;

 $\varphi_y$  и  $\varphi_{oc}$  — фазовые сдвиги сигналов, обеспечиваемые усилителем и цепью обратной связи на частоте генерируемых колебаний.

Данные равенства называются балансом амплитуд и балансом фаз.

В переходном режиме баланс амплитуд имеет вид  $K_y(U_{ex}) \cdot \beta > 1$ , так как только в этом случае возможно нарастание амплитуды выходного напряжения.

28. Структурная схема автогенератора гармонических колебаний. Баланс амплитуд и баланс фаз, условия самовозбуждения и работы автогенератора.



← Структурная схема АГ. Коэффициент усиления усилителя с ограничением амплитуды:

 $\mathbf{K}_{v}(i\omega_{r}, U_{1}) = \mathbf{U}_{2}/\mathbf{U}_{1}.$  (9.1)

При фиксированной частоте  $\omega_{\Gamma}$  $K_y$  является функцией только амплитуды U<sub>1</sub>.

(9.1')

Коэффициент передачи линейного четырехполюсника обратной связи, который в дальнейшем будем называть просто коэффициентом обратной связи, можно выразить через амплитуды  $U_3$  и  $U_2$ :

$$\mathbf{K}_{\rm oc}(i\omega) = \mathbf{U}_3 / \mathbf{U}_2.$$

Но напряжение  $U_3$ , снимаемое с выхода четырехполюсника обратной связи, есть одновременно напряжение  $U_1$ , действующее на входе усилителя. Следовательно,

$$\mathbf{K}_{\rm oc}(i\omega) = \mathbf{U}_1 / \mathbf{U}_2.$$

Сравнивая это выражение с (9.1), приходим к выводу, что в стационарном режиме автогенератора (когда только и можно пользоваться методом комплексных амплитуд) коэффициенты  $K_y(i\omega_r, U_1)$  и  $K_{oc}(i\omega)$  являются взаимно обратными величинами:

 $\mathbf{K}_{\mathrm{y}}(i\omega_{\mathrm{r}}, \mathbf{U}_{1})\mathbf{K}_{\mathrm{oc}}(i\omega_{\mathrm{r}}) = 1.$ 

Представим комплексные функции  $K_y(i\omega_r, U_1)$  и  $K_{oc}(i\omega_r)$  в форме

$$\mathbf{K}_{\mathbf{y}}(i\omega_{\mathbf{r}}, U_{1}) = K_{\mathbf{y}}(\omega_{\mathbf{r}}, U_{1})e^{i\varphi_{\mathbf{y}}(\omega_{\mathbf{r}})}, \ \mathbf{K}_{\mathbf{oc}}(i\omega_{\mathbf{r}}) = K_{\mathbf{oc}}(\omega_{\mathbf{r}})e^{i\varphi_{\mathbf{oc}}(\varphi_{\mathbf{r}})}.$$

Тогда последнее равенство распадается на два условия:

$$K_{\rm y}(\omega_{\rm r}, U_1)K_{\rm oc}(\omega_{\rm r}) = 1, \qquad (9.2)$$

$$\varphi_{\rm v}(\omega_{\rm r}) + \varphi_{\rm oc}(\omega_{\rm r}) = 2\pi n. \tag{9.3}$$

Условие (9.2) называют условием баланса амплитуд: из него следует, что в стационарном режиме полное усиление на генерируемой частоте при обходе кольца обратной связи равно единице.

Условие (9.3) называют условием баланса фаз. Из него следует, что в стационарном режиме автоколебаний полный фазовый сдвиг при обходе кольца ОС равен (или кратен)  $2\pi$ . Условие баланса фаз позволяет определить частоту генерируемых колебаний  $\omega_r$ .

Для установления перечисленных общих свойств автогенератора нам не требовалось уточнять ни тип усилительного элемента, ни вид схемы автогенератора. Это объясняется тем, что мы ограничились рассмотрением стационарного режима автогенератора. Для выясне-ния же механизма возникновения колебаний, а также механизма установления стационарного режима необходимо исходить из конкретного электронного прибора и конкретной схемы автогенератора.

Основное условие самомвозбуждения автогенератора:

$$K_{\rm oc} > 1/K_{\rm y}$$
. (9.13')

К полученному результату можно также прийти, рассматривая автогенератор на начальном этапе запуска как линейный усилитель с положительной обратной связью. При  $K_{oc}K_{y} > 1$  такой усилитель является неустойчивой цепью.

В момент запуска в колебательной цепи автогенератора возникают свободные колебания, обусловленные включением источников питания, замыканием цепей, электрическими флуктуациями и т. д. Благодаря положительной обратной связи эти первоначальные колебания

усиливаются, причем на первом этапе, пока амплитуда мала, усиление практически линейно и цепь можно рассматривать как линейную. Энергетически процесс нарастания амплитуд объясняется тем, что за один период колебания усилитель передает в нагрузку энергию, большую той, которая расходуется в ней за это время. С ростом амплитуд начинает проявляться нелинейность устройства (кривизна вольт-амперной характеристики усилительного элемента) и усиление уменьшается. Нарастание амплитуд прекращается, когда усиление уменьшается до уровня, при котором только компенсируется затухание колебаний в нагрузке. При этом энергия, отдаваемая усилителем за один период, оказывается равной энергии, расходуемой за это же время в нагрузке.

Стационарный режим автоколебаний наступает, когда неравенство (9.13') обращается в равенство.

29. Принцип работы LC-автогенератора с трансформаторной обратной связью. Возникновение колебаний и стационарный режим работы. «Мягкий» и «жесткий» режимы самовозбуждения. Анализ установившегося режима автогенератора.

LC-генератор гармонических колебаний представляет собой резонансный усилитель с цепью положительной обратной связи, образованной индуктивно связанными коэффициентом взаимоиндукции катушками С М. Коэффициент передачи цепи обратной связи равен  $\beta = M/L$ . Такие генераторы имеют сравнительно высокую стабильность частоты колебаний, устойчиво работают при изменениях параметров транзисторов. значительных обеспечивают получение колебаний, имеющих малый коэффициент гармоник. К их недостаткам относятся трудности изготовления высокостабильных температурно-



-независимых индуктивностей, а также высокая стоимость и громоздкость последних. Дифференциальное уравнение АГ в режиме малых амплитуд, которое позволяет установить условия самовозбуждения колебаний:  $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_p^2 u = 0$ , где  $\alpha = \frac{1}{2C} \left( \frac{1}{R} - \frac{SM}{L} \right) = \frac{1}{2L} \left( \frac{L}{RC} - \frac{SM}{C} \right)$  - коэффициент, характеризующий затухание колебательного контура;

 $\omega_p = 1/\sqrt{LC}$  - резонансная частота колебательного контура.

Из анализа данного выражения можно получить весьма важный вывод, имеющий простую физическую интерпретацию, а именно за счет положительной обратной связи в контур вносится отрицательная проводимость, модуль которой равен SM/L. С другой стороны, учитывая, что величина L/RC – это сопротивление контура на резонансной частоте, можно сказать, что за счет положительной обратной связи в контур вносится отрицательное сопротивление, модуль которого равен SM/C. Именно этот факт обеспечивает возможность возбуждения и нарастания колебаний на выходе генератора.

Условие возникновения и возрастания колебаний:

5 05100010	DOJIIIKIIOD		puorunnin ko.			
1 ( 1	SM $($	1 <i>SM</i>	1 M	$V \rho > 1$	где <i>K</i> <sub>y</sub> = <i>SR</i> – коэффициент усиления	
$\alpha = \frac{1}{2C} \left( \frac{1}{R} \right)^{-1}$	$\left(\frac{L}{L}\right)^{<0}$	$\frac{1}{R} < \frac{1}{L}$	$SR < \frac{1}{L}$	$\mathbf{K}_{y} \mathbf{p} > 1,$	усилителя на резонансной частоте	
Условия, обеспечивающие устойчивую работу АГ:						

1)  $S_{cp} \cdot Z_0 \cdot \beta = K_y \cdot \beta = 1$  - баланс амплитуд; 2)  $\varphi_s + \varphi_\kappa + \varphi_\beta = 2\pi n$  - баланс фаз.

$$\dot{S}_{cp} = \dot{I}_1 / \dot{U}_{\sigma}$$
 - средняя крутизна,  $\dot{S}_{cp} = S_{cp} \cdot e^{i\varphi_s}$ ;  $Z_0$  – сопротивление контура на резонансной тоте;  $\varphi_s$  – аргумент средней крутизны, характеризующий фазовый сдвиг на генерируемой

частоте;  $\varphi_s$  – аргумент средней крутизны, характеризующий фазовый сдвиг на генерируемой частоте за счет комплексности средней крутизны;  $\varphi_{\kappa}$  – фазовый сзвиг колебательного контура;  $\varphi_{\beta}$  – фазовый сдвиг цепи ОС.

Соблюдение баланса амплитуд обеспечивает адекватную компенсацию потерь, а баланс фаз – фазирование напряжений на базе транзистора и на выходе цепи обратной связи.

Характер зависимости коэффициента усиления от амплитуды напряжения на входе  $K_y(U_{\delta})$  определяется зависимостью средней крутизны от этого же напряжения  $S_{cp}(U_{\delta})$ , т. е.  $K_y = S_{cp}Z_0 = \frac{I_1}{U_{\delta}}Z_0 = \frac{I_1}{U_{e}\beta}Z_0$ . В свою очередь, характер зависимости  $S_{cp}(U_{\delta})$  определяется

выбором рабочей точки.

Рассматривают два режима:

 – мягкий режим, при котором рабочая точка расположена на участке ВАХ с максимальной крутизной (на линейном участке характеристики);





В жестком режиме средняя крутизна ВАХ сначала увеличивается, что характерно для нижнего сгиба ВАХ, а затем уменьшается. Аналогично ведет себя и коэффициент усиления (рис. б).



Линия обратной связи пересекает кривую  $K_y(U_{\delta})$ , если  $\beta \ge \beta_{\kappa p}$ . При  $\beta = \beta_{\kappa p}$  возникают колебания. В ходе дальнейшего роста  $\beta$  линия обратной связи опускается. При этом точка пересечения графиков  $K_y(U_{\delta})$  и  $1/\beta$  сдвигается вправо, что приводит к плавному росту амплитуды  $U_{\delta c}$ . С уменьшением  $\beta$  линия обратной связи поднимается. Точка пересечения сдвигается влево, что приводит к плавному уменьшению амплитуды  $U_{\delta c}$  (см. рис. 1.9, а).

Жесткий режим. Самовозбуждение не наступает до тех пор, пока связь не достигает  $\beta_{\kappa p}$ . При этом амплитуда скачком увеличивается до  $U_{\delta c2}$  и далее растет с ростом  $\beta$ . При обратном движении колебания не срываются вплоть до значения  $\beta = \beta_{min} < \beta_{\kappa p}$ , когда их амплитуда уменьшается до  $U_{\delta c1}$  (см. рис. 1.9, б).

В области  $\beta_{min} < \beta < \beta_{\kappa p}$  самовозбуждение не наступает. Однако если систему принудительно вывести за неустойчивую точку *A*, то она перейдет в точку *B*, т. е. в режим стационарных колебаний с амплитудой  $U_2$ .

Таким образом, жесткий режим колебаний генератора характеризуется скачкообразным возникновением колебаний значительной амплитуды при увеличении коэффициента обратной связи и срывом колебаний определенной амплитуды при уменьшении обратной связи.

Мягкий режим предпочтителен с точки зрения легкости возбуждения автоколебаний, однако он характеризуется относительно невысоким КПД, так как работа ведется с углами отсечки  $\theta > 90^{\circ}$ . В жестком режиме  $\theta < 90^{\circ}$  и можно получить высокий КПД, но следует принимать специальные меры для возбуждения системы, что неудобно.

Колебательная характеристика — это зависимость амплитуды первой гармоники импульсов тока в цепи коллектора от амплитуды  $U_{\delta}$  при разорванной цепи обратной связи, т.е.  $I_1(U_{\delta}) = S_{cp}(U_{\delta}) \cdot U_{\delta}$ . Вид этой характеристики зависит от формы и параметров ВАХ, а также от режима самовозбуждения генератора.

Ha 1.10, изображена рис. а колебательная характеристика для мягкого режима самовозбужден. Колебательная характеристика в режиме этом при малых амплитудах линейно растет, так как рабочая точка расположена на линейном участке BAX. При больших амплитудах рост замедляется в связи с тем, что



уменьшается коэффициент передачи усилительного звена за счет уменьшения средней крутизны ВАХ.

При небольших амплитудах напряжения  $U_{\delta}$  характеристика линейна, так как соответствует участку ВАХ с постоянной крутизной. По мере роста  $U_{\delta}$  средняя крутизна ВАХ уменьшается, следствием чего является уменьшение амплитуды первой гармоники тока (падающий участок колебательной характеристики). Ограничение колебательной характеристики усилителя при больших амплитудах  $U_{\delta}$  обусловлено также ростом напряжения смещения за счет цепи автоматического смещения (цепочка  $R_{\delta}C_{\delta}$ ), в силу чего рабочая точка ВАХ перемещается на участок с меньшей крутизной.

Колебательная характеристика для жесткого режима самовозбуждения изображена на рис. 1.10, б. Она не имеет линейно растущих участков. Изгиб характеристики в середине объясняется особенностью зависимости  $S_{cp}(U_{\delta})$ . Так как рабочая точка находится на нижнем сгибе ВАХ, то при небольших амплитудах напряжения  $U_{\delta}$  колебательная характеристика имеет изгиб, обусловленный ростом крутизны ВАХ на начальном этапе изменения  $U_{\delta}$ .

*Мягкий режим*. На рис. 1.10, а изображена колебательная характеристика для мягкого режима и несколько линий обратной связи для различных значений  $\beta = M/L$ . Стационарному режиму соответствуют точки пересечения колебательной характеристики и линий обратной связи. При определенных значениях  $\beta$  линии обратной связи имеют две точки пересечения с колебательной характеристикой. Такой линией является, например, линия при  $\beta = \beta_2$ . Точка 0 при значениях  $U_{\delta} = I_1 = 0$  соответствует неустойчивому состоянию равновесия генератора. Вторая точка пересечения A имеет координаты, соответствующие амплитуде напряжения на входе усилительного элемента и амплитуде первой гармоники тока в колебательном контуре в стационарном режиме. Заметим, что точка A соответствует устойчивому режиму работы генератора, так как при случайных отклонениях напряжения или тока от стационарных значений обеспечивается возврат их значений в исходное состояние, т. е. в точку A.

Как видно из рис. 1.10, а, стационарный режим работы автогенератора будет устойчивым, если в точке *А* крутизна колебательной характеристики меньше крутизны характеристики обратной связи. В противном случае режим будет неустойчивым.

Жесткий режим. На рис. 1.10, б изображена колебательная характеристика для жесткого режима и несколько линий обратной связи для различных значений  $\beta$ . При значении  $\beta = \beta_2$  линия обратной связи имеет три точки пересечения с колебательной характеристикой. Точка 0 при значениях  $U_{\delta} = I_1 = 0$  соответствует устойчивому состоянию равновесия генератора. Вторая точка пересечения A соответствует также устойчивому режиму работы генератора и имеет координаты, соответствующие амплитуде напряжения на входе усилительного элемента и амплитуде первой гармоники тока в колебательном контуре в стационарном режиме. Точка B соответствует неустойчивому работы генератора.



Рис. 1.11. Зависимость амплитуды первой гармоники тока от коэффициента обратной связи: *а* – мягкий режим; *б* – жесткий режим

#### 30. RC-автогенераторы. Виды цепей обратной связи. Проблема получения гармонических колебаний с малыми искажениями.

На частотах ниже нескольких десятков килогерц применять в качестве колебательных систем автогенераторов резонансные LC-контуры становится затруднительным, главным образом из-за больших массогабаритных размеров индуктивных элементов. Поэтому на этих частотах, как правило, используют RC-автогенераторы, представляющие собой комбинации активных четырехполюсников (усилителей) и пассивных RC-цепей, играющих роль элементов обратной связи.



#### ← Обобщенная схема RC-генератора.

Приведенная схема справедлива только для ФВЧ и ФНЧ, т.к. только для них соблюдается баланс фаз. Если фильтр полосовой, то сигнал должен подаваться на неинверсный вход. Виды цепей обратной связи: трёхзвенные RCфильтры ФВЧ и ФНЧ и полосовой фильтр (мост Вина).













Рис. 9.35. Однокаскадный вариант *RC*-генератора

Коэффициент ОС: 
$$K_{oc}(i\omega) = \frac{1}{\left[5(\omega RC)^2 - 1\right] + i\left[(\omega RC)\right]^3 - 6\omega RC} = K_{oc}e^{i\varphi_{oc}(\omega)}$$
. Фазовый сдвиг на

180° получается при частоте, отвечающей условию  $\omega RC \left[ (\omega RC)^2 - 6 \right] = 0$ . Следовательно, генерация возможна на частоте  $\omega_{\Gamma} = \sqrt{6}/(RC)$ .



На рис. 9.37 изображена схема иного варианта RC-генератора, в котором необходимый для генерации баланс фаз обеспечивается в самом усилителе, например, применением двух каскадов, каждый из которых поворачивает фазу на  $180^{\circ}$ . Назначение же вспомогательной цепи  $r_1$ ,  $C_1$ ,  $r_2$ ,  $C_2$  заключается в том, чтобы по возможности сузить полосу частот, в которой беспечивается баланс фаз. Обычно применяют одинаковые резисторы и конденсаторы. При этом  $\tau_1 = r_1 C_1 = \tau_2 = r_2 C_2 = \tau$ .

Рис. 9.37. Двухкаскадный вариант *RC*-генератора

В этом случае передаточная функция ЧП ОС:  $K_{oc}(i\omega) = K_{oc}(\omega)e^{i\varphi_{oc}(\omega)}$ , где  $K_{oc}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + (\omega/\omega_{\Gamma} - \omega_{\Gamma}/\omega)^{2}}}; \varphi_{oc} = -arctg(1/3)(\omega/\omega_{\Gamma} - \omega_{\Gamma}/\omega)$ . Частота генерации  $\omega_{\Gamma} = 1/\tau$ .





Рис. 9.36. Амплитудно- и фазочастотная характеристики четырехполюсника обратной связи в схеме на рис. 9.35



Рис. 9.38. Амплитудно- и фазочастотная характеристики четырехполюсника обратной связи в схеме на рис. 9.37

В б. схеме генератора рис. напряжение отрицательной обратной связи подается на инвертирующий вход усилителя с помощью делителя  $R_3$  и  $R_1$ . Резистор  $R_2$  шунтируется полевым транзистором VT. При отсутствии напряжения на выходе генератора напряжение на затворе транзистора равно 0 и сопротивление резистора R3 незначительным шунтируется сопротивлением сток-истока транзистора. При этом глубина ООС

минимальна и она незначительно компенсирует положительную обратную связь. При росте амплитуды колебаний напряжение на выходе выпрямителя растет и запирает транзистор. Увеличивается глубина отрицательной обратной связи, следствием чего является уменьшение коэффициента обратной связи  $\beta$ , обеспечивая баланс амплитуд  $\beta = 1/K_y$ .

## 31. Автогенераторы на приборах с отрицательным дифференциальным сопротивлением (с внутренней обратной связью).

При рассмотрении принципа работы LC-генератора с трансформаторной обратной связью было показано, что положительная обратная связь обеспечивает внесение в контур отрицательной проводимости при надлежащем выборе фазового сдвига цепи обратной связи. Это обеспечивает компенсацию потерь в контуре.

Существуют электронные элементы, которые характеризуются отрицательным сопротивлением. К таким элементам относится туннельный диод. Вольт-амперная характеристика туннельного диода имеет два восходящих участка и падающий участок в интервале  $U_1...U_2$ . Этот участок характеризуется отрицательным дифференциальным сопротивлением, т. е. на этом участке  $R_{-} = du/di < 0$ . Причем модуль отрицательного сопротивления имеет значение порядка 5...500 Ом.



Для схемы с последовательным подключением туннельного диода условие самовозбуждения –  $|R_{-}^{*}| > R$ , условие стационарного режима –  $|R_{-}^{*}| = R$ .

