**Задача №1.9**

Телефонный номер состоит из шести цифр, каждая из которых равновозможно принимает значения от 0 до 9. Найти вероятность того, что все цифры одинаковы.

Решение

Число всех возможных комбинаций номера телефона равно , где - количество цифр в номере. Комбинации номеров телефонов с одинаковыми цифрами 000000, 111111, 222222, 333333, 444444, 555555, 666666, 777777, 888888, 999999. Следовательно, число номеров с одинаковыми цифрами . Вероятность того, что все цифры одинаковы:



**Ответ:** 

**Задача № 2.23**

Дана схема соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом (рисунок 2). Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вероятности отказа элементов 1, 2, 3, 4, 5 соответственно равны q1=0,1; q2=0,2; q3=0,3; q4=0,4; q5=0,5. Найти вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход.

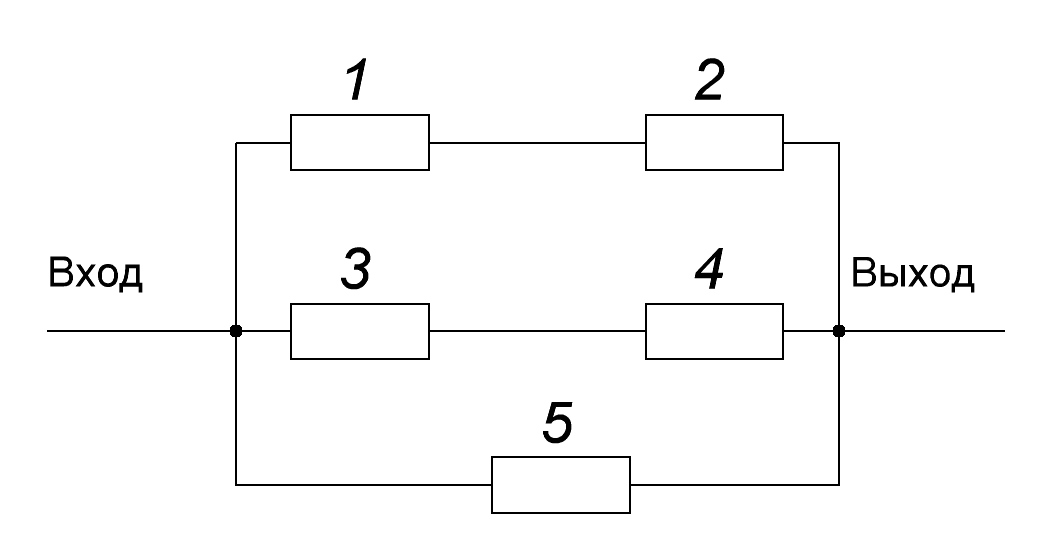


Рисунок 1

Решение

Сигнал не пройдёт со входа на выход, если одновременно откажут все ветви схемы. 1-ая ветвь содержит элементы 1 и 2, 2-ая – 3 и 4, 3-яя – 5 (рисунок 1). Вероятность отказа для 1-ой ветви:



Вероятность отказа для 2-ой ветви:



Используя теорему сложения для  произвольных событий, найдём вероятность того, что сигнал пройдет со входа на выход:



**Ответ:** 

**Задача №3.8**

На наблюдательный пункт станции установлены четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,86 , второго - 0,90 , третьего - 0,92 , четвертого - 0,95. Наблюдатель наугад включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

Решение

Вероятность включения наблюдателем каждого из локаторов одинакова:



Обозначим через А событие – включенный наблюдателем радиолокатор обнаружил цель. Сделаем следующие предположения:

- цель обнаружил 1-ый радиолокатор:



- цель обнаружил 2-ой радиолокатор:



- цель обнаружил 3-ий радиолокатор:



- цель обнаружил 4-ый радиолокатор:



Событие  достоверно при всех вышеперечисленных гипотезах, следовательно соответствующие условные вероятности равны единице:



По формуле полной вероятности, вероятность того, что один из включенных радиолокаторов обнаружит цель:





**Ответ:** 

**Задача №4.23**

Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,4. По мишени производится шесть независимых выстрелов. Найти вероятность того, что будет хотя бы одно попадание в мишень.

Решение

Событие  - попадание в мишень.

