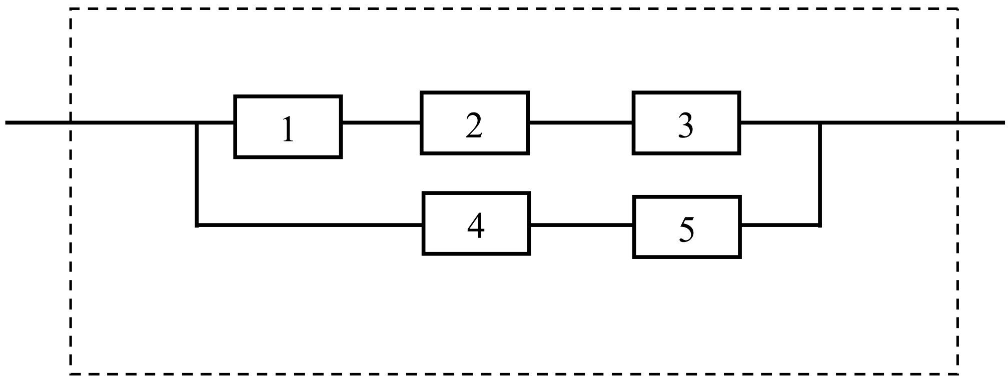
Задача 2.25

На рисунке 2.1 приведена схема соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вероятности отказа элементов 1, 2, 3, 4, 5 соответственно равны $q_1=0.1$; $q_2=0.2$; $q_3=0.3$; $q_4=0.4$; $q_5=0.5$. Найти вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход.



Участок 1

Рисунок 2.1 – Схема соединения элементов

Решение

Пусть событие C – сигнал проходит через всю цепь, событие B_i – через i-й участок, A_j – исправная работа j-го элемента.

Рассмотрим первый участок цепи.

Элементы 1, 2 и 3 соединены последовательно. При таком виде соединения сигнал должен проходить через оба элемента одновременно, т.е.

$B_{1в} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

При этом вероятность прохождения сигнала через верхнюю ветвь участка 1 равна

$p(B_{1в}) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = p_1 p_2 p_3$.

Аналогично для нижней ветви

$p(B_{1н}) = p(A_4) \cdot p(A_5) = p_4 p_5$.

Через участок 1 сигнал не проходит (событие $\overline{B_1}$), если одновременно отказали верхняя и нижняя ветви.

Так как элементы работают независимо друг от друга, то вероятность непрохождения сигнала через участок 1 равна

$p(\overline{B_1}) = p(\overline{B_{1в}}) \cdot p(\overline{B_{1н}}) = (1 - p_1 p_2 p_3)(1 - p_4 p_5)$, а вероятность прохождения

$p(B_1) = 1 - p(\overline{B_1}) = 1 - (1 - p_1 p_2 p_3)(1 - p_4 p_5)$.

Вероятность прохождения сигнала равна

$p(C) = p(B_1) = 1 - (1 - p_1 p_2 p_3)(1 - p_4 p_5)$.

Значения безотказной работы элементов рассчитываются

$p_i = 1 - q_i$.

Подставляя значения, получим

$p(C) = 1 - (1 - p_1 p_2 p_3)(1 - p_4 p_5) = 1 - (1 - 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7)(1 - 0.6 \cdot 0.5) = 0.653$.

Ответ: $p = 0.653$.

Задача 3.21

Прибор состоит из трех блоков. Исправность каждого блока необходима для функционирования устройства. Отказы блоков независимы. Вероятности безотказной работы блоков соответственно равны 0.6; 0.7; 0.8.

В результате испытаний два блока вышли из строя. Определить вероятность того, что отказали первый и второй блоки.

Решение

Вероятности безотказной работы блоков равны

$p_1 = 0.6; \quad p_2 = 0.7; \quad p_3 = 0.8.$

Вероятности отказов блоков равны

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.6 = 0.4;$

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0.7 = 0.3;$

$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0.8 = 0.2.$

Сформулируем событие А – прибор отказал вследствие выходя из строя двух блоков.