Условия самовозбуждения и стационарного режима для схемы с параллельным подключением туннельного диода определим следующим образом. Как следует из рис. 1.26, б:  $i_{o} = i_{L} + i_{c} = i_{L} + C \frac{du}{dt} \quad \text{Учитывая, что } u = Ri_{L} + L \frac{di_{L}}{dt}, \quad \text{можно} \\ \text{записать} \quad i_{o} = i_{L} + RC \frac{di_{L}}{dt} + LC \frac{d^{2}i_{L}}{dt^{2}}.$   $C другой стороны, \quad i_{o} = -\frac{u}{R_{-}} = -\frac{Ri_{L} + L \frac{di_{L}}{dt}}{R_{-}} \quad \text{Тогда} - \frac{Ri_{L} + L \frac{di_{L}}{dt}}{R_{-}} = i_{L} + RC \frac{di_{L}}{dt} + LC \frac{d^{2}i_{L}}{dt^{2}}.$   $\frac{d^{2}i_{L}}{dt^{2}} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{CR_{-}}\right) \frac{di_{L}}{dt} + \frac{1 + R/R_{-}}{LC} i_{L} = 0.$ 

Для того чтобы амплитуда генерируемых колебаний при возбуждении нарастала, коэффициент при первой производной должен быть отрицательным, т. е.

$\frac{R}{L} + \frac{1}{RC_{-}} < 0$ , или $\left  R_{-} \right  < \frac{L}{RC} = \frac{\rho^2}{R} = \rho Q = R_0$ ,	где $R_0 = \frac{R}{LC}$	- резонансное сопротивление контура
--	--------------------------	--
Стационарный режим генерации устанавливается, когда сопротивление  $|R_{-}^{*}|$ , которое зависит от амплитуды генерируемого колебания, увеличится до  $|R^{*}| = R_{0}$ .

Этот же результат для схемы с параллельным подключением туннельного диода можно получить несколько иначе. Преобразуем схему с параллельным подключением отрицательного сопротивления к контуру в эквивалентную схему с последовательным подключением, пользуясь известной формулой преобразования  $R_{-}^{*} = \frac{L}{RC}$ . Условие самовозбуждения будет

иметь вид  $|R_{-}^{*}| > R$ , или  $\left|\frac{L}{R_{-}C}\right| > R$ . Тогда  $|R_{-}| < \frac{L}{RC} = \frac{\rho^{2}}{R} = \rho Q = R_{0}$ . Аналогично рассуждая,

получим условие стационарного режима  $|R_{-}| = \frac{L}{RC} = \frac{\rho^2}{R} = \rho Q = R_0$ .

*Схемы генераторов с внутренней обратной связью*. При построении схем генераторов с внутренней ОС используют параллельные и последовательные колебательные контуры.



Схема с параллельным контуром обычно применяется низких на частотах. На этих частотах пренебречь можно индуктивностью вводов L<sub>d</sub> и емкостным сопротивлением материала диода  $R_{\partial}$ . показанных на эквивалент-

-ной схеме туннельного диода. Источник смещения и делитель напряжения  $R_1$ ,  $R_2$  обеспечивают необходимый режим по постоянному току, т. е. устанавливают напряжение рабочей точки, соответствующее середине падающего участка ВАХ диода. Шунтирующая емкость  $C_{ul}$  обеспечивает короткое замыкание источника по переменному току. Она реализует при этом параллельное подключение туннельного диода к колебательному контуру.



Схемы с последовательным колебательным контуром применяются на высоких частотах. В этих схемах колебательный контур

составлен из катушки индуктивности  $L_{\kappa}$  и последовательно включенной емкости  $C_{\partial}$ , соответствующей *p*-*n*-переходу диода. Условия самовозбуждения и стационарного режима для схемы с последовательным подключением туннельного диода  $|R_{-}^{*}| > R$  и  $|R_{-}^{*}| = R$ . Применение данной схемы ограничено, так как источник питания влияет на частоту генерируемых колебаний и искажается форма колебаний.

Для сохранения формы гармонических колебаний необходимо подключить конденсатор параллельно катушке индуктивности. В свою очередь, стабильность частоты можно обеспечить путем подключения конденсатора параллельно диоду. Такую схему (рис. б) часто называют параллельно-последовательной.

#### 31. Автогенераторы на приборах с отрицательным дифференциальным сопротивлением (с внутренней обратной связью).

При рассмотрении механизма возникновения колебаний в автогенераторе мы встретились с понятием отрицательного сопротивления, вносимого в колебательный контур при надлежащем выборе фазы обратной связи. При этом в соответствии с обобщенной схемой автоколебательной системы имелась в виду внешняя обратная связь.

Существуют, однако, некоторые электронные приборы, которые позволяют получить отрицательное сопротивление за счет падающих участков вольт-амперной характеристики без введения в схему специальных элементов обратной связи. К таким приборам относятся, например, туннельный диод и обычные тетроды и пентоды при соответствующем подборе напряжений на электродах.



Рис. 9.26. Вольт-амперная характеристика туннельного диода

Рис. 9.27. Автогенератор на туннельном диоде Рис. 9.28. Схема замещения автогенератора на туннельном диоде

На рис. 9.26 показана вольт-амперная характеристика туннельного диода, представляющая зависимость прямого тока диода от положительного напряжения смещения. На падающем участке а – б дифференциальное сопротивление диода  $R_{-} = \frac{du}{di_{n}} = \operatorname{ctg} \gamma$ , отрицательно:

где  $\gamma$  – угол наклона касательной к кривой  $i_{\pi} = f(u)$  в рабочей точке  $U_0$ .

При подключении электронного прибора с подобной вольт-амперной характеристикой к колебательной цепи можно осуществить генерацию высокочастотных колебаний. При этом получается автогенератор с внутренней обратной связью.

На рис. 9.27 изображена схема генератора на туннельном диоде. В качестве емкости контура в генераторах СВЧ обычно используется собственная емкость диода  $C_0$ . Блокировочные дроссель  $L_{\delta n}$  и конденсатор  $C_{\delta n}$  ( $C_{\delta n} >> C_0$ ) защищают цепь постоянного тока от тока высокой частоты;  $r_{\kappa}$  — сопротивление потерь в кристалле и в элементах контура.

Схема замещения контура, шунтированного отрицательным сопротивлением  $R_{-}$ , изображена на рис. 9.28. По отношению к этому сопротивлению напряжение  $u_{\kappa}$ , действующее на колебательном контуре, рассматривается как ЭДС, так что ток через диод  $i_{\mu} = -u_{\kappa}/R_{-}$ .

Колебательное напряжение на контуре  $u_{\kappa}$  и токи  $i_{\rm L}$ ,  $i_{\rm C}$ ,  $i_{\rm d}$  связаны между собой соотношениями

$$i_{\mu} = i_L + i_C, \ i_C = C \frac{du_{\kappa}}{dt}, \ u_{\kappa} = r_{\kappa} i_L + L \frac{di_L}{dt}.$$
 (9.56)

В качестве искомой функции выберем, например, ток  $i_L$  в индуктивной ветви контура. Исключая из первого уравнения (9.56)  $i_C(t)$  с помощью второго и третьего уравнений, получаем

$$i_{\mathfrak{A}} = i_{L} + r_{\kappa}C\frac{di_{L}}{dt} + LC\frac{d^{2}i_{L}}{dt}. \qquad \text{Однако} \qquad i_{\mathfrak{A}} = -\frac{1}{R_{-}}u_{\kappa} = -\frac{1}{R_{-}}\left(r_{\kappa}i_{L} + L\frac{di_{L}}{dt}\right).$$

Приравнивая правые части приведенных выражений, после группировки слагаемых получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{r_{\kappa}}{L} + \frac{1}{CR_{-}}\right) \frac{d i_L}{dt} + \frac{1 + r_{\kappa}/R_{-}}{LC} i_L = 0$$

Для того чтобы амплитуда колебаний нарастала, коэффициент при первой производной должен быть отрицательным. Отсюда получается условие возникновения колебаний

$$\frac{r_{\kappa}}{L} - \frac{1}{C} \left| \frac{1}{R_{-}} \right| < 0$$
 или  $|R_{-}| < \frac{L}{r_{\kappa}C} = Z_{\mathfrak{s}\kappa p} = \rho Q = \frac{Q}{\omega_{p}C}$ , (9.57)  
где  $|R|$  - абсолютная величина отрицательного сопротивления;  $Z_{\mathfrak{s}\kappa p}$  - эквивалентное

резонансное сопротивление контура;  $Q = \sqrt{L/C}$  — характеристическое сопротивление контура. Когда сопротивление  $|R_{-}|$ , зависящее от амплитуды колебания (при переходе на

нелинейную часть характеристики), увеличится до

$$|R_{-}(U_{\kappa})| = Z_{\mathfrak{s}\kappa p},$$

в автогенераторе установится стационарная амплитуда колебаний.

Режим устойчив, если в точке пересечения горизонтали  $Z_{3\kappa p}$  кривая  $|R_{-}(U_{\kappa})|$  имеет положительный наклон (рис.). Все, что в предыдущих параграфах было сказано о характере нелинейной зависимости средней крутизны от амплитуды управляющего напряжения, в данном случае можно распространить на характер зависимости величины, обратной  $|R_{-}|$ , от напряжения  $U_{\kappa}$ .



Преимуществом туннельного диода является весьма малое по абсолютной величине отрицательное сопротивление (10... 100 Ом). Несмотря на относительно большую собственную емкость диода (несколько десятков пикофарад), условие самовозбуждения (9.57) выполняется в весьма широком диапазоне частот, вплоть до СВЧ.

Так, при добротности контура Q = 50, собственной емкости диода  $C_0 = 50 \text{ пФ}$  и  $|R_{-}| = 50$ Ом предельная частота генерации  $f_{\text{max}} \approx Q/2\pi |R_{-}| C_0 \approx 3.10^9$  Гц.

# 32. Трехточечные схемы LC-автогенераторов с емкостной и индуктивной обратной связью.

Многочисленные схемы LC-генераторов различаются в основном схемами формирования сигнала обратной связи И способами колебательного подключения контура усилителю. Кроме К обратной трансформаторной связи часто используется автотрансформаторная обратная связь. При этом получается, что усилительный элемент подключается к трем точкам контура.



В общем виде эквивалентная схема трехточечного генератора представлена на рис.

Избирательная цепь представляет собой высокодобротный контур, который содержит емкостные и индуктивные элементы с комплексными сопротивлениями  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ , т. е.

 $Z_{i} = jx_{L} = j\omega L \text{ или } Z_{i} = -jx_{C} = -j\frac{1}{\omega C}, \text{ где} \qquad \begin{array}{l} x_{L} = \omega L - \text{индуктивное сопротивление} \\ x_{C} = 1/\omega C - \text{емкостное сопротивление} \\ x_{C} = 1/\omega C - \text{емкостное сопротивление} \\ \hline \\ \beta = \frac{Z_{2}}{Z_{1} + Z_{2}}. \end{array}$ 

Учитывая, что выходное напряжение усилительного элемента сдвинуто по фазе относительно входного на угол  $\pi$ , то для соблюдения баланса фаз  $\varphi_y + \varphi_{oc} = 2\pi n$  необходимо, чтобы цепь обратной связи также обеспечивала сдвиг по фазе на угол  $\pi$ , т. е. коэффициент передачи обратной связи должен быть отрицательным. Основываясь на приведенной выше формуле для  $\beta$ , рассмотрим характер реактивностей в колебательном контуре для достижения этого условия.

1. Пусть 
$$Z_2 = j \omega L$$
. Тогда

Коэффициент  $\beta$  будет отрицательным в том случае, если  $Z_1 = -jx_C$  и  $|x_C| > |x_L|$ . При этом цепь  $Z_1$ ,  $Z_2$  имеет емкостной характер. Избирательность цепи  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  обеспечивается в том случае, если сопротивление  $Z_3$  будет индуктивным, т. е.  $Z_3 = jx_L$ .

2. Пусть 
$$Z_2 = -jx_C = -j\frac{1}{\omega C}$$
. Тогда

Коэффициент  $\beta$  будет отрицательным в том случае, если  $Z_1 = jx_L$  и  $|x_L| > |x_C|$ . При этом цепь  $Z_1$ ,  $Z_2$  имеет индуктивный характер. Избирательность цепи  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  обеспечивается в том случае, если сопротивление  $Z_3$  будет емкостным, т. е.  $Z_3 = -jx_C$ .

Вывод. Реактивности комплексных сопротивлений  $Z_1$  и  $Z_2$  различны, а реактивности сопротивлений  $\mathbb{Z}_2$  $Z_3$ И одинаковы. Следовательно, эквивалентные схемы генераторов можно представить в виде рис. Для индуктивной схемы с связью (рис. a). используют термин «индуктивная трехточка», а для схемы с емкостной связью (рис. б) -«емкостная трехточка».



 $\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{jx_L}{Z_1 + jx_L}$ 

 $\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{-jx_C}{Z_1 - jx_C}$ 

Определим коэффициент передачи цепи обратной связи генераторов на частоте выходного напряжения, которая определяется резонансной частотой контура.

1. Индуктивная трехточка. Частота генерируемого напряжения равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0C}}$$
, где  $L_0 = L_1 + L_2$ . Тогда  $\beta = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega_0L_1}{-j\frac{1}{\omega_0C} + j\omega_0L_1} = \frac{L_1}{L_1 - L_0} = -\frac{L_1}{L_2}$ 

2. Емкостная трехточка. Частота генерируемого напряжения равна



в – схема с общей базой

На рис.(а) приведена принципиальная схема трехточечного генератора, в котором напряжение обратной связи снимается с индуктивности  $L_1$  (индуктивная трехточка). Источник питания подключен к части витков катушки индуктивности для уменьшения его шунтирующего действия, что повышает добротность контура.

На рис.(б) приведена схема генератора, в котором напряжение обратной связи снимается с конденсатора  $C_1$  (емкостная трехточка). Для уменьшения шунтирующего действия источник питания подключен к контуру через емкостной делитель напряжения. Дроссель  $L_{dp}$  разъединяет по переменной составляющей емкость  $C_1$  от корпуса.

С повышением частоты генерируемых напряжений проявляет себя комплексность крутизны ВАХ транзистора в силу возрастания фазового сдвига между током коллектора и током базы. При этом может нарушиться условие баланса фаз, что приводит к невозможности самовозбуждения генератора. Поэтому в коротковолновом диапазоне большое распространение получили генераторы, построенные по схеме с общей базой, один из вариантов которой представлен на рис.(в).

#### 33. Случайные величины и случайные процессы в радиотехнике, основные определения. Статистический подход к описанию случайных сигналов.

Анализ свойств случайных сигналов осуществляется методами статистической радиотехники, которые базируются на теории случайных процессов. Фундаментальными понятиями в теории случайных процессов являются понятия случайная величина и случайный процесс.

Случайная величина – это величина, которая в результате опыта принимает значение, заранее неизвестно какое. Случайные величины могут быть дискретными, непрерывными и дискретно-непрерывными.

Дискретная случайная величина – это случайная величина, которая принимает конечное или бесконечное счетное множество различных значений.

Непрерывная случайная величина – это случайная величина, которая принимает значения, заполняющие некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Дискретно-непрерывная, или смешанная случайная величина – это случайная величина, которая может принимать в некоторых интервалах дискретные значения, а в некоторых других интервалах – непрерывное множество значений.

Случайный процесс – это процесс, описываемый случайной функцией времени, которая при всех или некоторых значениях аргумента является случайной величиной. В соответствии с этим определением, случайный процесс можно рассматривать как бесконечную совокупность случайных величин, соответствующую бесконечному числу значений аргумента *t*. В статистической радиотехнике такой случайный процесс является моделью случайного сигнала. Поэтому в технической литературе термины «случайный сигнал» и «случайный процесс», а в теории вероятности «случайный процесс» и «случайная функция» используются как синонимы.

Случайный процесс можно представить как бесконечную совокупность (ансамбль) реализаций, называемую статистической совокупностью (рис. 3.1). Реализация, ставшая полностью известной после приема сообщения, является уже не случайной, а детерминированной функцией времени.

Случайные величины и случайные обозначать процессы принято С использованием больших букв, а случайных величин значения И реализаций случайных процессов - с использованием маленьких букв. Например, можно сказать: «В результате опыта получено значение случайной величины Χ или получена реализация  $x_k(t)$  случайного

процесса X(t)».



Законы распределения случайных величин. Случайная величина с вероятностной точки зрения полностью описывается вероятностной характеристикой, называемой законом вероятностей. Закон вероятностей распределения распределения ЭТО закон. устанавливающий случайной СВЯЗЬ между возможными значениями величины И соответствующими им вероятностями.

Очевидно, что подобный закон распределения существует только для дискретной случайной величины. Для непрерывной случайной величины закон в такой формулировке использовать нельзя, так как она имеет бесчисленное множество возможных значений, каждое из которых не обладает никакой отличной от нуля вероятностью. Для данного случая в вероятностном смысле можно оценить только различные области возможных значений непрерывной случайной величины. Поэтому на практике используются наиболее общие формы

закона распределения, получившие названия интегральный и дифференциальный законы распределения вероятностей. Они могут быть одномерными, двумерными, ..., *n*-мерными.

Одномерные законы распределения. Функция распределения.

Пусть X – непрерывная случайная величина, x – некоторое текущее ее значение. Для количественной характеристики распределения случайной величины принимается функция

F(X) = P(X < x), где P(X < x) вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее чем произвольное число x.

Функция F(x) является по существу законом распределения случайной величины X, который называется интегральным законом распределения или функцией распределения.

Для дискретной случайной величины X, имеющей n возможных значений  $x_1, x_2, ..., x_n$ , которые принимаются с вероятностями  $P_1, P_2, ..., P_n$  соответственно, функция распределения записывается следующим образом

$F(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k \sigma(x - x_k),$	где $P_k$ – вероятность того, что случайная величина X принимает значение, равное $x_k$ , т.е. $P_k = P(X = x_k)$ ;
	раница порида $-(x - x)$ $\int 1$ при $x \ge x_k$ ,

$$(x - x_k)$$
 - сдиничная функция, равная  $O(x - x_k) = 0$  при  $x < x$ 

Плотность вероятности.

Если функция распределения непрерывна и дифференцируема, то можно определить:  $p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x).$ 

В числителе данного выражения разность  $F(x+\Delta x)-F(x)$  есть вероятность того, что случайная величина X принимает значения в интервале от x до  $x+\Delta x$ , т. е.  $F(x+\Delta x)-F(x)=P(x \le X < x + \Delta x)$ .

Предельное отношение вероятности  $P(x \le X < x + \Delta x)$  к длине интервала  $\Delta x$  является по существу плотностью вероятности случайной величины X и характеризует плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке. Поэтому функция p(x)=F'(x), которая является дифференциальным законом распределения, называется плотностью распределения вероятностей, или плотностью вероятности.



## 34. Статистические характеристики случайных сигналов (законы распределения и числовые характеристики), их физический смысл.

<u>Нормальный (гауссовский) закон распределения.</u>

Одномерная плотность вероятности p(x) и функция распределения F(x) описываются выражениями:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$$
$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) \right],$$

где  $m_x$  – математическое ожидание;  $\sigma_x$  – среднеквадратичное значение;  $\Phi(x)$  – функция Лапласа, равная

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^{2}}{2}} dt \, .$$

Равномерный закон распределения.

Непрерывная случайная величина подчиняется закону равномерной плотности (имеет равномерное распределение), если ее возможные значения лежат в пределах некоторого определенного интервала и в пределах этого интервала все значения случайной величины одинаково вероятны.

Плотность вероятности  $p(\phi)$  и функция распределения  $F(\phi)$  процессов с равномерным законом распределения:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{при} - \pi \le \varphi \le \pi;$$
$$F(\varphi) = \int_{-\pi}^{\varphi} p(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\varphi} d\varphi = \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2}.$$

<u>Закон распределения синусоидального сигнала со случайной</u> <u>начальной фазой.</u> Синусоидальный сигнал со случайной фазой – это колебание  $x(t) = U \cos [\omega t + \varphi(t)]$ , начальная фаза – случайная величина, которая с одинаковой вероятностью может принимать любое значение в интервале от - $\pi$  до  $\pi$ .