Вероятность того, что из 6 выстрелов по мишени один оказался удачным (событие А произойдёт 1 раз в последовательности из 6 опытов) определим по формуле Бернулли :



**Ответ:** 

**Задача № 5.30**

Дискретная случайная величина Х может принимать одно из пяти фиксированных значений x1, x2, x3, x4, x5 с вероятностями p1, p2, p3, p4, p5 соответственно. Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины Х. Рассчитать и построить график функции распределения.

Таблица 1 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 6 | 7 | 9 | 12 |
|  | 0,05 | 0,15 | 0,2 | 0,4 | 0,2 |

Решение

1. Математическое ожидание и дисперсию величины Х:







1. Построим ряд распределения СВ X:

Таблица 2 –Ряд распределения СВ X

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 5 | 6 | 7 | 9 | 12 | >12 |
|  | 0,05 | 0,15 | 0,2 | 0,4 | 0,2 | 0 |
|  | 0,00 | 0,05 | 0,20 | 0,40 | 0,80 | 1,00 |

Построим график функции распределения (рисунок 2):

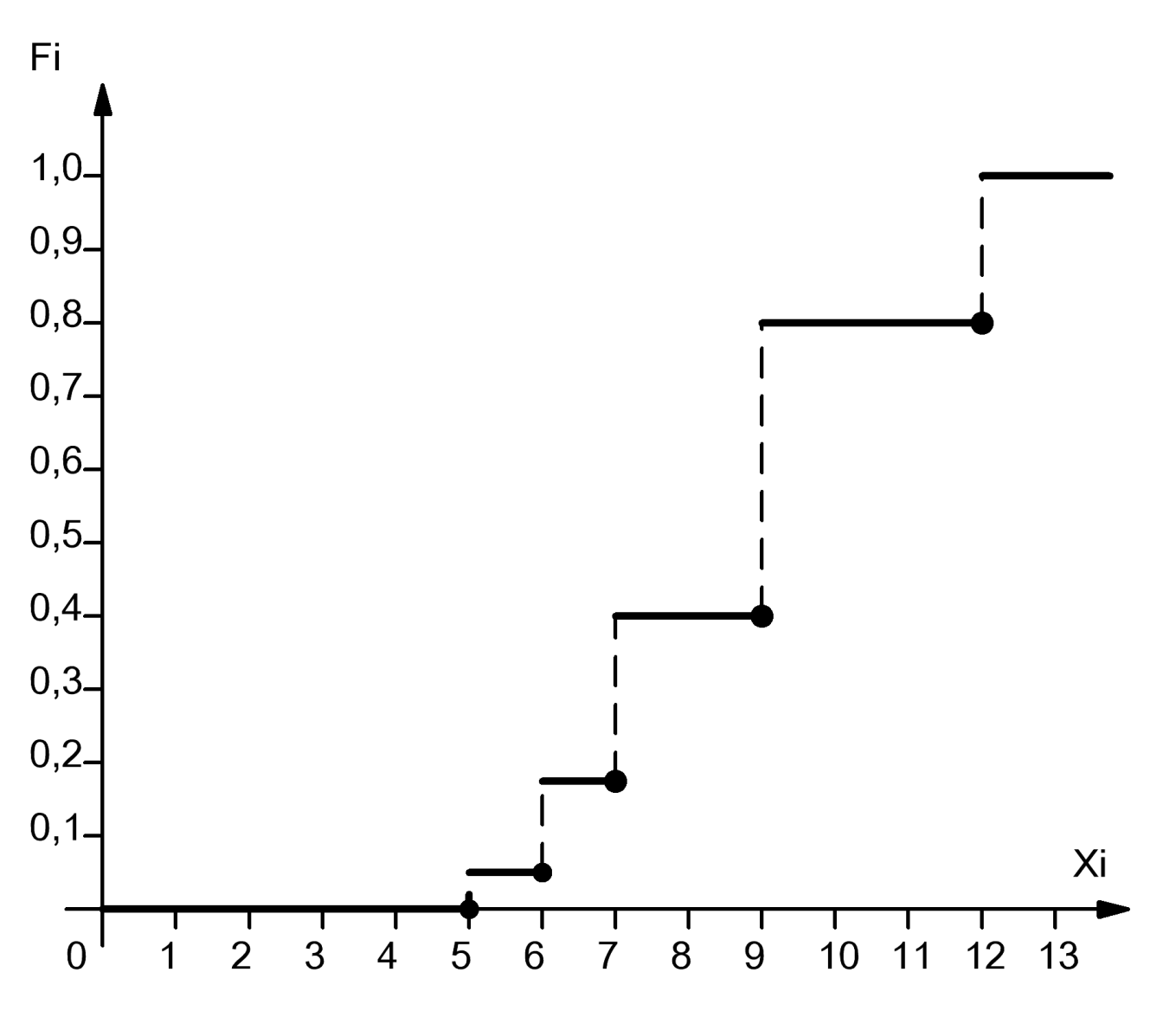


Рисунок 2 - график функции распределения F(x­i)