Это событие может произойти при таких гипотезах:

H_1 – отказали первый и второй блоки;

H_2 – отказали первый и третий блоки;

H_3 – отказали второй и третий блоки.

Вероятности этих гипотез равны

$p(H_1) = q_1 q_2 p_3 = 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.0960,$

$p(H_2) = q_1 p_2 q_3 = 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 = 0.0560,$

$p(H_3) = p_1 q_2 q_3 = 0.6 \cdot 0.3 \cdot 9.2 = 0.0360.$

Определим вероятность наступления события А при гипотезах H_1, H_2, H_3

$p(A / H_1) = p(A / H_2) = p(A / H_3) = 1.$

Необходимо определить вероятность гипотезы H_1 при условии наступления события А, поэтому запишем формулу Байеса для первой гипотезы:

$$p(H_1 / A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A / H_1)}{\sum_{i=1}^{3} \left[p(H_i) \cdot p(A / H_i) \right]} = \frac{p(H_1)}{\sum_{i=1}^{3} \left[p(H_i) \right]} = \frac{0.0960}{0.0960 + 0.0560 + 0.0360} = 0.511.$$

Ответ: 0.511.

Задача 4.37

Вероятность того, что данный баскетболист забросит мяч в корзину, равна 0,5. Произведено 10 бросков. Найти вероятность того, что будет не менее 8 попаданий.

Решение

Для события C (заброс мяча в корзину) можем записать

$p = p(C) = 0.5, \quad q = 1 - p = 1 - 0.5 = 0.5.$

Так как события C независимы, будем использовать формулу Бернулли:

$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$, где

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ - количество сочетаний n по m.

Вероятность того, что событие C произойдет не менее 8 раз, равна

$$P(m \geq 8) = P_{8,10} + P_{9,10} + P_{10,10} = C_{10}^8 p^8 q^2 + C_{10}^9 p^9 q^1 + C_{10}^{10} p^{10} q^0 =$$

$$= 45 \cdot 0.5^8 \cdot 0.5^2 + 10 \cdot 0.5^9 \cdot 0.5^1 + 1 \cdot 0.5^{10} \cdot 0.5^0 = 0.0439 + 0.098 + 0.0010 = 0.0547.$$

Ответ: $P = 0.547.$

Задача 5.27

Дискретная случайная величина X может принимать одно из пяти фиксированных значений x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 соответственно (конкретные значения приведены в таб. 5.1). Найти p отмеченные *. Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины X. Рассчитать и построить график функции распределения.

Таблица 5.1 – Исходные данные

Вариант	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
5.27	2	4	6	8	10	0.2	0.3	0.05	0.25	0.2

Решение

Математическое ожидание дискретной случайной величины (СВ) определяется как сумма произведений всех её возможных значений на их вероятности:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 2\cdot 0.2 + 4\cdot 0.3 + 6\cdot 0.05 + 8\cdot 0.25 + 10\cdot 0.2 = 5.9.$$

Дисперсией СВ называют математическое ожидание квадрата отклонения СВ от её математического ожидания. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом её математического ожидания:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2.$$

Рассчитаем математическое ожидание квадрата случайной величины

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i = 2^2\cdot 0.2 + 4^2\cdot 0.3 + 6^2\cdot 0.05 + 8^2\cdot 0.25 + 10^2\cdot 0.2 = 43.4.$$

Тогда дисперсия равна

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2 = 43.4 - 5.9^2 = 8.59.$$

Рассчитаем функцию распределения СВ X.

Если $X \le 2$, то $F(X)=0$, т.к. X не может принимать значение меньше 2.

В интервале $2 \le X < 4$ СВ X может принимать только одно значение $X=x_1=2$. Поэтому

при $2 \le X < 4$ $F(x)=p(-\infty < X < 4)=p_1=0.2$.