Плотность вероятности и функция распределения этого сигнала равны:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{U^2 - x^2}} & \text{при } |x| \le U, \\ 0 & \text{при } |x| > U. \end{cases}$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-U}^{x} \frac{1}{\sqrt{U^2 - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{U} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \exp(x) dx$$







<u>Экспоненциальный закон распределения.</u> Плотность вероятности случайной величины экспоненциальным законом распределения определяется:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

где  $\lambda$  – параметр экспоненциального закона распределения.

Функция распределения F(x) случайной величины с экспоненциальным законом распределения:

$$F(x) = \int_{0}^{x} p(x) dx = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \mid_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x}$$



c

Для общей характеристики случайной величины используют величины, которые носят название *числовые характеристики*. Основное их назначение – выразить наиболее существенные особенности самой величины и того или иного распределения. Кроме того, с помощью числовых характеристик и операций с ними удается в ряде случаев решать широкий круг задач статистической радиотехники до конца без использования законов распределения.

Математическое ожидание – среднее значение случайной величины.

Для дискретной	$m_x = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$	где $x_i - i$ -е значение сл. величины $X$ ;	
Случаиной	$x$ $L$ $j$ $\sum_{i=1}^{n}$ $i$ $i$	$T_i$ – вероятность того, что случанная величина $X$	
величины:		примет значение <i>x<sub>i</sub></i> ;	
		<i>n</i> – количество <i>i</i> -х значений сл. величины.	
Для непрерывной случайной $m_x = \int_{0}^{b} xp(x) dx$ возможные значения $m_x = \int_{0}^{\infty} xp(x) dx$			
которой принадле	ежат [a, b]:	интервале $(-\infty,\infty)$ :	
<i>Дисперсия</i> – степень рассеяния случайной величины около ее среднего значения.			
Для дискретной случайной величины: $D_x = M \left[ \left( X - m_x \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^n \left( x_i - m_x \right)^2 P_i$ .			
Для непре случайной величи	ерывной $D_x = \int_{x}^{b} (x - m_x)^2$	<sup>2</sup> $p(x)dx$ В интервале $D_x = \int_x^\infty (x - m_x)^2 p(x)dx$	

Среднеквадратичное отклонение (СКО)  $\sigma_x = \sqrt{D_x}$  дает представление о размахе отклонения возможных значений случайной величины от математического ожидания.

*Начальным моментом k-го порядка* непрерывной случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины Y, значения которой равны  $y_k = x^k$ , т.е.

$$\alpha_{k} = M \left[ X^{k} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^{k} p(x) dx. \qquad \begin{array}{c} \text{Очевидно, что } \alpha_{l} & \text{есть} \\ \text{математическое ожидание:} \end{array} \qquad \alpha_{1} = m_{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \end{array}$$

Центрированная случайная величина  $\dot{X} = X - m_x$ .

*Центральным моментом k-го порядка* случайной величины X называется математическое ожидание центрированной случайной величины, возведенной в k-ю степень, т.е.

$$\mu_{k} = M \left[ X - m_{x} \right]^{k} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x})^{k} p(x) dx . \qquad \mu_{1} = 0 \qquad \mu_{2} = D_{x} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x})^{2} p(x) dx.$$

Центральный момент третьего порядка является характеристикой асимметрии (скошенности) графика закона распределения.

Центральный момент четвертого порядка является характеристикой верхней части графика закона распределения, т. е. характеризует «островершинность» или «плосковершинность» графика.

<u>Для системы двух непрерывных случайных величин X и Y характеристики определяются</u> следующими выражениями:

Количественной мерой степени статистических связей двух случайных величин являются смешанные начальные и центральные моменты случайных величин k-го порядка (k=r+s):

$$\alpha_{r,s} = M \left[ X^r Y^s \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s p(x, y) dx dy.$$
$$\mu_{r,s} = M \left[ \left( X - m_x \right)^r \left( Y - m_y \right)^s \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( x - m_x \right)^r \left( y - m_y \right)^s p(x, y) dx dy.$$

Смешанный начальный момент случайных величин 2-го  $\alpha_{1,1} = B_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y) dx dy$ .

Смешанный центральный момент случайных величин 2-го порядка называется корреляционным моментом:

$$\mu_{1,1} = R_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) (y - m_y) p(x, y) dx dy.$$

$$R_{xy} = B_{xy} - m_x m_y$$

Коэффициент корреляции:  $r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ .

### 35. Модели случайных сигналов («нормальный» случайный процесс, «белый» шум, узкополосный случайных сигнал).

Случайные процессы с нормальным законом распределения иногда называют нормальными случайными процессами.

Формула одномерного нормального закона распределения имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \right].$$

где  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^{2}}{2}} dt$  - функция Лапласа.



Белый Bo шум. многих практических случаях спектральная плотность мощности случайного сигнала (шума) постоянна в пределах полосы пропускания линейного устройства. Очевидно, что для такой ситуации анализа В качестве модели сигнала можно



использовать стационарный случайный процесс, обладающий равномерной спектральной плотностью мощности на всех частотах, т. е.  $W_x(\omega)=0$  при  $-\infty < \omega < \infty$ . По аналогии с белым светом, который характеризуется одинаковой спектральной интенсивностью во всем диапазоне частот, соответствующем видимой части спектра, эту модель сигнала принято называть белым шумом.

По теореме Винера – Хинчина определим корреляционную функцию белого шума:

$$R_{x}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{0} e^{j\omega\tau} d\omega = W_{0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = W_{0} \delta(\tau).$$

Корреляционная функция представляет собой взвешенную дельта-функцию. Это значит, что любые два значения белого шума, соответствующие сколь угодно малому интервалу т между моментами наблюдения, некоррелированны между собой. Дисперсия шума  $D_x = R_x(0) = \infty$ , т. е. белый шум имеет бесконечную мощность. Следовательно, белый шум – модель реально не существующего шума. Использование такой модели правомерно в случае  $\Delta \omega_{s\phi} >> \Delta \omega_{np}$ , где  $\Delta \omega_{s\phi} =$  эффективная ширина спектра шума,  $\Delta \omega_{np} =$  полоса пропускания линейной цепи.



где U(t) – медленноменяющаяся функция времени, описывающая амплитудную огибающую данного сигнала;  $\varphi(t)$  – фазовая функция сигнала.



36. Стационарные и нестационарные случайные процессы. Их статистические характеристики. Эргодические случайные процессы. Особенности определения их статистических характеристик.

Случайный процесс называется *стационарным в узком смысле (строго стационарным)*, если его *n*-мерные плотности вероятности  $p_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)$  при любом *n* не меняются при сдвиге точек  $t_1, t_2, ..., t_n$  вдоль оси времени, т.е.

 $p_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = p_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, ..., t_n + \tau).$ 

Другими словами, у стационарного в узком смысле случайного процесса *n*-мерные плотности вероятности при всех *n* инвариантны относительно начала отсчета времени. Это означает, что два случайных процесса X(t) и  $X(t+\tau)$  имеют одинаковые вероятностные характеристики.

Очевидно, что условие стационарности в узком смысле можно записать также в терминах *n*-мерных функций распределения:

 $F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = F_n(x_1, x_2, ..., x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, ..., t_n + \tau).$ 

Стационарными считаются случайные процессы, для которых приведенное выше определение справедливо только для одномерных и двухмерных законов распределения. Такие процессы называются *стационарными в широком смысле*.

Иногда говорят, что случайный процесс является стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от разности  $\tau = t_2 - t_1$ . Таким образом, условия  $m_x = const$ ,  $D_x = const$  и  $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$  являются необходимыми и достаточными условиями стационарности случайного процесса в широком смысле.

Очевидно, что из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное утверждение в общем случае неверно. В дальнейшем, называя процесс стационарным, будем иметь в виду процесс, стационарный в широком смысле.

Случайный процесс, не удовлетворяющий условиям стационарности, является нестационарным.

Приведем формулы для числовых характеристик нестационарных и стационарных случайных процессов.

Нестационарный случайный процесс.

	·····		
Математическое <i>m<sub>x</sub></i> ( ожидание:	$t\Big)=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x,t)dx.$	Дисперсия:	$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m_x(t)\right]^2 p(x,t) dx.$
Ковариационная функци	я:	$B_x(t_1,t_2)$	$\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$
Корреляционная функци	$R_x(t_1,t_2) = R_x(t_1,t_2)$	$= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \left[ x_{1} - m_{x} \left( t_{1} \right) \right]$	)][ $x_2 - m_x(t_2)$ ] $p(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2$ .

Значения случайного процесса X(t) в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  являются некоррелированными, если  $R_x(t_1,t_2)=0$  или  $B_x(t_1,t_2)=m_x(t_1)\cdot m_x(t_2)$ .

На практике часто используют нормированную корреляционную функцию, которая называется коэффициентом корреляции и определяется выражением

Часто используют нормированную корреляционную функцию,  $r_x(t_1,t_2) = \frac{R_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$ .

Стационарный случайный процесс.

Математическое  $m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$ . Дисперсия:  $D_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x]^2 p(x) dx$ .

Ковариационная функция:

 $B_{x}(\tau) = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} x_{1}x_{2}p(x_{1},x_{2};\tau)dx_{1}dx_{2}$ 

Корреляционная функция:

$$R_{x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_{1} - m_{x}] [x_{2} - m_{x}] p(x_{1}, x_{2}; \tau) dx_{1} dx_{2}.$$

Из определения стационарности и приведенных формул для числовых характеристик можно сделать следующие выводы:

1. Математическое ожидание и дисперсия нестационарного случайного процесса являются функциями времени, а стационарного случайного процесса не являются функциями времени, т. е. не зависят от времени.

2. Ковариационная и корреляционная функции нестационарного случайного процесса являются функциями двух переменных  $t_1$  и  $t_2$ , а стационарного случайного процесса – функциями одной переменной  $\tau = t_1 - t_2$ .

3. Корреляционная функция стационарного процесса четная, т. е.  $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ .

4. Для многих практических случаев справедливо равенство  $\lim R_{x}(\tau) = 0$ .

5. Дисперсия стационарного процесса равна значению корреляционной функции при  $\tau = 0$ , т. е.  $D_x = R_x(0)$ .

6. Абсолютное значение корреляционной функции не превышает ее значения при  $\tau=0, \tau$ . e.  $|R_x(\tau)| \ge R_x(0) = D_x$ .

Коэффициент корреляции стационарного случайного процесса: (при  $\tau=0$  имеет максимальное значение, равное единице)  $r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x}$ .

Эргодические случайные процессы. Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если при определении его статистических характеристик усреднение по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной сколь угодно длинной реализации. Если речь идет о всех статистических характеристиках, то такой процесс называется эргодическим в строгом смысле. В то же время возможна эргодичность относительно отдельных характеристик.

Эргодичность случайных процессов позволяет изучать их статистические свойства по одной реализации, наблюдаемой в течение длительного промежутка времени. При этом нет необходимости иметь для исследования большую совокупность реализаций.

Приведем формулы для числовых характеристик эргодического случайного процесса.

Математическое $m_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}$	$\int_{0}^{T} x(t) dt$ . Диспе	ерсия:	$D_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[ x(t) - m_x \right]^2 dt.$
Ковариационная функция:		$B_x(\tau) = \lim_T$	$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt.$
Корреляционная функция: К		$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \left[x(t)-\right]$	$-m_x \left[ x(t+\tau) - m_x \right] dt$ .
н v			

Практический интерес представляют количественные характеристики, определяющие степень статистической связи мгновенных значений двух случайных процессов X(t) и Y(t). Такими характеристиками являются взаимная ковариационная и корреляционная функции. Они определяются следующими соотношениями:

- для нестационарных процессов:

$$B_{xy}(t_1,t_2) = B_{yx}(t_2,t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y;t_1,t_2) dxdy;$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = R_{yx}(t_2,t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ x - m_x(t_1) \right] \cdot \left[ y - m_y(t_2) \right] p(x,y;t_1,t_2) dxdy.$$

- для стационарных процессов:

$$B_{xy}(\tau) = B_{yx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y; \tau) dx dy;$$
  
$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x] \cdot [y - m_y] p(x, y; \tau) dx dy.$$

- для эргодических процессов:

$$B_{xy}(\tau) = B_{yx}(-\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) y(t+\tau) dt.$$
  
$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} [x(t) - m_x] \cdot [y(t+\tau) - m_y] dt.$$

Если случайные процессы X(t) и Y(t) независимы, то для них  $p(x, y; t_1, t_2) = p(x; t_1) \cdot p(y; t_2)$ .

$$B_{xy}(t_{1},t_{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t_{1}) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yp(y,t_{2}) dx = m_{x}(t_{1}) \cdot m_{y}(t_{2}).$$
  
$$R_{xy}(t_{1},t_{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m_{x}(t_{1})\right] p(x,t_{1}) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[y - m_{y}(t_{2})\right] p(y,t_{2}) dx = 0.$$

36. Стационарные и нестационарные случайные процессы. Их ститистические характеристики. Эргодические случайные процессы. Особенности определения их <mark>статистических характеристик.</mark>

Случайный процесс называется строго стационарным, если его плотность вероятности  $p(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n)$  произвольного порядка *n* зависит только от интервалов  $t_2$ - $t_1$ ,  $t_3$ - $t_1$ , ...,  $t_n$ - $t_1$  и не зависит от положения этих интервалов в области изменения аргумента *t*.

В радиотехнических приложениях теории случайных процессов условие стационарности обычно ограничивается требованием независимости от времени только одномерной и двумерной плотностей вероятности (случайный процесс, стационарный в широком смысле). Выполнение этого условия позволяет считать, что математическое ожидание, средний квадрат и дисперсия случайного процесса не зависят от времени, а корреляционная функция зависит не от самих моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ , а только от интервала между ними  $\tau = t_2 - t_1$ .

Стационарность процесса в широком смысле можно трактовать как стационарность в рамках корреляционной теории (для моментов не выше второго порядка).

Таким образом, для случайного процесса, стационарного в широком смысле, выражения можно записывать без обозначения фиксированных моментов времени. В частности,

$$m_x = M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) \, dx, \qquad (4.9)$$

$$K_{x}(\tau) = M[x(t)x(t+\tau)], \qquad (4.10)$$

$$R_{x}(\tau) = K_{x}(\tau) - m_{x}^{2}, \qquad (4.11)$$

$$D_x = K_x(0) - m_x^2 = R_x(0) = \sigma_x^2, \qquad (4.12)$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - m_x^2}.$$
 (4.13)

Дальнейшее упрощение анализа случайных процессов достигается при использовании условия эргодичности процесса. Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если при определении любых статистических характеристик усреднение по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной теоретически бесконечно длинной реализации.

Условие эргодичности случайного процесса включает в себя и условие его стационарности. В соответствии с определением эргодического процесса соотношения (4.10)—(4.13) эквивалентны следующим выражениям, в которых операция усреднения по времени обозначена чертой:

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \qquad (4.14)$$

$$K_{x}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} x(t) x(t+\tau) dt, \qquad (4.15)$$

$$R_{x}(\tau) = K_{x}(\tau) - (\overline{x(t)})^{2}, \qquad (4.16)$$

$$D_{x} = K_{x}(0) - (\overline{x(t)})^{2} = \sigma_{x}^{2}, \qquad (4.17)$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - (\overline{x(t)})^2} \,. \tag{4.18}$$

Если x(t) представляет собой электрический процесс (ток, напряжение), то  $\overline{x(t)}$  — постоянная составляющая случайного процесса,  $R_x(0) = \overline{x^2(t)}$  — средняя мощность флуктуации процесса [относительно постоянной составляющей x(t)].

Выражение (4.15) внешне совпадает с определением корреляционной функции детерминированного сигнала (периодического).

Часто применяется нормированная корреляционная функция

$$r_x(\tau) = R_x(\tau)/D_x = [K_x(\tau) - (\bar{x})^2]/D_x.$$
(4.19)

Функции  $K_x(\tau)$ ,  $R_x(\tau)$  и  $r_x(\tau)$  характеризуют связь (корреляцию) между значениями x(t), разделенными промежутком  $\tau$ . Чем медленнее, плавнее изменяется во времени x(t), тем больше промежуток  $\tau$ , в пределах которого наблюдается статистическая связь между мгновенными значениями случайной функции.

При экспериментальном исследовании случайных процессов используются временные корреляционные характеристики процесса (4.15) - (4.19), поскольку, как правило, экспериментатору доступно наблюдение одной реализации, а не множества реализаций. Интегрирование выполняется, естественно, не в бесконечных пределах, а на конечном интервале T, длина которого должна быть тем больше, чем выше требование к точности результатов измерения.

## 37. Нормальный (гауссовский) закон распределения случайных сигналов. Эффект нормализации случайных процессов в узкополосных цепях.

В статистической радиотехнике определенный интерес представляют случайные процессы, являющиеся результатами совместного действия большого числа случайных факторов. В силу центральной предельной теоремы теории вероятностей такие процессы имеют нормальный закон распределения (закон Гаусса).

Случайные процессы с нормальным законом P(x)распределения иногда называют *нормальными*  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}$ 

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

1. Функция распределения:

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \right].$$

где  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t}{2}} dt$  - функция Лапласа.



2. Математическое ожидание случайного процесса x(t) с нормальным законом распределения:

$$M[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

Замена переменных  $z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$ ;  $x = z\sigma_x + m_x$ ;  $dx = \sigma_x dz$ . После преобразований получим

$$\left($$
 учитывая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} \right)$ :  $M[x] = \frac{m_x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = m_x.$ 

Вывод. Параметр  $m_x$  в формуле нормального закона распределения является математическим ожиданием случайного процесса X(t), имеющего этот закон распределения.

3. Дисперсия случайного процесса x(t) с нормальным законом распределения:

$$D_{x} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x})^{2} p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x}}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_{x})^{2} e^{-\frac{(x - m_{x})^{2}}{2\sigma_{x}^{2}}} dx.$$

Замена переменных  $z = \frac{x - m_x}{\sigma_x}$ ;  $x = z\sigma_x + m_x$ ;  $dx = \sigma_x dz$ . После преобразований получим

$$\left( \text{учитывая, что} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} \right): \quad D_x = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma_x^2.$$

Вывод. Параметр  $\sigma_x^2$  в формуле нормального закона распределения является среднеквадратичным отклонением случайного процесса X(t), имеющего этот закон распределения.

4. Кривая графика нормального закона распределения симметрична относительно оси, проходящей через точку *m<sub>x</sub>*.

5. Ветви кривой p(x) асимптотически приближаются к оси 0x при  $|x| \rightarrow \infty$ .

6. При изменении  $m_x$  и  $\sigma_x = const$  кривая закона распределения смещается вдоль оси  $\partial x$ : вправо при увеличении  $m_x$  и влево при уменьшении  $m_x$ .

7. При изменении  $\sigma_x$  и  $m_x = const$  кривая закона распределения изменяет свой вид: становится более широкой и низкой при увеличении  $\sigma_x$ , более узкой и высокой при уменьшении  $\sigma_x$ .

Вероятность того, что значения случайной величины, имеющей нормальное распределение, находятся в определенных пределах, т.е.  $P(a \le X \le b)$ :

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{a - m_x}{\sigma_x}\right).$$

Вероятность попадания случайной величины с нормальным законом распределения в интервал  $[m_x - 3\sigma_x; m_x + 3\sigma_x]$ :

$$P[(m_x - 3\sigma_x) \le X \le (m_x + 3\sigma_x)] = F(m_x + 3\sigma_x) - F(m_x - 3\sigma_x) = 0, 5 \cdot \Phi(3) - 0, 5 \cdot \Phi(-3) = \Phi(3) = 0,9973.$$

Т.о., для случайной величины с нормальным законом распределения выполнение неравенства  $|x - m_x| \le 3\sigma_x$  является практически достоверным. В этом и заключается смысл так называемого правила «трех сигм».