**Задача № 6.13**

Случайная величина *Х* задана плотностью вероятности:



Определить константу *С*, математическое ожидание, дисперсию, функцию распределения величины Х, а также вероятность ее попадания в интервал.



Решение

1. Вычислим константу исходя из условия нормировки:



Отсюда константа :



1. Определим математическое ожидание СВ *Х:*



Определим дисперсию СВ *Х*:







1. Определим функцию распределения величины Х:









1. Определим вероятность попадания величины Х в заданный интервал :



**Ответ:**



**Задача № 7.24**

Случайная величина *Х* распределена равномерно на интервале [*a,b*]. Построить график случайной величины *Y=ϕ(X)* и определить плотность вероятности *g(y).*



Решение

1. Построим график случайной величины  для в интервале значений и определим диапазон значений  (Рисунок 3): .



1. В зависимости от числа обратных функций выделим следующие интервалы для :

обратных функций не существует





 обратных функций не существует

1. Вычислим модули производных обратных функций:



**Y**

**X**

Рисунок 3 – график функции 

Так как случайная величина *Х* распределена равномерно на интервале , то её плотность вероятности равна:



1. Определим плотность вероятности величины :



**Задача № 8.14**

Двухмерный случайный вектор (*Х, У*) равномерно распределен внутри выделенной жирными прямыми линиями на рисунок 4 области B. Двухмерная плотность вероятности *f(x,y)* одинакова для любой точки этой области B:

Вычислить коэффициент корреляции между величинами X и Y.

Таблица 3 – Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | x6 | y1 | y2 |
| 8.14 | 0 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 | 1 | 2 |



Рисунок 4

Решение

1. Построим область *B* согласно координатам из таблицы 3 и рисунку 4.

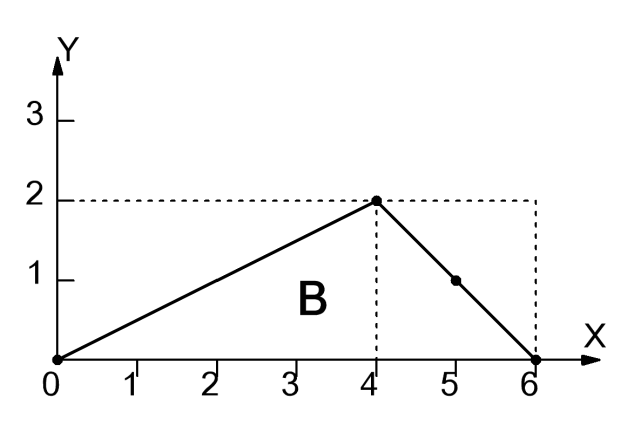


Рисунок 5

Совместная плотность вероятности примет вид:



1. Найдём константу  из условия нормировки:





Таким образом:



Проверим полученный результат геометрически. Объём тела, ограниченного поверхностью распределения В и плоскостью xOy равен 1, т.е:



Следовательно, константа  рассчитана верно.

1. Вычислим математические ожидания:









1. Вычислим дисперсии:











1. Вычислим корреляционный момент:







1. Вычислим коэффициент корреляции между величинами X и Y:



**Ответ:** 

**Задача № 9**

По выборке одномерной случайной величины:

- получить вариационный ряд;

- построить график эмпирической функции распределения *F\*(x)*;

- построить гистограмму равноинтервальным способом;

- построить гистограмму равновероятностным способом;

- вычислить точечные оценки математического ожидания и дисперсии;

- вычислить интервальные оценки математического ожидания и дисперсии (γ = 0,95);

- выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины и проверить ее при помощи критерия согласия *χ2*  и критерия Колмогорова (*α* = 0,05).