Аналогично находим F(x) для других интервалов:

при $4 \le X < 6$ $F(x)=p(-\infty < X < 6)=p_1+p_2=0.5$;

при $6 \le X < 8$ $F(x)=p(-\infty < X < 8)=p_1+p_2+p_3=0.55$;

при $8 \le X < 10$ $F(x)=p(-\infty < X < 10)=p_1+p_2+p_3+p_4=0.8$;

при $X \ge 10$ $F(x)=p(-\infty < X < \infty)=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$.

Запишем функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0.2, & 2 \le x \le 4 \\ 0.5, & 4 \le x \le 6 \\ 0.55, & 6 \le x \le 8 \\ 0.8, & 8 \le x \le 10 \\ 1, & 10 \le x \end{cases}$$

Построим график функции распределения (рис. 5.1).

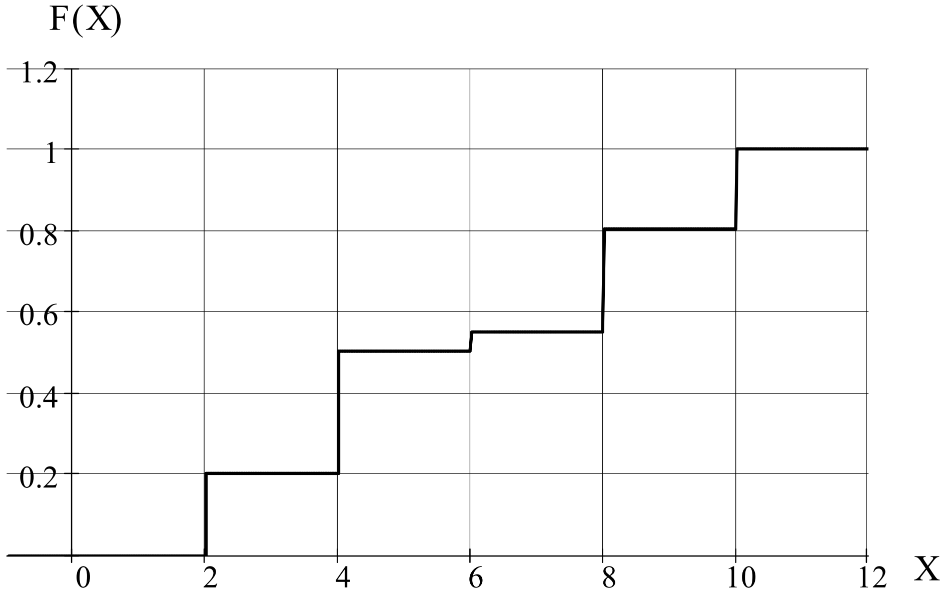


Рис. 5.1 – График функции распределения

Задача 7.28

Случайная величина X распределена равномерно на интервале $[-1;4]$. Построить график случайной величины $Y=\varphi(X)=\sqrt{|x|}$ и определить плотность вероятности g(y).

Решение

1. Построим график величины $Y=\varphi(X)=\sqrt{|x|}$ для *x* в интервале $[-1;4]$ (рисунок 7.1).