8. Характеристическая функция случайной величины, имеющей нормальный закон распределения вероятностей:

 $\Theta_x(v) = e^{jvm_x - \frac{\sigma_x^2 v^2}{2}}$ . Для нормального случайного сигнала с  $m_x = 0$  и  $\sigma_x = 1$  получаем  $\Theta_x(v) = e^{-\frac{v^2}{2}}$ . Центральная предельная теорема.

Эффект нормализации случайных сигналов, который проявляется в процессе их преобразования линейными устройствами, обусловлен справедливостью центральной предельной теоремы теории вероятностей.

Формулировка теоремы. Закон распределения суммы независимых случайных величин с одинаковыми законами распределения неограниченно приближается к нормальному закону при увеличении числа слагаемых в сумме.

*Нормализация случайных процессов*. Пусть на входе линейной цепи (с постоянными параметрами) действует стационарный случайный процесс с распределением, отличным от нормального. Если интервал корреляции этого про цесса меньше постоянной времени цепи (т. е. ширина энергетического спектра больше полосы пропускания цепи), то распределение случайного процесса на выходе приближается к нормальному. Эффект нормализации проявляется тем сильнее, чем уже полоса пропускания цепи.

В линейных инерционных устройствах при соблюдении некоторых условий проявляет себя эффект нормализации.

Суть эффекта нормализации: закон распределения выходного случайного сигнала является нормальным при любом законе распределения входного сигнала.

Условия проявления эффекта нормализации:

а) в частотной области – эффективная ширина энергетического спектра входного сигнала  $\Delta \omega_{pq}$  значительно больше полосы пропускания устройства  $\Delta \omega_{np}$ , т. е.  $\Delta \omega_{pq} >> \Delta \omega_{np}$ ;

б) во временной области – интервал корреляции входного сигнала  $\tau_{\kappa}$  значительно меньше постоянной времени устройства  $\tau_{u}$ , т. е.  $\tau_{\kappa} \ll \tau_{u}$ .

#### 37. Нормальный (гауссовский) закон распределения случайных сигналов. Эффект нормализации случайных процессов в узкополосных цепях.

Нормальный (гауссовский) закон распределения случайных величин чаще других встречается в природе. Нормальный процесс особенно характерен для помех канала связи. Он очень удобен для анализа. Поэтому случайные процессы, распределение которых не слишком сильно отличается от нормального, часто заменяют гауссовским процессом. Одномерная плотность вероятности нормального процесса определяется выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right].$$
 (4.28)



Рис. 4.8. Случайные функции с одинаковым распределением (нормальным), но с различными частотными спектрами

Графики плотности вероятности при нормальном законе для некоторых значений  $\sigma_x$  изображены на рис. 4.7. Функция p(x) симметрична относительно среднего значения. Чем больше  $\sigma_x$ , тем меньше максимум, а кривая становится более пологой (площадь под кривой p(x) равна единице при любых значениях  $\sigma_x$ ).

Широкое распространение нормального закона распределения в природе объясняется тем, что при сумми-

ровании достаточно большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин распределение суммы близко к нормальному при любом распределении отдельных слагаемых.

На основе функции p(x) можно найти относительное время пребывания сигнала x(t) в определенном интервале уровней, отношение максимальных значений к среднеквадратическому (пикфактор) и ряд других важных для практики параметров случайного процесса. Поясним это на примере одной из реализаций гауссовского процесса, изображенной на рис. 4.8, а для  $m_x=0$ .

Эта функция времени соответствует шумовой помехе, энергетический спектр которой простирается от нулевой частоты до некоторой граничной частоты. Вероятность пребывания значения x(t) в интервале от *a* до *b* при  $m_x=0$ :

$$P(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_a^b e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx =$$
  
=  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_0^b e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_0^a e^{-x^2/2\sigma_x^2} dx =$   
=  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{b/\sigma_x} e^{-y^2/2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sigma_x} e^{-y^2/2} dy = \Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sigma_x}\right).$  (4.29)

Функция

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{u} e^{-y^{2}/2} dy$$
(4.30)

называется интегралом вероятностей.

Подставив в (4.29)  $b/\sigma_x=1$ , 2, 3 и соответственно  $a/\sigma_x=-1$ , -2 и -3, нетрудно найти вероятности пребывания x(t) в полосах шириной  $2\sigma_x$ ,  $4\sigma_x$  и  $6\sigma_x$ , симметричных относительно оси *t*.

В рассматриваемом частном случае (|a|=b) формулу (4.29) можно упростить на основании симметрии функции относительно оси ординат (рис. 4.7). Таким образом

$$P(-b < x < b) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{b/\sigma_x} e^{-y^2/2} dy = 2\Phi\left(\frac{b}{\sigma_x}\right)$$

Можно отметить, что приведенные выше данные о распределении вероятностей не дают никаких представлений о поведении функции x(t) во времени. На рис. 4.8, б показана реализация гауссовского процесса со спектром, сосредоточенным в узкой полосе частот с центральной частотой  $\omega_0$ . По своей плотности вероятности p(x) и, следовательно, по значениям  $m_x$  и  $\sigma_x$  этот процесс не отличается от низкочастотного, показанного на рис. 4.8, а.

*Нормализация случайных процессов*. Пусть на входе линейной цепи (с постоянными параметрами) действует стационарный случайный процесс с распределением, отличным от нормального. Если интервал корреляции этого про цесса меньше постоянной времени цепи (т. е. ширина энергетического спектра больше полосы пропускания цепи), то распределение случайного процесса на выходе приближается к нормальному. Эффект нормализации проявляется тем сильнее, чем уже полоса пропускания цепи. Поясним это положение примере.



Рис. 7.11. Отклики колебательной цепи на отдельные импульсы хаотической последовательности

Рассмотрим воздействие на высокодобротный колебательный контур последовательности коротких, неперекрывающихся, случайным образом расположенных на оси времени импульсов (рис. 7.11), причем постоянная времени контура  $\tau_{\kappa}$  велика по сравнению co средней величиной интервалов между импульсами. Напряжение на контуре в какой-либо момент времени t<sub>1</sub> является суммой свободных колебаний, вызванных предыдущими импульсами и не успевших полностью затухнуть к рассматриваемому моменту. Чем уже полоса пропускания цепи, тем длительнее свободные колебания и, следовательно, тем большее число соизмеримых по величине И принимает некоррелированных слагаемых участие В образовании результирующего напряжения в момент  $t_1$ . В центральной соответствии с предельной теоремой эти предпосылки достаточны для приближения распределения к нормальному.

При спектральном подходе эффект нормализации можно объяснить следующим образом. Спектр колебания в контуре суммируется из спектров отдельных импульсов входной последовательности. Внутри каждого из этих парциальных спектров фазы спектральных составляющих полностью коррелированы, а между фазами составляющих из различных спектров никакой корреляции нет (из-за случайной расстановки импульсов на оси времени). Чем уже полоса прозрачности контура, тем меньшую роль играет корреляция фаз в парциальных спектрах.

## 38. Спектральные характеристики случайных сигналов и их отличие от спектральных характеристик детерминированных сигналов. Теорема Винера-Хинчина.

Непосредственное применение классического метода спектрального анализа для множества реализаций случайного сигнала не представляется возможным. Объясняется это тем, что реализация случайного процесса не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty$ . При этом невозможно применение преобразования Фурье

для определения ее спектральной плотности  $S_x(j\omega)$ . Применение свойств дельта-функции, как это было сделано для детерминированных сигналов, не помогает.

Если же взять ансамбль реализаций, ограниченных по времени и удовлетворяющих условию  $0 \le \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} |x(t)|^{2} dt < \infty$ , то в принципе можно определить для каждой из них

спектральную плотность. Для различных реализаций случайного сигнала она будет иметь случайный вид, что позволяет назвать ее реализацией случайного спектра, т. е. реализацией случайного процесса в частотной области. Она содержит всю информацию о конкретной реализации случайного сигнала. Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, можно восстановить реализацию. Следовательно, для таких процессов (конечной мощности) некоторые задачи статистического анализа можно иногда решать в частотной области с использованием метода быстрого преобразования Фурье и возможности вычислительной техники.

В то же время усреднение по ансамблю комплексных спектральных функций  $S_x(j\omega)$ , соответствующих реализациям случайного процесса с  $m_x=0$ , приводит к неопределенности и получению нулевого результата:

$$\overline{S_k(j\omega)} = \int_0^T \overline{X_k(t)} e^{-j\omega t} dt = \int_0^T \overline{X_k(t)} e^{-j\omega t} dt = \int_0^T m_x e^{-j\omega t} dt = 0$$

Получение нулевого результата обусловлено случайностью и независимостью амплитуд и фаз отдельных спектральных компонент  $S_x(j\omega)$  на конкретных частотах  $\omega_k$ . Для того чтобы исключить влияния фазовых компонент спектральных составляющих, общую идею гармонического анализа применяют для энергетических параметров случайного сигнала. Другими словами, обобщают классический гармонический анализ, усредняя спектральное разложение отдельных реализаций.

Спектральная плотность мощности. Пусть  $x_k(t)$  – реализация случайного процесса X(t) с математическим ожиданием  $m_x=0$ .

Полагаем, что реализация ограничена временным интервалом 
$$[0...T]$$
. Тогда спектральная плотность реализации равна:  $S_k(j\omega) = \int_{0}^{T} x_k(t) e^{-j\omega t} dt$ .

В соответствии с равенством Парсеваля можно определить энергию и среднюю мощность рассматриваемой реализации в интервале [0...*T*]:

$$\begin{array}{c|c} \partial_{k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S_{k}\left(j\omega\right) \right|^{2} d\omega; & P_{k} = \frac{\partial_{k}}{T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| S_{k}\left(j\omega\right) \right|^{2}}{T} d\omega. & \begin{array}{c} C \text{ возрастанием времени } T \text{ растет} \\ & \text{энергия } \partial_{k}. \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Pi pu \quad \text{этом мощность, равная} \\ \text{отношению} \quad \partial_{k}/T, \quad \text{стремится } \kappa \\ \text{некоторому пределу, т. е. } \end{array} \quad P_{k} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| S_{k}\left(j\omega\right) \right|^{2}}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} \frac{\left| S_{k}\left(j\omega\right) \right|^{2}}{T} d\omega. \end{array}$$

Из полученного выражения видно, что величина  $\lim_{T\to\infty} \frac{|S_k(j\omega)|^2}{T} d\omega$  есть бесконечно малая мощность, приходящаяся на интервал частот  $d\omega$ . Следовательно, функцию

	$ \mathbf{S}(i\omega) ^2$	можно назват	гь спектральной
Следовательно,	$\lim \frac{ S_k(j\omega) }{ \omega } d\omega =  S_k(j\omega) ^2$	плотностью	мощности k-й
функцию	$W_{,k}(\omega) = \frac{T \to \infty}{T} = \lim \frac{ S_k(J\omega) }{ S_k(J\omega) }$	реализации	случайного
	$d\omega \qquad T \to \infty \qquad T$	процесса $X(t)$ .	

Усредняя функции  $W_{xk}(\omega)$  по множеству реализаций, получим спектральную плотность мощности случайного процесса  $W_x(\omega)$ . Заметим, что для эргодического случайного процесса  $W_x(\omega)$  можно получить, усредняя спектральную плотностью мощности *k*-й реализации по времени.

Функция  $W_x(\omega)$  – это одна из основных характеристик случайного процесса, являясь по существу его энергетическим спектром. Она показывает усредненное распределение мощности процесса по частотам без учета фазовой структуры спектра. Размерность функции  $W_x(\omega)$  –  $B^2c/pag$ .

Формулы Винера-Хинчина. Определяют связь между частотной и временной характеристиками случайного сигнала. В качестве частотной характеристики рассматривается спектральная плотность мощности, а в качестве временной – корреляционная (при  $m_x=0$ ) или ковариационная (при  $m_x \neq 0$ ) функция.

Пусть x(t) – реализация эргодического случайного процесса X(t), длительность которой ограничена конечным интервалом [0...*T*]. Такую реализацию можно рассматривать как детерминированный сигнал. Известно, что корреляционная функция детерминированного сигнала связана преобразованием Фурье с его энергетическим спектром, т. е.

$$R(\tau) = \int_{0}^{T} x(t) x(t-\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S_{x}(j\omega) \right|^{2} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Усредним данное выражение по времени и учтем, что применительно к эргодическим случайным процессам рассматривается длинная реализация и приведенное выражение при  $m_x \neq 0$  соответствует ковариационной функции. Тогда

$$B_{x}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) x(t-\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} \frac{\left|S_{x}(j\omega)\right|^{2}}{T} e^{j\omega\tau} d\omega.$$
  
Учитывая, что 
$$\lim_{T \to \infty} \frac{\left|S_{x}(j\omega)\right|^{2}}{T} = W_{x}(\omega), \text{ окончательно получаем } B_{x}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Это обратное преобразование Фурье. Следовательно, справедливо и прямое преобразование Фурье  $W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\omega$ .

Итак, получен следующий результат (который иногда называют теоремой Винера – Хинчина): спектральная плотность мощности и ковариационная функция случайного процесса связаны между собой парой преобразований Фурье.

Для случайного процесса при *m<sub>x</sub>*=0 формулы Винера-Хинчина связывают между собой спектральную плотность мощности и корреляционную функцию случайного процесса:

$W_{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau;$	$R_{x}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$	Учитывая свойство четности функций $W_x(\omega)$ и $R_x(\tau)$ , запишем:
$W_{x}(\omega)=2\int_{0}^{\infty}R_{x}(\tau)\cos\omega\tau d\tau;$	$R_{x}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} W_{x}(\omega) \cos \omega \tau d\omega$	<ul> <li>ω При <i>τ</i>=0 находим, что дисперсия при <i>m<sub>x</sub></i>=0 равна:</li> </ul>
Спектральная плотно	сть мощности при $\omega=0$	$W_{x}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x}(\tau) d\tau = 2 \int_{0}^{\infty} R_{x}(\tau) d\tau.$

38. Спектральные характеристики случайных сигналов и их отличие от спектральных характеристик детерминированных сигналов. Теорема Винера-Хинчина.

Спектральную плотность случайного процесса можно найти, если известен механизм образования случайного процесса.

Выделив из ансамбля какую-либо реализацию  $x_k(t)$  и ограничив ее длительность конечным интервалом *T*, можно применить к ней обычное преобразование Фурье и найти спектральную плотность **X**<sub>kT</sub>( $\omega$ ). Тогда энергия рассматриваемого отрезка реализации:

$$\partial_{kT} = \int_{-T/2}^{T/2} x_{kT}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2 d\omega. \qquad (4.31)$$

Разделив эту энергию на *T*, получим среднюю мощность *k*-й реализации на отрезке *T*:

$$\overline{x_{kT}^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T} d\omega.$$
(4.32)

При увеличении *T* энергия  $\mathcal{P}_{kT}$  возрастает, однако отношение  $\mathcal{P}_{kT}/T$  стремится к некоторому пределу. Совершив предельный переход  $T \to \infty$ , получим

$$\overline{x_k^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} \frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_k(\omega) d\omega,$$

где

$$W_k(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2}{T}$$
(4.33)

представляет собой спектральную плотность средней мощности рассматриваемой *k*-й реализации.

В общем случае величина  $W_k(\omega)$  должна быть усреднена по множеству реализации. Ограничиваясь в данном случае рассмотрением стационарного и эргодического процесса, можно считать, что найденная усреднением по одной реализации функция  $W_k(\omega)$  характеризует весь процесс в целом. Опуская индекс k, получаем окончательное выражение для средней мощности случайного процесса

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_k(\omega) \, d\omega,$$

где

$$W_k(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|\mathbf{X}_T(\omega)|^2}{T} .$$
(4.34)

Если рассматривается случайный процесс с ненулевым средним значением x(t), то спектральную плотность следует представить в форме

$$W_k(\omega) = (x(t))^2 \cdot 2\pi\delta(\omega) + W_{\sim}(\omega), \qquad (4.35)$$

где  $W_{\approx}(\omega)$  — сплошная часть спектра, соответствующая флуктуационной составляющей *x*, а  $\delta(\omega)$  — дельта-функция.

При интегрировании по  $f=\omega/(2\pi)$  первое слагаемое в правой части дает  $(\overline{x(t)})^2$ , т.е. мощность постоянной составляющей, а второе — мощность флуктуационной составляющей, т. е. дисперсию

$$D_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\sim}(\omega) \, d\omega = \sigma_x^2 \,. \tag{4.36}$$

Для процесса с нулевым средним

$$\overline{x^2(t)} = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(2\pi f) \, df. \qquad (4.37)$$

Из определения спектральной плотности (4.33) очевидно, что  $W_x(\omega)$  является четной и неотрицательной функцией  $\omega$ .

Соотношение между спектральной плотностью и ковариационной функцией случайного процесса.

С одной стороны, скорость изменения x(t) во времени определяет ширину спектра. С другой стороны, скорость изменения x(t) определяет ход ковариационной функции. Очевидно, что между  $W_x(\omega)$  и  $K_x(\tau)$  имеется тесная связь.

Теорема Винера—Хинчина утверждает, что  $K_x(\tau)$  и  $W_x(\omega)$  связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$W_{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{x}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \qquad (4.38)$$

$$K_{x}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$
(4.39)

Для случайных процессов с нулевым средним аналогичные выражения имеют вид

$$W_{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \qquad (4.38')$$

$$R_{x}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$
(4.39)

Из этих выражений вытекает свойство: чем шире спектр случайного процесса, тем меньше интервал корреляции, и соответственно чем больше интервал корреляции, тем уже спектр процесса.

Большой интерес представляет белый шум, когда спектр равномерен на всех частотах  $-\infty < \omega < \infty$ .

Если выражение (4.39) подставить  $W_x(\omega) = W_0 = const$ , то получим

$$R_{\rm x}(\tau) = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} {\rm e}^{i\omega\tau} \, d\omega = W_0 \delta(\tau), \qquad (4.40)$$

где  $\delta(\tau)$  — дельта-функция.

Для белого шума с бесконечным и равномерным спектром корреляционная функция равна нулю для всех значений  $\tau$ , кроме  $\tau=0$ , при котором  $R_x(0)$  обращается в бесконечность. Подобный шум, имеющий игольчатую структуру с бесконечно тонкими случайными выбросами, иногда называют дельта-коррелированным процессом. Дисперсия белого шума бесконечно велика.

#### 39. Соотношение между шириной спектра и интервалом корреляции случайного сигнала.

Вначале покажем следующее свойство спектра случайного процесса и его корреляционной функции: изменение масштаба корреляционной функции по оси *τ* приводит к изменению величины спектральной плотности мощности и ее масштаба по оси *ω*.

Пусть масштаб корреляционной функции случайного процесса со спектральной плотностью мощности  $W_x(\omega)$  изменился по оси  $\tau$  в  $\alpha$  раз, т. е. обозначение корреляционной функции имеет вид  $R_x(\alpha \tau)$ . Очевидно, что при  $\alpha > 1$  происходит сжатие, а при  $0 < \alpha < 1$  – расширение графика корреляционной функции. Тогда

$$W_{xm}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\alpha \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau.$$

Замена переменных:  $\alpha \tau = x$ ;  $\tau = x/\alpha$ ;  $d\tau = \frac{1}{\alpha} dx$ .

$$W_{xm}(\omega) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{-j\frac{\omega}{\alpha}x} dx = \frac{1}{\alpha} W_{x}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

*Вывод*. При сжатии (расширении) графика корреляционной функции случайного процесса по оси в определенное число раз во столько же раз расширяется (сжимается) график его спектра по оси частот при пропорциональном уменьшении (увеличении) амплитуд его составляющих.