Одномерная выборка:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0,91 | 2,06 | 3,75 | 2,09 | 0,24 | -0,3 | 0,87 | 2,06 | 1,46 | 1,7 | 5,12 | 0,75 | 3,31 | 2,75 | 4,22 |
| 4,17 | 4,71 | 1,5 | 3,56 | 7,59 | 3,56 | 1,95 | 4,57 | 1,97 | 1,3 | 5,55 | 1,23 | 4,15 | 2,84 | 1,84 |
| 2,56 | 2,68 | 3,57 | 4,71 | 5,52 | 4,52 | 5,57 | 2,7 | 2,88 | 1,22 | 1,72 | 1,78 | 1,18 | 1,88 | -0,2 |
| 2,19 | 0,57 | 2,64 | 3,84 | 0,73 | 5,62 | 3,92 | 5,7 | 3,4 | 6,39 | 1 | 6,91 | 2,07 | 1,84 | 1,58 |
| 3,83 | 3,83 | 1,11 | 4,47 | -0,9 | 3,95 | 6,76 | 2,78 | 1,25 | 3,99 | 3,57 | 4,36 | -0,2 | 2,27 | 3,52 |
| 4,03 | 3,81 | 1,73 | 4,81 | 3,58 | -1,2 | 1,25 | 1,1 | 3,07 | 2,84 | 3,18 | 5,1 | 4,18 | 3,42 | 3,63 |
| 3,37 | 2,36 | 3,55 | 1,95 | 2,43 | 1,29 | 2,61 | 2,11 | 3,3 | 1,72 |  |  |  |  |  |

Размер выборки 

Решение

1. Получим вариационный ряд из исходного:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| -1,2 | -0,9 | -0,3 | -0,2 | -0,2 | 0,24 | 0,57 | 0,73 | 0,75 | 0,87 | 0,91 | 1 | 1,1 | 1,11 | 1,18 |
| 1,22 | 1,23 | 1,25 | 1,25 | 1,29 | 1,3 | 1,46 | 1,5 | 1,58 | 1,7 | 1,72 | 1,72 | 1,73 | 1,78 | 1,84 |
| 1,84 | 1,88 | 1,95 | 1,95 | 1,97 | 2,06 | 2,06 | 2,07 | 2,09 | 2,11 | 2,19 | 2,27 | 2,36 | 2,43 | 2,56 |
| 2,61 | 2,64 | 2,68 | 2,7 | 2,75 | 2,78 | 2,84 | 2,84 | 2,88 | 3,07 | 3,18 | 3,3 | 3,31 | 3,37 | 3,4 |
| 3,42 | 3,52 | 3,55 | 3,56 | 3,56 | 3,57 | 3,57 | 3,58 | 3,63 | 3,75 | 3,81 | 3,83 | 3,83 | 3,84 | 3,92 |
| 3,95 | 3,99 | 4,03 | 4,15 | 4,17 | 4,18 | 4,22 | 4,36 | 4,47 | 4,52 | 4,57 | 4,71 | 4,71 | 4,81 | 5,1 |
| 5,12 | 5,52 | 5,55 | 5,57 | 5,62 | 5,7 | 6,39 | 6,76 | 6,91 | 7,59 |  |  |  |  |  |

2) Построим график эмпирической функции непосредственно по вариационному ряду, так как *F\*(x)* – неубывающая и практически все ступеньки графика имеют одинаковую величину  (Рисунок 6).

1. Построим гистограмму равноинтервальным способом (рисунок 7).

Для построения гистограммы составим интервальный статистический ряд, учитывая что длина у всех интервалов должна быть одинаковая.

 - количество интервалов;

 - ширина интервала;

- частота попадания СВ X в j-ый интервал;

 - статистическая плотность в j-ом интервале.

Таблица 4 – Интервальный статистический ряд

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | Aj | Bj | hj | vj | pj\* | fj\* |
| 1 | -1,17 | -0,294 | 0,876 | 2 | 0,02 | 0,023 |
| 2 | -0,294 | 0,582 | 0,876 | 5 | 0,05 | 0,057 |
| 3 | 0,582 | 1,458 | 0,876 | 14 | 0,14 | 0,160 |
| 4 | 1,458 | 2,334 | 0,876 | 21 | 0,21 | 0,240 |
| 5 | 2,334 | 3,21 | 0,876 | 14 | 0,14 | 0,160 |
| 6 | 3,21 | 4,086 | 0,876 | 22 | 0,22 | 0,251 |
| 7 | 4,086 | 4,962 | 0,876 | 11 | 0,11 | 0,126 |
| 8 | 4,962 | 5,838 | 0,876 | 7 | 0,07 | 0,080 |
| 9 | 5,838 | 6,714 | 0,876 | 1 | 0,01 | 0,011 |
| 10 | 6,714 | 7,59 | 0,876 | 3 | 0,03 | 0,034 |

**f\*(x)**

**X**

Рисунок 7

1. Построим гистограмму равновероятностным способом (рисунок 8).