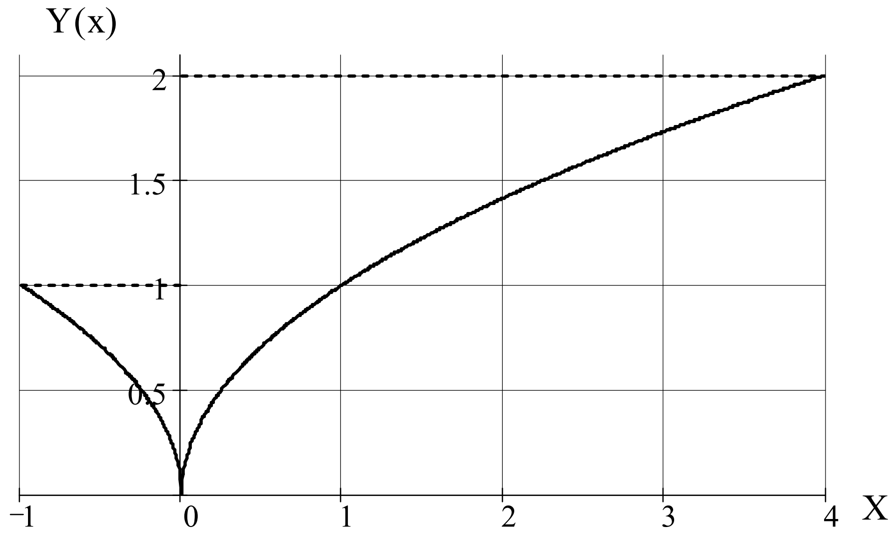


Рисунок 7.1 – график величины $Y=\varphi(X)$

Из графика на рисунке 1 определим диапазон значений Y: $Y \in [0;2]$.

2. В зависимости от числа k обратных функций выделим следующие интервалы для Y:

$x \in (-\infty;-1)$ $\qquad k_1 = 0,$

$x \in [-1;1]$ $\qquad k_3 = 2,$

$x \in (1;4]$ $\qquad k_2 = 1,$

$x \in (16;+\infty)$ $\qquad k_4 = 0.$

3. На интервалах $(-\infty;-1)$ и $(4;+\infty)$обратных функций не существует. В интервале $[-1;1]$ две обратные функции:

$\psi_1(y) = -y^2, \quad \psi_2(y) = y^2.$

Вычислим модули производных обратных функций $|\psi_j'(y)|$:

$|\psi_1'(y)| = |\psi_2'(y)| = 2y\ .$

В интервале $(1;4]$ одна обратная функция $\psi_1(y) = y^2$, следовательно, $\left|\psi_1'(y)\right| = 2y.$

4. Так как X равномерно распределена в интервале $[-1;4]$, то ее плотность вероятности равна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & x \in [-1;4], \\ 0, & x \notin [-1;4]. \end{cases}$$

Теперь получим плотность вероятности величины *Y*

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ f\left(-y^2\right) \cdot 2y + f\left(y^2\right) \cdot 2y, & 0 \le y \le 1, \\ f\left(y^2\right) \cdot 2y, & 1 < y \le 2, \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

После преобразования получаем

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{4y}{5}, & 0 \le y \le 1, \\ \frac{2y}{5}, & 1 < y \le 2, \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория вероятностей и математическая статистика: Метод. указания по типовому расчету./ сост. : А. И. Волковец [и др.] – Минск : БГУИР, 2009. – 65 с. с ил.
2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров – М. : Наука, 1988. – 416 с.
3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.пособие/ Е. С. Вентцель. – 5-е изд., стереотип. – М. : Высш. шк., 1999. – 576 с.
4. Герасимович, А. И. Математическая статистика/ А. И. Герасимович. – Минск:Выш. шк., 1983. – 279 с.
5. Жевняк, Р. М. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.пособие студ. инж.-экон. спец. / Р. М. Жевняк, А.А. Карпук, В. Т. Унукович:– Минск: Харвест, 2000. – 384 с.
6. Волковец, А. И. «Теория вероятностей и математическая статистика» практикум для студ. всех спец. очной формы обуч. БГУИР/ А. И. Волковец, А. Б. Гуринович – Минск: БГУИР, 2003. – 68 с.: ил.
7. Волковец, А. И. «Теория вероятностей и математическая статистика» конспект лекций для студ. всех спец. очной формы обуч. БГУИР/ А. И. Волковец, А. Б. Гуринович – Минск: БГУИР, 2003. – 82 с.: ил.
8. Теория вероятностей и математическая статистика: Сб. задач по типовому расчету./ сост. : А. В. Аксенчик [и др.] – Минск : БГУИР, 2007. – 84 с.