Рассмотрим данное свойство применительно к понятиям эффективная ширина спектра и интервал корреляции случайного сигнала.



$$\Delta \omega_{3\phi} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{W_x(0)}; \qquad \Delta \omega_{3\phi} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{W_x(\omega_0)}$$

Интервал корреляции случайного сигнала – это числовая характеристика, служащая для оценки скорости изменения реализации случайного сигнала. Эта характеристика определяется выражением

$$\tau_{\kappa} = \frac{\int_{0}^{\infty} \left| R_{x}(\tau) \right| d\tau}{R(0)} = \frac{\int_{0}^{\infty} \left| R_{x}(\tau) \right| d\tau}{D_{x}} = \int_{0}^{\infty} \left| r_{x}(\tau) \right| d\tau$$

Так как спектральная плотность мощности и корреляционная функция связаны преобразованием Фурье, то следует ожидать, что существует жесткая связь между эффективной шириной спектра  $\Delta \omega_{3\phi}$  и интервалом корреляции  $\tau_{\kappa}$  случайного сигнала. Определим произведение  $\Delta \omega_{3\phi} \cdot \tau_{\kappa}$  для широкополосного случайного сигнала:

$$\Delta \omega_{_{3\phi}} \cdot \tau_{_{\kappa}} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{W_x(0)} \cdot \frac{\int\limits_{0}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau}{R(0)} \cdot \frac{\int\limits_{0}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau}{R(0)} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau}{R(0)} \cdot \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau}{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{2\int\limits_{0}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau} \cdot \frac{\int\limits_{0}^{0} |R_x(\tau)| d\tau}{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega} = \pi \cdot \frac{\int\limits_{0}^{\infty} W_x(\omega) d\omega}{2\int\limits_{0}^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau} \cdot \frac{\int\limits_{0}^{0} |R_x(\tau)| d\tau}{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega} = \pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2\pi} \cdot \frac{\pi}$$

Таким образом, эффективная ширина спектра  $\Delta \omega_{s\phi}$  и интервал корреляции  $\tau_{\kappa}$  случайного сигнала находятся в обратно пропорциональной зависимости: чем шире (уже) полоса частот, занимаемая спектром случайного сигнала, тем меньше (больше) интервал корреляции.

40. Узкополосные случайные сигналы. Необходимость определения статистических характеристик огибающей и фазы этих сигналов. Законы распределения узкополосного случайного сигнала, его огибающей и фазы.



где U(t) – медленноменяющаяся функция времени, описывающая амплитудную огибающую данного сигнала;  $\varphi(t)$  – фазовая функция сигнала.

Узкополосный случайный сигнал наблюдается на выходах узкополосных УПЧ). высокочастотных устройств (УВЧ, При обработке устройствами ЭТИМИ широкополосных сигналов проявляется эффект нормализации.

Этот эффект заключается в том, что при условии  $\Delta \omega_{s\phi} >> \Delta \omega_{np}$ , где  $\Delta \omega_{s\phi} -$  эффективная полоса частот спектра сигнала,  $\Delta \omega_{np}$  – полоса пропускания устройства; выходной случайный сигнал имеет нормальный закон распределения, независимо от того, какой закон распределения имел входной сигнал. Поэтому на практике чаще всего встречается Гауссовский узкополосный сигнал. Закон распределения такого сигнала:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

Функция распределения сигнала:

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \right].$$

где 
$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t}{2}} dt$$
 - функция Лапласа.

Огибающая U(t) и фаза  $\varphi(t)$  узкополосного случайного сигнала характеризуются своими законами распределения.

Для получения законов распределения огибающей $U(t)$ и фазы $\varphi(t)$	$II = -\frac{U^2}{2}$
вначале определяется двумерный закон распределения $p(U, \varphi)$ :	$p(U,\varphi) = \frac{U}{2} e^{-2\sigma_x^2}.$
	$2\pi\sigma_x^2$





Замена переменных  $U^2 = z$ ; 2UdU = dz; dU = dz/2U.

$$p(\varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma_x^2} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{2\sigma_x^2}} dz = \frac{-2\sigma_x^2}{4\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{z}{2\sigma_x^2}} \bigg|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}$$

Это равномерный закон распределения. Функция распределения амплитуды:

$$F(U) = \frac{1}{2\pi}\varphi + \frac{1}{2}.$$



 $p(U, \varphi) = p(U) \cdot p(\varphi)$ . Это значит, что случайные процессы U(t) и  $\varphi(t)$  статистически независимы.

40. Узкополосные случайные сигналы. Необходимость определения статистических характеристик огибающей и фазы этих сигналов. Законы распределения узкополосного случайного сигнала, его огибающей и фазы.

Каждая из реализаций подобного случайного процесса имеет вид почти гармонического колебания:

$$x(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t)] = A(t) \cos \psi(t),$$
(4.60)

все параметры которого — огибающая A(t), фаза  $\theta(t)$  и частота  $\omega(t)$  — являются случайными медленно меняющимися функциями времени.

При представлении шума в форме (4.60) предполагается, что огибающая A(t) отвечает соотношению:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \qquad (4.61)$$

где y(t) — функция, сопряженная по Гильберту исходной функции x(t), а  $\omega_0$  выбрана таким образом, что фаза  $\theta(t)$  не содержит слагаемого, линейно зависящего от t.

Дальнейшее рассмотрение основано на допущении, что спектральная плотность шума x(t)сконцентрирована узкой по сравнению с величиной  $\omega_0$  полосе, причем функция  $W_x(\omega)$  в указанной полосе симметрична относительно точки  $\omega_0$ .

Рассмотрим стационарный эргодический процесс с нормальным законом распределения вероятностей. Здесь необходимо подчеркнуть, что указанное распределение характеризует физическое колебание x(t), т. е. мгновенное значение колебания (в любой момент времени t). Параметры же колебания: A(t),  $\theta(t)$  и  $\omega(t)=d\psi/dt$  — обладают законами распределения, существенно отличающимися от нормального. Для полного описания свойств узкополосного процесса требуется знание законов распределения, а также корреляционных функций всех параметров колебания.

Огибающая. Двумерная плотность вероятности:

$$p(A, \theta) = \frac{A}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right). \tag{4.69}$$

Интегрируя до переменной θ, получаем одномерную плотность вероятности:

$$p_A(A) = \int_{-\pi}^{\pi} p(A, \theta) \, d\theta = \frac{A}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right), \, 0 < A < \infty. \tag{4.70}$$



Распределение огибающей, характеризуемое плотностью вероятности (4.70), называется распределением Рэлея (рис.4.16). Максимальное значение функции 
$$p_A(A)$$
 получается при  $A = \sigma_x$ . Это означает, что  $A = \sigma_x$  является наивероятнейшим значением огибающей.

Среднее же значение (математическое ожидание) огибающей:

$$M[A] = \int_{0}^{\infty} Ap_{A}(A) \, dA = \frac{1}{\sigma_{x}^{2}} \int_{0}^{\infty} A^{2} \exp\left(-\frac{A^{2}}{2\sigma_{x}^{2}}\right) dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{x}.$$
 (4.71)

Рис. 4.16. Распределение Рэлея

$$M[A] = \int_{0}^{1} Ap_{A}(A) dA = \frac{1}{\sigma_{x}^{2}} \int_{0}^{1} A^{2} \exp\left(-\frac{A^{2}}{2\sigma_{x}^{2}}\right) dA = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{x}.$$
 (4.71)

Аналогично среднии квадрат огиоающеи.

$$M[A^{2}] = \int_{0}^{\infty} A^{2} p_{A}(A) \, dA = \frac{1}{\sigma_{x}^{2}} \int_{0}^{\infty} A^{3} \exp\left(-\frac{A^{2}}{2\sigma_{x}^{2}}\right) dA = 2\sigma_{x}^{2} \,. \tag{4.72}$$

Таким образом, средняя мощность огибающей равна удвоенной дисперсии шума. Это аналогично соотношению между квадратом амплитуды А0 и средней мощностью гармонического колебания  $a(t) = A_0 \cos \omega_0 t$ , равной  $\overline{a^2(t)} = \frac{1}{2} A_0^2$ .

Вероятность того, что огибающая A(t) превысит некоторый заданный уровень C, определяется формулой:

$$P(A > C) = \int_{C}^{\infty} p_A(A) \, dA = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{C}^{\infty} A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA = \exp\left(-\frac{C^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad (4.73)$$

а вероятность того, что огибающая A(t) будет ниже уровня C, — формулой

$$P(A < C) = 1 - \exp\left[-\frac{C^2}{2\sigma_x^2}\right]. \tag{4.74}$$

Из этих формул видно, что уже при  $C=3\sigma_x$  вероятность превышения уровня C составляет всего лишь около 1%.

Ковариационная функция огибающей узкополосного нормального шума

$$K_{A}(\tau) = \frac{\pi \sigma_{x}^{2}}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} r_{0}^{2}(\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n}\right]^{2} r_{0}^{2n}(\tau) \right\}.$$
 (4.75)

Здесь  $r_0(x)$  представляет собой огибающую нормированной корреляционной функции шума x(t) т. е. функции, определяемой выражением (при  $\overline{x} = 0$ )

$$r_x(\tau) = R_x(\tau) / \sigma_x^2 = r_0(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$
 (4.76)

Так как  $r_0 < 1$ , то ряд (4.75) быстро сходится. Поэтому можно ограничиться первыми двумя членами:

$$K_A(\tau) \approx \frac{\pi \sigma_x^2}{2} \Big[ 1 + \frac{1}{4} r_0^2(\tau) \Big].$$
 (4.77)

Применяя к *K<sub>A</sub>*(*τ*) преобразование Фурье, находим спектральную плотность мощности огибающей

$$W_{A}(\Omega) = \frac{\pi \sigma_{x}^{2}}{2} 2\pi \delta(\Omega) + \frac{\pi \sigma_{x}^{2}}{2} \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} r_{0}^{2}(\tau) e^{-i\Omega\tau} d\tau.$$
(4.78)

Из выражения (4.78) видно, что спектр огибающей примыкает к нулевой частоте. Первое слагаемое в правой части (4.78) соответствует постоянной составляющей огибающей, а второе — сплошной части спектра.

Интегрирование двумерной плотности вероятности p(A,  $\theta$ ), определяемой выражением (4.69), по переменной A дает одномерную плотность вероятности фазы

$$p_{\theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_0^{\infty} A \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) dA = \frac{1}{2\pi\sigma_x^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) d(A^2) = \frac{1}{2\pi}, -\pi < \theta \le \pi.$$
(4.79)

Заметим, что из представления p(A,  $\theta$ ) [см. (4.69)] в виде произведения

$$p(A, \theta) = \frac{A^2}{2\pi\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right) = \left[\frac{A^2}{\sigma_x^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_x^2}\right)\right] \left(\frac{1}{2\pi}\right) = p_A(A)p_\theta(\theta)$$

непосредственно вытекает статистическая независимость случайных величин А и  $\theta$ .

Соотношения (4.70) и (4.79) позволяют сделать следующее общее заключение: произведение вида  $x=Acos\theta$ , в котором A и  $\theta$  — независимые случайные величины, причем A распределена по Рэлею, а  $\theta$  равновероятна в интервале (- $\pi$ ,  $\pi$ ), обладает нормальной плотностью вероятности.

Условие узкополосности процесса x(t) не обязательно; необходимо лишь, чтобы A и  $\theta$  были связаны соотношениями:

$$A(t) = \sqrt{A_{\rm c}^2(t) + A_{\rm s}^2(t)}, \ \theta(t) = \operatorname{arctg} A_{\rm s}/A_{\rm c}.$$
(4.63)

Корреляционная функция фазы  $\theta(t)$  определяется выражением:

$$R_{\theta}(\tau) = \frac{\pi}{2} r_0(\tau) + \frac{\pi}{4} r_0^2(\tau) + \frac{\pi}{12} r_0^3(\tau) + \dots$$
(4.80)

При  $\tau=0$  ряд сходится к  $\pi^2/3$ , т. е. дисперсия фазы равна  $\pi^2/3$ . Действительно, при распределении (4.79):

$$D_{\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 p_{\theta}(\theta) \ d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\theta^3}{3}\right)_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3} .$$
(4.81)

41. Линейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения спектральной плотности мощности и корреляционной функции случайного сигнала на выходе линейного устройства.

линейного устройства Ha ВХОД С коэффициентом частотным передачи  $K(i\omega)$  (импульсной h(t) или характеристикой) переходной g(t)поступает случайный сигнал, моделью которого может служить стационарный случайный процесс *X*(*t*). Известны статистические характеристики этого процесса: случайного закон распределения р(х), спектральная



плотность мощности  $W_x(\omega)$ , корреляционная функция  $R_x(\tau)$ , дисперсия  $D_x$  и математическое ожидание  $m_x$ . Необходимо определить аналогичные статистические характеристики p(y),  $W_y(\omega)$ ,  $R_y(\tau)$ ,  $D_y$ ,  $m_y$  выходного случайного процесса.

Определение характеристик выходного случайного сигнала спектральным методом.

Определение спектральной плотности мощности. Спектральная плотность мощности случайного процесса *X*(*t*) определяется выражением

$$W_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|S_x(j\omega)|^2}{T}$$
, (1) где  $T$  – интервал времени, на котором рассматривается реализация  $x(t)$ ;  $S_x(j\omega)$  – спектральная плотность реализации  $x(t)$ .

Если подать реализацию x(t) на линейное устройство с частотной характеристикой  $K(j\omega)$ , то на выходе получится реализация y(t) выходного случайного процесса Y(t). Спектральная плотность реализации y(t) (это не случайная функция времени) равна

$$S_{y}(j\omega) = S_{x}(j\omega) \cdot K(j\omega).$$
 Тогда  $W_{y}(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{\left|S_{y}(j\omega)\right|^{2}}{T} = \lim_{T \to \infty} \frac{\left|S_{x}(j\omega) \cdot K(j\omega)\right|^{2}}{T}.$ 

Передаточная функция  $K(j\omega)$  не зависит от T, поэтому множитель можно вынести за знак предела, т. е.

$$W_{y}(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{\left|S_{x}(j\omega)\right|^{2}}{T} \cdot \left|K(j\omega)\right|^{2}.$$
 Учитывая (1),  
получаем: 
$$W_{y}(\omega) = W_{x}(\omega) \cdot \left|K(j\omega)\right|^{2}$$
(2).

Таким образом, спектральная плотность мощности выходного сигнала равна произведению спектральной плотности мощности входного сигнала на квадрат амплитудночастотной характеристики линейной цепи. Данное выражение лежит в основе спектрального метода анализа линейных цепей с известной амплитудно-частотной характеристикой при воздействии на них случайных сигналов. Оно позволяет непосредственно определять спектральную плотность мощности выходного случайного сигнала по заданному спектру входного сигнала. Фазовая характеристика линейной цепи не оказывает влияния на спектральную плотность мощности выходного сигнала.

Определение корреляционной функции  $R_y(\tau)$ . Известно, что в соответствии с теоремой Винера – Хинчина энергетический спектр случайного сигналасвязан с его ковариационной функцией преобразованиями Фурье.

Следовательно, ковариационную  $B_y(\tau)$  и корреляционную  $R_y(\tau)$  функции случайного сигнала на выходе линейной цепи можно определить следующим образом:

$$B_{y}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{y}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x}(\omega) \left| K(j\omega) \right|^{2} e^{j\omega\tau} d\omega; \qquad R_{y}(\tau) = B_{y}(\tau) - m_{y}^{2}.$$
(3)

Дисперсия *D<sub>y</sub>* и математическое ожидание *m<sub>y</sub>* выходного случайного сигнала равны:

$$D_{y} = R_{y}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x}(\omega) |K(j\omega)|^{2} d\omega - m_{y}^{2}; \quad m_{y} = m_{x} \cdot K(0), \qquad \begin{array}{c} \text{где } K(0) - \text{коэффцицент} \\ \text{передачи цепо по} \\ \text{постоянному току.} \end{array}$$
(4)

Формулы (2)-(4) представляют собой по сути полное решение поставленной задачи спектральным методом (в частотной области).

Определение характеристик выходного случайного сигнала временным методом.

Определение корреляционной функции  $R_x(\tau)$ . Известна корреляционная функция  $R_x(\tau)$ входного случайного процесса с  $m_x=0$  и импульсная характеристика h(t) линейной цепи. Необходимо определить  $R_{v}(\tau)$ .

Частотный коэффициент передачи и импульсная характеристика цепи связаны между собой преобразованиями Фурье, т. е.

Как видно из приведенных выражений, частотный коэффициент передачи К(jw) цепи является по существу спектральной плотностью ее импульсной характеристики h(t). Тогда, учитывая связь между спектром и корреляционной функцией детерминированного сигнала, можно записать

где  $R_h(\tau)$  – корреляционная функция импульсной характеристики цепи. Воспользуемся следующим свойством преобразования Фурье:

$s_1(t) \leftrightarrow S_1(j\omega)$ $s_2(t) \leftrightarrow S_2(j\omega)$	Применительно к формуле (2), данное свойство можно	$R_{x}(\tau) \leftrightarrow W_{x}(\omega)$ $R_{h}(\tau) \leftrightarrow  K(j\omega) ^{2}$
$s_1(t) \otimes s_2(t) \leftrightarrow S_1(j\omega)S_2(j\omega)$	представить следующим образом:	$R_{x}(\tau) \otimes R_{h}(\tau) \leftrightarrow W_{x}(\omega) \cdot \left  K(j\omega) \right ^{2}$

Таким образом, произведению спектральной плотности мощности входного сигнала на квадрат амплитудно-частотной характеристики линейной цепи соответствует свертка корреляционных функций входного сигнала и импульсной характеристики цепи.

В выра	результате ажение:	получаем	следующее	$R_{x}(\tau) \otimes R_{h}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{x}(\omega) \cdot \left  K(j\omega) \right ^{2} e^{j\omega\tau} d\omega.$
				∞

Сравнивая данное выражение с (3), можно записать:

авнивая данное выражение с (3), можно записать:  $R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) R_h(\tau - t) dt$  (6). Определение спектральной плотности мощности  $W_y(\omega)$ . В соответствии с теоремой Винера – Хинчина

$$W_{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{y}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau.$$

41. Линейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения спектральной плотности мощности и корреляционной функции случайного сигнала на выходе линейного устройства.

$$\underbrace{s(t)}_{O} \xrightarrow{O} \mathbf{K}(i\omega) \xrightarrow{O}_{B \in \mathbf{X}} \underbrace{s_{B \in \mathbf{X}}(t)}_{O}$$

Пусть на входе линейного четырехполюсника с передаточной функцией  $K(\omega)$  и импульсной характеристикой g(t) действует случайный процесс s(t) с заданными статисти-

ческими характеристиками; требуется найти статистические характеристики процесса  $s_{obs}(t)$  на выходе четырехполюсника.

Лишь при нормальном распределении входного процесса задача упрощается, так как при любых линейных операциях с гауссовским процессом (усилении, фильтрации, дифференцировании, интегрировании и т. д.) распределение остается нормальным, изменяются лишь функции  $R(\tau)$  и  $W(\omega)$ . Поэтому, если задана плотность вероятности входного процесса (с нулевым средним)

$$p(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s}} \exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right),$$

то плотность вероятности на выходе линейной цепи:

$$p(s_{\rm BMX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{sBMX}} \exp\left(-\frac{s_{\rm BMX}^2}{2\sigma_{sBMX}^2}\right). \quad (7.1)$$

Дисперсия  $D_{s_{6blx}} = \sigma_{s_{6blx}}^2$  легко определяется по спектру или по корреляционной функции. Таким образом, анализ передачи гауссовских процессов через линейные цепи по существу сводится к спектральному (или корреляционному) анализу.

Спектральную плотность входного процесса обозначим  $W_s(\omega)$ . Задача нахождения  $W_{s,\omega}(\omega)$  легко решается. Умножив спектральную плотность  $\mathbf{X}_{kT}(\omega)$  «усеченной» реализации процесса  $x_k(t)$  на передаточную функцию фильтра  $\mathbf{K}(\omega)$ , получим спектральную плотность этой же реализации на выходе:

$$\mathbf{X}_{kT_{BMX}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{X}_{kT}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{K}(i\boldsymbol{\omega}).$$

Энергию рассматриваемого отрезка реализации можно определить с помощью равенства Парсеваля:

$$\partial_{kT_{\text{BMX}}} = \int_{-T/2}^{T/2} x_{kT\text{BMX}}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{X}_{kT}(\omega)|^2 |\mathbf{K}(i\omega)|^2 d\omega.$$

Тогда получаем:

$$W_{s \text{ вых}}(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|\mathbf{X}_T(\omega)|^2}{T} = W_s(\omega) K^2(\omega).$$
(7.2)

Корреляционная функция случайного процесса на выходе фильтра:

$$R_{s \text{ BMX}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{s \text{ BMX}}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega) K^2(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$
(7.3)

Соотношения между характеристиками случайных процессов на входе и выходе цепи можно вывести также и на основе заданной импульсной характеристики цепи.