Для построения гистограммы составим интервальный статистический ряд, учитывая что частота попадания СВ X в в каждый j-ый интервал должна быть одинаковая (Таблица 5).

Таблица 5 – Интервальный статистический ряд

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | Aj | Bj | hj | vj | pj\* | fj\* |
| 1 | -1,17 | 0,89 | 2,06 | 10 | 0,1 | 0,049 |
| 2 | 0,89 | 1,295 | 0,405 | 10 | 0,1 | 0,247 |
| 3 | 1,295 | 1,84 | 0,545 | 10 | 0,1 | 0,183 |
| 4 | 1,84 | 2,15 | 0,31 | 10 | 0,1 | 0,323 |
| 5 | 2,15 | 2,765 | 0,615 | 10 | 0,1 | 0,163 |
| 6 | 2,765 | 3,41 | 0,645 | 10 | 0,1 | 0,155 |
| 7 | 3,41 | 3,78 | 0,37 | 10 | 0,1 | 0,270 |
| 8 | 3,78 | 4,175 | 0,395 | 10 | 0,1 | 0,253 |
| 9 | 4,175 | 5,11 | 0,935 | 10 | 0,1 | 0,107 |
| 10 | 5,11 | 7,59 | 2,48 | 10 | 0,1 | 0,040 |

**X**

**f\*(x)**

Рисунок 8

1. Вычислим точечные оценки математического ожидания и дисперсии:





1. Вычислим интервальные оценки математического ожидания и дисперсии (γ = 0,95):











1. По виду графика эмпирической функции распределения и гистограмм выдвигаем двухальтернативную гипотезу о законе распределения случайной величины X:

H0 – величина X распределена по нормальному закону



H1 – величина X не распределена по экспоненциальному закону



Определим оценки неизвестных параметров  и  гипотетического (нормального) закона распределения по формулам:



Таким образом получаем полностью определенную гипотетическую функцию распределения:



Проверим гипотезу о нормальном законе по критерию Пирсона . Вычислим значение критерия  на основе равноинтервального статистического ряда:



Теоретические вероятности попадания в интервалы вычислим по формуле:



Таблица 6 – Результаты расчётов

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 |  | -0,294 |  | -1,828 | 0,000 | 0,034 | 0,034 | 0,02 | 0,006 |
| 2 | -0,294 | 0,582 | -1,828 | -1,320 | 0,034 | 0,093 | 0,060 | 0,05 | 0,002 |
| 3 | 0,582 | 1,458 | -1,320 | -0,813 | 0,093 | 0,209 | 0,116 | 0,14 | 0,005 |
| 4 | 1,458 | 2,334 | -0,813 | -0,305 | 0,209 | 0,380 | 0,171 | 0,21 | 0,009 |
| 5 | 2,334 | 3,21 | -0,305 | 0,203 | 0,380 | 0,579 | 0,199 | 0,14 | 0,018 |
| 6 | 3,21 | 4,086 | 0,203 | 0,710 | 0,579 | 0,761 | 0,182 | 0,22 | 0,008 |
| 7 | 4,086 | 4,962 | 0,710 | 1,218 | 0,761 | 0,888 | 0,127 | 0,11 | 0,002 |
| 8 | 4,962 | 5,838 | 1,218 | 1,726 | 0,888 | 0,958 | 0,070 | 0,07 | 0,000 |
| 9 | 5,838 | 6,714 | 1,726 | 2,234 | 0,958 | 0,987 | 0,029 | 0,01 | 0,012 |
| 10 | 6,714 |  | 2,234 |  | 0,987 | 1,000 | 0,013 | 0,03 | 0,023 |
| Сумма: | | | | | | | 1,0 | 1,0 | 0,084 |

Проверим правильность вычислений :



Вычислим критерий Пирсона:



Определим число степеней свободы:



Выбираем критическое значения критерия Пирсона из таблицы [1, стр.63] для степени свободы и заданного уровня значимости :



Так как условие выполняется, то гипотеза H0 о нормальном законе распределения принимается (нет оснований ее отклонить).

8) Проверим гипотезу при помощи критерия Колмогорова. Для этого построим график гипотетической функции распределения в одной системе координат с эмпирической функцией (рисунок 6). В качестве опорных точек используем 10 значений из таблицы 6. По графику определим максимальное по модулю отклонение между функциями и :



Вычислим значение критерия Колмогорова:



Из таблицы Колмогорова [1, стр. 64] по заданному уровню значимости выбираем критическое значение критерия:



Так как условие выполняется, гипотеза H­0 о нормальном законе распределения принимается (нет оснований ее отклонить).

**Задача №10**

По выборке двухмерной случайной величины:

- вычислить точечную оценку коэффициента корреляции;

- вычислить интервальную оценку коэффициента корреляции ;

- проверить гипотезу об отсутствии корреляционной зависимости ;

- вычислить оценки параметров *a0* и *a1* линии регрессии ;

- построить диаграмму рассеивания и линию регрессии.

Выборка:

( -1,63; 4,73) ( 3,97; 4,73) ( 1,17; 0,37) ( 6,25; -0,89) ( 6,85; 0,56) ( 2,32; -0,28) ( 0,95; 3,21) ( 1,64; 3,60)

( 1,86; 4,35) ( 2,41; 5,58) ( -3,18; 2,93) ( 1,35; 3,36) ( -0,23; 4,45) ( 8,63; 3,08) ( 4,85; 2,41) ( 6,38; 7,62)

( 0,23; 8,62) ( 1,63; -0,03) ( 6,98; 4,49) ( 4,20; 2,51) ( -2,13; 6,38) ( 3,04; 5,88) ( -0,82; 4,23) ( 1,77; 2,13)

( -2,37; 6,66) ( 2,41; 4,87) ( 2,54; 4,80) ( 6,58; 1,32) ( 0,54; 1,99) ( 3,63; 1,85) ( 1,96; 0,73) ( 2,48; 1,20)

( 0,39; -0,06) ( 4,06; 1,09) ( -3,36; 2,56) ( -0,04; 6,79) ( 1,83; 3,37) ( 5,01; 1,66) ( 2,72; -2,88) ( 5,34; -2,82)

( 3,11; 3,88) ( 8,21; 3,03) ( -1,21; 5,80) ( 3,28; 0,77) ( 1,36; 2,27) ( 3,78; 4,52) ( 0,65; 6,00) ( 0,58; 3,52)

( 1,02; 7,23) ( -3,01; 8,45)

Решение

Для удобства все промежуточные вычисления поместим в таблицу 7. Вычислим:

1. Оценки математических ожиданий по каждой переменной:



1. Оценки начальных моментов второго порядка по каждой переменной:



1. Оценку смешанного начального момента второго порядка:



1. Оценки дисперсий:



1. Оценку корреляционного момента:



Таблица 7 – Результаты промежуточных вычислений

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | x2 | y2 | x\*y |
| -1,63 | 4,73 | 2,6569 | 22,3729 | -7,7099 |
| 3,97 | 4,73 | 15,7609 | 22,3729 | 18,7781 |
| 1,17 | 0,37 | 1,3689 | 0,1369 | 0,4329 |
| 6,25 | -0,89 | 39,0625 | 0,7921 | -5,5625 |
| 6,85 | 0,56 | 46,9225 | 0,3136 | 3,836 |
| 2,32 | -0,28 | 5,3824 | 0,0784 | -0,6496 |
| 0,95 | 3,21 | 0,9025 | 10,3041 | 3,0495 |
| 1,64 | 3,60 | 2,6896 | 12,9600 | 5,904 |
| 1,86 | 4,35 | 3,4596 | 18,9225 | 8,091 |
| 2,41 | 5,58 | 5,8081 | 31,1364 | 13,4478 |
| -3,18 | 2,93 | 10,1124 | 8,5849 | -9,3174 |
| 1,35 | 3,36 | 1,8225 | 11,2896 | 4,536 |
| -0,23 | 4,45 | 0,0529 | 19,8025 | -1,0235 |
| 8,63 | 3,08 | 74,4769 | 9,4864 | 26,5804 |
| 4,85 | 2,41 | 23,5225 | 5,8081 | 11,6885 |
| 6,38 | 7,62 | 40,7044 | 58,0644 | 48,6156 |
| 0,23 | 8,62 | 0,0529 | 74,3044 | 1,9826 |
| 1,63 | -0,03 | 2,6569 | 0,0009 | -0,0489 |
| 6,98 | 4,49 | 48,7204 | 20,1601 | 31,3402 |
| 4,20 | 2,51 | 17,6400 | 6,3001 | 10,542 |
| -2,13 | 6,38 | 4,5369 | 40,7044 | -13,5894 |
| 3,04 | 5,88 | 9,2416 | 34,5744 | 17,8752 |
| -0,82 | 4,23 | 0,6724 | 17,8929 | -3,4686 |
| 1,77 | 2,13 | 3,1329 | 4,5369 | 3,7701 |
| -2,37 | 6,66 | 5,6169 | 44,3556 | -15,7842 |
| 2,41 | 4,87 | 5,8081 | 23,7169 | 11,7367 |
| 2,54 | 4,80 | 6,4516 | 23,0400 | 12,192 |
| 6,58 | 1,32 | 43,2964 | 1,7424 | 8,6856 |
| 0,54 | 1,99 | 0,2916 | 3,9601 | 1,0746 |
| 3,63 | 1,85 | 13,1769 | 3,4225 | 6,7155 |
| 1,96 | 0,73 | 3,8416 | 0,5329 | 1,4308 |
| 2,48 | 1,20 | 6,1504 | 1,4400 | 2,976 |
| 0,39 | -0,06 | 0,1521 | 0,0036 | -0,0234 |
| 4,06 | 1,09 | 16,4836 | 1,1881 | 4,4254 |
| -3,36 | 2,56 | 11,2896 | 6,5536 | -8,6016 |
| -0,04 | 6,79 | 0,0016 | 46,1041 | -0,2716 |
| 1,83 | 3,37 | 3,3489 | 11,3569 | 6,1671 |
| 5,01 | 1,66 | 25,1001 | 2,7556 | 8,3166 |
| 2,72 | -2,88 | 7,3984 | 8,2944 | -7,8336 |
| 5,34 | -2,82 | 28,5156 | 7,9524 | -15,0588 |
| 3,11 | 3,88 | 9,6721 | 15,0544 | 12,0668 |
| 8,21 | 3,03 | 67,4041 | 9,1809 | 24,8763 |
| -1,21 | 5,80 | 1,4641 | 33,6400 | -7,018 |
| 3,28 | 0,77 | 10,7584 | 0,5929 | 2,5256 |
| 1,36 | 2,27 | 1,8496 | 5,1529 | 3,0872 |
| 3,78 | 4,52 | 14,2884 | 20,4304 | 17,0856 |
| 0,65 | 6,00 | 0,4225 | 36,0000 | 3,9 |
| 0,58 | 3,52 | 0,3364 | 12,3904 | 2,0416 |
| 1,02 | 7,23 | 1,0404 | 52,2729 | 7,3746 |
| -3,01 | 8,45 | 9,0601 | 71,4025 | -25,4345 |

1. Точечную оценку коэффициента корреляции:



1. Вычислим интервальную оценку коэффициента корреляции с заданной надёжностью . По таблице функции Лапласа [1, стр. 61] :





Таким образом, доверительный интервал для коэффициента корреляции имеет вид:



1. Проверим гипотезу о корреляционной зависимости:



Так как объём выборки велик (n>50), то критерий вычислим по формуле:



По таблицы функции Лапласа .

Так как , то гипотеза  принимается, т.е. величины и  не коррелированны.

1. Вычислим оценки параметров линии регрессии:



Уравнение линии регрессии имеет вид:



Исходя из двухмерной выборки построим диаграмму рассеивания и линию регрессии  (рисунок 9).

Список литературы

1. А. И. Волковец, А. Б. Гуринович, А. В.Аксенчик. Теория вероятностей и математическая статистика: метод. указания по типовому расчету .– Минск БГУИР, 2009. – 65 с.: ил.
2. А. И. Волковец, А. Б. Гуринович. Теория вероятностей и математическая статистика: Конспект лекций для студ. всех спец. и форм обучения.– Минск БГУИР, 2003. – 84 л.