Действительно, поскольку спектральной функции  $W_s(\omega)$  соответствует корреляционная функция

$$R_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \qquad (7.4)$$

а спектральной функции  $K^{2}(\omega)$  —

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \qquad (7.5)$$

т. е. корреляционная функция импульсной характеристики g(t), то произведению спектральных функций  $W_s(\omega)$  и  $K^2(\omega)$  соответствует свертка функций  $R_s(\tau)$  и  $K^2(\omega)$ :

$$R_{s_{BLIX}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(x) R_g(\tau - x) \, dx. \tag{7.6}$$

Таким образом, по заданным корреляционным функциям  $R_s(\tau)$  и  $R_g(\tau)$  определяется корреляционная функция на выходе  $R_{s \, sbix}(\tau)$ , после чего находится энергетический спектр:

$$W_{s \text{ BMX}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{s \text{ BMX}}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$
(7.7)

Особый интерес представляет случай, когда процесс на входе является белым шумом. В этом случае  $W_{s \ sbix}(\omega) = W_0 = const$  и в соответствии с (7.3) и (7.5):

$$R_{gBMX}(\tau) = W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = W_0 R_g(\tau).$$
(7.7)

Выражение (7.7') можно применять и в тех случаях, когда энергетический спектр  $W_s(\omega)$  равномерен лишь в полосе прозрачности цепи.

# 42. Линейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения закона распределения случайного сигнала на выходе линейного устройства.

линейного устройства На вход коэффициентом частотным передачи  $K(j\omega)$  (импульсной h(t) или переходной g(t)характеристикой) поступает случайный сигнал, моделью которого может служить стационарный случайный процесс *X*(*t*). Известны статистические характеристики этого случайного процесса: закон распределения р(х), спектральная



плотность мощности  $W_x(\omega)$ , корреляционная функция  $R_x(\tau)$ , дисперсия  $D_x$  и математическое ожидание  $m_x$ . Необходимо определить аналогичные статистические характеристики p(y),  $W_y(\omega)$ ,  $R_y(\tau)$ ,  $D_y$ ,  $m_y$  выходного случайного процесса.

Задача определения закона распределения случайного сигнала на выходе линейной инерционной системы при воздействии на ее вход негауссовского сигнала является чрезвычайно трудной. В то же время можно сформулировать некоторые частные случаи решения данной задачи.

1. Если линейное устройство относится к классу безынерционных, то выходной сигнал такого устройства характеризуется законом распределения, свойственным входному сигналу. При этом могут быть изменены некоторые числовые характеристики.

2. Если случайный сигнал на входе линейного инерционного устройства имеет нормальный закон распределения, то случайный сигнал на выходе устройства также имеет нормальный закон распределения (с измененными математическим ожиданием и дисперсией).

3. В линейных инерционных устройствах при соблюдении некоторых условий проявляет себя эффект нормализации.

Суть эффекта нормализации: закон распределения выходного случайного сигнала является нормальным при любом законе распределения входного сигнала.

Условия проявления эффекта нормализации:

а) в частотной области – эффективная ширина энергетического спектра входного сигнала  $\Delta \omega_{_{3\phi}}$  значительно больше полосы пропускания устройства  $\Delta \omega_{_{np}}$ , т. е.  $\Delta \omega_{_{3\phi}} >> \Delta \omega_{_{np}}$ ;

б) во временной области – интервал корреляции входного сигнала  $\tau_{\kappa}$  значительно меньше постоянной времени устройства  $\tau_{u}$ , т. е.  $\tau_{\kappa} \ll \tau_{u}$ .

Существуют приближенные методы определения закона распределения выходного случайного сигнала. Один из таких методов базируется на использовании характеристической функции

$$\Theta_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p(x) dx,$$

где *v* – произвольный вещественный параметр;  $e^{jvx}$  - специальный вид функционального преобразования случайной величины.

Если функция  $\Theta_x(v)$  имеет в точке *v=0* производные до порядка *k* включительно, то функцию можно представить в виде ряда Маклорена:

$$\Theta_{y}(x) = \Theta_{y}(0) + \Theta_{y}'(0) \cdot \nu + \frac{\Theta_{y}'(0)}{2!} \cdot \nu^{2} + \dots + \frac{\Theta_{y}^{k}(0)}{k!} \cdot \nu^{k}.$$

Учитывая, что
$$\Theta_{y}^{k}(0) = \left(\frac{d^{k}\Theta_{x}(v)}{dv^{k}}\right)_{v=0} = j^{k}\int_{-\infty}^{\infty} x^{k} p(x) dx = j^{k} \cdot \alpha_{k},$$

можно записать

$$\Theta_{y}(\nu) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{k}}{k!} (j\nu)^{k}.$$

Здесь  $\alpha_k$  - начальные моменты *k*-го порядка.

Таким образом, при наличии достаточного числа начальных моментов выходного процесса можно с некоторым приближением определить характеристическую функцию, а затем по формуле

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x(v) e^{-jvx} dv$$

определить закон распределения. Начальные моменты выходного процесса связаны с начальными моментами входного процесса и импульсной характеристикой цепи.

42. Линейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения закона распределения случайного сигнала на выходе линейного устройства.

При негауссовском случайном процессе на входе отыскание закона распределения на выходе инерционной цепи является сложной задачей, не имеющей прямого решения. Существуют лишь приближенные методы решения, связанные с большими вычислительными трудностями.

Один из таких методов основан на использовании характеристических функций случайного процесса и известных соотношений между характеристической функцией и моментами распределения процесса.

В теории вероятностей под характеристической функцией  $\theta_x(\eta)$  случайной величины *x* или характеристической функцией данного распределения *p(x)* подразумевается среднее значение функции  $e^{i\eta x}$ , т. е.

$$\theta_x(\eta) = M(\mathrm{e}^{i\eta x}) \tag{7.44}$$

(здесь *η* – вещественная переменная).

При заданной плотности вероятности p(x) среднее значение величины  $e^{i\eta x}$  можно определить с помощью выражения:

$$\theta_{x}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta x} p(x) \, dx. \tag{7.45}$$

Правая часть этого выражения есть не что иное, как преобразование Фурье функции p(x). Следовательно, если известна характеристическая функция  $\theta_x(\eta)$  какой-либо случайной величины *x*, то плотность вероятности p(x) можно найти с помощью обратного по отношению к (7.45) преобразования Фурье:

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_x(\eta) e^{-i\eta x} d\eta.$$
 (7.46)

В частности, для нормального закона распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

характеристическая функция в соответствии с (7.45)

$$\theta_{x}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^{2}}{2\sigma_{x}^{2}}\right) \exp\left(i\eta x\right) dx.$$

После преобразований получаем

$$\theta_x(\eta) = \exp(-\sigma_x^2 \eta^2/2).$$
 (7.47)

Таким образом, при нормальном распределении график характеристической функции относительно  $\eta$  имеет такую же форму, как и график плотности вероятности относительно x. Поэтому о степени приближения распределения какой-либо случайной величины к нормальному можно судить по тому, насколько характеристическая функция рассматриваемой величины приближается к функции, определяемой выражением (7.47).

Характеристическая функция  $\theta_x(\eta)$  полностью определяется моментами случайного процесса и может быть представлена рядом:

$$\theta_{x}(\eta) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_{xk}}{k!} (i\eta)^{k}, \qquad (7.48)$$

где моменты *k*-то порядка определяются выражением:

$$m_{xk} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) \, dx. \tag{7.49}$$

Знание моментов распределения позволяет найти характеристическую функцию  $\theta_x(\eta)$ , а по неи и функцию распределения.

Вычисление по формуле (7.48) оказывается неприемлемо сложным для практики. Обычно довольствуются решением более простой задачи о преобразовании лишь нескольких моментных функций в линейной системе, которые дают косвенное представление об одномерной плотности вероятности случайного процесса на выходе.

## 43. Нелинейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения спектральной плотности мощности и корреляционной функции случайного сигнала на выходе нелинейного устройства.

На вход нелинейного устройства с нелинейной функцией преобразования поступает случайный y = f(x)сигнал, которого моделью может служить стационарный случайный процесс X(t). Известны статистические характеристики случайного процесса: этого закон распределения p(x),спектральная  $W_x(\omega),$ плотность мощности корреляционная функция  $R_x(\tau)$ , дисперсия  $D_x$  и математическое ожидание  $m_x$ .



Необходимо определить аналогичные статистические характеристики p(y),  $W_y(\omega)$ ,  $R_y(\tau)$ ,  $D_y$ ,  $m_y$  выходного случайного процесса.

Непосредственно определить энергетический спектр случайного процесса на выходе нелинейной цепи не представляется возможным. Существует единственный метод – определение корреляционной функции сигнала на выходе цепи с последующим применением прямого преобразования Фурье для определения спектра.

Если на вход нелинейной безынерционной цепи поступает стационарный случайный процесс X(t), то корреляционная функция случайного процесса Y(t) на выходе может быть представлена в виде

$$R_{y}(\tau)=B_{y}(\tau)-m_{y}^{2},$$

где  $B_{y}(\tau)$  – ковариационная функция;  $m_{y}$  – математическое ожидание случаного процесса.

Ковариационная функция случайного процесса представляет собой статистически усредненное произведение значений случайного процесса y(t) в моменты t и t- $\tau$ , т.е.

$$B_{y}(\tau) = M\left[y(t)y(t-\tau)\right]$$

При заданной двумерной плотности вероятности  $p_2(y_1, y_2, \tau)$ , где  $y_1 = y(t)$ ,  $y_2 = y(t-\tau)$ , операция усреднения по множеству осуществляется по формуле

$$B_{y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_{1}y_{2}p_{2}(y_{1}, y_{2}, \tau)dy_{1}dy_{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_{1})f(x_{2})p_{2}(x_{1}, x_{2}, \tau)dx_{1}dx_{2}$$

Математическое ожидание *m<sub>v</sub>* определяется следующим выражением:

$$m_{y} = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y) dy.$$

Учитывая, то p(y)dy=p(x)dx, получаем

$$m_{y} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx.$$

Энергетический спектр выходного сигнала в соответствии с теоремой Винера – Хинчина находится как прямое преобразование Фурье от ковариационной функции, т.е.

$$W_{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{y}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Практическое применение данного метода затруднено, так как двойной интеграл для удается вычислить не всегда. Приходится использовать различные упрощающие методы, связанные со спецификой решаемой задачи.

# 44. Нелинейные преобразования случайных сигналов. Постановка задачи и методика определения закона распределения случайного сигнала на выходе нелинейного устройства.



Необходимо определить аналогичные статистические характеристики p(y),  $W_y(\omega)$ ,  $R_y(\tau)$ ,  $D_y$ ,  $m_y$  выходного случайного процесса.

Пусть известна плотность вероятности p(x) случайного сигнала X(t) на входе нелинейного устройства. Требуется определить плотность вероятности p(y) выходного сигнала Y(t).

Очевидно, что любая реализация x(t) преобразуется в реализацию y(t) выходного случайного сигнала. С другой стороны, случайная величина  $x(t_i)$ , соответствующая *i*-му сечению входного случайного сигнала, преобразуется в случайную величину  $y(t_i)$ , соответствующую *i*-му сечению выходного случайного сигнала. Поэтому можно продолжать дальнейшие рассуждения применительно к случайным величинам X и Y, т. е. анализировать преобразование y=f(x).

Рассматривают три характерных случая, отличающихся видом функции y = f(x).

**1.** Функция y=f(x) нелинейной цепи определяет однозначное монотонное соответствие между x(t) и y(t). Полагаем, что существует обратная функция  $y=\psi(x)$ , которая также определяет однозначное монотонное соответствие между x(t) и y(t). В этом случае вероятность нахождения реализации x(t) случайного процесса X(t) в интервале  $(x_0, x_0+dx)$  равна вероятности нахождения реализации y(t) случайного процесса Y(t)=f[X(t)] в интервале  $(y_0, y_0+dy)$  при  $y_0=f(x_0)$  и  $y_0+dy=f(x_0+dx)$ , т. е.

$$p(x)dx = p(y)dy$$
. Следовательно,  $p(y) = \frac{p(x)}{|dy/dx|}$ 

Производная взята по абсолютной величине, потому что в соответствии со свойствами плотности вероятности p(y)>0, в то время как производная dy/dx может быть и отрицательной (если функция y=f(x) убывающая).

**2.** Обратная функция  $y = \psi(x)$  неоднозначна, т. е. одному значению у соответствует несколько значений *x*. Пусть, например, значению  $y=y_0$  соответствуют значения  $x=x_1,x_2,...,x_n$ , а значению  $y_0+dy$  соответствуют значения  $x=x_1+dx,x_2+dx,...,x_n+dx$ .

Тогда из того факта, что  $y_0 \le y(t) \le y_0 + dy$  следует одно из *n* взаимно несовместимых событий:

$$x_1 \le x(t) \le x_1 + dx, x_2 \le x(t) \le x_2 + dx, ..., x_n \le x(t) \le x_n + dx.$$

Применяя правило сложения вероятностей, получим:

$$p(y) = \frac{p(x)}{|dy/dx|_{x=x_1}} + \frac{p(x)}{|dy/dx|_{x=x_2}} + \dots + \frac{p(x)}{|dy/dx|_{x=x_n}}.$$

3. Характеристика нелинейного элемента y=f(x) имеет один или более горизонтальных участков (участки, где y = const).

 $p(y) = \frac{p(x)}{|dy/dx|}$ 

следует дополнить слагаемыми, учитывающими вероятность пребывания y(t) на интервале, где y = const. Так как при y = const производная dy/dx=0, то в этом случае плотность вероятности  $p(y) = \infty$ . Возникает необходимость использования аппарата  $\delta$ -функций.

Пример. Нелинейное преобразование, реализуемое идеальным ограничителем.

A при  $x \ge 0$ , -A при x < 0. Нелинейное преобразование y=f(x), реализуемое идеальным ограничителем (квантователем), описывается формулой → y(t) Если на ВХОД такого y = f(x) $P_2\delta(y-A)$ ограничителя подать случайный сигнал С нормальным законом p(y)распределения, TO на выходе будет сформирован  $P_1\delta(y+A)$ →x(t) клиппированный (телеграфный) сигнал (рис.) Реализации При x(t) < 0выходной входного и сигнал y(t) = -A. Это значит, выходного сигналов что вероятность принятия Закон распределения случайным процессов y(t)выходного сигнала значения (-А) равна: Преобразование случайного сигнала идеальным ограничителем (Рис.1) при выборе рабочей точки x = 0 $P_1 = P[y(t) = -A] = P[x(t) < 0] = \int_{0}^{0} p(x) dx = 0,5,$  а плотность вероятности  $p_1(y) = P_1 \delta(y + A) + 0.5\delta(y + A)$ . Аналогично рассуждая для случая  $x(t) \ge 0$ , получаем:  $P_1 = P\left[y(t) = A\right] = P\left[x(t) \ge 0\right] = \int_{a}^{b} p(x)dx = 0,5, \qquad p_2(y) = P_2\delta(y-A) + 0,5\delta(y-A).$ Значения вероятностей y(t) y = f(x) $P_2\delta(Y-A)$ *P*<sub>1</sub> и *P*<sub>2</sub> зависят от выбора рабочей точки на характеристике p(y)нелинейного элемента. Для x=0случая (рис.1) соблюдается равенство  $P_1 = P_2$ , а для случая  $x = x_0$ (puc.2) – соотношение  $P_2 >$  $P_1$ . Преобразование случайного сигнала идеальным ограничителем при выборе рабочей точки **x** = **x**<sub>0</sub>  $P_1 = P\left[y(t) = -A\right] = P\left[x(t) < -x_1\right] = \int_{-x_1}^{-x_1} p(x)dx, \quad P_2 = P\left[y(t) = A\right] = P\left[x(t) \ge -x_1\right] = \int_{-x_1}^{\infty} p(x)dx.$  45. Воздействие узкополосного шума на амплитудный детектор. Статистические характеристики выходного сигнала.

Линейный детектор. Напряжение шума на выходе линейного детектора обладает рэлеевским распределением

$$p(u_{\text{Bbix}}) = p(A) = \frac{u_{\text{Bbix}}}{\sigma_x^2} e^{-u_{\text{Bbix}}^2/2\sigma_x^2}, 0 < u_{\text{Bbix}} < \infty.$$
 (11.17)

Среднее значение (постоянная составляющая) шумового напряжения:

$$U_0 = M[u_{\text{вых}}(t)] = M[A(t)] = \sqrt{\pi/2} \sigma_x = 1,26\sigma_x, \qquad (11.18)$$
  
й квадрат напряжения : 
$$M[u_{\text{вых}}^2(t)] = 2\sigma_x^2. \quad (11.19)$$

Средний квадрат напряжения :

Дисперсия шума на выходе линейного детектора:

$$\sigma_{\rm BMX}^2 = M(u_{\rm BMX}^2) - U_0^2 = 2\sigma_x^2 - \frac{\pi}{2}\sigma_x^2 = 0,43\sigma_x^2.$$
(11.20)

В качестве примера рассмотрим воздействие на линейный детектор шума x(t), спектр которого определяется выражением

$$W_{x}(\omega) = N_{0} \left[ e^{-\alpha (\omega - \omega_{0})^{2}} + e^{-\alpha (\omega + \omega_{0})^{2}} \right], \qquad (11.21)$$

Корреляционная функция в этом случае:

$$R_{x}(\tau) = \frac{N_{0}}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\tau^{2}/(4\alpha)} \cos \omega_{0} \tau = \sigma_{x}^{2} e^{-\tau^{2}/(4\alpha)} \cos \omega_{0} \tau.$$
(11.22)  
(a)  $r_{0}(\tau) = e^{-\tau^{2}/(4\alpha)}$  (11.23) и, соответственно, получаем:

Тогда

$$W_{\rm BMX}(\Omega) = \frac{\pi \sigma_x^2}{2} \left[ 2\pi \delta(\Omega) + \frac{1}{4} \sqrt{2\pi\alpha} \ \mathrm{e}^{-\alpha \Omega^2/2} \right]. \tag{11.24}$$

Слагаемое с дельта-функцией соответствует постоянной составляющей напряжения на выходе детектора.



Рис. 11.8. Энергетический спектр случайного процесса на входе (а) и выходе (б) амплитудного детектора

График  $W_{sbix}(\Omega)$  изображен на рис.11.8,6. Ширина этого спектра в  $\sqrt{2}$  раз больше ширины спектра  $W_x(\omega)$ на входе детектора (рис.11.8,а).

Линейный амплитудный детектор воспроизводит огибающую узкополосного колебания независимо от особенностей структуры его спектра. Полученный результат свидетельствует о том, что огибающая каждой из реализаций рассматриваемого шума (на входе детектора) обладает спектром более широким, чем частотная полоса самой реализации.

В спектре шума нет никакой корреляции между спектральными составляющими, частоты которых расположены слева и справа от  $\omega_0$ . Т.о. огибающая каждой из реализаций шума обладает спектром более широким, чем модулированное колебание с той же шириной спектра. Т.о. увеличивается и средняя ширина спектра огибающей шума, т.е. спектр огибающей.

Квадратичный детектор. Напряжение на выходе детектора:

$$u_{\rm BMX}(t) = KA^2(t)/2,$$

(11.25)

где К – коэффициент, учитывающий параметр вольт-амперной характеристики диода и сопротивление нагрузки на выходе детектора.

Закон распределения шумового напряжения на выходе квадратичного детектора:

$$p(u_{\rm BMX}) = p\left(K\frac{A^2}{2}\right) = \frac{p(A)}{\left|\frac{du_{\rm BMX}}{dA}\right|} = \frac{A}{\sigma_x^2} e^{-A^2/(2\sigma_x^2)} \frac{1}{KA} = \frac{1}{K\sigma_x^2} e^{-u_{\rm BMX}/(K\sigma_x^2)}.$$
 (11.26)

Итак, при воздействии на квадратичный детектор с фильтром нижних частот узкополосного гауссовского процесса шум на выходе всего устройства имеет экспоненциальное распределение.

Вычислим среднее значение выходного напряжения:

$$M[u_{\rm BMX}(t)] = \int_{0}^{\infty} u_{\rm BMX} p(u_{\rm BMX}) \, du_{\rm BMX} = \frac{1}{K\sigma_x^2} \int_{0}^{\infty} u_{\rm BMX} e^{-u_{\rm BMX}/(K\sigma_x^2)} \, du_{\rm BMX} = K\sigma_x^2 \,, \quad (11.27)$$

А также средний квадрат напряжения:

$$M[u_{\rm Bbix}^2(t)] = \int_0^\infty u_{\rm Bbix}^2 p(u_{\rm Bbix}) \, du_{\rm Bbix} = \frac{1}{K\sigma_x^2} \int_0^\infty u_{\rm Bbix}^2 \, {\rm e}^{-u_{\rm Bbix}/(K\sigma_x^2)} du_{\rm Bbix} = 2K^2 \sigma_x^4 \,. \quad (11.28)$$

Отсюда следует, что дисперсия шума на выходе:

$$\sigma_{\text{вых}}^{2} = M[u_{\text{выx}}^{2}(t)] - \{M[u_{\text{выx}}(t)]\}^{2} = 2K^{2}\sigma_{x}^{4} - K^{2}\sigma_{x}^{4} = K^{2}\sigma_{x}^{4}. (11.29)$$

$$\square \mu \qquad r_{0}(\tau) = e^{-\tau^{2}/(4\alpha)} (11.23) \qquad (\text{см. предыдущий пример}), \text{получаем:}$$

$$W_{\text{выx}}(\Omega) = W_{y0}(\Omega) + W_{H^{4}}(\Omega) = a_{2}^{2}\sigma_{x}^{4} \Big[2\pi\delta(\Omega) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^{2}/(2\alpha)} \times e^{-i\Omega\tau} d\tau \Big] = a_{2}^{2}\sigma_{x}^{4} [2\pi\delta(\Omega) + \sqrt{2\pi\alpha} e^{-\alpha\Omega^{2}/2}]. \qquad (11.30)$$

Графики функций  $W_x(\omega)$  и  $W_{ablx}(\Omega)$  по форме совпадают с графиками на рис.11.8. Они отличаются только масштабом по оси ординат из-за различия в постоянных коэффициентах [  $a_2^2 \sigma_x^4$  вместо  $\pi \sigma_x^2/2$  перед квадратными скобками в (11.24) и единица вместо 1/4 перед вторым слагаемым].

46. Воздейсвтие суммы гармонического сигнала и нормального шума на линейный амплитудный детектор. Ститистические характеристики выходного сигнала.

При наложении узкополосного шума  $x(t)=A(t)cos[\omega_0 t+\theta(t)]$  на сигнал  $s(t)=Ecos\omega_0 t$ суммарное колебание:

$$u(t) = s(t) + x(t) = E \cos \omega_0 t + A(t) \cos [\omega_0 t + \theta(t)] =$$
  
= [E + A(t) \cos \theta(t)] \cos \omega\_0 t - A(t) \sin \theta(t) \sin \omega\_0 t =  
= U(t) \cos [\omega\_0 t + \xi(t)]. (11.31)

Огибающая U(t) и фаза  $\xi(t)$  по аналогии определяются выражениями:

$$U(t) = \sqrt{E^2 + A^2(t) + 2EA(t)\cos\theta(t)}, \qquad (11.32)$$

$$\xi(t) = \operatorname{arctg} \frac{A(t)\sin\theta(t)}{E + A(t)\cos\theta(t)}.$$
(11.33)

Плотность вероятности p(U) огибающей U, определяется по формуле:

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} e^{-(U^2 + E^2)/(2\sigma_x^2)} I_0\left(\frac{E}{\sigma_x} \frac{U}{\sigma_x}\right), \qquad (11.34)$$

где  $I_0$  — бесселева функция комплексного аргумента (модифицированная).



Определяемая формулой (11.34) функция называется обобщенной функцией Рэлея. Графики функции р(U) для нескольких значений *Е*/ $\sigma_x$  приведены на рис. 11.9.

Когда амплитуда сигнала Е очень велика по сравнению с  $\sigma_x$ , кривая p(U) близка к гауссовской кривой с дисперсией  $\sigma_x^2$ и средним значением, равным Е.

Будем считать, что напряжение на выходе детектора огибающей амплитуд Рис. 11.9. Рэлеевская плотность СОВПАДАЕТ высокочастотного С вероятности (обобщенная) напряжения на входе. Тогда, основываясь на (11.34), находим постоянную составляющую напряжения на выходе детектора:

$$U_0 = M(U) = \int_0^\infty Up(U) \, dU = \frac{1}{\sigma_x^2} e^{-E^2/(2\sigma_x^2)} \times \int_0^\infty U^2 e^{-U^2/2\sigma_x^2} I_0\left(\frac{E}{\sigma_x}\frac{U}{\sigma_x}\right) dU,$$

и средний квадрат напряжения

$$M[U^{2}(t)] = \int_{0}^{\infty} U^{2} p(U) \, dU = \frac{1}{\sigma_{x}^{2}} e^{-E^{2}/(2\sigma_{x}^{2})} \int_{0}^{\infty} U^{3} e^{-U^{2}/(2\sigma_{x}^{2})} I_{0} \left(\frac{E}{\sigma_{x}} \frac{U}{\sigma_{x}}\right) dU.$$

После вычисления интегралов получаем следующие выражения:

$$U_0 = \sigma_x \sqrt{\pi/2} \{ I_0(h^2/2) + h^2 [I_0(h^2/2) + I_1(h^2/2)] \} e^{-h^2/2}, \qquad (11.35)$$
  
где  $h^2 = E^2/(2\sigma_x^2); M[U^2(t)] = 2\sigma_x^2 + E^2. \qquad (11.36)$ 

Из последнего выражения вытекает равенство:

$$\sigma_{\rm BMX}^2 = M[U^2(t)] - U_0^2 = 2\sigma_x^2 + E^2 - U_0^2.$$
(11.37)

В отсутствие сигнала (E=0) постоянная составляющая шума на выходе линейного детектора равна  $\sqrt{\pi/2}\sigma_{x}$ .

Приращение постоянной составляющей  $U_0 - \sqrt{\pi/2}\sigma_x$  где  $U_0$  определяется выражением (11.35), и есть полезный сигнал.

Следовательно, отношение мощности сигнала к мощности помехи на выходе линейного детектора:

$$(C/\Pi)_{\text{вых}} = (U_0 - \sqrt{\pi/2\sigma_x})^2 / (2\sigma_x^2 + E^2 - U_0^2).$$
(11.38)  
Рассмотрим предельные случаи  $h^2 < < 1$  (спабый сигнал) и  $h^2 > 1$ (сильный сигнал)

Рассмотрим предельные случаи  $h^2 << 1$  (слабый сигнал) и  $h^2 >> 1$  (сильныи сигнал).

1.  $h^2 \ll 1$ ,  $I_0(h^2/2) \approx 1$ ,  $I_1(h^2/2) \approx h^2/4$ ,  $e^{-h^2/2} \approx 1 - h^2/2$ .

Выражение (11.35) упрощается:

$$U_0 \approx \sqrt{\pi/2} \,\sigma_x \{1 + h^2(1 + h^2/4)\} e^{-h^2/2} \approx \sqrt{\pi/2} \,\sigma_x (1 + h^2/2).$$

При этом приращение постоянной составляющей:

$$U_0 - \sqrt{\pi/2} \,\sigma_x \approx \sqrt{\pi/2} \,\sigma_x h^2/2,$$

а дисперсия в соответствии с (11.36):

$$\sigma_{\text{BLIX}}^2 = 2\sigma_x^2 + E^2 - \frac{\pi}{2}\sigma_x^2 \left(1 + \frac{h^2}{2}\right)^2 \approx \sigma_x^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\left(\frac{C}{\overline{\Pi}}\right)_{\text{BMX}} = \left(\frac{\pi}{2}\sigma_x^2 \frac{h^4}{4}\right) / \left[\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma_x^2\right] = dh^4 = d\left(\frac{C}{\overline{\Pi}}\right)_{\text{BX}}^2,$$
(11.39)

где *d* — постоянный коэффициент, близкий к единице.

Выражение (11.39) показывает, что в амплитудном детекторе имеет место подавление слабого сигнала сильной помехой.

Например, при  $(C/\Pi)_{ex} = 0, 1(C/\Pi)_{eblx} \approx 0, 01.$ 

Рассматриваемый вопрос имеет важное значение для проблемы обнаружения сигналов на фоне сильной помехи.

### $2.\ h^2\gg 1,$ функции $I_0(h^2/2)$ и $I_1(h^2/2)$ можно определять выра-

#### жениями

$$I_0\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{e^{h^2/2}}{\sqrt{\pi}h}\left(1+\frac{1}{4h^2}\right), I_1\left(\frac{h^2}{2}\right) \approx \frac{e^{h^2/2}}{\sqrt{\pi}h}\left(1-\frac{3}{4h^2}\right).$$

Выражение (11.35) при указанных приближениях приводится к виду:

$$U_0 \approx \sqrt{2} \sigma_x h[1 + 1/(4h^2)] = E[1 + 1/(4h^2)] \approx E.$$

Как и следовало ожидать при  $E >> \sigma_x$  постоянная составляющая выходного напряжения  $U_0$  почти совпадает с E.

При вычислении же дисперсии  $\sigma_{\rm \tiny Gblx}^2$  необходимо учитывать слагаемое  $1/(4/h^2)$  в выражении

$$U_0^2 = E^2[1 + 1/(4h^2)]^2 \approx E^2[1 + 1/(2h^2)] = E^2 + \sigma_x^2$$

Таким образом,

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = 2\sigma_x^2 + E^2 - (E^2 + \sigma_x^2) = \sigma_x^2$$

и отношение сигнал-помеха на выходе:

$$(C/\Pi)_{BMX} \approx U_0^2 / \sigma_{BMX}^2 \approx E^2 / \sigma_x^2 = 2(C/\Pi)_{BX}.$$
 (11.40)

47. Частотный коэффициент передачи согласованного фильтра. Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики оптимального фильтра. Физические процессы в фильтре, согласованном с сигналом.

Передаточную функцию будем представлять в форме  $K(i\omega) = K(\omega)e^{i\varphi_k(\omega)}$ . Считаем, что сигнал действуюет на фоне белого шума с равномерным спектром  $W(\omega) = W_0 = const.$ 

Сигнал в фиксированный момент времени  $t_0$  определяем общим выражением:

$$s_{\text{Bbix}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{K}(i\omega) e^{i\omega t_0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{K}(\omega) e^{i[\theta_s(\omega) + \phi_k(\omega) + \omega t_0]}, \quad (13.1)$$

а среднеквадратическое значение помехи – выражением

$$\sigma_{\rm BMX} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega)K^2(\omega) \, d\omega\right]^{1/2} = \left[\frac{W_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) \, d\omega\right]^{1/2}.$$
 (13.2)

В выражении (13.1)  $S(\omega) = S(\omega)e^{i\theta_s(\omega)}$  — спектральная плотность заданного входного сигнала s(t), а под  $t_0$  подразумевается момент времени, соответствующий максимуму (пику) сигнала на выходе фильтра.

Составим теперь отношение -	$\frac{s_{\text{Bbix}}(t_0)}{\sigma_{\text{Bbix}}} = \frac{\left \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)K(\omega)e^{i[\theta_s(\omega) + \phi_k(\omega) + \omega t_0]}d\omega\right }{\left(\frac{W_0}{2\pi}\right)^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega)d\omega\right]^{1/2}}.$ (13.3)			
Воспользуемся известным неравенством Шварца $\rightarrow$ $\left \int_{a}^{b} F_{1}(x)F_{2}(x) dx\right ^{2} \leq \int_{a}^{b}  F_{1}(x) ^{2} dx \int_{a}^{b}  F_{2}(x) ^{2} dx$ , (13.4)				
где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — в общем слу	чае комплексные функции.			
Это неравенство обращается в равенство только при $F_2(x) = AF_1^*(x)$ , (13.5) выполнении условия $\rightarrow$				
т. е. когда функция $F_2(x)$ пропорциональна функции, комплексно-сопряженной $F_1(x)$ , А — произвольный постоянный коэффициент.				
Приравнивая $F_1(x) = S$ (13.4)	$F(\omega)e^{i\theta_s(\omega)}$ и $F_2(x) = K(\omega)e^{i[\phi_k(\omega) + \omega_0 t]}$ Записываем (3.14) в виде:			
$\left \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)K(\omega)e^{i[\theta_s(\omega)+\phi_k(\omega)+\omega t_0]} d\omega\right  \leq \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S^2(\omega) d\omega \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K^2(\omega) d\omega\right]^{1/2}.$				
Тогда выражение (13.3) составить следующее неравене	$\begin{array}{c c} \text{позволяет} \\ \text{ство:} \rightarrow \end{array}  \frac{s_{\text{вых}}(t_0)}{\sigma_{\text{вых}}} \leqslant \frac{1}{W_0^{1/2}} \Big[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)  d\omega \Big]^{1/2}.  (13.6) \end{array}$			
	P KRATRATHIN AKAGINAN TRADAŬ HAATH ATATA HARADAHATRA AATI H			

Учитывая, что выражение в квадратных скобках правой части этого неравенства есть не что иное, как полная энергия Э входного сигнала, приходим к следующему результату:

$$s_{\text{BMX}}(t_0)/\sigma_{\text{BMX}} \leq \sqrt{\partial/W_0}.$$

Из (13.5) следует, что это неравенство обращается в равенство при вып. условия:		$K(\omega)e^{i[\varphi_k(\omega) + \omega_0 t]} = AS^*(\omega) = AS(\omega)e^{-i\theta_s(\omega)}$
ИЛИ	$\mathbf{K}(i\omega) = K(\omega) \mathbf{e}^{i\varphi_k(\omega)} = \mathbf{AS}^*(\mathbf{G})$	$\omega)e^{-i\omega t_0} = AS(\omega)e^{-i[\theta_s(\omega) + \omega t_0]}.$ (13.8)

(13.7)

или

Полученное соотношение полностью определяет передаточную функцию фильтра, максимизирующего отношение сигнал-помеха на выходе (при входной помехе типа белого шума).

Функция *К*(*i* $\omega$ ), отвечающая условию (13.8), *согласована* со спектральными характеристиками сигнала – амплитудной и фазовой. В связи с этим рассматриваемый оптимальный фильтр часто называют *согласованным фильтром*.

Отношение пика сигнала к среднеквадрат	ическому $s_{\text{пли}}(t_0)/\sigma_{\text{пли}} = \sqrt{\partial/W_0}$ . (13.9)
значению помехи на выходе СФ определяется ран	венством:
Из соотношения (13.8) вытекают следующие	два требования к согласованному фильтру:
ФЧХ фильтра должна отвечать условию ->	$\varphi_K(\omega) = -[\theta_s(\omega) + \omega t_0];  (13.10)$
АЧХ фильтра должна отвечать условию ->	$K(\omega) = AS(\omega).$ (13.11)

Когда под комплексной передаточной функцией подразумевается безразмерная величина, коэффициент А должен иметь размерность, обратную размерности спектральной плотности сигнала.

Соотношения (13.10), (13.11) имеют глубокий физический смысл. Первое из них можно назвать условием компенсации начальных фаз в спектре сигнала, поскольку фазовый сдвиг в фильтре  $-\theta_s(\omega)$  равен по величине и обратен по знаку начальной фазе соответствующей составляющей спектра  $S(\omega)$  входного сигнала. В результате прохождения сигнала через фильтр с фазовой характеристикой  $\varphi_K(\omega)$  сложение всех компонентов спектра, скорректированных по фазе, образует пик выходного сигнала. Слагаемое фазовой характеристики  $\varphi_K(\omega)$ , равное  $-\omega_0 t$ , указывает на то, что пик задержан относительно начала сигнала s(t) на время  $t_0$ .

Связь между ФЧХ  $\theta_s(\omega)$  входного спектра, компенсирующей ее характеристикой фильтра  $-\theta_s(\omega)$  и полной ФЧХ фильтра  $\varphi_K(\omega) = -[\theta_s(t) + \omega_0 t]$  поясняется рис. После прохожления через фильтр спектр выходного сигнала

После прохождения через фильтр спектр выходного сигнала будет иметь фазовую характеристику

$$\theta_{s \text{ BMX}}(\omega) = \theta_s(\omega) + \varphi_K(\omega) = \theta_s(\omega) + [-\theta_s(\omega) - \omega t_0] = -\omega t_0, (13.12)$$

показанную прямой линией на том же рисунке.

Wo

0

 $W_{\rm BMX}(\omega) =$ 

(1)

 $K^2(\omega)W_{BMX}$ 

Соотношение (13.11), устанавливающее, что АЧХ фильтра  $K(\omega)$  должна по своей форме совпадать с амплитудным спектром сигнала  $S(\omega)$ , также легко поддается физическому истолкованию.



$$W_{\rm BMX}(\omega) = K^2(\omega)W_0.$$

(Для наглядности характеристики построены в предположении, что *AS(0)=1*.)

Ослабление сигнала из-за неравномерности характеристики  $K(\omega)$  выражено в меньшей степени, чем ослабление шума, поскольку уменьшение  $K(\omega)$  имеет место для спектральных составляющих, вклад которых в пиковое значение сигнала сравнительно мал. В результате получается ослабление шума относительно сигнала. В сочетании с устранением фазовых сдвигов между спектральными составляющими сигнала это и приводит к максимизации отношения сигнал-помеха на выходе фильтра.



ω



0

1,0

48. Импульсная характеристика согласованного фильтра, сигнал и помеха на его выходе.

Применяя

и учитывая, что:

$$\mathbf{K}(i\omega) = \mathbf{K}(\omega)\mathbf{e}^{i\phi_k(\omega)} = \mathbf{AS}^*(\omega)\mathbf{e}^{-i\omega t_0} = \mathbf{AS}(\omega)\mathbf{e}^{-i[\theta_s(\omega) + \omega t_0]}.$$
 (13.8)

 $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(i\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} d\omega.$ 

Получаем:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(i\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} \, d\omega = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}^*(\omega) \mathrm{e}^{i\omega(t-t_0)} \, d\omega. \tag{13.13}$$

Учитывая, что  $S^*(\omega) = S(-\omega)$ , и переходя к новой переменной ( $\omega_1 = -\omega$ ), переписываем выражение (13.13) следующим образом:

$$g(t) = -\frac{A}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} \mathbf{S}(\omega_1) e^{-i\omega_1(t-t_0)} d\omega_1 = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega_1) e^{i\omega_1(t_0-t)} d\omega_1. \quad (13.14)$$

Правая часть этого выражения есть не что иное, как функция  $As(t_0-t)$ . Следовательно, если задан сигнал s(t), то импульсная характеристика согласованного (оптимального) фильтра g(t) определяется как функция:

$$g(t) = As(t_0 - t), \tag{13.15}$$

т. е. импульсная характеристика по своей форме должна совпадать с зеркальным отражением сигнала.



Рис. 13.4. Построение функции, зеркальной по отношению к сигналу



Рис. 13.5. Построение импульсной характеристики согласованного фильтра

Поскольку импульсная характеристика физической цепи не может начинаться при t<0 фильтра не может отклик опережать воздействие  $\delta(t)$ ], то очевидно, что задержка  $t_0$ , фигурирующая В выражении (13.8), не может быть меньше  $T_c$ .

Обратимся к вопросу о физической осуществимости согласованного фильтра. Пусть задан произвольный сигнал s(t), которому соответствуют импульсная характеристика согласованного фильтра g(t) и преобразование Фурье от этой функции  $K(i\omega)$ , определяемые соответственно выражениями (13.15) и (13.18). Возникает вопрос, при каких условиях  $K(i\omega)$  может являться передаточной функцией физически осуществимого четырехполюсника. Ответ на этот вопрос дает критерий осуществимости Пэли-Винера, согласно которому неравенство

$$\int_{0}^{\infty} \frac{|\ln K(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty$$
(13.16)

является необходимым условием, чтобы положительная функция *K*(ω) могла быть модулем передаточной функции электрической цепи.

Из него следует, что АЧХ К( $\omega$ ) должна быть интегрируемой в квадрате, т. е.  $\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega < \infty$ .

Только при этом условии числитель  $|\ln K(\omega)|$  растет с увеличением  $\omega$  медленнее, чем знаменатель  $1+\omega^2$ , и условие (13.16) выполняется. Например, передаточная функция  $K(\omega) = K_0 e^{-\alpha \omega}, \omega > 0 > 0$ , реализуема, так как  $|\ln K_0(\omega)| = |\ln K_0 - \alpha \omega|$  растет медленнее, чем  $1+\omega^2$ . Гауссовский фильтр с передаточной функцией  $K(\omega) = K_0 e^{-\alpha \omega^2}$  не реализуется, так как  $|\ln K(\omega)| = |\ln K_0 - \alpha \omega^2|$  растет с увеличением  $\omega$  с такой же скоростью, что и знаменатель  $1+\omega^2$ .

Так как в рассматриваемой задаче синтеза согласованного фильтра задано равенство  $K(\omega)=AS(\omega)$ , то условие (13.16) можно записать в виде

приведенные И все ограничения  $K(\omega)$  $\frac{|\ln S(\omega)|}{1+\omega^2}\,d\omega<\infty$ выше на можно распространить на модуль спектральной плотности сигнала  $S(\omega)$ .  $s_{\rm BMX}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{K}(i\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} d\omega.$ формы Для определения сигнала на выходе используем общее выражение →

Подставив в него соотношение (13.8), получим:

$$s_{\rm BMX}(t) = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{S}^*(\omega) e^{-i\omega t_0} e^{i\omega t} d\omega = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}^2(\omega) e^{-i\omega(t-t_0)} d\omega. \quad (13.17)$$

Интеграл в правой части выражения (13.17) есть не что иное, как корреляционная функция входного сигнала  $B_s(\tau)$ , в которой аргумент  $\tau$  заменен на *t*-*t*<sub>0</sub>. Таким образом, приходим к важному выводу, что

$$s_{\rm Bbix}(t) = AB_s(t - t_0)$$
 (13.18) <sub>II COOTBETCTB-HO</sub>  $s_{\rm Bbix}(t_0 + \tau) = AB_s(\tau)$ . (13.19)

Итак, сигнал на выходе согласованного фильтра с точностью до постоянного коэффициента *A* совпадает с корреляционной функцией входного сигнала.

Пиковое значение сигнала  $\rightarrow$   $s_{\rm BMX}(t_0) = AB_s(0) = A\Im$ . (13.20)

Спектр шума на выходе  $W_{_{Gblx}}(\omega) = K^2(\omega)W_0$ . Следовательно, корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра:

$$R_{\rm BMX}(\tau) = A^2 W_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = A^2 W_0 B_s(\tau).$$
(13.22)

Отсюда следует, что корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с корреляционной функцией входного сигнала (и, следовательно, с самим выходным сигналом).

Приравнивая  $\tau = 0$ , находим дисперсию (среднюю мощность) шума на выходе  $\sigma_{\text{вых}}^2 = R_{\text{вых}}(0) = A^2 W_0 B_s(0) = A^2 W_0 \partial$ . (13.23)

Составим отношение пикового значения сигнала  $s_{6blx}(t)$  к среднеквадратическому значению шума  $\sigma_{6blx}$ :  $s_{6blx}(t_0)/\sigma_{6blx} = (\Im/W_0)^{1/2}$ .

Энергия входного сигнала  $\Im = Bs(0)$ , а выходного

$$\vartheta_{\rm BMX} = \int_{-\infty}^{\infty} 2s_{\rm BMX}(t) dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau) d\tau.$$
(13.24)

Приравнивая Э<sub>вых</sub> величине Э, получаем условие нормирования коэффициента А:

$$A = \left[ B_{s}(0) / \int_{-\infty}^{\infty} B_{s}^{2}(\tau) d\tau \right]^{1/2}.$$
 (13.25)

Подставив этот результат в (13.20), находим пик сжатого сигнала:

$$s_{\rm BMX}(t_0) = AB_s(0) = [B_s(0)]^{3/2} / \left[\int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau) d\tau\right]^{1/2}.$$
 (13.26)

Таким образом, пик сжатого сигнала (в отсутствие усиления) выражен через корреляционную функцию исходного сигнала *s*(*t*).

#### 49. Синтез согласованного фильтра для прямоугольного видеоимпульса.

Зададим сигнал следующей функцией времени:

$$s(t) = \begin{cases} E & \text{при } 0 \leq t \leq T_c, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T_c. \end{cases}$$
(13.27)

Спектральная плотность такого сигнала:

$$\mathbf{S}(\omega) = E \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega T_c}), \ \mathbf{S}(\omega) = \frac{2 |\sin \omega T_c/2|}{\omega}.$$
(13.28)

По формуле

$$\mathbf{K}(i\omega) = K(\omega)\mathbf{e}^{i\varphi_k(\omega)} = A\mathbf{S}^*(\omega)\mathbf{e}^{-i\omega t_0} = AS(\omega)\mathbf{e}^{-i[\theta_s(\omega) + \omega t_0]}.$$
 (13.8)

в которой  $t_0$  приравниваем длительности импульса  $T_c$ , находим передаточную функцию согласованного фильтра:

$$\mathbf{K}(i\omega) = EA \frac{1}{(-i\omega)} (1 - e^{i\omega T_c}) e^{-i\omega T_c} = EA \frac{1 - e^{-i\omega T_c}}{i\omega}.$$
(13.29)

Рассматриваемый пример характерен тем, что  $K(i\omega)$  отличается от спектра сигнала  $S(\omega)$  лишь постоянным коэффициентом. Ясно, что и импульсная характеристика фильтра g(t) совпадает по форме с самим сигналом s(t); действительно, из соотношения (13.15) получим (13.30):

$$g(t) = As(t_0 - t),$$
 (13.15)

$$g(t) = As(T_{c} - t) = \begin{cases} AE & \text{при } 0 \le t \le T_{c}, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T_{c}. \end{cases}$$
(13.30)



 $\leftarrow$  ИХ фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом. График g(t)/A по форме полностью совпадает с входным импульсом s(t).

Дальнейшая задача сводится к отысканию структуры физической цепи, обладающей импульсной характеристикой, изображенной на рис., и передаточной функцией, определяемой формулой (13.29).

Простейший сигнал (13.27) удобен для иллюстрации основных положений синтеза четырехполюсника по заданной импульсной характеристике  $g(t)=As(t_0-t)$  или, что то же, по комплексной передаточной функции  $K(i\omega)$ , являющейся преобразованием Фурье от g(t).

Прежде всего отметим, что интеграл

$$\int_{0}^{\infty} \frac{|\ln S(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega = \int_{0}^{\infty} \frac{|\ln |2 \sin (\omega T_c/2)| - \ln \omega|}{1+\omega^2} d\omega < \infty,$$

т.е. интеграл сходится, так что в рассматриваемом примере функция  $K(\omega) = AS(\omega)$  не противоречит критерию Пэли-Винера (13.16).

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\left|\ln K(\omega)\right|}{1+\omega^{2}} d\omega < \infty$$
(13.16)



← Структурная схема фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом. Показанную схему фильтра можно наметить непосредственно по передаточной функции (13.29).

Входящий в эту функцию множитель  $1/(i\omega)$  реализуется интегрирующим звеном, а второй множитель  $(1 - e^{-i\omega T_c})$  - устройством вычитания, к которому сигнал попадает без задержки и с

задержкой  $T_c$ . Передаточная функция идеальной линии задержки (без потерь) равна  $e^{-i\omega T_c}$ .

Объяснить работу этой схемы можно также на основании временных представлений. При подаче на вход единичного импульса ЭДС [дельта-функции  $\delta(t)$ ] на выходе идеального интегратора появляется скачок напряжения в момент t=0. На выходе устройства получается

напряжение в виде разности двух единичных скачков, сдвинутых относительно друг друга на время  $T_c$  (рис. *a*).



Реализация изображенного на рис. устройства, которое обеспечивало бы точное интегрирование, а также задержку входного сигнала без искажения его формы (в пределах бесконечно широкого спектра единичного импульса), практически неосуществима. Можно, однако, получить достаточно хорошее приближение при использовании реальной интегрирующей RC-цепи, если обеспечить постоянную времени этой цепи, достаточно большую по сравнению с Т<sub>с</sub>. При этом на выходе вычитающего устройства импульс напряжения, являющийся разностью двух экспонент (рис. б), может быть реализован достаточно близким к прямоугольному. Найдем напряжение на выходе фильтра. Применяя:

$$s_{\rm BMX}(t) = AB_s(t-t_0)$$

и учитывая, что корреляционная функция прямоугольного

Рис. 13.8. Формирование импульсной характеристики в идеальном (*a*) и физическом (б) фильтрах

a) импульса имеет вид равнобедренного треуг. с основанием 
$$2T_c$$
 и высотой, равной энергии импульса  $E^2T_c$ , получаем:  
 $AE^2t$  при  $0 \le t \le T_c$ ,

(13.31)

$$s_{\rm вых}(t) = AB_s(t - t_0) = \begin{cases} AE^{-t} & \text{при } 0 \le t \le T_c, \\ AE^2(2T_c - t) & \text{при } T_c \le t \le 2T_c. \end{cases}$$



 $\leftarrow$  Сигнал на выходе фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом. Максимальное значение выходного сигнала, равное  $AE^2T_c$ , достигается в момент  $t=T_c$ , т.е. к концу действия входного сигнала.

Отношение сигнал/помеха в соответствии со след. выраж.:

$$s_{\rm BMX}(t_0)/\sigma_{\rm BMX} = \sqrt{\vartheta/W_0}$$
.

$s_{\rm BMX}(T_{\rm c})/\sigma_{\rm BMX} = E\sqrt{T_{\rm c}/W_0}.$ (13.32)
Определим теперь пик сжатого сигнала по формуле $\rightarrow$ $s_{\text{вых}}(t_0) = AB_s(0) = [B_s(0)]^{3/2} / \left[\int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau) d\tau\right]^{1/2}$
В данном примере B <sub>s</sub> (0)=E <sup>2</sup> T <sub>c</sub> , a $\int_{-T_c}^{T_c} B_s^2(\tau) d\tau = 2 \int_{0}^{T_c} B_s^2(\tau) d\tau = 2 \int_{0}^{T_c} E^4 \tau^2 d\tau = 2E^4 \frac{T_c^3}{3}.$
Следовательно, $s_{\text{вых}}(t_0) = \frac{[B_s(0)]^{3/2}}{\left[\int\limits_{-T_c}^{T_c} B_s^2(\tau) d\tau\right]^{1/2}} = \frac{(E^2 T_c)^{3/2}}{\sqrt{2/3}E^2 T_c^{3/2}} = \sqrt{3/2} E.$

Таким образом,  $s_{\rm sbix}(t_0)/E = \sqrt{3/2}$ .

Пик выходного сигнала намного превышает амплитуду входного при согласованной фильтрации сложных сигналов (с большой базой).

### 50. Частотный коэффициент передачи фильтра, согласованного с сигналом при «небелом» шуме.

Пусть на полностью известный сигнал s(t) линейно (аддитивно) накладывается шум с неравномерным энергетическим спектром  $W(\omega)$  (небелый шум). Требуется синтезировать фильтр, максимизирующий отношение сигнал-помеха. В отличие от ранее рассмотренных задач в данном случае передаточная функция должна быть согласована не только со спектром сигнала  $S(\omega)$ , но и с энергетическим спектром шума  $W(\omega)$ .

Наиболее простым способом отыскания требуемой передаточной функции *K(iω)* является приведение заданного шума к белому. Для выяснения сути этого способа рассмотрим вспомогательную структурную

схему, показанную на рис. На этой схеме  $K(i\omega)$  обозначает искомую передаточную функцию синтезируемого фильтра, а  $K_I(i\omega)$  и  $l/K_I(i\omega)$  являются передаточными функциями двух вспомогательных условных четырехполюсников, введение которых не оказывает никакого влияния на работу устройства, так как их результирующая передаточная функция равна единице.

Так как функцию К( $i\omega$ ) можно выбирать произвольно, то модуль этой функции зададим в виде

$$K_1(\omega) = \sqrt{W_0/W(\omega)}$$
,

где  $W_0$  — постоянная величина.

Тогда на выходе первого четырехполюсника будет действовать шум с равномерным энергетическим спектром

$$W_1(\omega) = W(\omega)[K_1(\omega)]^2 = W_0 = \text{const, т. е. белый шум}$$

Само собой разумеется, сигнал на выходе этого четырехполюсника отличается от входного сигнала, так как спектральная плотность

$$\mathbf{S}_1(\omega) = \mathbf{S}(\omega)\mathbf{K}_1(i\omega)$$

отличается от  $S(\omega)$ . Однако это обстоятельство несущественно; основной задачей является максимизация отношения сигнал/помеха на выходе всего устройства. Поэтому важно отношение энергии сигнала к энергетическому спектру шума, а форма сигнала при этом роли не играет.

Так как в рассматриваемом сечении схемы шум является белым, то для получения на выходе максимума отношения сигнал-помеха вся последующая часть устройства должна иметь передаточную функцию, отвечающую условию

$$\frac{1}{\mathbf{K}_{1}(i\omega)}\mathbf{K}(i\omega) = A\mathbf{S}_{1}^{*}(\omega)\mathbf{e}^{-i\omega t_{0}}.$$
(13.51)

Левая часть этого выражения является результирующей передаточной функцией четырехполюсника, обведенного на рис. штриховой линией, а правая часть — функцией, комплексно-сопряженной по отношению к спектру  $S_1(\omega)$  и дополненной множителем  $e^{i\omega t_0}$ .

Из выражения (13.51) получаем:

$$\mathbf{K}(i\omega) = \mathbf{AS}_{1}^{*}(\omega)\mathbf{K}_{1}(i\omega)\mathbf{e}^{-i\omega t_{0}}.$$
(13.52)

Но из (13.50) следует, что

$$\mathbf{S}_{1}^{*}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{S}^{*}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{K}_{1}^{*}(i\boldsymbol{\omega}).$$

Таким образом,

$$\mathbf{K}(i\omega) = \mathbf{AS}^{*}(\omega)\mathbf{K}_{1}^{*}(i\omega)\mathbf{K}_{1}(i\omega)\mathbf{e}^{-i\omega t_{0}} = \mathbf{AS}^{*}(\omega)[\mathbf{K}_{1}(\omega)]^{2}\mathbf{e}^{-i\omega t_{0}}.$$

Подставляя сюда соотношение (13.49), окончательно получаем



(13.50)

$$\mathbf{K}(i\omega) = AW_0 \frac{\mathbf{S}^*(\omega)}{W(\omega)} e^{-i\omega t_0} \,. \tag{13.53}$$

Нетрудно истолковать физический смысл этого соотношения. Как и в случае белого шума, для максимизации отношения сигнал-помеха в фильтре должна осуществляться компенсация начальных фаз спектра входного сигнала  $S(\omega)$ . Поэтому в правую часть (13.53) входит комплексно-сопряженная функция  $S^*(\omega)$ . Однако модуль передаточной функции должен быть, во-первых, пропорционален модулю  $S(\omega)$  (как и в случае белого шума), и, во-вторых, обратно пропорционален энергетическому спектру шума на входе фильтра. Тем самым обеспечивается подчеркивание тех компонентов спектра сигнала, при которых интенсивность шума меньше.

#### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Модуляция – процесс формирования ВЧ колебания, один из параметров которого изменяется по закону модулирующего сигнала.

Детектирование – процесс формирования сигнала, закон изменения которого повторяет закон изменения одного из параметров модулированного колебания.

Спектр сигнала – характеристика сигнала в частотной области. По существу *спектр* – совокупность гармонических составляющих, сумма которых образует сигнал.

Спектр необходимо знать, чтобы определить область частот, занимаемую сигналом. Для определения спектра необходимо:

1) Определить вид сигнала (периодический или непериодический (одиночный));

2) Если сигнал периодический, то для определения спектра используется рад Фурье;

3) Спектр непериодического сигнала определяется с помощью преобразования Фурье  $s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$ .

Примечание. Преобразование Фурье необходимо знать:

1) 
$$s(t) \leftrightarrow S(j\omega);$$
  
2)  $h(t) \leftrightarrow K(j\omega);$   
3)  $R(\tau) \leftrightarrow |S(j\omega)|^{2};$ 

4)  $R_x(\tau) \leftrightarrow W_x(\omega)$  (Теорема Винера-Хинчина)

<u>Теорема Котельникова</u>: Произвольный сигнал, спектр которого ограничен частотой  $f_m$ , полностью определяется своими дискретными значениями, взятыми через интервал времени  $\Delta t \leq 1/2 f_m$ .

Справедливость теоремы определяется справедливостью ряда Котельникова:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \omega_m (t - k\Delta t)}{\omega_m (t - k\Delta t)}$$

**Импульсная модуляция** – процесс формирования последовательности видеоимпульсов, один из параметров которой меняется по закону модулирующего сигнала.

АЧХ – зависимость коэффициента усиления от частоты.

Методы анализа линейных цепей:

1) Спектральный метод:

- полагаем, что на входе одиночный сигнал  $S_{ex}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{ex}(t) e^{-j\omega t} dt$ ;

- 
$$S_{_{Bblx}}(j\omega) = S_{_{ex}}(j\omega) \cdot K(j\omega);$$
  
-  $S_{_{Bblx}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{_{Bblx}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$ 

2) Временной метод:

- 
$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega;$$
  
-  $s_{\text{\tiny GBLX}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{\tiny GX}}(\tau) h(t-\tau) d\tau.$ 

Случайный процесс – процесс, который в фиксированные моменты времени становится случайными величинами.

Спектр случайного сигнала называется спектральной плотностью мощности  $W_x(\omega)$  [В<sup>2</sup>/Гц].

*Теорема Винера-Хинчина*: Спектральная плотность мощности икорреляционная функция случайного сигнала связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$W_{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$
 и  $R_{x}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{x}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$ .

Линейные преобразования сигналов. Определение параметров:

1) 
$$W_{y}(\omega) = W_{x}(\omega) |K(j\omega)|;$$
  
2)  $R_{y}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{y}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega;$   
3)  $D_{y} = R_{y}(0);$   
4)  $m_{y} = m_{x} \cdot K(0).$ 

Постановка задачи оптимальной фильтрации:

$$\begin{array}{c|c} \hline S_{\mathcal{E}X}(t) + X(t) \\ \hline W_X(\omega) = W_0 \end{array} \qquad K(j\omega) = ? \qquad \begin{array}{c|c} S_{\mathcal{E}\mathcal{W}X}(t) + Z(t) \\ \hline S_{\mathcal{E}\mathcal{W}X}(t_0)| \\ \hline \sigma_z \end{array} = \max$$

На вход линейного фильтра подается аддитивная смесь полезного сигнала  $s_{ex}(t)$  и шума x(t), т. е. смесь  $y(t)=s_{ex}(t)+x(t)$ . Полезный сигнал полностью известен — форма, параметры, положение на оси времени. Шум — это стационарный случайный процесс с известными статистическими характеристиками. Требуется синтезировать фильтр, обеспечивающий на выходе наибольшее отношение пикового значения сигнала к среднеквадратичному значению шума (см. рис.). Поставленную задачу вначале решим при условии, что x(t) — это реализация белого шума, т. е.  $W_x(\omega)=W_0$ .

$$K(j\omega) = AS_{ex}^*(j\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

Фильтр называется согласованным, т.к. его частотный коэффициент передачи пропорционален спектральной плотности входного сигнала.